FUNGSI PHI EULER PADA GRUP *GAUSSIAN INTEGER*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu persyaratan memperoleh gelar

Sarjana Sains

Oleh

FEBRY REGINA MANIK

NIM. 18030012/2018

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2023

PERSETUJUAN SKRIPSI

FUNGSI PHI EULER PADA GRUP GAUSSIAN INTEGER

Nama	:	Febry Regina Manik
NIM	:	18030012
Program Studi	:	Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 13 Februari 2023

Disetujui oleh,

Pembimbing

Drs. Yusmet Rizal, M.Si

NIP. 19680121 199303 1 011

Scanned by TapScanner

PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Nama	: Febry Regina Manik
NIM	: 18030012
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FUNGSI PHI EULER PADA GRUP GAUSSIAN INTEGER

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi

Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Padang

Padang, 13 Februari 2023

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
Ketua	: Drs. Yusmet Rizal, M.Si	
Anggota	: Muhammad Subhan, S.Si, M.Si	
Anggota	: Defri Ahmad, S.Pd, M.Si	

Scanned by TapScanner

SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Febry Regina Manik
NIM	: 18030012
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan, bahwa skripsi saya dengan judul **"Fungsi Phi Euler pada Grup *Gaussian Integer*"** adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuanyang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Padang, 13 Februari 2023

Diketahui oleh,
Ketua Departemen Matematika,

Dra. Media Rosha, M.Si
NIP. 19620815 1997032 004

Saya yang menyatakan,

Febry Regina Manik
NIM. 18030012

Scanned by TapScanner

Fungsi Phi Euler pada Grup *Gaussian Integer*

Febry Regina Manik

ABSTRAK

Aljabar merupakan salah satu bidang kajian dalam matematika. Aljabar dapat didefinisikan sebagai ilmu matematika yang memanipulasi simbol dan relasi Salah satu contoh himpunan adalah himpunan bilangan bulat. Sifat yang berlaku pada bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan menginspirasikan suatu konsep struktur aljabar yaitu grup. Dalam teori bilangan terdapat banyak fungsi yang bekerja pada bilangan bulat. Salah satu fungsi tersebut adalah fungsi phi euler. Fungsi phi euler biasa ditulis sebagai $\varphi(m)$ dapat didefinisikan sebagai fungsi yang merepresentasikan banyaknya bilangan bulat yang kurang dari m yang relatif prima dengan m. Definisi lain dari fungsi phi euler dapat dimanfaatkan untuk mendefinisikan fungsi phi euler pada domain *gaussian integer* yaitu bilangan kompleks yang penyusun bagian real dan imajinernya merupakan bilangan bulat.

Penelitian ini dapat dikategorikan sebagai penelitian dasar. Oleh sebab itu metode yang digunakan untuk melakukan penelitian ini adalah dengan melakukan analisis pada kajian teori yang telah ada sebelumnya. Analisis teori dilakukan pada teori-teori matematika yang berkaitan dengan konsep pendefenisian fungsi phi euler pada grup *gaussian integer.*

Hasil yang diperoleh dari penelitian ini yakni menggunakan definisi fungsi phi euler sebagai jumlah *gaussian integer* yang invertibel modulo dengan $(a + bi)$. Fungsi phi euler pada *gaussian integer* dapat dihitung menggunakan fungsi norm karena pada *gaussian integer* merupakan subgrup dari grup bilangan kompleks dimana bilangan kompleks tidak memiliki sifat keterurutan seperti pada bilangan bulat. Fungsi norm didefenisikan sebagai $N(a + bi) = a^2 + b^2$. Fungsi norm berguna untuk memetakan *gaussian integer* ke bilangan bulat. Fungsi norm memudahkan pendefenisian fungsi phi euler pada *gaussian integer* yang merupakan subset dari bilangan kompleks. Fungsi norm juga memungkinkan kita untuk dapat menentukan *gaussian unit* dan *gaussian prime.* Fungsi phi euler pada *gaussian unit* bernilai 1. Untuk $(p_1 + p_2) \in \mathbb{Z}[i]$ yang merupakan *gaussian prime* fungsi $\varphi(p_1 + p_2) = N(p_1 + p_2) - 1$. Untuk *general gaussian integr* harus terlebih dahulu difaktorisasi dengan metode conrad kemudian fungsi phi euler bernilai $\forall(a + bi), p \in \mathbb{Z}[i], \quad \alpha \in \mathbb{Z} \quad dan \quad (a + bi) = \prod_{n=1}^{\infty} p_n^{\alpha_n}$ maka $\varphi(a + bi) = \prod_{n=1}^{\infty}(N(p_n) - 1)\big(N(p_n)\big)^{\alpha_n}$unit dan *gaussian prime.*

Kata Kunci: Phi Euler, Bilangan Bulat, *Gaussian Integer, Gaussian Prime, Norm*

Phi Euler Function in the Group of Gaussian Integer

Febry Regina Manik

ABSTRACT

Algebra is one of study field in mathematics. Algebra can be defines as mathematics knowledfe that manipulated symbol and relation. One of example of set is set of integer. Properties that applicable in addition operation of integer inspire a concept in abstract algebra i. e. group. In theory of number there are so many function that work in integer. One of the function is phi euler function. Phi euler function is written as $\varphi(m)$ can be defined as a function that representing number of integer less than m and relatively prime with m. Other definition of phi euler function can be utilized to define phi euler function in the gaussian integer domain i.e complex number that is former of its real part and imaginary part is integer.

This study can be categorized as a basic study. Therefore the method using to do this study is doing analysis on theory study that have been existed before. Theory analysis is done on mathematical theories that related with the concept of definition of phi euler function in the group of gaussian integer.

The results of this study is using the definition of phi euler function as a number of gaussian integer that invertible modulo with $(a + bi)$. Phi euler funvtion in gaussian integer can be count using norm function because in the gaussian integer that is subset of complex number there isn't exist well-ordering properties as in integer. Norm function is defined as $N(a + bi) = a^2 + b^2$. Norm function is helpful to mapping gaussian integer to integer. Norm function helpful to define the phi euler function in gaussian integer that subset of complex number. Norm function is possible for us to determine the unit and gaussian prime. Phi euker function for gaussian unit value is 1. For $(p_1 + p_2) \in \mathbb{Z}[i]$ the *gaussian prime* the function $\varphi(p_1 + p_2) = N(p_1 + p_2) - 1$. For *general gaussian integer* should be factorized first with Conrad Method then phi euler function value $\forall(a + bi), p \in \mathbb{Z}[i], \quad \alpha \in \mathbb{Z} \quad dan \quad (a + bi) = \prod_{n=1}^{\infty} p_n^{\alpha_n}$ maka $\varphi(a + bi) = \prod_{n=1}^{\infty}(N(p_n) - 1)\big(N(p_n)\big)^{\alpha_n}$

Keywords: Phi Euler, Integer, *Gaussian Integer, Gaussian Prime, Norm*

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Fungsi Phi Euler pada Grup Gaussian Integer".

Skripsi ini disusun guna memenuhi syarat memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang. Dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bantuan dan dukungan berupa dorongan semangat, nasihat bimbingan dan kerja sama dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan kali ini dengan segala kerendahan hati mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. Yusmet Rizal,M.Si sebagai Dosen Penasehat Akademik dan Dosen Pembimbing yang telah membimbing penulis menyusun skripsi ini.
2. Bapak Muhammad Subhan, S.Si, M.Si dan Bapak Defri Ahmad, S.Pd, M.Si sebagai dosen penguji yang telah memberikan masukan kepada penulis.
3. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si sebagai Ketua Departemen Matematika dan Ketua Program Studi Matematika Universitas Negeri Padang.
4. Bapak dan Ibu Dosen Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis.
5. Segenap karyawan dan laboran Jurusan Matematika FMIPA UNP.
6. Ibu Hetty Sihite dan Bapak Marlan Manik selaku orang tua saya yang sangat saya hormati dan sayangi dan Keluarga Besar yang selalu mendoakan, memberikan semangat dan nasehat kepada penulis. Donatur UKT dan uang jajan. Donatur kasih sayang.

7. Sahabat terdekat saya selama masa perkuliahan Esil Metra, Wanda Hamidah, dan Yuni Wulandari. Dari awal perkuliahan sampai akhir selalu menemani dan tidak pernah meninggalkan.
8. Pasangan saya yang menemani akhir perskripsian saya Arya Gamadika. Yang jadi penyemangat disaat mental breakdown. Si paling sponsor skripsian. Si paling nyenengin hati
9. Diri saya sendiri karena sudah bertahan sejauh ini.
10. Teman Jurusan Matematika 2018 FMIPA UNP
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan namanya satu-persatu.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan kepada penulis dapat berbalik menjadi hal baik kepada setiap pihak. Penulis telah berusaha dengan sungguh-sungguh untuk menyelesaikan penelitian ini. Dengan demikian penulis berharap karya ini dapat bermanfaat bagi penulis dan menambah khasanah ilmu pengetahuan kita semua.

Padang, 13 Februari 2022

Febry Regina Manik

DAFTAR ISI

ABSTRAK ..... **i**
KATA PENGANTAR ..... **iii**
DAFTAR ISI ..... **v**
BAB I PENDAHULUAN **1**
A. Latar Belakang 1
B. Rumusan Masalah 4
C. Tujuan Penelitian 4
D. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian 4
E. Tujuan Penelitian 5
F. Manfaat Penelitian 6
BAB II KAJIAN TEORI **7**
A. Bilangan Bulat 7
B. Aritmatika Modulo 14
C. Gaussian Integer 17
D. Fungsi Phi Euler 25
BAB III PEMBAHASAN **26**
A. Gaussian Unit 29
B. Gaussian Prime 29
C. General Phi Euler Function in Gaussian Integer 31
BAB IV PENUTUP **45**
A. Kesimpulan 45
B. Saran 46
DAFTAR PUSTAKA **47**

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu bidang kajian dalam matematika. Aljabar dapat didefinisikan sebagai ilmu matematika yang memanipulasi simbol dan relasi. Relasi yang dibahas merupakan relasi antar himpunan. Himpunan merupakan kumpulan objek baik secara kongkrit maupun abstrak yang dapat didefinisikan dengan jelas (Setiawan, 2014).

Salah satu contoh himpunan adalah himpunan bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$ dan terdiri atas bilangan bulat positif, negatif, dan nol. Pada bilangan bulat dapat dilakukan operasi-operasi hitung dasar yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Untuk setiap operasi yang dilakukan pada himpunan bilangan bulat akan menyebabkan sifat yang berbeda pada bilangan bulat.

Sifat bilangan bulat terhadap operasi hitung disebut juga dengan sistem bilangan bulat. Pada operasi penjumlahan bilangan bulat berlaku sifat-sifat berikut.

1. Tertutup
2. Asosiatif
3. Memiliki elemen identitas

4. Setiap elemen memiliki invers
5. Komutatif

Sifat yang berlaku pada bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan menginspirasikan suatu konsep struktur aljabar yaitu grup. Grup merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi sebuah operasi biner yang memenuhi memiliki sifat (1) sampai dengan (4). Operasi biner didefinisikan sebagai pemetaan dari setiap pasangan berurutan (x, y) dalam himpunan tak kosong A dengan tepat satu elemen $x * y$ dalam A . Sebuah operasi dikatakan operasi biner jika operasi tersebut terdefinisi dengan baik (*well-defined*) dan tertutup pada himpunan tak kosong A. Operasi biner dapat bersifat asosiatif dan komutatif (Gallian, 2010).

Dalam teori bilangan terdapat banyak fungsi yang bekerja pada bilangan bulat. Salah satu fungsi tersebut adalah fungsi phi euler. Fungsi phi euler biasa ditulis sebagai $\varphi(m)$ dapat didefinisikan sebagai fungsi yang merepresentasikan banyaknya bilangan bulat yang kurang dari m yang relatif prima dengan m (Koshy, Elementary Number Theory with Application, 2007). Nilai $\varphi(m)$ dengan $m \in \mathbb{Z}$ didefinisikan sebagai berikut.

$\varphi(m) = |\{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x \leq m: (x, m) = 1\}|$ (May, 2015)

Contoh dari penggunaan fungsi phi euler adalah ketika dihadapkan dengan pertanyaan berapa banyak bilangan bulat positif yang kurang dari sama dengan 6 dan relatif prima dengan 6. Bilangan bulat yang memenuhi

kondisi ini adalah 1 dan 5. Kondisi ini dapat dinyatakan menggunakan fungsi phi euler yaitu $\varphi(6) = 2$.

Fungsi phi euler dalam dalam bilangan bulat dapat diaplikasikan dalam grup. Grup merupakan himpunan yang dilengkapi oleh operasi biner. Aplikasi fungsi phi euler terlihat dalam grup yang dibentuk atas bilangan bulat yaitu grup bilangan bulat modulo m. Fungsi phi euler diaplikasikan untuk mencari jumlah generator pada grup bilangan bulat modulo m (Herstein, 1975). Fungsi ini juga dapat diaplikasikan untuk mencari orde dari grup unit.

Selain pendefenisian fungsi phi euler pada bilangan bulat, terdapat pula pendefenisian fungsi phi euler pada bilangan kompleks atas bilangan bulat. Komponen penyusun bilangan kompleks adalah komponen real a yang dinyatakan sebagai $Re(z) = a$ dan komponen imajiner bi yang dinyatakan sebagai $Im(z) = b$ (Asmar & Grafakos, 2018). Bilangan kompleks yang komponen real dan imajinernya merupakan bilangan bulat disebut sebagai *gaussian integer*. *Gaussian integer* (bilangan bulat gauss). *Gaussian integer* dilambangkan dengan $\mathbb{Z}[i]$. Secara matematis *gaussian integer* didefinisikan sebagai

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} | a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$$

Salah satu perbedaan paling mencolok antara bilangan real dan bilangan kompleks adalah konsep keterurutan. Pada bilangan kompleks tidak berlaku keterurutan (May, 2015). Dalam bilangan kompleks tidak dapat ditentukan bilangan mana yang lebih besar atau lebih kecil ketika

bagian imajiner tidak sama dengan nol. Hal ini yang kemudian menarik perhatian peneliti untuk mencaritahu pendefenisian fungsi phi euler pada grup bilangan kompleks atas komponen bilangan bulat atau yang dikenal dengan *gaussian integer*. Oleh sebab itu berdasarkan uraian-uraian tersebut akan dilakukan suatu penelitian guna mencari tahu hal tersebut. Penelitian ini berjudul 'Fungsi Phi Euler pada Grup *Gaussian Integer*'. Adapun penelitian ini akan dilaksanakan dengan metode ilmiah yakni melakukan studi literatur dengan referensi jurnal terkait dan buku yang mendukung.

B. Rumusan Masalah

Untuk menyelesaikan masalah yang dikaji dibutuhkan rumusan masalah sehingga jawaban dari rumusan masalah dapat menjadi hasil dari penelitian ini. Adapun rumusan masalah dari penelitian ini adalah "bagaimana mencari nilai fungsi phi euler pada grup *gaussian integer*?"

C. Tujuan Penelitian

Penelitian ini dilakukan untuk mencapai sebuah tujuan penelitian yaitu mengetahui tentang mencari nilai fungsi phi euler pada grup *gaussian integer*.

D. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah pendekatan yang digunakan dalam menjawab permasalahan yang diteliti tentang konsep fungsi phi euler pada grup gaussian integer dengan melakukan studi kepustakaan. Penyelesaian masalah berpedoman kepada buku dan jurnal yang relevan. Adapun pertanyaan penelitian ini adalah:

1. Bagaimana faktorisasi prima dari *gaussian integer?*
2. Bagaimana mencari nilai fungsi phi euler pada grup *gaussian integer?*

E. Prosedur Penelitian

Penelitian ini dapat dikategorikan sebagai penelitian dasar. Oleh sebab itu metode yang digunakan untuk melakukan penelitian ini adalah dengan melakukan analisis pada kajian teori yang telah ada sebelumnya. Analisis teori dilakukan pada teori-teori matematika yang berkaitan dengan konsep pendefenisian fungsi phi euler pada grup *gaussian integer*. Pengerjaan penelitian ini tentunya akan menggunakan langkah-langkah pada metode ilmiah. Persiapan awal dalam melakukan penelitian ini adalah melakukan observasi atau tinjauan pada masalah yang dihadapi kemudian mengumpulkan sumber-sumber berupa teori-teori dalam aljabar yang relevan dengan masalah untuk dijadikan literatur dalam menjawab permasalahan yang dihadapi.

Adapun langkah-langkah selanjutnya yang akan dilakukan oleh peneliti untuk memperoleh jawaban dari rumusan masalah adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari kajian-kajian teori yang telah dikumpulkan sebelumnya yaitu tentang pendefenisian fungsi phi euler pada grup *gaussian integer* yaitu tentang konsep fungsi phi euler, konsep relatif prima pada bilangan kompleks, dan solusi atas ketidakterurutan *gaussian integer;*
2. Merancang suatu pembahasan yang terstruktur dan dapat dipahami tentang nilai fungsi phi euler pada grup *gaussian integer*;
3. Menarik kesimpulan.