

**SOLUSI MODEL DINAMIKA *MULTIPLE STRAINS*
TUBERCULOSIS DENGAN PENDEKATAN
*HOMOTOPY PERTURBATION METHOD***



**ARIANA PUTRI
NIM. 18030053/2018**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2022**

**SOLUSI MODEL DINAMIKA *MULTIPLE STRAINS*
TUBERCULOSIS DENGAN PENDEKATAN
*HOMOTOPY PERTURBATION METHOD***

SKRIPSI

*Diajukan sebagai salah satu persyaratan guna memperoleh gelar
Sarjana Sains*



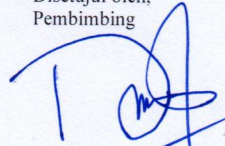
**Oleh:
ARIANA PUTRI
NIM. 18030053/2018**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2022**

PERSETUJUAN SKRIPSI

Judul : Solusi Model Dinamika *Multiple Strains Tuberculosis*
dengan Pendekatan *Homotopy Perturbation Method*
Nama : Ariana Putri
NIM : 18030053
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 21 Februari 2022
Disetujui oleh,
Pembimbing



Defri Ahmad, S.Pd, M.Si
NIP. 19880909 201404 1 002

HALAMAN PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Nama : Ariana Putri
NIM / TM : 18030053/2018
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan Judul Skripsi

SOLUSI MODEL DINAMIKA *MULTIPLE STRAINS TUBERCULOSIS* DENGAN PENDEKATAN *HOMOTOPY PERTURBATION METHOD*

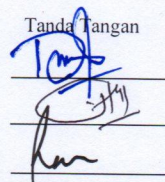
Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi
Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 21 Februari 2022

Tim Penguji

	Nama
Ketua	: Defri Ahmad, S.Pd, M.Si
Anggota	: Dra. Hj. Helma, M.Si
Anggota	: Rara Sandhy Winanda, S.Pd, M.Sc

Tanda Tangan



SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

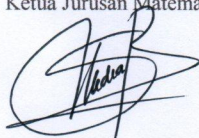
Nama : Ariana Putri
NIM : 18030053
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan, bahwa skripsi saya dengan judul "**Solusi Model Dinamika *Multiple Strains Tuberculosis* dengan Pendekatan *Homotopy Perturbation Method***" adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Padang, 22 Februari 2022

Diketahui oleh,
Ketua Jurusan Matematika,



Dra. Media Rosha, M.Si

NIP. 19620815 198703 2 004

Saya yang menyatakan,



Ariana Putri

NIM. 18030053

Solusi Model Dinamika *Multiple Strains Tuberculosis* dengan Pendekatan *Homotopy Perturbation Method*

Ariana Putri

ABSTRAK

Tuberkulosis (TB) merupakan salah satu penyakit menular berbahaya yang disebabkan oleh bakteri *Mycrobacterium tuberculosis* (MTB) yang menginfeksi manusia di bagian saluran pernafasan. Sementara itu, model matematika memiliki peran penting dalam mengetahui dinamika dan strategi dalam pengendalian penyebaran penyakit menular. Salah satu model matematika yang memfokuskan pada strategi pengendalian TB dengan pengobatan dan vaksinasi adalah model dinamika *multiple strains tuberculosis* yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang akan diselesaikan dengan pendekatan metode perturbasi homotopi (HPM). Secara umum, tujuan dari penelitian ini adalah untuk memperoleh solusi model dinamika *multiple strains tuberculosis* dengan pendekatan metode perturbasi homotopi.

Penelitian ini merupakan penelitian dasar yang dilakukan dengan cara menganalisa teori-teori yang relevan dengan permasalahan. Penyelesaian model dinamika *multiple strains tuberculosis* menggunakan metode perturbasi homotopi dilakukan dengan mengkonstruksi sistem persamaan diferensial nonlinear pada model ke dalam bentuk homotopi yang memenuhi. Selanjutnya dilakukan penyelesaian menggunakan teknik perturbasi.

Hasil penelitian ini adalah solusi model dinamika *multiple strains tuberculosis* menggunakan metode perturbasi homotopi berbentuk deret. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa metode pertubasi homotopi (HPM) dapat digunakan untuk menghampiri penyelesaian eksak dari model *multiple strains tuberculosis*.

Kata kunci: *Tuberculosis*, Model Epidemi, *Homotopy Perturbation Method*.

Solution of Multiple Strains Tuberculosis Dynamic Model using Homotopy Perturbation Method Approach

Ariana Putri

ABSTRACT

Tuberculosis (TB) is a dangerous infectious disease caused by the bacterium *Mycobacterium tuberculosis* (MTB) which infects humans in the respiratory tract. Meanwhile, mathematical models have an important role in knowing the dynamics and strategies in controlling the spread of infectious diseases. One mathematical model that focuses on TB control strategies with treatment and vaccination is a dynamic model of multiple strains of tuberculosis in the form of a nonlinear differential equation system which will be solved by using the homotopy perturbation method (HPM). In general, the aim of this study is to obtain a dynamic model solution for multiple strains of tuberculosis using a homotopy perturbation method.

This research is a basic research conducted by analyzing the theories relevant to the problem. Completion of the dynamic model of multiple strains of tuberculosis using the homotopy perturbation method was carried out by constructing a system of nonlinear differential equations in the model into a satisfactory homotopy form. Furthermore, the solution is carried out using the perturbation technique.

The result of this research is the solution to the dynamic model of multiple strains of tuberculosis using the homotopy perturbation method in the form of a series. The numerical simulation results show that the homotopy perturbation method (HPM) can be used to approach the exact solution of the multiple strains tuberculosis model.

Keywords: Tuberculosis, Epidemic Model, Homotopy Perturbation Method.

KATA PENGANTAR



Alhamdulillah segala puji dan syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul ***“Solusi Model Dinamika Multiple Strains Tuberculosis dengan Pendekatan Homotopy Perturbation Method”***. Skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis memperoleh banyak bantuan, bimbingan, motivasi, doa, saran serta dukungan baik secara moril maupun materil dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Defri Ahmad, S.Pd, M.Si Dosen Pembimbing sekaligus Penasehat Akademik.
2. Ibu Dra. Hj. Helma, M.Si dan Rara Sandhy Winanda, S.Pd, M.Sc Dosen Penguji.
3. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si Ketua Program Studi Matematika FMIPA UNP sekaligus Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNP.
4. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNP.
5. Seluruh Staf Administrasi dan Staf Labor Komputer Matematika FMIPA UNP.
6. Teman-teman Program Studi Matematika 2018 yang telah memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan kepada penulis memperoleh balasan dari Allah SWT sebagai amal ibadah dan pahala yang berlipat disisi-Nya. Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan untuk mencapai sempurna dalam skripsi ini, namun penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah khasanah ilmu pengetahuan kita semua.

Padang, 21 Februari 2022

Ariana Putri

DAFTAR ISI

	Halaman
ABSTRAK.....	i
KATA PENGANTAR.....	iii
DAFTAR ISI.....	v
DAFTAR GAMBAR.....	vii
DAFTAR TABEL.....	viii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
A. Latar Belakang Masalah.....	1
B. Rumusan Masalah.....	6
C. Pertanyaan Penelitian.....	6
D. Tujuan Penelitian.....	6
E. Manfaat Penelitian.....	6
F. Metode Penelitian.....	7
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	9
A. Persamaan Diferensial.....	9
B. Sistem Persamaan Diferensial.....	11
C. Model Matematika.....	14
D. Model SEIT.....	16
E. Model <i>Multiple Strains Tuberculosis</i>	17
F. Metode Perturbasi Homotopi (HPM).....	24
BAB III PEMBAHASAN.....	26
A. Solusi Model Dinamika <i>Multiple Strains Tuberculosis</i> Menggunakan Metode Perturbasi Homotopi (HPM).....	26

B. Simulasi Numerik.....	38
BAB IV PENUTUP.....	43
DAFTAR PUSTAKA.....	44

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 1 . Tahapan Membangun Model Matematika.....	16
Gambar 2 . Diagram Kompartemen Model <i>Multiple Strains Tuberculosis</i>	19
Gambar 3 . Hasil Simulasi Numerik.....	41

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 1 . Nilai parameter model <i>multiple strains tuberculosis</i>	39

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Tuberkulosis (TB) merupakan penyakit yang menular dan menginfeksi tubuh manusia di bagian saluran pernafasan. Penyakit ini disebabkan oleh bakteri *Mycrobacterium tuberculosis* (MTB) yang ditularkan melalui udara (Mathofani & Febriyanti, 2020). Penularan bakteri ini terjadi ketika seorang individu menghirup bakteri *Mycrobacterium tuberculosis* dari penderita yang sedang batuk, bersin, berbicara atau meludah (Shaikh, dkk, 2019). Waktu yang diperlukan sejak masuknya bakteri TB hingga terbentuknya kompleks primer secara lengkap disebut sebagai masa inkubasi. Masa inkubasi TB bervariasi selama 2-12 minggu, biasanya berlangsung selama 4-8 minggu (Rahajoe & Setyanto, 2013). Bakteri MTB yang telah menginfeksi suatu individu akan dikendalikan oleh sistem kekebalan tubuh individu tersebut dan infeksi akan menjadi aktif ketika penyebaran bakteri tersebut berada di luar kendali (Whang, dkk, 2011).

Saat ini, Tuberkulosis masih menjadi salah satu penyakit menular berbahaya di dunia. Secara global *World Health Organization* melaporkan bahwa 10 juta orang di dunia menderita tuberkulosis (TB) dan menyebabkan 1,2 juta orang meninggal setiap tahunnya. Indonesia merupakan salah satu negara dengan beban TB tertinggi di dunia dengan perkiraan orang yang jatuh sakit akibat TB mencapai 845.000 dengan angka kematian sebanyak 98.000 atau setara dengan 11 kematian/jam (WHO Global TB Report, 2020). Berdasarkan jumlah tersebut, 67%

yang ditemukan dan diobati, sehingga terdapat sebanyak 283.000 pasien TB yang belum diobati dan berisiko menjadi sumber penularan bagi orang disekitarnya (Kemenkes RI, 2021). *World Health Organization* juga telah melaporkan bahwa diperkirakan terdapat 24.000 kasus TB Resisten Obat (RO) di Indonesia setiap tahunnya (WHO Global TB Report, 2020).

Penyebaran penyakit menular dapat digambarkan menggunakan model matematika epidemi. Model epidemi pertama kali dikemukakan oleh Kermarck dan McKendrick (1927) dengan mengkaji model epidemi tipe SIR. Dalam modelnya, Kermarck dan McKendrick membagi populasi menjadi tiga bagian, yaitu *Susceptible* (S) yaitu jumlah individu sehat tapi rentan terhadap penyakit, *Infected* (I) yaitu jumlah individu terinfeksi dan bisa menularkan penyakit pada individu sehat, dan *Recovered* (R) yang menotasikan jumlah individu yang sembuh dari penyakit dan akan kebal dari penyakit (Sholeh & Rahma, 2012). Model epidemi SIR (*Susceptible Infected Recovered*) ditampilkan dalam bentuk sistem persamaan diferensial (Puspitasari, 2018). Namun, dewasa ini perkembangan model epidemi SIR (*Susceptible Infected Recovered*) telah banyak dikembangkan oleh beberapa ilmuwan seperti Picollo, Billings, dan K.J. Vareen, model tersebut didesain untuk penyebaran penyakit dalam kasus tertentu (Sari, 2014). Model epidemi tersebut diantaranya model epidemi tipe SIRS, SIS, SEIR, dan lain sebagainya.

Castillo-chavez dan Song (2004) telah membentuk model matematika penyebaran TB yang memfokuskan pada strategi pengendalian TB dengan pengobatan dan vaksinasi. Salah satu model yang dibentuk oleh Castillo-chavez tentang strategi pengendalian TB dengan pengobatan dan vaksinasi adalah model

dinamika *multiple strains tuberculosis*. Pada model *multiple strains tuberculosis* ini terdiri dari *strain* yang sensitif terhadap obat dan *strain* yang resisten terhadap obat.

Model epidemi *multiple strains tuberculosis* yang mengacu pada (Castillo & Song, 2004) berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_s c S \frac{I_s}{N} - \beta_r c S \frac{I_r}{N} - \mu S$$

$$\frac{dE_s}{dt} = \beta_s c S \frac{I_s}{N} - (\mu + k_s) E_s - r_{1s} E_s + p r_{2s} I_s + \beta_s c T \frac{I_s}{N} - \beta_s c E_s \frac{I_r}{N}$$

$$\frac{dI_s}{dt} = k_s E_s - (\mu + d_s) I_s - r_{2s} I_s$$

$$\frac{dT}{dt} = r_{1s} E_s + (1 - p - q) r_{2s} I_s - \beta_s c T \frac{I_s}{N} - \beta_r c T \frac{I_r}{N} - \mu T$$

$$\frac{dE_r}{dt} = q r_{2s} I_s - (\mu + k_r) E_r + \beta_r c (S + E_s + T) \frac{I_r}{N}$$

$$\frac{dI_r}{dt} = k_r E_r - (\mu + d_r) I_r$$

Solusi model dinamika *multiple strains tuberculosis* yang telah diselesaikan oleh Castillo-chavez ini didekati oleh titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium merupakan suatu solusi khusus yang tidak tergantung terhadap waktu. Dengan menyelidiki sifat kestabilan titik ekuilibrium diperoleh bilangan reproduksi dasar yang merupakan bilangan yang menyatakan banyaknya jumlah individu rentan yang dapat terinfeksi penyakit akibat tertular oleh individu terinfeksi. Model tersebut menghasilkan

$$R_1 = \left(\frac{\beta_s c + p r_{2s}}{\mu + d_s + r_{2s}} \right) \left(\frac{k_s}{\mu + k_s + d_s} \right),$$

$$R_2 = \left(\frac{\beta_r c}{\mu + d_r} \right) \left(\frac{k_r}{\mu + k_r} \right) \text{ yang dimana } R_j \text{ merupakan bilangan reproduksi dasar}$$

strains j , dimana $j = 1, 2$ (Castillo & Song, 2004).

Penyelesaian suatu sistem persamaan diferensial merupakan suatu masalah penting dalam sains karena telah banyak fenomena alam yang dimodelkan dengan menggunakan sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik. Solusi analitik merupakan solusi yang memenuhi persamaan semula secara eksak sedangkan solusi numerik merupakan solusi yang berupa hampiran (Susila, 1993). Dalam banyak kasus, sistem persamaan diferensial nonlinear sangat sulit untuk diselesaikan secara eksak atau analitik, sehingga diperlukan suatu metode khusus untuk menyelesaikannya. Salah satu metode yang dapat menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinear adalah metode perturbasi homotopi (HPM).

Homotopy Perturbation Method atau metode perturbasi homotopi (HPM) diusulkan oleh Ji Huan He pada tahun 1999. Metode ini merupakan kombinasi dari bentuk homotopi dan metode perturbasi. Dalam metode ini, sistem persamaan diferensial nonlinear disajikan ke dalam bentuk homotopi yang dibangun kemudian dalam teknik perturbasi diasumsikan solusi pendekatan dari sistem persamaan diferensial nonlinear dalam bentuk deret pangkat z kemudian mengelompokkan koefisien z^j berdasarkan pangkat z yang sama yang dimana z merupakan suatu parameter kecil. Selanjutnya dilakukan penyelesaian dengan proses pengintegralan. Penyelesaian yang diberikan dalam metode perturbasi homotopi berbentuk deret tak hingga.

Menurut Yuliani (2014) HPM efektif digunakan, serta memberikan penyelesaian yang akurat menghampiri penyelesaian eksak dalam penyelesaian suatu sistem persamaan diferensial. Hal ini disebabkan metode perturbasi homotopi memiliki penyelesaian yang mendekati hampiran numeriknya. Galat yang diperoleh antara metode perturbasi homotopi dengan hampiran numeriknya pada beberapa selang waktu sangat kecil (Yuliani, 2014). Hal ini menunjukkan bahwa metode perturbasi homotopi dapat digunakan untuk menghampiri penyelesaian eksak .

Beberapa peneliti telah menggunakan metode perturbasi homotopi dalam menyelesaikan model epidemi seperti Yuliani (2014) mengkaji penggunaan metode perturbasi homotopi untuk menyelesaikan model penyebaran penyakit Leptospirosis, Jaharuddin (2014) membahas penggunaan metode perturbasi homotopi untuk model SEIR dengan total populasi yang bervariasi, Ramadhan (2017) membahas penggunaan metode Perturbasi Homotopi (HPM) pada penyakit TBC di Kota Makassar. Metode perturbasi homotopi akan digunakan untuk menyelesaikan model dinamika *multiple strains tuberculosis* yang telah diperoleh pada (Castillo & Song, 2004).

Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk menerapkan HPM pada kasus “Solusi Model Dinamika *Multiple Strains Tuberculosis* Dengan Pendekatan *Homotopy Perturbation Method*”.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah “Bagaimana solusi dari Model Dinamika *Multiple Strains Tuberculosis* dengan pendekatan *Homotopy Perturbation Method*”.

C. Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas, maka pertanyaan penelitian yang akan dijawab pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Apa solusi dari model dinamika *multiple strains tuberculosis* dengan pendekatan metode perturbasi homotopi?
2. Apa interpretasi yang diperoleh dari solusi model dinamika *multiple strains tuberculosis* dengan pendekatan metode perturbasi homotopi?

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang diajukan, maka penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mendapatkan solusi model dinamika *multiple strains tuberculosis* dengan pendekatan metode perturbasi homotopi.
2. Mengetahui interpretasi dari solusi model dinamika *multiple strains tuberculosis* dengan pendekatan metode perturbasi homotopi.

E. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Sebagai salah satu cara mencari solusi dari suatu model epidemi atau sistem persamaan diferensial dengan metode perturbasi homotopi.
2. Menambah pengetahuan penulis dan pembaca tentang cara mencari solusi dari suatu model epidemi atau sistem persamaan diferensial.
3. Sebagai referensi bagi pembaca dalam melakukan penelitian selanjutnya.

F. Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan adalah penelitian dasar (teoritis) yang membahas cara menentukan solusi dari model dinamika *multiple strains tuberculosis* dengan menggunakan metode perturbasi homotopi. Penelitian ini dilakukan dengan mengumpulkan referensi yang sesuai dengan topik penelitian baik itu berasal dari buku, jurnal, maupun sumber-sumber dari internet. Pada penelitian ini HPM digunakan untuk menyelesaikan model. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menjelaskan model dinamika *multiple strains tuberculosis* dan teori mengenai metode perturbasi homotopi.
2. Mengaplikasikan metode perturbasi homotopi dalam menentukan solusi dari model dinamika *multiple strains tuberculosis* dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengubah masing-masing persamaan diferensial pada sistem persamaan diferensial nonlinear ke dalam bentuk

$$A(u) - f(r) = 0 \quad (1.1)$$

2. Mendefinisikan operator linear dan operator nonlinear dari persamaan (1.1)

3. Mengaplikasikan bentuk homotopi ke dalam masing-masing persamaan yang diperoleh pada langkah 1.
 4. Mengasumsikan solusi pendekatan dari masing-masing persamaan diferensial dalam bentuk deret pangkat sebagai berikut:

$$v = v_0 + zv_1 + z^2v_2 + \dots \quad (1.2)$$
 5. Mensubstitusikan persamaan (1.2) ke persamaan yang diperoleh pada langkah 3.
 6. Menyamakan koefisien dari pangkat z yang sama pada kedua sisi pada persamaan yang diperoleh pada langkah 5.
 7. Menyelesaikan persamaan pada langkah 6 dengan pengintegralan.
 8. Solusi dari masing-masing persamaan diferensial pada sistem persamaan diferensial nonlinear berbentuk deret tak hingga.
3. Membuat interpretasi dari solusi model dinamika *multiple strains tuberculosis* yang diperoleh sesuai dengan parameter yang diberikan.
 4. Menarik kesimpulan.