METODE EULER-MARUYAMA UNTUK SOLUSI NUMERIK PERSAMAAAN *ORNSTEIN-UHLENBECK*

ELGA SANIA RAHMAN

NIM.16030007/2016

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2020

METODE EULER-MARUYAMA UNTUK SOLUSI NUMERIK PERSAMAAAN *ORNSTEIN-UHLENBECK*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:

ELGA SANIA RAHMAN

NIM. 16030007/2016

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2020

PERSETUJUAN SKRIPSI

METODE EULER-MARUYAMA UNTUK SOLUSI NUMERIK PERSAMAAAN *ORNSTEIN-UHLENBECK*

Nama	: Elga Sania Rahman
NIM	: 16030007
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 12 Februari 2020

Disetujui Oleh:

Pembimbing

Muhammad Subhan, S.Si, M.Si

NIP. 19701126 199903 002

PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Nama	: Elga Sania Rahman
NIM	: 16030007
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

METODE EULER-MARUYAMA UNTUK SOLUSI NUMERIK PERSAMAAAN *ORNSTEIN-UHLENBECK*

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan didepan Tim Penguji Skripsi

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Padang

Padang, 12 Februari 2020

Tim Penguji

	Nama	Tanda tangan
Ketua	: Muhammad Subhan, S.Si, M.Si	
Anggota	: Dra. Helma, M.Si	
Anggota	: Dra. Media Rosha, M.Si	

SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Elga Sania Rahman
NIM	: 16030007
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya dengan judul **"Metode Euler-Maruyama Untuk Solusi Numerik Persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*"** adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan Negara.

Demikianlah pertanyaan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Padang, 12 Februari 2020

Diketahui oleh,
Ketua Jurusan Matematika,

Muhammad Subhan, M.Si
NIP. 19701126 199903 002
Surat kuasa No.86/UN35.1.2/TU/2020
Tanggal 10 Februari 2020

Saya yang menyatakan,

Elga Sania Rahman
NIM. 16030007

Metode Euler-Maruyama Untuk Solusi Numerik Persamaaan *Ornstein Uhlenbeck*

Elga Sania Rahman

ABSTRAK

Persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* merupakan suatu persamaan diferensial stokastik, persamaan ini banyak digunakan dalam model matematika keuangan. Namun, dalam mencari solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* sulit diselesaikan secara analitik sehingga dapat juga diselesaikan dengan mencari solusi numerik. Untuk mendapatkan solusi numerik yang lebih baik diperlukan metode numerik dengan melihat kekonvergenannya. Tujuan dari penelitian adalah mengkaji formula metode Euler-Maruyama untuk solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* selanjutnya menunjukkan bahwa solusi pada persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* yang didapat dari metode Euler-Maruyama ini memiliki solusi yang konvergen atau mendekati solusi eksaknya serta membuat algoritma untuk mencari solusi persamaan Ornstein-uhlenbeck dengan metode Euler-Maruyama.

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian dasar (teoritis) yang dilakukan dengan membahas teori-teori persamaan diferensial stokastik *Ornstein-Uhlenbeck*. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Euler-Maruyama. Metode Euler-Maruyama ini merupakan metode numerik yang di ambil dari persamaan diferensial stokastik yang digeneralisasikan dari metode Euler untuk persamaan diferensial biasa untuk persamaan diferensial stokastik.

Pada penelitian ini diperoleh formula dari metode Euler-Maruyama yaitu $X(t_{n+1}) = X(t_n) + \lambda\big(\mu - X(t_n)\big)h + \sigma(W(t_{n+1}) - W(t_n))$, Dimana $n = 0, \dots, N$ dan diperoleh $E[|e_N|^2] \leq Ch$ maka berdasarkan definisi kekonvergenan metode Euler-Maruyama memiliki solusi konvergen kuat untuk persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* serta algoritma metode Euler-Maruyama dengan memasukan fungsi $f(X(t)) = \lambda\big(\mu - X(t)\big)$ dan $g\big(X(t)\big) = \sigma$, Didiskritisasi pada interval $[0, T]$ kedalam N selang, lebar selang $h = \frac{T}{N}$, dan X_0 (nilai awal). Dengan menggunakan formula dari metode euler-Maruyama pada program dengan iterasi perulangan *for* untuk mendapatkan solusi hampiran dari persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*.

Kata Kunci : Persamaan Diferensial Stokastik, Persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*, Metode Euler-Maruyama.

Euler-Maruyama Method for Numerical Solution of Ornstein-Uhlenbeck Equation

Elga Sania Rahman

ABSTRAK

The Ornstein-Uhlenbeck equation is a stochastic differential equation, this equation is often used in the financial mathematical model. However, to find the solution the Ornstein-Uhlenbeck equation is difficult to complete analytic so it can also be solved by looking for numerical solutions. To get a better numeric solution it is required a numeric method by looking at converged. The purpose of the study is to examine the Euler-Maruyama method formula for the solution of the Ornstein-Uhlenbeck equation, shows that numerical solution of Ornstein-Uhlenbeck equation that resulted by Euler-Maruyama method has strong convergence to exact solutions and create an algorithm to find the solution of Ornstein-Uhlenbeck equation with the Euler-Maruyama method.

The research is a basic (theoretical) research baseline conducted by discussing the theories of the Ornstein-Uhlenbeck equation. The method used in this study was the Euler-Maruyama method. This Euler-Maruyama method is a liquid numerical method that is taken from a stochastic differential equation generalized from the Euler method of ordinary differential equations to be for stochastic differential equations.

In this study, a formula of Euler-Maruyama method was obtained, namely $X(t_{n+1}) = X(t_n) + \lambda\big(\mu - X(t_n)\big)h + \sigma(W(t_{n+1}) - W(t_n))$, with $n = 0, \dots, N$ and we find that $E[|e_N|^2] \leq Ch$ so based on the definition of convergence, the solution by Euler-Maruyama method for Ornstein-Uhlenbeck equation has a strong convergence, Euler-Maruyama method algorithm by entering the function $f(X(t)) = \lambda\big(\mu - X(t)\big)$ and $g\big(X(t)\big) = \sigma$, we use discretization of interval $[0, T]$ into N intervals of width $h = \frac{T}{N}$, dan X_0 Using a formula of the Euler-Maruyama method on the program by iterating for the For loop to obtain an empty solution from the Ornstein-Uhlenbeck equation.

Keyword : Stochastic Differential Equations, Ornstein-Uhlenbeck Equation, Euler-Maruyama Method.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillahi rabbil ‘alamin segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini yang berjudul **“Metode Euler-Maruyama untuk Solusi Numerik Persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* ”.** Selanjutnya, shalawat beserta salam untuk nabi Muhammad S.A.W sebagai suri tauladan bagi seluruh umat.

Penulisan skripsi ini dimaksud untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam rangka penyelesaian kuliah tingkat sarjana di Program Studi Matamatika Universitas Negeri Padang. Dalam penelitian ini, ada banyak tantangan yang penulis hadapi, walaupun demikian pada akhirnya skripsi ini dapat untuk diselesaikan. Berkat do’a dari kedua orang tua penulis dan juga bimbingan, motivasi, do’a, saran, bantuan, serta dukungan dari berbagai pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, dalam kesempatan kali ini dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Muhammad Subhan, M.Si Pembimbing, sekaligus Penasehat Akademik dan Sekretaris Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.
2. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si Penguji, sekaligus Ketua Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.
3. Ibu Dra. Helma, M.Si, Penguji.
4. Bapak Drs. Hendra Syarifuddin, M.Si, Ph.D Ketua Jurusan Matematika, Fakultas

Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.

5. Kepada Bapak & Ibu Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.
6. Segenap karyawan dan laboran Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.
7. Teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika angkatan 2016 yang turut serta membantu dan mendukung penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan kepada penulis dapat menjadi amal ibadah di sisi-Nya. Penulis telah berusaha dengan sungguh-sungguh untuk menyelesaikan penelitian ini, namun tak ada gading yang tak retak begitu juga dengan karya ini yang belum mencapai kata sempurna dalam penulisannya. Dengan demikian penulis berharap karya ini dapat bermanfaat bagi penulis dan menambah khasanah ilmu pengetahuan kita semua.

Padang, 12 Februari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* merupakan suatu proses stokastik yang diberikan oleh persamaan diferensial stokastik, dengan aplikasi dari model ini yaitu dalam bidang matematika keuangan dan Ilmu fisika. Persamaan diferensial stokastik merupakan model untuk menjawab masalah-masalah yang distribusinya selalu berubah setiap perubahan waktu, maka dapat digambarkan sebagai sebuah proses stokastik. Sebuah persamaan diferensial stokastik dapat diperoleh dengan menambah sebuah suku gangguan yang bersifat random pada persamaan diferensial deterministik. Dan gangguan yang sifatnya acak disebut sebagai Brownian Motion/ proses Wiener.

Dalam sejarah, contoh tertua persamaan ini telah digunakan untuk menggambarkan gerak partikel di bawah pengaruh gesekan. Persamaan ini dinamai oleh Leonard Ornstein dan George Eugene Uhlenbeck (Mao 2010). Contoh model yang menggunakan persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* ini misalnya pergerakan harga saham dan pergerakan angin. Tingkat bunga bank dan tingkat kemajuan usaha suatu perusahaan berubah-ubah secara tidak menentu, hal ini berpengaruh pada pergerakan harga saham, dapat dikatakan pergerakan harga saham mengikuti proses stokastik karena nilainya selalu berubah terhadap waktu dengan pola yang tidak terduga. Perilaku pergerakan harga saham dapat diestimasi menggunakan model pergerakan harga saham yang terkait dengan suatu persamaan differensial stokastik (PDS). Contoh lain dari persamaan diferensial stokastik ini yaitu model pergerakan angin karena dipengaruhi oleh tekanan udara dan kecepatan angin.

Secara umum persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* berbentuk :

$$dX(t) = \lambda\big(\mu - X(t)\big)dt + \sigma dW(t)$$

Pada model ini, $\lambda\big(\mu - X(t)\big)dt$ merupakan suku deterministik dan $\sigma dW(t)$ merupakan suku difusi. Suku difusi dari persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* ini tidak bergantung pada $X(t)$, sehingga sebagai hasilnya kita akan melihat bahwa $X(t)$ dapat saja bernilai negatif. Persamaan di atas mempunyai solusi eksplisit, namun akan sulit untuk mencari solusinya karena solusi eksplisit ini masih mengandung unsur stokastik yang hasilnya harus dicari menggunakan kalkulus stokastik.

Dalam mencari solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* secara analitik yang sulit untuk didapatkan karena persamaan yang rumit dapat juga diselesaikan dengan metode numerik. Metode numerik disebut juga alternatif dari metode analitik, disebut demikian karena terkadang persoalan matematika sulit untuk diselesaikan secara analitik dapat diselesaikan dengan metode numerik. Namun dengan metode numerik kita hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik ini disebut juga solusi hampiran, selisih antara solusi hampiran dan solusi sejati disebut dengan galat atau *error*.

Beberapa Metode numerik yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi solusi sebuah persamaan differensial stokastik telah dikembangkan dengan masing-

masing sifat konvergensinya, antara lain: metode Euler-Maruyama, metode Euler-Milstein, metode implisit dan metode eksplisit. Sebagian besar metode numerik pada persamaan diferensial stokastik itu diturunkan dari ekspansi Itô Taylor.

Metode Euler-Maruyama merupakan pengembangan dari metode Euler untuk persamaan diferensial deterministik untuk persamaan diferensial stokastik, dinamai oleh Leonhard Euler dan Gisiro Maruyama. Metode ini didapat dari penurunan ekpansi Itô taylor dengan mengambil tiga suku pertama dari Itô taylor, sedangkan Metode Euler-Milstein merupakan lanjutan dari metode Euler-Maruyama dengan memperhatikan beberapa suku-suku lainnya yang berorder lebih tinggi dari Itô Taylor, namun pada persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* ini fungsi pada suku deterministik ini merupakan fungsi konstan sehingga turunannya bernilai nol. Maka metode Euler-Maruyama ini lebih cocok digunakan untuk menyelesaikan solusi numerik persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*.

Untuk mengetahui apakah dengan metode numerik yang kita gunakan telah memperoleh hasil yang diinginkan, perlu adanya analisis numerik dalam menganalisis sebuah metode numerik, hal utama yang ditekankan adalah analisis galat dan kecepatan konvergensi. Untuk membuktikan solusi numerik *Ornstein-Uhlenbeck* yang didapat menggunakan metode numerik ini mendekati solusi eksak dan dapat diterima dengan presentasi galat tertentu atau konvergen kuat. Kita membuktikan bahwa metode Euler-Maruyama konvergen kuat jika fungsi suku deterministik dan suku difusi memenuhi kondisi lokal Lipschitz.

Dan berdasarkan uraian diatas peneliti tertarik untuk mencoba membahas mengenai metode Euler-Maruyama untuk menyelesaikan persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*. Untuk itu tulisan ini diberi judul “Metode Euler-Maruyama untuk solusi numerik persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*”.

B. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah diatas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: Bagaimanakah metode Euler-Maruyama untuk solusi numerik persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*?

C. Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah yang ada pertanyaan penelitian pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimanakah formula metode Euler-Maruyama untuk solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* ?
2. Bagaimanakah kekonvergenan metode Euler-Maruyama untuk solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*?
3. Bagaimana algoritma dari metode Euler-Maruyama untuk solusi numerik persamaan *Ornstein-Uhlenbeck* ?

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang diajukan di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk:

1. Mengkaji formula rumus metode Euler-Maruyama untuk menyelesaikan persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*.
2. Menunjukkan jenis kekonvergenan metode Euler-Maruyama untuk solusi numerik persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*.
3. Menyusun algoritma dari metode Euler-Maruyama untuk solusi numerik persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*.

E. Manfaat Penelitian

Melalui kajian teori ini diharapkan dapat:

1. Memberikan tambahan wawasan dan ilmu pengetahuan bagi peneliti dan pembaca tentang analisis kekonvergenan khususnya solusi numerik untuk persamaan diferensial stokastik.
2. Sebagai bahan masukan untuk penelitian selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian.
3. Dijadikan sebagai bahan belajar bagi mahasiswa dibidang analisis numerik terutama solusi numerik untuk persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*.

F. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dengan berlandaskan kajian kepustakaan. Dalam meninjau permasalahan yang dihadapi, langkah-langkah kerja yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari literatur mengenai persamaan diferensial stokastik dan metode numerik.
2. Mengkaji prinsip penggunaan metode Euler-Maruyama untuk menyelesaikan persamaan diferensial stokastik.
3. Membuktikan kekonvergenan metode Euler-Maruyama untuk solusi persamaan *Ornstein-Uhlenbeck.*
4. Menyusun algoritma untuk pembuatan program komputer metode Euler-Maruyama untuk menyelesaikan persamaan *Ornstein-Uhlenbeck*.
5. Melakukan penarikan kesimpulan.