# SUATU INTERPRETASI GEOMETRIS DARI DETERMINAN MATRIKS PERSEGI PANJANG BERUKURAN 2 x *n*


**MESY TIARA UTAMA**
**NIM. 16030045/2016**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS NEGERI PADANG**


**2020**

# SUATU INTERPRETASI GEOMETRIS DARI DETERMINAN MATRIKS PERSEGI PANJANG BERUKURAN 2 x *n*

**SKRIPSI**

*Diajukan sebagai salah satu persyaratan guna memperoleh gelar*

*Sarjana Sains*

**Oleh:**

**MESY TIARA UTAMA**
**NIM. 16030045/2016**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS NEGERI PADANG**
**2020**

## PERSETUJUAN SKRIPSI

| | |
|---|---|
| Judul | : Suatu Interpretasi Geometris dari Determinan Matriks Persegi Panjang Berukuran $2xn$ |
| Nama | : Mesy Tiara Utama |
| NIM | : 16030045 |
| Program Studi | : Matematika |
| Jurusan | : Matematika |
| Fakultas | : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam |

Padang, 21 November 2020
Disetujui oleh,
Pembimbing

Dra. Hj. Helma, M.Si
NIP.19680324 199603 2 001

## HALAMAN PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

| | |
|---|---|
| Nama | : Mesy Tiara Utama |
| NIM / TM | : 16030045/2016 |
| Program Studi | : Matematika |
| Jurusan | : Matematika |
| Fakultas | : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam |

Dengan Judul Skripsi

**SUATU INTERPRETASI GEOMETRIS DARI DETERMINAN MATRIKS PERSEGI PANJANG BERUKURAN $2xn$**

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi
Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 21 November 2020

Tim Penguji

| | Nama | Tanda Tangan |
|---|---|---|
| Ketua | : Dra. Hj. Helma, M.Si | |
| Anggota | : Drs. Yusmet Rizal, M. Si | |
| Anggota | : Dra. Dewi Murni, M.Si | |

**SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | : Mesy Tiara Utama |
| NIM | : 16030045 |
| Program Studi | : Matematika |
| Jurusan | : Matematika |
| Fakultas | : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam |

Dengan ini menyatakan, bahwa skripsi saya dengan judul **"Suatu Interpretasi Geometris dari Determinan Matriks Persegi Panjang Berukuran $2xn$"** adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Padang, 21 November 2020

Diketahui oleh,
Ketua Jurusan Matematika,

Dra. Media Rosha, M.Si
NIP. 19620815 198703 2 004

Saya yang menyatakan,

METERAI TEMPEL
EF5BAAHF755343434
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Mesy Tiara Utama
NIM. 16030045

**Suatu Interpretasi Geometris dari Determinan Matriks Persegi Panjang Berukuran $2xn$**

**Mesy Tiara Utama**

## ABSTRAK

Salah satu kajian matematika yang sangat penting dalam operasi matriks adalah determinan. Determinan merupakan suatu konsep dalam bidang aljabar linier. Konsep determinan matriks umumnya berlaku untuk matriks persegi tetapi kini telah dikembangkan untuk determinan matriks persegi panjang. Determinan mempunyai banyak aplikasi dalam analitik geometri. Analitik geometri membahas geometri menggunakan prinsip aljabar menggunakan bilangan rill. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui interpretasi geometris dari determinan matriks persegi panjang berukuran 2x$n$.

Jenis penelitian ini adalah penelitian teoritis yaitu dengan menganalisa teori-teori yang berkaitan dengan interpretasi geometri dari determinan matriks persegi panjang berukuran $2xn$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan metode Radic. Metode Radic merupakan metode yang dikembangkan oleh Radic untuk mencari determinan matriks persegi panjang.

Berdasarkan penelitian ini diperoleh luas suatu poligon yang merupakan interpretasi geometris dari determinan matriks persegi panjang berukuran $2xn$. Luas suatu poligon dapat ditentukan dengan menggunakan determinan Radic dimana titik-titik sudutnya diketahui dan dinotasikan dengan $A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$. Untuk menentukan luas poligon dapat menggunakan bantuan luas trapesium. Hasil operasi pada luas trapesium yang diperoleh adalah hasil kali diagonal utama yang merupakan determinan pada suatu matriks.

**Kata Kunci: Matriks, Determinan Matriks $2xn$ , Interpretasi Geometri, Metode Radic**

**A Geometric Interpretation of the Determinant of Rectangular Martrix $2xn$**

**Mesy Tiara Utama**

## ABSTRACT

One of the most important mathematical studies in matrix operations is determinant. Determinants are a concept in the field of linear algebra. The concept of matrix determinant generally applies to square matrices but has now been developed for determinants of rectangular matrices. The determinant has many application in analytic geometry. Analytic geometri discusses about geometry using algebraic principles using real number. The purpose of this study was to know geometric interpretation of the determinant of rectangular matrix $2xn$.

This type of research is a theoretical study by analyzing theories relating to the geometric interpretation of the determinant of rectangular matrix $2xn$. The method used in the research is the Radic method. The Radic method is a method developed by Radic to find the determinants of a rectangular matrix.

Base on the research, it is obtained the area of a polygon with a geometric interpretation of the determinant of the $2xn$ rectangular matrix. The area of polygon can be determined using a determinant where the points are known and denoted by $A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$. To determine the area of a polygon can use help the area of the trapezoid. The result of operation on the area of the trapezoid obtained is the product of the main diagonal which is the determinant of matrix.

**Keyword**: **Matrix, Determinant $2xn$ Matrix , Geometric Interpretation, Radic Method.**

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Puji syukur Alhamdulillah kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya kepada peneliti, sehingga peneliti dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **“Suatu Interpretasi Geometris dari Determinan Matriks Persegi Panjang Berukuran $2xn$”**

Penulisan skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan pada program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang. Dalam penulisan dan penyusunan skripsi ini, peneliti banyak mendapat sumbangan pemikiran, bimbingan, serta saran dan petunjuk dari berbagai pihak, untuk itu peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Hj.Helma , M.Si., Dosen Pembimbing dan Penasehat Akademik.
2. Bapak Drs. Yusmet Rizal, M.Si dan Ibu Dra. Dewi Murni, M.Si., Dosen Penguji.
3. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si Ketua Jurusan dan Ketua Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNP.
4. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu hingga terselesaikannya skripsi ini

Semoga semua bimbingan, bantuan dan kerja samanya dapat dibalas oleh Allah SWT sebagai amal ibadah. Dalam penyusunan dan penulian skripsi ini, penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk memberikan yang terbaik, namun penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, karena keterbatasan pengetahuan dan kemampuan yang penulis miliki. Untuk itu, kritik dan saran sangat penulis harapkan demi kesempurnaan penyusunan skripsi berikutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca umumnya.Amin.

Padang,   Oktober 2020

Penulis

Mesy Tiara Utama

# DAFTAR ISI

# BAB I

# PENDAHULUAN

## A. Latar Belakang

Salah satu cabang matematika yang berkembang cukup pesat dalam beberapa dekade terakhir ini adalah bidang aljabar linier terutama konsep matriks (Mursaid, 2018). Matriks juga diperlukan dalam bidang ekonomi, statistika, pemodelan dan lainnya. Menurut (Anton & Rorres , 2004 : 25) Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Menurut (Ayres, 2011:1) matriks adalah himpunan persegi panjang dari bilangan yang diapit oleh sepasang tanda kurung. Ukuran matriks disebut dengan ordo. Suatu matriks $A$ dengan jumlah baris $n$ dan jumlah kolom $n$ disebut matriks persegi ordo $n$ ( Anton & Rorres,2004 : 28 ). Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam bentuk perkalian banyaknya jumlah baris dan jumlah kolom yang dimilikinya. Matriks persegi adalah matriks yang pada umumnya sering dipelajari dan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam sistem persamaan linier.

Operasi pada matriks merupakan pembahasan yang penting dalam kajian ilmu matematika. Operasi dalam matriks diantaranya perkalian matriks, penjumlahan matriks, determinan, dan sebagainya. Determinan merupakan suatu konsep dalam bidang aljabar linier. Konsep determinan yang sering dikenal adalah determinan matriks persegi atau determinan matriks $nxn$ (Yola,2019). Menurut (Anita, 2007: 18) Determinan adalah sebuah fungsi yang memetakan matriks persegi dengan suatu bilangan real dimana domain dari determinan adalah matriks persegi dan kodomain dari determinan adalah bilangan real. Jenis fungsi pada determinan adalah penjumlahan hasil kali elementer. Determinan juga dapat digunakan untuk mencari invers suatu matriks persegi, sistem persamaaan linier, menentukan nilai eigen dan lainnya.

Konsep determinan matriks yang dikenal hanya berlaku untuk matriks persegi kini telah dikembangkan determinan pada matriks persegi panjang (Andi, 2014). Secara umum determinan diartikan sebagai jumlah semua dari hasilkali elementer pada matriks persegi, sehingga diagonal diagonal yang selama ini dijadikan dasar dalam menentukan determinan matriks tidak akan dijumpai pada matriks persegi panjang (Mursaid,2018). Determinan matriks persegi panjang dapat ditentukan nilai determinannya khususnya yang memiliki ordo 2x$n$ dengan menggunakan Metode Radic (Radic, 2005). Determinan mempunyai banyak aplikasi dalam analitik geometri. Geometri adalah ilmu ukur yang membahas bentuk, ukuran, ruang dan lainnya. Oleh karena itu, geometri melibatkan koordinat pada suatu bangun ( Nanda, 2018:1). Analitik geometri adalah suatu cabang ilmu matematika yang mengkombinasikan antara aljabar dan geometri. Determinan matriks persegi panjang berukuran $2xn$ dibahas dalam bentuk geometris interpretasinya untuk menentukan luas dari suatu bidang . Dalam geometris, determinan matriks persegi panjang dapat dikembangkan untuk ordo $3xn$ yang merupakan volume pada bangun ruang. Berdasarkan latar belakang masalah tersebut, penulis tertarik untuk dilakukan kajian tentang **" Suatu Intreprestasi Geometris Dari Determinan Matriks Persegi Panjang Berukuran 2 $x$ $n$ ".**

## B. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang masalah, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah ” Apa Interpretasi Geometri dari Determinan Matriks Persegi Panjang berukuran $2\ x\ n$ ”

## C. Pendekatan Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Pendekatan pada penelitian ini adalah penyelesaian masalah secara aljabar dan diinterpretasikan secara Geometri. Untuk menjawab pemasalahan yang diteliti tentang interpretasi Geometri dilakukan melalui studi kepustakaan, yaitu berpedoman pada buku dan jurnal yang relevan.

## D. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui Interpretasi Geometris dari Determinan Matriks Persegi Panjang berukuran 2x$n$.

## E. Manfaat Penelitian

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Untuk menambah wawasan dan ilmu pengetahuan peneliti dan pembaca serta peneliti dapat menerapkan ilmu yang diperoleh selama dalam proses perkuliahan.
2. Mendapatkan konsep baru yang dapat digunakan untuk menentukan Determinan Matriks Persegi Panjang berukuran 2x*n* dan geometri interprestasinya.
3. Sebagai bahan referensi untuk peneliti selanjutnya dalam pengembangan ilmu.

## F. Metode Penelitian

Langkah langkah untuk mendapatkan jawaban dari permasalahan adalah sebagai berikut.

1. Mempelajari studi literatur yang mengkaji tentang matriks, determinan matriks, interprestasi geometri dari determinan matriks
2. Membahas konsep tentang menghitung determinan matriks persegi panjang berordo 2x*n* dan sifat-sifatnya.
3. Membahas konsep tentang interpretasi geometri dari determinan matriks persegi panjang berordo 2x*n*
4. Menarik kesimpulan dari pembahasan tersebut.

# BAB II

# KERANGKA TEORITIS

Pada kajian teori ini akan dibahas teori-teori pendukung yang dapat menyelesaikan permasalahan penelitian. Teori-teori tersebut diantaranya matriks, determinan matriks, metode perhitungan matriks, sifat-sifat determinan matriks bujur sangkar, determinan radic, interpretasi geometri dari determinan, dan menghitung determinan matriks $2xn$.

## A. Matriks

Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan (Anton & Rorres, 2004:26). Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Notasi dalam matriks pada umumnya menggunakan huruf besar dan elemen-elemen matriks menggunakan huruf kecil. Ukuran suatu matriks ditentukan oleh perkalian banyak baris dan banyak kolom. Penentuan nama suatu matriks menggunakan huruf besar misalnya A,B,C,D,X,Y,Z, dan lainnya.

Secara umum bentuk matiks sebagai berikut.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Matriks yang mempunyai $i$ baris dan $j$ kolom, sehingga dapat ditulis dengan $\boldsymbol{A} = [a_{i,j}]$, artinya suatu matriks $\boldsymbol{A}$ yang elemen-elemennya $a_{ij}$ dimana $i$ menyatakan baris ke- $i$ dan $j$ menyatakan kolom ke- $j$.

## B. Determinan Matriks

Misal $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks persegi. Fungsi determinan yang dinotasikan dengan $det$ adalah jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari $\boldsymbol{A}$. Angka det ($\boldsymbol{A}$) disebut determinan dari $\boldsymbol{A}$ (Anton & Rorres, 2004 : 94).

**Definisi 2.1:**

Misalkan $A = [a_{i,j}]$ adalah sebuah matriks persegi, maka

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_3} \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_2}$$

Tanda $\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_3} \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_2}$ menunjukkan bahwa suku-suku harus dijumlahkan untuk semua permutasi $j_1, j_2, \ldots, j_3$ dan terdapat tanda $\pm$ yaitu tanda $-$ atau $+$ yang dipilih untuk setiap suku tergantung permutasinya genap atau ganjil (Anton & Rorres, 2004 : 94). Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks persegi, antara lain metode Sarrus, metode Ekspansi Kofaktor, dan metode Reduksi Baris.

### 1. Metode Sarrus

Metode Sarrus merupakan salah satu metode yang sering digunakan untuk menghitung determinan matriks berukuran 3x3. Cara menghitung determinannya dengan menambahkan elemen-elemen yang terdapat pada dua kolom pertama pada matriks ke sebelah kanan notasi determinan. Penambahan dua kolom pertama pada matriks hanya berlaku untuk matriks berukuran 3x3.

Diberikan matriks sebagai berikut.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{23}) - (a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}$$

**Contoh:**

Diberikan matriks persegi berordo 3x3,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= [(1) \cdot (1) \cdot (1) + (2) \cdot (4) \cdot (1) + (3) \cdot (0) \cdot (2)] -$$

$$[(1) \cdot (1) \cdot (3) + (2) \cdot (4) \cdot (1) + (1) \cdot (0) \cdot (2)]$$

$$= (1 + 8 + 0) - (3 + 8 + 0) = -2$$

Jadi, $\det(\boldsymbol{A}) = -2$

**2. Ekspansi Kofaktor**

Menurut Anton & Rorres (2004: 115), jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks persegi, maka minor dari entri $a_{ij}$ dinyatakan sebagai $M_{ij}$ dan didefinisikan sebagai determinan dari sub matriks yang tersisa setelah baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ dihilangkan. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai $C_{ij}$ dan disebut kofaktor dari entri $a_{ij}$. *Minor* merupakan determinan dari suatu matriks baru (sub matriks) yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris dan kolom dimana elemen yang diambil minornya berada. *Kofaktor* merupakan minor yang telah diperhitungkan dan diberi tanda +/– nya, cara untuk mengetahuinya yaitu menjumlahkan indeks entri yang ingin ditentukan, yaitu jika jumlah indeks nya genap maka diberi tanda + dan jika indeks ganjil maka diberi tanda –.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Berikut ini diberikan contoh menentukan minor dan kofaktor pada matriks.

**Contoh :**

Diberikan matriks persegi berukuran $2x2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Minor dari entri $a_{11}$ adalah

$$M_{11} = |3| = 3$$

Kofaktor dari dari $a_{11}$ adalah $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3$

**Contoh :**

Diberikan matriks persegi berukuran $3x3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 4 & 10 & 6 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor dari entri $a_{11}$ adalah

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 32$$

Kofaktor dari $a_{11}$ adalah $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 32$

Demikian juga dengan elemen yanng lainnya.

Kofaktor dan minor dari suatu elemen $a_{ij}$hanya berbeda dalam tandanya, sehingga dapat ditulis

$$C_{ij} = \begin{cases} M_{ij}\ , \ jika\ i + j\ genap \\ -M_{ij}\ , \ jika\ i + j\ ganjil \end{cases}$$

Menurut (Anton & Rorres (2004:102), determinan dari matriks $\boldsymbol{A}$ berordo $n\ x\ n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yangn diperoleh dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

i. Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-$j$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \ a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

ii. Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-$i$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \ a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Dengan metode ekspansi kofaktor, menghitung determinan dapat dilakukan melalui baris atau kolom yang mana saja, dan nilai determinannya akan tetap sama. Berikut ini contoh dalam menentukan minor dan kofaktor pada suatu matriks.

**Contoh :**

Diberikan matriks persegi

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitunglah determinan dari matiks tersebut.

Penyelesaian:

i. Menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama

$$\det(\boldsymbol{B}) = b_{11}C_{11} - b_{12}C_{12} + b_{13}C_{13}$$

$$= 2\begin{vmatrix}6 & 2\\2 & 0\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & 0\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2 & 6\\4 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 2(0-4) - 3(0-8) + 4(4-24) = -64$$

ii. Menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{B}) = b_{11}C_{11} - b_{21}C_{21} + b_{31}C_{31}$$

$$= 2\begin{vmatrix}6 & 2\\2 & 0\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 0\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}3 & 4\\6 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 2(0-4) - 2(0-8) + 4(6-24) = -64$$

**3. Reduksi Baris**

Menurut (Anton & Rorres, 2004 : 97) menentukan determinan dapat dilakukan dengan menggunakan metode reduksi baris yaitu dilakukan dengan mereduksi suatu matriks menjadi bentuk segitiga atas dengan cara melakukan Operasi Baris Elementer (OBE) pada matriks. Hubungan hasil determinan yang dilakukan dengan matriks OBE dan dengan matriks aslinya adalah.

i. Jika matriks $\boldsymbol{P}$ diperoleh dari matriks $\boldsymbol{A}$ dengan OBE jenis $b_i + kb_j$ yaitu dimana baris ke-$i$ ditambah dengan scalar $k$ yang dikalikan baris ke-$j$ sehingga

$$\det(\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{A})$$

**Bukti :**

Misalkan $A$ matriks persegi berukuran $nxn$, dimana matriks $P$ merupakan hasil perkalian antara baris $i$ dengan skalar $k$ dan ditambahkan pada baris $j$. Maka

$$\det P = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}P_{ij}M_{[P]_{ij}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}(ka_{ij} + a_{ij})M_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}ka_{ij}M_{ij} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}a_{ij}M_{ij}$$

Misalkan diberi matriks bantu yaitu matriks $Q$, dimana matriks $Q$ merupakan matriks yang dimana baris ke-$i$ pada matriks $A$ dimisalkan dengan baris ke-$s$ sehingga diperoleh

$$= k\sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}q_{sj}M_{[Q]_{ij}} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}a_{ij}M_{ij}$$

$$= k\sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}q_{sj}M_{[Q]_{ij}} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}a_{ij}M_{ij}$$

$$= k\det Q + \det A$$

Karena matriks $Q$ memiliki 2 kolom yang identik, maka $\det Q = 0$

$$\det P = k \cdot 0 + \det A$$

$$\det \boldsymbol{P} = \det \boldsymbol{A}$$

Contoh :

Diberikan matriks berukuran $3x3$ sebagai berikut .

Misalkan $\det P = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\det P = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= ((a_{11} + ka_{21})a_{22}a_{33} + (a_{12} + ka_{22})a_{23}a_{31} + (a_{13} + ka_{23})a_{21}a_{32})) -$$

$$((a_{13} + ka_{23})a_{22}a_{31} + (a_{12} + ka_{22})a_{21}a_{33} + (a_{11} + ka_{21})a_{23}a_{32})$$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + ka_{21}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + ka_{22}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$

$ka_{23}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + ka_{23}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + ka_{22}a_{21}a_{33} +$

$a_{11}a_{23}a_{32} + ka_{21}a_{23}a_{32})$

$= ((a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) + k(a_{21}a_{22}a_{33} + ka_{22}a_{23}a_{31} +$

$ka_{23}a_{21}a_{32})) - ((a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) +$

$k(a_{23}a_{22}a_{31} + a_{22}a_{21}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{32}))$

$= ((a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} +$

$a_{11}a_{23}a_{32})) + 0$

$= \det A + 0$

$= \det A$

Sehingga diperoleh $\det P = \det A$

ii. Jika matriks $\boldsymbol{P}$ diperoleh dari maatriks $\boldsymbol{A}$ dengan OBE jenis $kb_i$ yaitu baris ke-$i$ dikali dengan skalar $k$ , sehingga

$$\det \boldsymbol{P} = k \det \boldsymbol{A}$$

**Bukti:**

Misalkan $A$ matriks persegi berukuran $nxn$ dan matriks $P$ merupakan matriks yang didapat dengan mengalikan baris $i$ dengan skalar $k$ dari matriks $A$, sehingga minor matriks $P$ pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ sama dengan minor matriks $A$ dengan baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$, lakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris $i$ pada matriks $P$

$\det \boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} p_{ij} M_{ij}$

$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} ka_{ij} M_{ij}$

$$= k\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

$$= k \det \boldsymbol{A}$$

Sehingga terbukti $\det \boldsymbol{P} = k \det \boldsymbol{A}$

Contoh :

Diberikan matriks berukuran $3x3$ sebagai berikut .

Misalkan $\det P = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\det P = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + ka_{13}a_{21}a_{32}) - (ka_{13}a_{22}a_{31} + ka_{12}a_{21}a_{33} + ka_{11}a_{23}a_{32})$$

$$= k((a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}))$$

$$= k \det A$$

iii. Jika matriks $\boldsymbol{P}$ diperoleh dari matriks $\boldsymbol{A}$ dengan OBE jenis pertukaran baris, sehingga

$$\det(\boldsymbol{P}) = -\det(\boldsymbol{A})$$

**Bukti.**

Misalkan $A$ dan $P$ merupakan matriks persegi berukuran $nxn$, matriks $P$ merupakan matriks hasil pertukaran baris $i$ dengan $i + 1$ untuk $1 \leq i \leq n - 1$.

Sehingga $P_{(i+1)j} = a_{ij}$ dan $M_{(i+1)+j} = M_{ij}$, untuk $1 \leq i \leq n$, lakukan ekspansi kofaktor terhadap matriks $P$ sepanjang baris $i + 1$

$\det \boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{(i+1)+j} p_{(i+1)j} M_{ij}$

$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{(i+1)+j} a_{ij} M_{ij}$

$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(-1)^{1} a_{ij} M_{ij}$

$= (-1)^{1} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$

$= -1 \det \boldsymbol{A}$

$= -\det \boldsymbol{A}$

Sehingga terbukti $\det \boldsymbol{P} = -\det \boldsymbol{A}$

Contoh :

Diberikan matriks berukuran $3x3$ sebagai berikut.

$$\det P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\det P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$

$= -((a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$

$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) + (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$

$= -\det A$

Sehingga $\det P = -\det A$

## C. Sifat-Sifat Determinan Matriks Persegi

Beberapa sifat-sifat Determinan Matriks Persegi. Menurut (Anton & Rorres, 2004 : 97) misal $(\boldsymbol{A})$ adalah matriks persegi.

**a.** Jika $\boldsymbol{A}$ memiliki satu baris atau kolom bilangan nol, maka det $(\boldsymbol{A}) = 0$

Bukti :

Karena setiap hasil kali elementer bertanda dari $A$ memiliki satu faktor dari tiap baris dan satu faktor dari tiap kolom, maka setiap hasilkali elementer bertanda akan memiliki satu faktor dari satu baris nol atau satu faktor dari satu kolom nol. Pada kasus seperti ini, setiap hasilkali elementer bertanda adalah nol, dan $\det A$ yangn merupakan jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda adalah nol (Anton & Rorres, 2004:98)

**b.** $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^T)$.

Bukti :

i. untuk $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}) \cdot (a_{22}) - (a_{12}) \cdot (a_{21})$$

Dan

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}) \cdot (a_{22}) - (a_{21}) \cdot (a_{12})$$

ii. asumsikan $\det A^t = \det A$ untuk $n = p$

$\det A^t_{pxp} = \det A_{pxp}$

iii. tunjukkan bahwa $\det A^t = \det A$ untuk $n = p + 1$

$$A_{(p+1=n)(p+1=n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1(p+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{2(p+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{p(p+1)} \\ a_{(p+1)1} & a_{(p+1)1} & \cdots & a_{(p+1)p} & a_{(p+1)(p+1)} \end{bmatrix}$$

$$A_{nn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

Dan

$$(A_{nn})^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Menentukan Determinan matriks $A$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{11} \det M_{12} + \cdots + (-1)^{1(n)} a_{1m} \det M_{1(m)}$$

$M_{ij}$ merupakan matriks yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ dari $A$. Untuk matriks $A^T$ determinan dihitung dengan menggunakan kofaktor sepanjang kolom pertama, sehingga

$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{11} \det M_{12} + \cdots + (-1)^{1(n)} a_{1m} \det M_{1(m)}$$

Berdasarkan asumsi (ii), diperoleh

$\det A_{11} = \det(A_{11})^t$ , dan seterusnya

$\det A^t = a_{11} \det M_{11} - a_{11} \det M_{12} + \cdots + (-1)^{1(n)} a_{1m} \det M_{1(m)}$

$\det A^t = \det A$

Jadi, suatu hasil kali elementer memiliki satu faktor dari tiap baris dan tiap kolom, maka diperoleh bahwa $A$ dan $A^T$ memiliki himpunan hasilkali elementer yang tepat sama. ( Anton & Rorres, 2004 : 98 )

Sehingga terbukti bahwa $\det(A) = \det(A^T)$.

**c.** Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks-matriks bujur sangkar dengan ukuran yang sama. Maka det ($\boldsymbol{AB}$) = det ($\boldsymbol{A}$) det ($\boldsymbol{B}$)

**Bukti** :

Diasumsikan sebagai berikut :

a. Jika matriks $A$ atau $B$ tidak dapat dibalik, maka matriks $AB$ tidak dapat juga dibalik.

   sehingga akan diperoleh $\det(A) = 0$ atau $\det(B)$ dan $\det(AB) = 0$

b. Jika matriks $A$ dapat dibalik, maka matriks $A$ merupakan hasil kali dari matriks elementernya. Misalkan

$$A = E_1 E_2 \cdots E_r$$

   Sehingga diperoleh

$$AB = E_1 E_2 \cdots E_r B$$

   Misalkan $E$ merupakan hasil kali suatu baris dari $I_n$ dengan $k$, maka $\det E = k$, dan misalkan juga matriks $B$ adalah suatu matriks $n\ x\ n$, maka akan diperoleh

$$\det(EB) = k \det(B)$$

$$\det(EB) = \det(E) \det(B)$$

Sehingga didapatkan

$$\det(AB) = \det(\,E_1E_2 \cdots E_rB)$$

$$\det(AB) = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_r \det B$$

$$= \det(E_1E_2 \cdots E_r) \det\ B$$

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Terbukti bahwa $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

## D. Determinan Radic

Menurut Radic (2005), determinan dari matrks $\boldsymbol{A}$ berukuran m x n dengan kolom $\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{A}_n$ dan $m \leq n$ adalah sebagai berikut.

$$\sum_{1\leq j_1<j_{2<\cdots<}j_{m\leq n}} (-1)^{r+s} \left|A_{j1}A_{j2}\ \cdots A_{jm}\right|$$

Dengan $r = 1 + 2 + \cdots + m$ dan $s = j_1 + j_2\ + \cdots +\ j_m$

Berikut diberikan contoh dari teorema determinan Radic.

**Contoh :**

**1.** Misalkan sebuah matriks berordo 1x3 sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

Maka dengan menggunakan rumus dari Radic diperoleh :

$$|a_1 \quad a_2 \quad a_3| = (-1)^{1+1}a_1 + (-1)^{1+2}a_2 + (-1)^{1+3}a_3 = a_1a_2a_3$$

**2.** Misalkan sebuah matriks berordo 2x 3 sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Maka dengan menggunakan rumus dari Radic diperoleh :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)(2+3)} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Menggunakan aturan kofaktor pada baris 1, maka diperoleh sebagai berikut.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_1 |b_2 \quad b_3| + (-1)^{1+2} a_2 |b_2 \quad b_3| +$$

$$(-1)^{1+3} a_3 |b_2 \quad b_3|$$

$$= a_1 b_2 - a_2 b_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) + a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Sehingga dapat diperoleh persamaan dari rumus Radic sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = \sum_{1 \le j \le n} (-1)^{1+2+(i+j)} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$

**3.** Diketahui matriks persegi panjang dengan ukuran 2x3 sebagai berikut.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Maka det ($\boldsymbol{A}$) dengan menggunakan persamaan Radic diperoleh

$$\det(\boldsymbol{A}) = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)(2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

**4.** Diketahui matriks persegi panjang dengan ukuran 2x5 sebagai berikut.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka dengan menggunakan persamaan Radic diperoleh:

$\det(\boldsymbol{A}) =$

$$(-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)(1+4)} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+5)} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)(2+4)} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)+(2+5)} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)(3+5)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)(4+5)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (-22)-4+(13)-18+(8)-(29)+(-8)+(10)-(-8)+(-19)$

$= -17$

**E. Interpretasi Geometris dari Determinan Suatu Matriks**

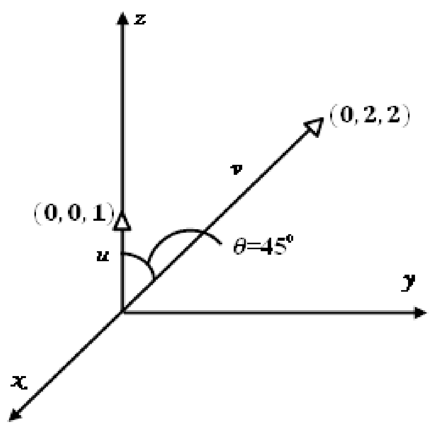
Menurut Mursaid (2018: 13), banyak sekali definisi determinan yang diperkenalkan pada buku teks melalui pendekatan aljabar. Menurut ( Larson, 2009 :164 ) Determinan Matriks mempunyai beberapa aplikasi dalam analitik geometric salah satu aplikasinya adalah menentukan luas segitiga yang berada dalam bidang $xy$.

Vektor yang dapat dinyatakan secara geometrik sebagai ruas garis terarah atau anak panah pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3 merupakan vektor geometrik ( Anton & Rorres, 2014: 134). Hasil perkalian dua vektor dapat dinyatakan sebagai suatu luas jajarangenjang. Perkalian pada vektor merupakan perkalian vektor dikali vektor, tetapi hasil dari perkalian vektor dikali vektor tidak selalu dalam bentuk besaran vektor.

Perkalian vektor terbagi atas 2 yaitu perkalian silang dan perkalian titik. Perkalian silang adalah perkalian vektor dengan vektor yang hasil perkaliannya dalam bentuk besaran vektor sedangkan perkalian titik adalah perkalian vektor dengan vektor yang hasil perkaliannya dalam bilangan real. Berikut akan diberikan contoh perkalian vektor dengan hasilkali titik dan hasil kali silang.

a. Perkalian vektor dengan hasilkali titik

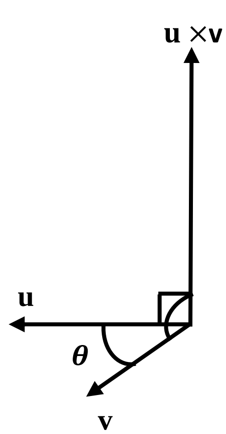
Diberikan vektor-vektor $u = (0,0,1)$ dan $v = (\ 0,2,2)$ dengan sudut diantara vektor adalah 45°,




Sehingga

$$u \cdot v = \|u\|\|u\| \cos\theta = \left(\sqrt{0^2+0^2+1^2}\right)\left(\sqrt{0^2+2^2+2^2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

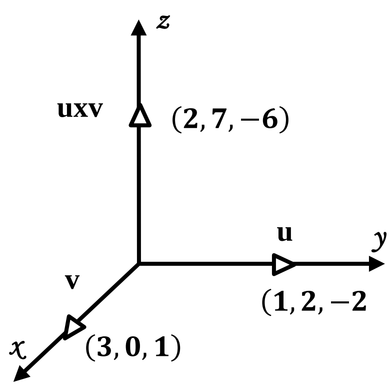
b. Perkalian vektor dengan hasil kali skalar



Pada gambar akan dibuktikan untuk menentukan arah vektor dapat menggunakan kaidah tangan kanan yaitu misalkan $\theta$ merupakan sudut antara vektor $u$ dan $v$, misalkan vektor $u$ dirotasikan melewati sudut $\theta$ hingga berhimpit dengan vektor $v$. Jika jari tangan kanan dikatupkan sehingga jari-jari tersebut menunjuk kearah rotasi, maka ibu jari menunjukkan arah dari vektor $uxv$ (ibu jari menghadap ke atas).

**Contoh :**

Diberikan vektor-vektor $u = (1,2,-2)$ dan $v = (3,0,1)$




$$uxv = \left( \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (2, -7, -6\ )$$

Melalui interprestasi geometris definisi determinan dapat lebih mudah dipahami (Riska,dkk, 2015). Dengan konsep matriks yang memiliki ordo 3x3, dapat dikenali sebagai balok atau *parallelepiped* dan matriks yang memiliki ordo 2x2 sebagai jajargenjang. Hasil perkalian dua vektor dapat dinyatakan sebagai suatu luas jajarangenjang.

Berikut teorema yang berkaitan dengan Luas jajarangenjang:

**Teorema 2.1:**

Jika $u$ dan $v$ adalah vektor- vektor pada $R^3$, maka norma dari vektor $uxv$ memiliki interpretasi geometri yang penting ( Anton & Rorres, 2004 : 158 )

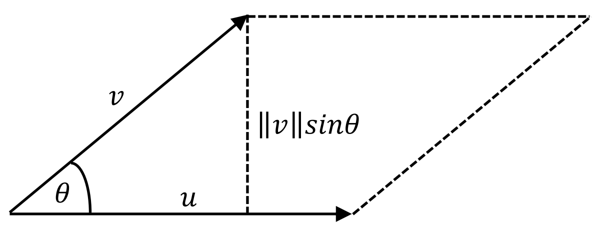
Teorema 2.1 adalah interpretasi geometrik dari hasil kali silang vektor $u$ dan $v$ . Menurut Identitas Lagrange bahwa :

$$\|u\ x\ v\ \|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (\ u\ \cdot v\ )^2 \qquad (2.1)$$

Panjang sebuah vektor $u$ disebut dengan *norm* $u$ dan disimbolkan dengan $\|u\|$. Berdasarkan teorema phytagoras dapat dilihat bahwa sebuah vektor $u = (u_1, u_2)$ akan mempunyai panjang yaitu $u = (\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2})$ (Santoso, 2008 : 65)

**Bukti.**

Perhatikan gambar berikut.




Jika $\theta$ menyatakan sudut antara vektor $u$ dan vektor $v$, maka diperoleh

$$u\ \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta \qquad (2.2)$$

Sehingga didapat persamaan berikut

$$\|u\ x\ v\ \|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\theta$$

$$= \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$= \|u\|^2\|v\|^2\sin^2\theta \tag{2.3}$$

Jika $0 \le \theta \le \pi$, maka $\sin\theta \le 0$, sehingga akan diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\|u \; x \; v\| = \|u\|\|v\|\sin\theta \tag{2.4}$$

Tinggi jajarangenjang yang dibentuk oleh vektor $u$ dan $v$ adalah $\|v\|\sin\theta$. Dari persamaan (2.3) sehingga dapat diperoleh luas jajarangenjang adalah :

$$\begin{aligned} \text{Luas jajarangenjang} &= alas \; x \; tinggi \\ &= \|u\|\|v\|\sin\theta \\ &= \|u \; x \; v\| \end{aligned}$$

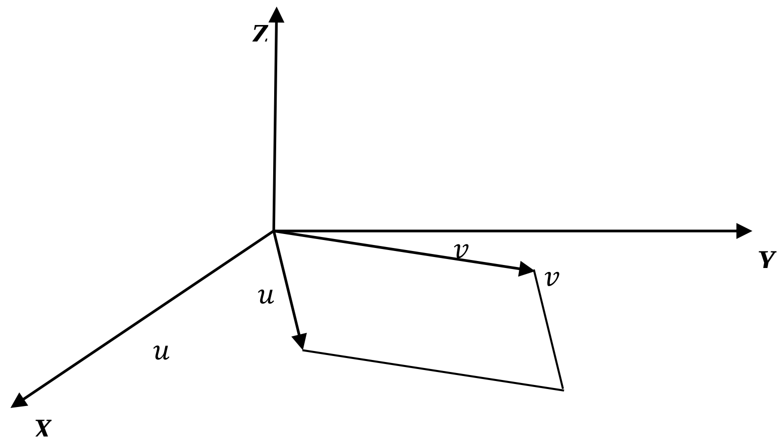
**Teorema 2.2 :**

Jika diberikan sebuah vektor $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ maka luas jajarangenjang berada di $R^2$, yang dibentuk oleh vektor $u$ dan $v$ adalah nilai mutlak dari suatu determinan.

$$\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

**Bukti**.

Perhatikan gambar berikut.




Perhatikan vektor $u$ dan vektor $v$ pada bidang $xy$ dari suatu koordinat $xyz$, sehingga vektor-vektor $u = (u_1, u_2, 0)$dan $v = (v_1, v_2, 0)$, maka

$$uxv = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} k$$

Berdasarkan persamaan (2.5) .Bahwa $\|k\| = 1$, maka luas jajarangenjang yang bentuk dari vektor $u$ dan $v$ adalah sebagai berikut.

Luas jajarangenjang = $\|u \; x \; v\| = \left\| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} k \right\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right| \|k\|$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right| = |\det[u, v]|$$

Karena bilangan luas belum diketahui dan luas tidak mungkin negatif maka diberi tanda mutlak, Sehingga terbukti bahwa determinan matriks berukuran $nxn$, dimana $n = 2$ merupakan satuan luas dari sebuah jajarangenjang yang terbentuk dari dua buah vektor tidak nol dan tidak sejajar.

## F. Menghitung Determinan Matriks Persegi Panjang Berukuran $2xn$

Determinan matriks persegi panjang berukuran $2xn$ dapat dijelaskan sebagai berikut :

Determinan matriks matriks $2xn$ dengan $n \geq 2$ sebagai berikut (Radic, 2005).

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq j} (-1)^{1+2+(i+j)} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \qquad (2.6)$$

Dari persamaan diatas $A_i$ merupakan matriks kolom dan $A_{ij}$ merupakan matriks kolom ke-$i$ dan baris ke-$j$. Determinan matriks persegi panjang dapat digunakan untuk beberapa masalah dalam bidang poligon. Dalam hal ini disebut dengan determinan umum atau *g-determinant*.

Contoh :

Diberikan matriks persegi panjang berukuran $2xn$ , dimana $n = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Sehingga akan diperoleh :

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)(2+3)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (5-4) - (6-6) + (12-15) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Contoh :

Diberikan matriks persegi panjang berukuran $2xn$ , dimana $n = 4$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh :

$$\det A = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)(1+4)} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)(3+4)} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -5 - (-6) + (-14) - (-8) + (-17) - 2$$

$$= -24$$

Menurut (Radic, 2005 ) Adapun notasi yang akan digunakan untuk membuktikan sifat determinan umum atau *g-determinant* pada persamaan (2.6) adalah sebagai berikut :

Misalkan $A_1 \cdots A_n$ poligon di $R^2$ dengan titiknya $A_i(x_i, y_i)$, dimana $i = 1, \dots, n$.

Maka diperoleh :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

Sehingga dapat dibentuk seperti berikut :

$$\det(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = |A_1, A_2, A_3, \dots, A_n|$$

Contoh :

Diberikan matriks persegi panjang berukuran $2xn$, dimana $n = 5$ sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix} = |A_1, A_2, A_3, A_4, A_5|$$

Dimana

$$A_1 = (x_1, y_1)\ , A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3),\ A_4 = (x_4, y_4),\ A_5 = (x_5, y_5)$$

Berdasarkan persamaan (2.6), maka akan diperoleh :

$$|A_1A_2A_3A_4A_5| = |A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| - |A_1, A_5| + |A_2, A_3| -$$
$$|A_2, A_4| + |A_2, A_5| - |A_3, A_4| + |A_3, A_5| - |A_4, A_5|$$

Dari contoh persamaan (2.6) dapat diuraikan determinan matriks menjadi beberapa persamaan, dan akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$|A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| - |A_1, A_5| = |A_1, A_2 - A_3 + A_4 - A_5| \qquad (2.7)$$

$$|A_2, A_3| - |A_2, A_4| + |A_2, A_5| = |A_2, A_3 - A_4 + A_5| \qquad (2.8)$$

$$-|A_3, A_4| + |A_3, A_5| = -|A_3, A_4 + A_5| \qquad (2.9)$$

Sehingga dari contoh diperoleh 3 persamaan, dan dapat dijelaskan sebagai berikut.

Untuk persamaan (2.7)

$$|A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| - |A_1, A_5|$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 - (a_1b_3 - a_3b_1) + a_1b_4 - a_4b_1 - (a_1b_5 - a_5b_1)$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 - a_1b_3 + a_3b_1 + a_1b_4 - a_4b_1 - a_1b_5 + a_5b_1$$

$$= a_1b_2 - a_1b_3 + a_1b_4 - a_1b_5 - a_2b_1 + a_3b_1 - a_4b_1 + a_5b_1$$

$$= a_1(b_2 - b_3 + b_4 - b_5) - b_1(a_2 - a_3 + a_4 - a_5)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \\ b_1 & b_2 - b_3 + b_4 - b_5 \end{vmatrix}$$

$= |A_1, A_2 - A_3 + A_4 - A_5|,$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$|A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| - |A_1, A_5| = |A_1, A_2 - A_3 + A_4 - A_5|$$

Untuk persamaan (2.8)

$$|A_2, A_3| - |A_2, A_4| + |A_2, A_5|$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ b_2 & b_5 \end{vmatrix}$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2 - (a_2 b_4 - a_4 b_2) + a_2 b_5 - a_5 b_2$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_2 b_4 + a_4 b_2 + a_2 b_5 - a_5 b_2$$

$$= a_2 b_3 - a_2 b_4 + a_2 b_5 - a_3 b_2 + a_4 b_2 - a_5 b_2$$

$$= a_2(b_3 - b_4 + b_5) - b_2(a_3 - a_4 + a_5)$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 - a_4 + a_5 \\ b_2 & b_3 - b_4 + b_5 \end{vmatrix}$$

$$= |A_2, A_3 - A_4 + A_5|$$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$|A_2, A_3| - |A_2, A_4| + |A_2, A_5| = |A_2, A_3 - A_4 + A_5|.$$

Untuk persamaan (2.9)

$$|A_3, A_1| - |A_3, A_5| = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_3 & a_5 \\ b_3 & b_5 \end{vmatrix}$$

$$= a_3 b_4 - a_4 b_3 - (a_3 b_5 - a_5 b_3)$$

$$= a_3 b_4 - a_4 b_3 - a_3 b_5 + a_5 b_3$$

$$= a_3b_4 - a_3b_5 - a_4b_3 + a_5b_3$$

$$= a_3(b_4 - b_5) - b_3(a_4 - a_5)$$

$$= \begin{vmatrix} a_3 & a_4 - a_5 \\ b_3 & b_4 - b_5 \end{vmatrix}$$

$$= |A_3, A_4 - A_5|$$

Dari persamaan tersebut maka didapat persamaan sebagai berikut :

$$|A_3, A_4| - |A_3, A_5| = |A_3, A_4 - A_5|$$

Berikut teorema yang akan membahas sifat sifat determinan matriks persegi panjang berukuran $2xn$.

**Teorema 2.3**

Misalkan $[A_1, \dots, A_n]$ matriks persegi panjang $2xn$ dengan $n \geq 2$ adalah sebagai berikut ( Radic, 2005 )

$$|A_1, A_2, \dots, A_n| = |A_1, A_2, -A_3 + A_4 - A_5 + \cdots + (-1)^n A_n| + |A_2, A_3 - A_4 + A_5 + \cdots + (-1)^n A_n| + \cdots + |A_{n-1}, A_n| \qquad (2.10)$$

**Bukti.**

Untuk persamaan (2.10) dengan menggunakan persamaan (2.6).

Sehingga dapat dibuktikan sebagai berikut :

$$|A_1, A_2, A_3, \dots, A_n|$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+2)+(1+n)} \begin{vmatrix} a_1 & a_n \\ b_1 & b_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2)+(2+3)}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(2+4)}\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{(1+2)+(2+n)}\begin{vmatrix} a_2 & a_n \\ b_2 & b_n \end{vmatrix} + \ \ldots + \ (-1)^{(1+2)+(n-1+n)}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^6\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + (-1)^7\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)^8\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^4(-1)^n\begin{vmatrix} a_1 & a_n \\ b_1 & b_n \end{vmatrix} + (-1)^8\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)^9\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^5(-1)^n\begin{vmatrix} a_2 & a_n \\ b_2 & b_n \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^2(-1)^{2n}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^n\begin{vmatrix} a_1 & a_n \\ b_1 & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} + \cdots + \ (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_2 & a_n \\ b_2 & b_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.6) maka diperoleh :

$$|A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n|$$

$$= \ |A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| + \cdots + (-1)^n|A_1, A_n| + |A_2, A_3| -$$

$$|A_2, A_4| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_{n-1}, A_n|$$

$$= |A_1, A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \cdots + (-1)^n A_n| + \ |A_2, A_3 - A_4 + A_5 + \cdots +$$

$$(-1)^{n-1}A_n| + \cdots + |A_{n-1}, A_n|$$

Contoh :

Diberikan matriks persegi panjang $2xn$, dimana $n = 4$ sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan (2.10) maka akan diperoleh

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \end{vmatrix} = |A_1, A_2, A_3, A_4|$$

$$= |A_1, A_2 - A_3 + A_4| + |A_2, A_3 - A_4| + |A_3, A_4|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3-2+5 \\ 4 & 1-3+5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2-5 \\ 1 & 2-6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -21 + (-5) + 2$$

$$= -24$$

**Teorema 2.4**

Misalkan $|A_1, \dots, A_n|$ matriks persegi panjang $2xn$ dengan $n \geq 3$ (Radic,2005).

$$|A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n| = |A_1, A_2, \dots, A_{n-1}| + (-1)^n |A_1 - A_2 + \cdots + (-1)^n A_{n-1}, A_n| \quad (2.11)$$

Bukti

Untuk $n \geq 3$, misalkan $n = 3$

Maka diperoleh :

$$|A_1, A_2, A_3| = |A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_2, A_3|$$

$$= |A_1, A_2| - |A_1 - A_2, A_3|$$

Untuk $n = p$

Maka diperoleh :

$$|A_1, A_2, \dots, A_{p-1}, A_p| =$$

$$|A_1, A_2, \dots, A_{p-1}| + (-1)^n |A_1 - A_2 + \cdots + (-1)^p A_{p-1}, A_p|$$

Akan ditunjukkan untuk $n = p + 1$ berdasarkan persamaan (2.11) , maka

$$\left|A_1, A_2, \dots, A_{p-1}, A_p, A_{p+1}\right|$$

$$= |A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| + \cdots + (-1)^p \left|A_1, A_p\right| + (-1)^{p+1} \left|A_1, A_{p+1}\right| +$$

$$|A_2, A_3| - |A_2, A_4| + \cdots + (-1)^{p-1} \left|A_2, A_p\right| + (-1)^p \left|A_2, A_{p+1}\right| + \cdots +$$

$$\left|A_p, A_{p+1}\right|$$

Dimana :

$$\left|A_1, A_2, \dots, , A_p\right| = |A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| + \cdots + (-1)^p \left|A_1, A_p\right| +$$

$$|A_2, A_3| - |A_2, A_4| + \cdots + \left|(-1)^{p-1} A_2, A_p\right| + \cdots + \left|A_{p-1}, A_p\right|$$

Sehingga

$$= \left|A_1, A_2, \dots, , A_p\right| + (-1)^{p+1} \left|A_1, A_{p+1}\right| + (-1)^p \left|A_2, A_{p+1}\right| + \cdots + \left|A_p, A_{p+1}\right|$$

$$= \left|A_1, A_2, \dots, , A_p\right| + (-1)^{p+1} \left|A_1 - A_2 + \cdots + (-1)^{p+1} A_p, A_{p+1}\right|$$

Contoh :

Diberikan matriks persegi panjang berukuran $2xn$ , dimana $n = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Berdasarkanpersamaan (2.11).

Maka diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \left|A_1, A_{2,} A_{3,} A_4\right|$$

$$= |A_1, A_2, A_3| + (-1)^4 |A_1 - A_2 + A_3, A_4|$$

$$= |A_1, A_2| + (-1)^3 |A_1 - A_2, A_3| + (-1)^4 |A_1 - A_2 + A_3, A_4|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-3 & 2 \\ 4-7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 7 - 12 - (-4 - (-6)) + 18 - 35$$

$$= -5 - (2) - 17$$

$$= -24$$

Dari Teorema 2.3 dan Teorema 2.4 di peroleh hasil yang sama dan sesuai.

# BAB IV

# PENUTUP

## A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan pada penelitian ini adalah luas dari poligon (sisi banyak) merupakan interpretasi geometris dari determinan matriks persegi panjang berukuran $2xn$. Hubungan trapesium dengan determinan terdapat pada bukti ke (i) persamaan 3.1. Luas trapesium digunakan untuk menentukan luas poligon segitiga dari hasil penjumlahan dua buah luas trapesium dikurangi dengan satu buah luas trapesium. Sehingga persamaan yang diperoleh dari operasi luas trapesium adalah hasil kali diagonal utama yang merupakan determinan dari suatu matriks. Luas suatu poligon dapat ditentukan dengan menggunakan determinan Radic dimana titik-titik sudutnya diketahui sehingga dinotasikan dengan $A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$. Persamaan yang digunakan untuk menentukan luas suatu poligon adalah sebagai berikut.

Misalkan diketahui titik-titik sudut $A_1, \dots, A_n$ poligon di $R^2$, maka

Luas poligon $A_1 \dots A_n = \frac{1}{2} \cdot \big((x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_{n-1}y_n + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + \cdots + x_ny_{n-1} + x_1y_n)\big)$

## B. Saran

Dalam tugas akhir ini, penulis menggunakan Metode Radic untuk menyelesaikan interpretasi geometri dari determinan matriks persegi panjang berukuran $2xn$. Untuk pembaca yang berminat untuk melanjutkan penelitian ini diharapkan untuk membahas tentang matriks persegi panjang berukuran $3xn$ dan aplikasi geometri nya

# DAFTAR PUSTAKA

Andi, Saparuddin. 2014. *Konsep Determinan pada Matriks Non Bujur Sangkar*. Magistra, Vol. 2 No. 1 Hal. 176-185.

Anita, T. Kurniawati. *Diktat Aljabar Linier* hal : 18. Institut Teknologi Adhi Tama Surabaya (Diunduh pada 9 November 2020)

Anton, H dan Rorres, C. 2004.*Aljabar Linier Elementer: Versi Aplikasi*. Edisi 8.Jakarta : Erlangga.

Frank, Ayres. 2011. *Schaum's Outline Series Theory and Problem of Matrices*. New York : Schaum Publishing C.O

Larson, Edward. 2009. *Elementary Algebra. Sixth Edition*. New York: Houghton Mifflin Hardcourt Publishing Company.

Mursaid, Dahlan. 2018. *Generalisasi Determinan Matriks non Bujursangkar dengan Radic Determinan untuk Orde 2xn*. Prosiding SEMNAS Matematika dan Pendidikan Matematika IAIN Ambon.

Arista, Nanda. 2018. *Analitic Geometry (Geometri Analitik).* Lecture Notes. Universitas Mulawarman.

Radic, M. 2005. *About a determinan of rectangular 2xn matrix and its geometric interpretation. Beitrange algebra and geometrie contributions to algebra and geometry*. Vol. 46 No 1.

Riska, Yeni, dkk. 2015. *Interpretasi dari sebuah determinan*. Jurnal Sains Matematika dan Statistika,Vol 2. No 2, 53-60

Santosa, Gunawan. 2009. *Aljabar Linier Dasar*. Andi : Yogyakarta.

Yola, Sartika.2019. *Determinan Matriks* $2xn$. Jurnal Matematika Unand. Vol. VIII No. 2 hal 188-190