

**MODEL PENYEBARAN *Cytomegalovirus* (CMV)
DENGAN TRANSMISI VERTIKAL DAN
FAKTOR KEMATIAN**

SKRIPSI

sebagai salah satu persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Sains



Oleh

**MELI SEPRINA
NIM 14030029**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2018**

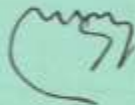
PERSETUJUAN SKRIPSI

**MODEL PENYEBARAN *Cytomegalovirus* (CMV)
DENGAN TRANSMISI VERTIKAL DAN
FAKTOR KEMATIAN**

Nama : Meli Seprina
NIM : 14030029
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 2 Agustus 2018

Disetujui oleh:
Pembimbing,



Muhammad Subhan, S. Si, M. Si
NIP. 19701126 199903 1 002

HALAMAN PENGESAHAN

Nama : Meli Seprina
NIM : 14030029
Prog. Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam




dengan judul

MODEL PENYEBARAN *Cytomegalovirus* (CMV) DENGAN TRANSMISI VERTIKAL DAN FAKTOR KEMATIAN

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 2 Agustus 2018

Tim Penguji

| | Nama | Tanda Tangan |
|---------|---------------------------------|---|
| Ketua | : Muhammad Subhan, S. Si, M. Si |  |
| Anggota | : Riry Sriningsih, S. Si, M. Sc |  |
| Anggota | : Defri Ahmad, M. Si |  |

SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Meli Seprina
NIM : 14030029
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan, bahwa Skripsi saya yang berjudul **"Model Penyebaran Cytomegalovirus (CMV) dengan Transmisi Vertikal dan Faktor Kematian"** adalah benar hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dalam etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan Negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Padang, 7 Agustus 2018

Diketahui oleh,
Ketua Jurusan Matematika



Muhammad Subhan, S. Si, M. Si
NIP. 19701126 199903 1 002

Saya yang menyatakan,



Meli Seprina
NIM. 14030029

ABSTRAK

Meli Seprina : Model Penyebaran *Cytomegalovirus* (CMV) dengan Transmisi Vertikal dan Faktor Kematian

Cytomegalovirus (CMV) merupakan keluarga virus herpes yang infeksiya tidak dapat disembuhkan. Infeksi CMV menyerang kekebabalan tubuh manusia. Infeksi ini rentan untuk menginfeksi ibu hamil yang dapat menyebabkan abortus di saat kehamilan dan permasalahan infertilitas bagi pasangan suami istri. Tujuan penelitian ini, yaitu untuk menganalisis dinamika penyebaran CMV.

Penelitian ini merupakan penelitian dasar, yaitu dengan menganalisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan. Penelitian ini dimulai dengan membentuk model matematika penyebaran CMV dengan membagi populasi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok individu yang rentan terinfeksi CMV (S), kelompok individu yang telah terinfeksi dan virus tersebut tidak aktif (E), dan kelompok individu yang terinfeksi dan virus tersebut aktif (I). Kemudian mencari titik tetap dan menganalisis kestabilan titik tetap dari model matematika yang diperoleh.

Model matematika ini berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua titik tetap, yaitu titik tetap bebas infeksi dan titik tetap endemik. Berdasarkan analisis model diperoleh faktor-faktor yang dapat mempengaruhi penyebaran CMV, yaitu laju penularan CMV akibat adanya kontak antara I dengan individu S dan laju perubahan dari kelas individu E menjadi kelas individu I .

Kata Kunci : CMV, Model Matematika, Titik Tetap.

KATA PENGANTAR



Alhamdulillah rabbil alamin segala puji dan syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini yang berjudul **“Model Penyebaran *Cytomegalovirus* (CMV) dengan Transmisi Vertikal dan Faktor Kematian”**. Selanjutnya, salawat beserta salam untuk nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi seluruh umat.

Penulisan skripsi ini dimaksud untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam rangka penyelesaian kuliah tingkat sarjana di Program Studi Matematika Universitas Negeri Padang. Dalam penelitian ini tidak sedikit permasalahan dan kesulitan yang penulis hadapi mulai dari penentuan tema hingga tersusunnya skripsi ini. Berkat bimbingan, motivasi, do’a, saran, bantuan, dukungan dari berbagai pihak, dan kedua orang tua sehingga kendala-kendala yang dihadapi tersebut dapat diatasi. Oleh karena itu, dalam kesempatan kali ini dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Muhammad Subhan, M. Si., Pembimbing sekaligus Ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang.
2. Ibu Riry Sriningsih, S. Si, M. Sc., sebagai Penguji sekaligus Penasehat Akademik.
3. Bapak Defri Ahmad, S. Pd, M. Si., sebagai Penguji.
4. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si., sebagai Ketua Program Studi Matematika Universitas Negeri Padang.

5. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu yang turut membantu dan mendukung penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan pada penulis dapat menjadi amal ibadah di sisi-Nya. Penulis telah berusaha dengan sungguh-sungguh untuk menyelesaikan penelitian ini, namun tak ada gading yang tak retak begitu juga dengan karya ini yang belum mencapai kata sempurna dalam penulisannya. Penulis berharap karya ini dapat bermanfaat bagi penulis dan menambah khasanah ilmu pengetahuan kita semua.

Padang, 2 Agustus 2018

Penulis

DAFTAR ISI

| | Halaman |
|--|---------|
| ABSTRAK | i |
| KATA PENGANTAR | ii |
| DAFTAR ISI | iv |
| DAFTAR GAMBAR | v |
| DAFTAR TABEL | vi |
| DAFTAR LAMPIRAN | vii |
| BAB I PENDAHULUAN | |
| A. Latar Belakang Masalah | 1 |
| B. Rumusan Masalah | 4 |
| C. Pertanyaan Penelitian | 4 |
| D. Tujuan Penelitian | 5 |
| E. Manfaat Penelitian | 5 |
| F. Metode Penelitian | 5 |
| BAB II KAJIAN TEORI | |
| A. Kajian Tentang CMV | 7 |
| B. Model Matematika | 11 |
| C. Teori Matematika | 14 |
| D. Teori Epidemi <i>SIR</i> Klasik | 23 |
| E. Bilangan Reproduksi Dasar | 24 |
| BAB III PEMBAHASAN | |
| A. Pembentukan Model Matematika Penyebaran <i>Cytomegalovirus</i> (CMV) | 27 |
| B. Titik Tetap Model Matematika Penyebaran <i>Cytomegalovirus</i> (CMV) | 36 |
| C. Bilangan Reproduksi Dasar | 38 |
| D. Analisis Kestabilan Titik Tetap Model Matematika Penyebaran <i>Cytomegalovirus</i> (CMV) | 44 |
| E. Simulasi Model Matematika Penyebaran <i>Cytomegalovirus</i> (CMV) | 49 |
| F. Interpretasi | 56 |
| BAB IV PENUTUP | |
| A. Kesimpulan | 59 |
| B. Saran | 61 |
| DAFTAR PUSTAKA | 62 |
| LAMPIRAN | 64 |

DAFTAR GAMBAR

| | Halaman |
|--|----------------|
| Gambar 1. Tahapan Membangun Model Matematika | 13 |
| Gambar 2. Tipe Kestabilan dari Titik Kesetimbangan..... | 22 |
| Gambar 3. Diagram Kompartemen Model <i>SIR</i> | 24 |
| Gambar 4. Diagram Kompartemen Model <i>SEI</i> CMV | 31 |
| Gambar 5. Trayektori di Sekitar Titik Bebas Infeksi | 50 |
| Gambar 6. Trayektori di Sekitar Titik Tetap Endemik | 53 |
| Gambar 6. Trayektori di Sekitar Titik Tetap Endemik dengan Parameter yang Berbeda..... | 55 |

DAFTAR TABEL

| | Halaman |
|--|----------------|
| Tabel 1. Daftar Variabel dan Keterangan | 28 |
| Tabel 2. Daftar Parameter dan Keterangan | 29 |

DAFTAR LAMPIRAN

| | Halaman |
|--|----------------|
| Lampiran 1. Program Maple Titik Tetap Bebas Infeksi ($R_0 < 1$)..... | 64 |
| Lampiran 2. Program Maple Titik Tetap Endemik ($R_0 > 1$)..... | 67 |
| Lampiran 3. Program Maple Titik Tetap Endemik..... | 73 |

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Infeksi *Cytomegalovirus* (CMV) dikelompokkan ke dalam infeksi TORCH yang merupakan singkatan dari *Toxoplasma*, *Rubella*, *Cytomegalovirus*, dan *Herpes simplex virus* (Suromo, 2007: 2). CMV salah satu virus DNA dari keluarga virus *Herpes* yang mempunyai kemampuan laten di dalam tubuh (Gugun, 2016: 125). Laten adalah keadaan dimana suatu organisme penyebab penyakit berada dalam tubuh, tetapi belum aktif bereplikasi atau menimbulkan gejala. Infeksi CMV tersebar luas di seluruh dunia, dan terjadi endemik tanpa tergantung musim.

CMV merupakan virus umum yang dapat menginfeksi setiap individu. Penyebarannya dalam tubuh terjadi lewat siklus peredaran darah. Infeksi CMV tidak bisa disembuhkan karena setelah terinfeksi, virus akan menetap seumur hidup pada orang tersebut. Oleh karena itu, CMV selalu dapat bereaktivasi atau menjadi aktif kembali. Pada umumnya, orang tidak menyadari gejala virus ini karena gejala yang diperlihatkan masih umum, seperti flu, batuk atau demam ringan.

Penyebaran CMV dapat terjadi secara vertikal atau horizontal. Penyebaran secara vertikal adalah penyebaran dari ibu yang sedang hamil kepada janin dalam kandungannya. Penyebaran horizontal adalah penyebaran yang terjadi lewat hubungan seksual, transfusi darah, transplantasi jaringan, urin dan air liur. Bentuk infeksi secara vertikal terbagi atas infeksi kongenital dan perinatal. Infeksi

kongenital, yaitu infeksi yang terjadi karena penularan virus dari ibu hamil kepada janin yang dikandungnya melalui plasenta. Sedangkan infeksi perinatal, yaitu infeksi yang terjadi pada bayi baru lahir dan terkontaminasi virus yang berada dalam jalan lahir. Infeksi yang terjadi pada ibu hamil terbagi dua, yaitu infeksi primer dan infeksi rekurens. Infeksi primer adalah infeksi yang menyerang individu untuk pertama kalinya. Infeksi rekurens atau reaktivasi adalah infeksi laten yang menjadi aktif kembali.

CMV menyebabkan infeksi sistemik dan menyerang banyak macam organ antara lain kelenjar ludah, tenggorokan, paru, saluran cerna, hati, kantong empedu, limpa, pankreas, ginjal, adrenal, otak atau sistem syaraf pusat. Bahaya penularan secara vertikal, yaitu infeksi kongenital mengakibatkan janin mengalami gangguan perkembangan (retardasi mental), pembesaran hati, kuning, pengapuran otak, tuli, dan buta. Infeksi ini dapat menimbulkan kematian janin dalam rahim. Bahaya penularan secara horizontal, yaitu pneumonia interstisial yang merupakan penyebab utama kematian pada penerima transplantasi sumsum tulang (Soedarto, 2010: 203).

CMV merupakan masalah yang perlu diatasi. Virus ini menjadi masalah besar bagi perempuan karena dapat menyebabkan abortus disaat kehamilan dan permasalahan infertilitas bagi pasangan suami istri yang menginginkan keturunan. Jika masalah ini dibiarkan berlarut-larut, maka akan menyebabkan suatu generasi tidak dapat berkembang biak sehingga akan terancam punah. Walaupun pasangan tersebut dapat memiliki keturunan, tetapi anak akan lahir dengan cacat fisik dan keterbelakangan mental. Masalah ini akan berpengaruh terhadap generasi penerus dan akan menjadi beban keluarga serta masyarakat.

Dampak dari CMV yang berbahaya ini diperlukan tindakan untuk mengendalikan penyebarannya agar dapat diminimalkan dan tidak menyebar luas. Akan tetapi, sampai saat ini obat untuk menyembuhkan CMV atau obat untuk membunuh virus ini belum ditemukan. Infeksi CMV hanya bergantung pada sistem imun saja. Oleh karena itu, perlu ditingkatkan kesadaran akan bahaya CMV kepada seseorang yang berisiko tinggi tertular CMV.

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika juga memberikan peranan yang penting dalam mencegah meluasnya penyebaran virus. Peranan tersebut berupa model matematika. Model matematika penyebaran CMV diformulasikan dan dianalisis menggunakan model matematika. Model matematika (Widowati, 2007: 1), merupakan salah satu alat yang membantu mendeskripsikan fenomena kehidupan nyata kedalam bentuk fungsi atau persamaan matematika sehingga diperoleh pemahaman yang lebih tepat terhadap problem dunia nyata tersebut.

Solusi pencegahan terhadap infeksi CMV telah banyak dilakukan dan dikaji dari sisi kesehatan. Salah satunya penelitian tentang pengelolaan CMV oleh (Loeheri, 2001). Belum diketahui pola penyebaran CMV tersebut mengakibatkan CMV tetap mewabah di dunia. Oleh karena itu, perlu dibentuk model matematika penyebaran CMV. Model matematika CMV ini menggunakan teori dasar *SIR* yang dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Model *SIR* merupakan model epidemik yang memiliki karakteristik bahwa setiap individu rentan terhadap suatu penyakit yang dinotasikan dengan *S* (*Susceptible*), individu yang sudah terinfeksi dinotasikan *I* (*Infected*) dan individu yang telah sembuh

serta memiliki kekebalan (imun) terhadap penyakit dinotasikan dengan R (*Recovered*).

Berdasarkan model matematika diharapkan dapat melihat dinamika penyebaran CMV dan langkah apa yang harus dilakukan untuk mengurangi penyebaran virus di masa yang akan datang. Setelah model diperoleh nantinya dapat dijadikan sebagai dasar perencanaan dan pengendalian dalam membuat kebijakan upaya pengendalian penyebaran CMV. Berdasarkan uraian di atas, maka penelitian ini diberi judul **“Model Penyebaran *Cytomegalovirus* (CMV) dengan Transmisi Vertikal dan Faktor Kematian”**.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah “Bagaimanakah model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian?”

C. Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan rumusan yang telah dikemukakan di atas, yang menjadi pertanyaan penelitian adalah sebagai berikut:

1. Apa bentuk model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian?
2. Apa hasil analisis model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian?
3. Apa interpretasi dari hasil analisis model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian?

D. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membentuk model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian.
2. Menganalisis model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian.
3. Menginterpretasikan hasil analisis dari model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian.

E. Manfaat Penelitian

Penelitian ini memberikan manfaat antara lain:

1. Memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari dalam matematika terapan khususnya pemodelan matematika penyebaran CMV.
2. Menambah pengetahuan dan dapat memberikan informasi tentang penyebaran CMV.
3. Bahan rujukan bagi peneliti selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian.
4. Bahan pertimbangan dalam menangani penyebaran CMV bagi pihak yang memiliki kebijakan dalam kesehatan.

F. Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan kepada kajian kepustakaan.

Langkah kerja yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari fenomena dari permasalahan penyebaran CMV.
2. Menentukan asumsi-asumsi dalam pembentukan model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian.
3. Mendefinisikan variabel dan parameter-parameter.
4. Membentuk model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian.
5. Mencari titik tetap model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian kemudian mencari angka rasio reproduksi dasar.
6. Menganalisis dan menentukan kestabilan titik tetap pada model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian.
7. Membuat simulasi untuk titik tetap model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian.
8. Melakukan validasi model dengan menginterpretasikan hasil yang diperoleh.
9. Menarik kesimpulan.

BAB II

TEORI PENDUKUNG

Beberapa teori yang mendukung dalam pembentukan model penyebaran CMV dengan transmisi vertikal dan faktor kematian adalah sebagai berikut.

A. Kajian Tentang CMV

Adapun kajian tentang CMV diantaranya sebagai berikut.

1. CMV

Cytomegalovirus (CMV) adalah salah satu anggota kelompok virus herpes beta dan mengandung DNA untai-ganda (*double-stranded*), kapsel protein, dan selubung lipoprotein. Seperti anggota kelompok virus herpes lainnya, CMV bereplikasi dalam sel nukleus dan dapat menyebabkan infeksi lisis dan produktif atau juga infeksi laten. Infeksi CMV bersifat endemik dan tidak bergantung pada musim (Rampengan, 2015: 137).

Infeksi CMV dapat dibedakan menjadi tiga jenis, yaitu infeksi primer, reinfeksi, dan reaktivasi. Infeksi CMV disebut primer apabila infeksi oleh virus tersebut terjadi untuk pertama kali. Orang dengan infeksi CMV primer tidak akan memiliki kekebalan terhadap virus. Reinfeksi adalah infeksi baru dengan strain virus CMV yang berbeda. Sedangkan reaktivasi terjadi apabila virus laten bersifat aktif lagi serta akibat gangguan sistem imun tubuh karena pengobatan atau penyakit lain (Yunie, 2002: 214).

Apabila seseorang telah terinfeksi CMV, maka seseorang akan mengidap virus itu sepanjang hidupnya tetapi umumnya dalam keadaan laten dalam tubuh. Bagi penderita yang memiliki sistem imun yang kuat maka virus ini tidak akan aktif. Infeksi CMV akan aktif kembali jika sistem imun penderita tertekan karena

suatu pengobatan dengan obat atau suatu penyakit. Saat sistem imun rendah, infeksi CMV dapat menimbulkan komplikasi. Komplikasi CMV ini yang menjadi penyebab kematian (Loehoeri, 2001: 163).

Masa inkubasi CMV setelah terjadi paparan virus pada anak normal dan dewasa adalah 4-8 minggu (Jawetz, 2005: 98). Bila terdapat seorang anak yang terkena infeksi CMV berada di tengah keluarganya, dalam waktu enam bulan 50% anggota keluarga yang rentan menunjukkan hasil yang positif pada pemeriksaan serumnya (Isselbacher, 2012: 895). Infeksi CMV sangat rentan menyerang ibu hamil, penderita dengan imunitas rendah, dan 90% penderita yang terinfeksi HIV (Rachmawaty, 2002: 107).

CMV merupakan penyebab infeksi kongenital terbesar kedua setelah *Rubella*. Dampak virus CMV ini pada ibu yang sedang hamil akan berakibat buruk terhadap janin yang dikandungnya. Akibat infeksi CMV primer (1-4%) dari kehamilan, dapat menyebabkan cacat lahir dan cacat perkembangan. Selain itu, cacat kongenital akibat CMV akan menjadi beban dalam keluarga dan masyarakat (Rachmawaty, 2012: 105).

2. Transmisi atau Penularan

Di Amerika Serikat, seroprevalensi CMV mencapai 50% sehingga wanita hamil dengan usia produktif memiliki risiko terjadinya infeksi primer CMV. Angka seroprevalensi tersebut mencapai 40-80% di negara maju dan 90-100% di negara berkembang. CMV sering menyebabkan infeksi intra-uterin dengan insidensi mencapai 0,03-2,0% dari semua bayi lahir hidup atau 7/1000 kelahiran hidup (Rampengan, 2015: 137).

Penularan CMV dari satu individu ke individu lain dapat terjadi secara vertikal atau horizontal. Penyebaran secara vertikal adalah penyebaran dari ibu yang sedang hamil kepada janin dalam kandungannya. Penyebaran horizontal adalah penyebaran yang terjadi lewat hubungan seksual, transfusi darah, transplantasi jaringan, urin dan air liur.

Penularan dari infeksi primer dua pertiga dari bayi tidak akan terinfeksi, dan hanya 10-15% dari sisa sepertiganya akan mempunyai gejala pada waktu kelahiran. Bayi yang dilahirkan oleh ibu-ibu dengan infeksi CMV pada waktu sebelum kehamilan maka bayi yang dilahirkan tidak menunjukkan gejala klinis. Infeksi virus ini tidak menunjukkan gejala apapun, sehingga kebanyakan wanita tidak mengetahui kalau dirinya sudah terinfeksi CMV pada kehamilannya (Soedarto, 2010: 203).

Ibu yang telah terinfeksi oleh CMV sebelum kehamilan menunjukkan reaktivasi dan mulai mengeskresikan virus dari serviks selama kehamilan. Pada saat dilahirkan melalui jalan lahir yang terinfeksi, bayi menjadi terinfeksi walaupun ia memiliki antibodi maternal. Bayi akan mulai mengidap virus pada umur sekitar 8-12 minggu. Walaupun terlihat sehat, bayi tersebut akan terus mengeksresi virus selama beberapa tahun (Jawetz, 2005: 101).

Cara untuk mendiagnosa seseorang terinfeksi CMV, yaitu dengan metode pemeriksaan virus langsung (antigen, asam nukleat, kultur sel), dan metode tidak langsung (pemeriksaan serologi dengan mengukur kadar IgG dan IgM di dalam tubuh). Pemeriksaan serologi ini untuk mengetahui respon imun terhadap infeksi CMV (Yunie, 2002: 214).

Infeksi bawaan CMV dapat terjadi karena infeksi primer atau infeksi reaktivasi dari ibu. Penyakit yang diderita janin dan bayi baru lahir akibat infeksi primer ibu (Isselbacher, 2012: 897). Infeksi akan menimbulkan resiko apabila terjadi enam bulan sebelum konsepsi (Loeheri, 2001:164). Anak yang terinfeksi CMV dapat menularkan virus melalui urin dan saliva. Pada usia remaja dan dewasa virus ini sering ditularkan melalui hubungan seksual (Rachmawaty, 20012: 106).

3. Gejala Klinis CMV

Gejala penyakit yang disebabkan virus CMV tergantung dari usia, lama infeksi dan tingkat imunitas penderita (Ranuh, 2013: 227). Akibat infeksi CMV dapat terjadi gambaran klinis yang sangat beragam, antara lain hati, limpa, ginjal, paru, jantung, mata, dan otak. Umumnya gejala klinis yang terjadi pada bayi yang terinfeksi CMV adalah gangguan neurologis dan gangguan perkembangan anak (Soedarto, 2010: 203).

Akibat terserangnya organ-organ visceral akan menimbulkan gangguan pertumbuhan intra-uterin, hepatosplenomegali, jaundis, pneumonitis, dan timbulnya bercak petekia pada kulit bayi (Soedarto, 2010: 203). Reaktivasi virus jarang akan menimbulkan gejala yang terlihat karena tubuh sudah memiliki kekebalan terhadap virus. Infeksi kongenital bisa menimbulkan kematian janin dalam rahim. Angka kematian janin dalam rahim bisa mendekati 30%. Satu dari setiap 1000 bayi lahir di AS menderita retardasi yang serius sebagai akibat infeksi CMV kongenital (Jawetz, 2005: 101).

4. Pencegahan

Antiviral yang spesifik terhadap CMV belum ditemukan. Pencegahan sulit dilakukan karena CMV sukar ditemukan pada perempuan usia produktif yang seronegatif terhadap CMV. Bayi yang terinfeksi CMV secara kongenital juga umumnya tidak menunjukkan gejala klinis yang jelas, begitu juga anak-anak dan orang dewasa yang diduga menjadi sumber penularan CMV tidak menunjukkan gejala klinis. Pencegahan CMV tersebut dipertegas oleh (Soedarto, 2010: 204) sebagai berikut:

Salah satu cara yang dilakukan adalah menemukan CMV dari amnion untuk memastikan apakah bayi sudah terinfeksi CMV yang berasal dari ibu pada trimester pertama melalui pemeriksaan serologik telah menunjukkan infeksi primer dengan CMV. Pemeriksaan yang rutin dilakukan oleh Bank Darah harus dilakukan untuk mencegah pemberian darah dari donor pasca CMV kepada bayi yang tidak memiliki antibodi terhadap virus ini.

Pencegahan dengan selalu mencuci tangan merupakan cara mencegah penularan CMV yang efektif. Perlu diwaspadai jika seorang ibu hamil terinfeksi CMV karena virus tersebut dapat melewati plasenta dan merusak hati janin.

B. Model Matematika

Adapun kajian tentang model matematika diantaranya sebagai berikut:

1. Pengertian Pemodelan Matematika

Model Matematika memegang peranan penting di bidang ilmu pengetahuan. Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mendeskripsikan fenomena kehidupan nyata ke dalam bentuk fungsi atau persamaan matematika sehingga diperoleh pemahaman yang lebih tepat terhadap problem dunia nyata tersebut. Model matematika ini dapat digunakan dalam

berbagai bidang, seperti fisika, biologi, kimia, ekonomi, sosial, politik dan sebagainya (Widowati, 2007: 1).

2. Langkah-langkah Membangun Model Matematika

Dalam membangun sebuah model diperlukan langkah-langkah agar dihasilkan sebuah model yang reliabel. Adapun langkah-langkah dalam membangun sebuah model (Pagalay, 2009: 5) sebagai berikut:

a) Mengidentifikasi Masalah

Identifikasi masalah dibangun dari berbagai pertanyaan yang dimunculkan yang berhubungan dengan masalah, kelemahan mengidentifikasi masalah sering menyebabkan tidak validnya suatu model.

b) Membangun Asumsi-asumsi Model

Model adalah penyederhanaan realita yang kompleks, untuk itu setiap penyederhanaan memerlukan asumsi, sehingga ruang lingkup model berada dalam koridor permasalahan yang akan dicari solusi atau jawabannya.

c) Mengkonstruksi Model Matematika

Setelah membangun asumsi akan dibuat konstruksi dari model itu sendiri, hal ini baik dilakukan melalui hubungan fungsional dengan cara membuat diagram, alur, maupun persamaan-persamaan matematika.

d) Menganalisis Model matematika

Menentukan analisis yang tepat dan mencari solusi yang sesuai untuk menjawab pertanyaan yang dibangun pada tahapan identifikasi masalah.

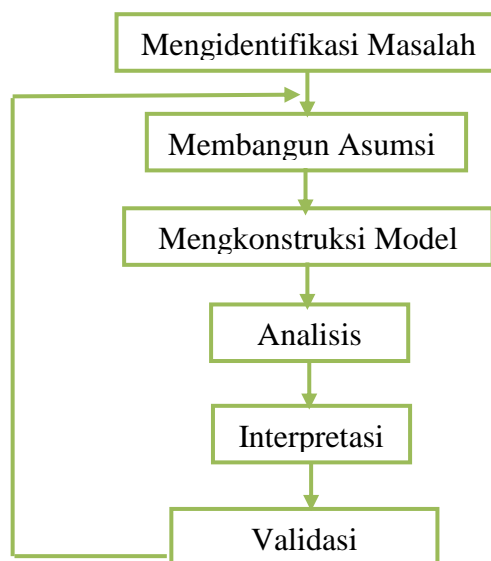
e) Menginterpretasikan Model Matematika

Setelah selesai melakukan analisis maka dilakukan interpretasi dari model yaitu menerjemahkan solusi matematika. Interpretasi ini penting

dilakukan untuk mengetahui apakah hasil yang diperoleh tersebut memang masuk akal atau tidak.

f) Validasi Model

Validasi model dilakukan untuk memverifikasi atas keabsahan model yang dirancang dengan asumsi yang dibangun sebelumnya. Model dikatakan baik atau valid yaitu model yang tidak saja mengikuti kaidah-kaidah teoritis yang sah tetapi juga memberikan interpretasi atas hasil yang mendekati kesesuaian. Jika sebagian besar standar verifikasi ini dapat dilalui, model dapat diimplementasikan. Sebaliknya jika tidak konstruksi model dirancang ulang. Berdasarkan tahapan-tahapan dalam membangun sebuah model matematika, dapat dibuat bagan sebagai berikut:



Gambar 1. Tahapan Membangun Model Matematika

Berdasarkan proses di atas maka pembentukan model matematika dapat dikerjakan. Setelah memberikan interpretasi atas hasil yang mendekati kesesuaian, maka, model dapat diimplementasikan.

C. Teori Matematika

Adapun kajian mengenai teori matematika adalah sebagai berikut.

1. Persamaan Diferensial

Teori mengenai persamaan diferensial dijelaskan oleh beberapa definisi berikut.

Definisi 1

Persamaan diferensial (Nugroho, 2011: 1) adalah suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Persamaan diferensial dapat dibagi menjadi dua kelompok, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP).

Definisi 2

Persamaan diferensial biasa (Nugroho, 2011: 2) adalah persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Contoh:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

$$x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} - 6x \frac{dy}{dx} + 10y = 0$$

Definisi 3

Persamaan diferensial parsial (Nugroho, 2011: 2) adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Contoh:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ditinjau dari sifat kelinearan, persamaan diferensial dapat dibagi dua, yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear, seperti yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 4

Suatu persamaan diferensial dikatakan linear jika tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas dan turunan-turunannya. Dengan kata lain, semua koefisiennya adalah fungsi dari variabel-variabel bebas (Nugroho, 2011: 3).

Definisi 5

Suatu persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika terdapat perkalian antara variabel-variabel tak bebas dan turunan-turunannya (Nugroho, 2011: 3).

2. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana $n \geq 2$. Sistem persamaan diferensial juga terbagi dua, yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear, seperti yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 6

Sistem persamaan diferensial linear orde satu dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b(t)$$

A adalah matriks koefisien berukuran $n \times n$ dan $b(t)$ fungsi kontinu. Sistem tersebut dinamakan sistem persamaan diferensial linear orde 1 dengan kondisi awal $x(0) = x_0$ (Perko, 2001: 60).

Definisi 7

Sistem persamaan diferensial nonlinear dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x)$$

$$\text{Dengan } \dot{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \text{ dan } F(t, x) = \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ F_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \text{ jika } F(t, x)$$

fungsi nonlinear pada x_1, \dots, x_n maka sistem disebut sebagai sistem persamaan diferensial nonlinear (Perko, 2001: 65).

3. Sistem Dinamik

Dalam teori-teori sistem dinamik antara lain menentukan titik tetap dan analisis di titik tetap tersebut.

Definisi 8

Sistem dinamik (Perko, 2001: 634) adalah suatu sistem yang berubah di pengaruhi oleh waktu, dinyatakan dengan:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

Dimana $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ dan $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$

Menganalisa kestabilan suatu titik tetap dengan menggunakan definisi-definisi berikut:

Definisi 9

Misalkan diberikan suatu sistem persamaan diferensial sebagai berikut

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Titik tetap dari $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ adalah \bar{x} sedemikian sehingga $f(\bar{x}) = 0$ (Cain, 2010: 94)

Contoh:

Titik (2,1,4) (Perko, 2001: 101) adalah titik tetap dari sistem

$$x_1' = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3$$

$$x_2' = -x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_3' = 2x_1 - 8x_2 + x_3$$

Adapun teori kestabilan dari titik tetap yang digunakan adalah:

Definisi 10

Misalkan A suatu matriks $n \times n$. Skalar λ disebut nilai eigen atau nilai karakteristik (*characteristic value*) dari A jika terdapat suatu vektor tidak nol x , sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor x disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari A yang bersesuaian dengan λ (Anton, 2004: 384).

Teorema

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut (Anton, 2004: 382) ekuivalen satu sama lain:

- a) λ adalah nilai eigen dari A
- b) Sistem persamaan $(\lambda I - A)b = 0$ mempunyai pemecahan yang tak nol.
- c) λ adalah pemecahan real dari persamaan $\det (\lambda I - A) = 0$

Bukti:

(a) \Rightarrow (b) Diketahui λ adalah nilai eigen dari \mathbf{A} . Berdasarkan Definisi 10, diperoleh

$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ atau $\lambda\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = 0$, dengan mengalikan matriks identitas \mathbf{I} yang berukuran $n \times n$, dapat dituliskan dengan $\lambda\mathbf{Ix} - \mathbf{Ax} = 0$ atau $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$.

(b) \Rightarrow (c) Diketahui $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ dan mempunyai pemecahan tak nol. Ambil vektor $\mathbf{x}_1 \neq 0$ sehingga $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_1 = 0$. Karena $\mathbf{x}_1 \neq 0$, maka $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

(c) \Rightarrow (a) Diketahui λ adalah pemecahan real dari persamaan $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Berarti ada \mathbf{x} vektor tak nol sehingga dapat dituliskan $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ atau $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Berdasarkan Definisi 10, λ merupakan nilai eigen.

Menurut teorema diatas agar λ dapat menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ dan pemecahan tak nol diperoleh jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Persamaan $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ disebut persamaan karakteristik matriks \mathbf{A} . Skalar-skalar yang memenuhi persamaan $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ adalah nilai-nilai eigen dari \mathbf{A} .

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n$$

Sehingga persamaan karakteristik dari \mathbf{A} menjadi

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

Contoh :

Tentukan nilai eigen dari matriks \mathbf{A} berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 5$.

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial nonlinear dilakukan melalui pelinearan. Untuk mencari hasil pelinearan dari sistem persamaan diferensial nonlinear digunakan matriks Jacobi.

Definisi 11

Matriks Jacobi (Kelley, 2004: 61), adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan turunan parsial pertama dari beberapa fungsi. Misalkan terdapat tiga persamaan dengan tiga variabel sebagai berikut:

$$y_1 = f_1(x_1 x_2 \dots x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1 x_2 \dots x_n)$$

$$\vdots$$

$$y_n = f_n(x_1 x_2 \dots x_n)$$

Ditulis dalam bentuk Matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Kriteria Routh-Hurwitz digunakan untuk menganalisis titik tetap suatu sistem apabila nilai eigen persamaan pada matriks Jacobi sulit dicari.

Diketahui sistem persamaan dengan k persamaan dan x variabel sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ \frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{cases}$$

dengan matriks Jacobi

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{vmatrix}$$

dan persamaan karakteristiknya $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \dots + a_k = 0$

Diberikan matriks Routh-Hurwitz $\det H_j$, dengan $j = 1, 2, 3, \dots, k$ sebagai berikut:

$$H_1 = [a_1], \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \dots$$

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \cdots & a_j \end{bmatrix}, \dots$$

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & \cdots & a_k \end{bmatrix},$$

Dengan unsur baris ke- l kolom ke- m dari matriks H_j yaitu:

$$H_j = \begin{cases} a_{2l-m} & \text{untuk } 0 < 2l - m < k \\ 1 & \text{untuk } 2l = m \\ 0 & \text{untuk } 2l < m \text{ atau } 2l > k + m \end{cases}$$

Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobi adalah real negatif maka titik tetapnya adalah stabil. Hal ini terjadi jika dan hanya jika semua determinan matriks Routh-Hurwitz adalah positif, yaitu $\det H_j > 0$, $j = 1, 2, 3, \dots, k$. Misalkan untuk $k = 2, 3, 4$ diperoleh kriteria (Edelstein, 2005: 231-235) sebagai berikut:

$$\begin{array}{llll} k=2 & a_1 > 0 & a_2 > 0 & \\ k=3 & a_1 > 0 & a_3 > 0 & a_1 a_2 > a_3 \end{array}$$

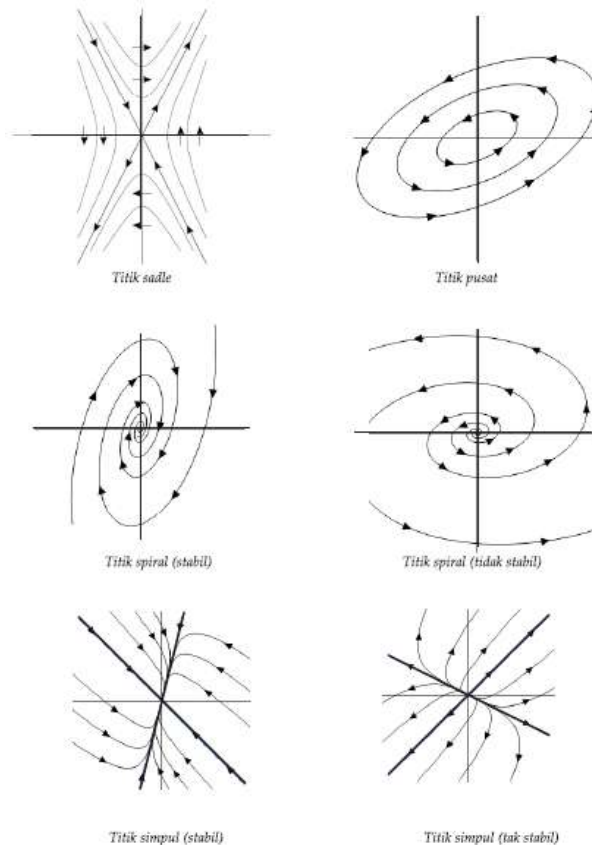
Definisi 12

Titik $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dinamakan titik kesetimbangan atau titik kritis dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(x) = 0$. Sistem linear $\dot{x} = Ax$ dengan matriks $A = Jf(x_0)$ linearisasi dari $\dot{x} = f(x)$ pada x_0 . Linearisasi sistem $\dot{x} = f(x)$ menggunakan matriks Jacobi (Perko, 2001: 102).

Untuk melihat kestabilan dari titik tetap sistem dapat ditentukan berdasarkan nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi. Secara umum, kestabilan titik tetap mempunyai kriteria (Boyce, 2009: 460) sebagai berikut:

1. Bila semua nilai eigennya real negatif, maka titik tetapnya adalah stabil.
2. Bila semua nilai eigennya real positif, maka titik tetapnya adalah tak stabil.
3. Bila semua nilai eigennya berlainan tanda, maka titik tetapnya tak stabil.
4. Bila semua nilai eigennya kompleks dengan bagian realnya negatif, maka titik tetapnya stabil asimtotik.
5. Bila semua nilai eigennya kompleks dengan bagian realnya positif, maka titik tetapnya adalah tak stabil.
6. Bila semua nilai eigennya kompleks dengan bagian realnya nol, maka titik tetapnya adalah stabil namun tidak stabil asimtotik.

Tipe kestabilan dari titik kesetimbangan dapat juga dilihat dengan mengamati trayektori pada bidang fase. Gambar 2 menunjukkan contoh trayektori dari tipe kestabilan (Perko, 2001: 290) adalah sebagai berikut:



Gambar 2. Tipe Kestabilan dari Titik Kesetimbangan

D. Teori Epidemi *SIR* Klasik

Model epidemi *SIR* dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Model *SIR* merupakan model epidemik yang memiliki karakteristik bahwa setiap individu rentan terhadap suatu penyakit yang dinotasikan dengan *S* (*Susceptible*), individu yang sudah terinfeksi penyakit dinotasikan *I* (*Infected*) dan individu yang telah sembuh serta memiliki kekebalan (imun) terhadap penyakit dinotasikan dengan *R* (*Recovered*).

Asumsi yang digunakan dalam membentuk model *SIR* klasik (Martcheva, 2015: 9) adalah:

1. Populasi konstan.
2. Individu yang terinfeksi juga menular.

Variabel yang digunakan dalam membentuk model *SIR* klasik adalah:

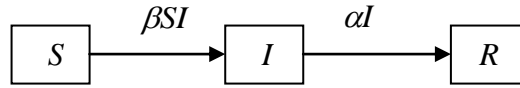
1. Kelompok individu yang rentan terhadap penyakit menular (*susceptible*) yang dilambangkan dengan *S*.
2. Kelompok individu yang terinfeksi oleh penyakit menular dan dapat menularkan penyakit (*infected*) yang dilambangkan dengan *I*.
3. Kelompok individu yang sembuh dari penyakit menular (*recovered*) yang dilambangkan dengan *R*.
4. Jumlah total populasi yang dilambangkan dengan *N*.

Parameter yang digunakan dalam membentuk model *SIR* klasik adalah:

β : tingkat penularan penyakit menular ketika terjadi kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi

α : tingkat pemulihan

Berdasarkan asumsi diatas, maka didapat diagram model *SIR* klasik (Martcheva, 2015: 11) sebagai berikut:



Gambar 3. Diagram Kompartemen Model *SIR* Klasik.

Berdasarkan diagram di atas diperoleh model dasar dari epidemiologi penyakit menular sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I$$

dimana $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$

E. Bilangan Reproduksi Dasar

Untuk mengetahui penyebaran suatu infeksi, digunakan suatu bilangan yang menjadi ukuran untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi endemik atau tidak. Bilangan tersebut dikenal dengan bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan reproduksi dasar merupakan parameter penting dalam matematika epidemiologi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit, yang didefinisikan sebagai berikut:

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai angka harapan banyaknya infeksi kedua populasi *susceptible*. R_0 merupakan jumlah perkiraan penghasil infeksi yang akan menularkan penyakit sebelum adanya tindakan untuk

mengontrol endemik. Kondisi yang akan timbul (Brauer, 2008: 159) adalah salah satu diantara kemungkinan berikut:

1. Jika $R_0 < 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi hilang
2. Jika $R_0 > 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi bertambah

Untuk menentukan nilai-nilai R_0 digunakan *next generation matrix* (matrik generasi selanjutnya) yang dilambangkan dengan K . Nilai-nilai R_0 ditentukan dengan mencari modus terbesar dari K , $R_0 = \rho(FV^{-1})$. Matriks K merupakan matrik tak negatif, sehingga nilai-nilai eigennya juga tak negatif.

Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan atau sembuh), dan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga

$$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y) \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{y} = \eta_j(x, y) \text{ dengan } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

Dengan φ_i adalah laju infeksi sekunder yang menambah pada kelas terinfeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit. Kematian dan kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = (F - V)x$$

Dengan F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$ dan $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$. Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut:

$$K = FV^{-1}$$

Persamaan di atas dievaluasi pada titik tetap bebas penyakit, sehingga diperoleh *next generation matrix*-nya adalah $K = FV^{-1}$. K disebut sebagai matriks *next generation*. Nilai dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) (Brauer, 2012: 395).

BAB IV PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa:

1. Model matematika pengendalian CMV berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha m N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha(1-m)N + \beta S \frac{I}{N} - (\mu - k)E + fI$$

$$\frac{dI}{dt} = kE - (f + \mu + d)I$$

Dimana:

- S : Kelompok individu yang rentan terhadap CMV
- E : Kelompok individu yang terinfeksi dan virus tersebut tidak aktif
- I : Kelompok individu terinfeksi dan virus tersebut aktif
- α : Laju kelahiran
- β : Laju penularan CMV akibat adanya kontak antara *infectious* dengan individu *susceptible*
- μ : Laju kematian secara alami
- d : Laju kematian karena CMV
- k : Laju perubahan dari kelas individu *E* menjadi kelas individu *I*.
- f : Laju perubahan dari kelas individu *I* menjadi kelas individu *E*.
- m : Peluang bayi lahir dari ibu *E* dan *I* tanpa terinfeksi CMV.

2. Hasil analisis model matematika penyebaran CMV yaitu:

Titik tetap E_0 selalu ada, sedangkan titik tetap E_1 tidak selalu ada. Titik E_1

ada jika memenuhi $\left(\frac{k}{\mu + k} \right) \left(\frac{\beta + \alpha}{f + \mu + d} \right) > 0$. Ada dua kasus yang mungkin

terjadi pada sistem dinamika penyebaran CMV, yaitu:

a) Kasus I

Pada saat keberadaan titik E_1 tidak terpenuhi maka sistem dinamika penyebaran CMV hanya memiliki satu titik tetap, yaitu titik tetap E_0 yang akan bersifat stabil.

b) Kasus II

Pada saat keberadaan titik E_1 terpenuhi maka sistem dinamika penyebaran CMV memiliki dua titik tetap, yaitu titik tetap E_0 dan tetap E_1 . Disini titik tetap E_0 bersifat tidak stabil dan titik tetap E_1 bersifat stabil. Pada kasus ini infeksi CMV tidak akan musnah dalam jangka waktu yang lama.

Nilai rasio reproduksi dasar yang digunakan sebagai parameter batas penentuan kriteria penyebaran CMV pada populasi yaitu:

$$R_0 = \frac{-\left(\frac{k+\alpha}{\mu+k} + \frac{d+f}{f+\mu+d}\right) + \sqrt{\left(\frac{k+\alpha}{\mu+k} + \frac{d+f}{f+\mu+d}\right)^2 - 4\left[\left(\frac{k+\alpha}{\mu+k}\right)\left(\frac{d+f}{f+\mu+d}\right) - \left(\frac{k}{\mu+k}\right)\left(\frac{\beta+\alpha}{f+\mu+d}\right)\right]}}{2}$$

3. Interpretasi dari hasil analisis model matematika penyebaran CMV yaitu:

Faktor-faktor yang mempengaruhi terjadinya epidemi dalam suatu populasi, yaitu mengontrol laju penularan CMV akibat adanya kontak antara individu I dengan individu S dengan mencegah agar tidak melakukan hubungan seksual secara bebas dan tidak berciuman dengan individu yang terinfeksi. Mengontrol nilai k yaitu laju perubahan dari kelas individu E menjadi kelas individu I dengan mengontrol sistem imun agar tetap baik yaitu memakan makanan sehat dan olahraga teratur. Setelah nilai β dan k berkurang maka epidemi pada populasi dapat berkurang.

B. Saran

Pada pembahasan tugas akhir ini telah dijelaskan model matematika penyebaran CMV yang dapat mengurangi penyebaran infeksi tetapi belum mempertimbangkan dampak apabila ada imigrasi dan emigrasi pada suatu kelompok individu. Kemudian, untuk kedepannya dapat diteliti lebih lanjut dampak apabila ada imigrasi dan emigrasi pada suatu kelompok individu terhadap penyebaran CMV.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi 8 Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Boyce, William E, & Richard C. DiPrima. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem: Ninth Edition*. New York: John Wiley & Sons.
- Brauer, Fred, dkk. 2008. *Mathematical Epidemiology: Mathematical Biosciences Subseries*. Berlin: Springer.
- , 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology: Second Edition*. New York: Springer Science+Business Media.
- Cain, John W., dan Reynold. 2010. *Ordinary and Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical Systems*. Virginia: Commonwealth University.
- Edelstein, Leah. Keshet. 2005. *Mathematical Model in Biology*. New York: SIAM.
- Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. 2017. *Pedoman Penyusunan Skripsi Mahasiswa MIPA*. Padang: UNP.
- Gugun, A. M. 2016. Prevalensi Seropositif IgM/IgG Cytomegalovirus pada Populasi Wanita Pra-nikah dengan Riwayat Konsumsi Makan Lesehan. *Jurnal Mutiara Medika*, 12(2), 124-131.
- Isselbacher dkk. 2012. *Harrison Prinsip-prinsip Ilmu Penyakit Dalam*, Alih bahasa Asdie Ahmad H., Edisi 13, Jakarta: EGC.
- Jackson, J. B., et al. 1988. Prevalence of cytomegalovirus antibody in hemophiliacs and homosexuals infected with human immunodeficiency virus type 1. *Transfusion*, 28(2), 187-189.
- Jawetz, Melnick, & Adelberg's. 2005. *Mikrobiologi Kedokteran* (Terjemahan I. Nani Widorini). Jakarta: Salemba Medika.
- Kelley, W.G. & Peterson, A.C. 2004. *The Theory of Differential Equation: Classical and Qualitative*. New York: Springer Science.
- Loehoeri, Soebagyo. 2001. Pengelolaan Cytomegalovirus (CMV). *Journal of the Medical Sciences (Berkala ilmu Kedokteran)*, 48(04), 161-177.

- Martcheva, Maia. 2015. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. New York. Springer Science+Business Media.
- Nugroho, Didit Budi. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya: Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equation and Dynamical System: Third Edition*. New York: Springer.
- Rachmawaty, F. J., & Rosita, L. 2016. Imunitas Tubuh terhadap CMV. *Jurnal Mutiara Medika*, 2(2), 103-108.
- Rampengan, N. H. 2015. Diagnosis Infeksi Sitomegalovirus pada Bayi dan Anak. *Jurnal Biomedik*, 7(3), 137-143.
- Ranuh, Gde. 2013. *Beberapa Catatan Kesehatan Anak*. Jakarta: Sagung Seto.
- Rost, G. 2011. SEI model with varying transmission and mortality rates. In *Mathematics In Science And Technology: Mathematical Methods, Models and Algorithms in Science and Technology*, 489-498.
- Soedarmo, Sumarmo S. P., Azhali M. S., Gama, Henry, dkk., 2002. *Buku Ajar Ilmu Kesehatan Anak*. Jakarta: FKUI.
- Soedarto. 2010. *Virologi Klinik*. Jakarta: Sagung Seto.
- Suromo, M. A. 2007. *Kewaspadaan Terhadap Infeksi Cytomegalovirus serta Kegunaan Deteksi secara Laboratorik*. Semarang: Universitas Diponegoro.
- Widowati dan Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Universitas Diponegoro.
- Yunie, A., & Sunartini, M. J. 2002. Uji diagnostik serologi terhadap antigenemia sebagai penanda diagnostik untuk infeksi Cytomegalovirus pada bayi dan anak. *Journal of the Medical Sciences (Berkala ilmu Kedokteran)*, 34(04), 213-220.