

**MENENTUKAN AKAR PERSAMAAN TAK LINIER DENGAN  
METODE PREDIKTOR KOREKTOR HALLEY**

**SKRIPSI**

*Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Memperoleh Gelar Sarjana Sains*



**KHAIRIL AMRI**

**NIM . 1201298**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI PADANG**

**2016**

## PERSETUJUAN SKRIPSI

Judul : Menentukan Akar Persamaan Tak Linier dengan Metode  
Prediktor Korektor Halley

Nama : Khairil Amri

NIM : 1201298

Program Studi : Matematika

Jurusan : Matematika


Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 26 Juli 2016

Disetujui oleh,

Pembimbing I

Pembimbing II

  
Dra. Minora Longgom Nasution, M.Pd  
NIP. 19620904 198903 2004

Riry Sriningsih, S.Si, M.Sc  
NIP. 19830426 200812 2 003

## PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Nama : Khairil Amri  
NIM : 1201298  
Program Studi : Matematika  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

dengan judul

### **Menentukan Akar Persamaan Tak Linier dengan Metode Prediktor Korektor Halley**

Dinyatakan Lulus Setelah Dipertahankan di Depan Tim Penguji Skripsi  
Program Studi Matematika Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Padang

Padang, 26 Juli 2016

Tim Penguji,

Nama

Tanda Tangan

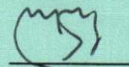
Ketua : Dra. Minora Longgom Nasution, M.Pd



Sekretaris : Riry Sriningsih, S.Si, M.Sc

---

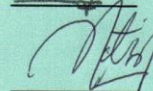
Anggota : M. Subhan, M.Si



Anggota : Dra. Arnellis, M.Si



Anggota : Drs. Yusmet Rizal, M.Si





## SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

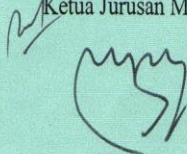
Nama : Khairil Amri  
NIM/TM : 1201298/2012  
Progran Studi : Matematika  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : MIPA UNP

Dengan ini menyatakan, bahwa skripsi saya dengan judul **"Menentukan Akar Persamaan Tak Linier dengan Metode Prediktor Korektor Halley"** adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan Negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Diketahui oleh,

Ketua Jurusan Matematika,



Muhammad Subhan, S.Si, M.Si  
NIP. 19701126 199903 1 002

Saya yang menyatakan,



Khairil Amri  
NIM. 1201298/2012

## ABSTRAK

### **Khairil Amri : Menentukan Akar Persamaan Tak Linier dengan Metode Prediktor Korektor Halley**

Salah satu permasalahan yang diselesaikan dengan matematika yaitu penentuan solusi dari persamaan tak linier. Proses penentuan solusi ini ada yang secara analitik dan secara numerik. Apabila suatu permasalahan tidak lagi sederhana sehingga sulit ditemukan solusinya secara analitik maka dapat ditemukan solusi hampirannya secara numerik. Secara numerik sebuah metode baru muncul karena kelebihan dan kekurangan suatu metode seperti Metode Prediktor Korektor Halley. Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini bagaimana menentukan akar persamaan tak linier dengan menggunakan Metode Prediktor Korektor Halley serta seberapa laju kekonvergenannya. Sedangkan tujuan dari penelitian ini menemukan akar persamaan tak linier dengan menggunakan metode Prediktor Korektor Halley, mengetahui laju kekonvergenan serta algoritmanya.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan teori-teori dari berbagai buku dan sumber yang relevan, adapun langkah-langkah dalam pemecahan permasalahan diatas yaitu dengan mengamati permasalahan persamaan tak linier, mengkaji prinsip Metode Newton dan Metode Halley, selanjutnya menjadikan Metode Newton sebagai prediktor dan Metode Halley sebagai korektor sehingga disebut Metode Prediktor Korektor Halley. Kelebihan dari metode ini adalah memiliki kekonvergenan yang lebih cepat dibandingkan Metode Newton dan Metode Halley sehingga langkah iterasi yang dibutuhkan juga semakin sedikit. Selanjutnya digunakan juga algoritma untuk menentukan hampiran akar persamaan tak linier.

Hasil penelitian ini diperoleh metode pencarian akar untuk persamaan tak linier dengan formula  $x_{n+1} = y_n - \frac{2f'(y_n)f(y_n)}{2[f'(y_n)]^2 - f''(y_n)f(y_n)}$  dimana  $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , yang memiliki orde kekonvergenan enam dengan persamaan galat  $e_{n+1} = (c_2^5 - c_2^3 c_3)e_n^6 + O(e_n^7)$ .

**Kata Kunci :** persamaan tak linier, metode prediktor-korektor halley, kekonvergenan.

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah segala puji dan syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya, sehingga peneliti bisa menyelesaikan skripsi ini dengan judul *“Menentukan Akar Persamaan Tak Linier Dengan Menggunakan Metode Prediktor Korektor Halley”*. Penulisan skripsi ini dimaksud untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka penyelesaian kuliah tingkat sarjana di Program Studi Matematika Universitas Negeri Padang.

Dalam penelitian ini tidak sedikit permasalahan dan kesulitan yang peneliti hadapi mulai dari penentuan tema hingga tersusunnya skripsi ini, namun berkat bimbingan, motivasi, doa, saran, bantuan, dan dukungan berbagai pihak, akhirnya peneliti dapat menuntaskan skripsi ini. Oleh karena itu, sudah selayaknya peneliti mengucapkan terimakasih dan penghargaan yang tinggi kepada:

1. Ibu Dra. Minora Longgom Nasution, M.Pd., pembimbing I
2. Ibu Riry Sriningsih, S.Si, M.Sc., pembimbing II dan Penasehat Akademik.
3. Bapak M. Subhan, M. Si., dosen penguji dan Ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang.
4. Ibu Dra. Arnellis, M. Si., dosen penguji.
5. Bapak Drs. Yusmet Rizal, M.Si., dosen penguji
6. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si., Ketua Program Studi Matematika Universitas Negeri Padang
7. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang.

8. Seluruh Staf Administrasi dan Staf Labor Komputer Matematika FMIPA UNP.
9. Teman-teman Matematika 2012, dan semua pihak yang tidak bisa peneliti sebutkan satu persatu yang turut membantu dan mendukung peneliti.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan pada peneliti dapat menjadi amal ibadah di sisi-Nya. Peneliti juga menyadari bahwa masih banyak kekurangan untuk mencapai sempurna dalam karya ini, namun demikian peneliti berharap karya ini dapat bermanfaat dan menambah khasanah ilmu pengetahuan kita semua.

Padang, Juli 2016

Peneliti

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>ABSTRAK.....</b>	i
<b>KATA PENGANTAR .....</b>	ii
<b>DAFTAR ISI.....</b>	iv
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	vi
<b>DAFTAR LAMPIRAN .....</b>	vii
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	1
A. Latar Belakang .....	1
B. Rumusan Masalah .....	4
C. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian .....	4
D. Tujuan Penelitian .....	5
E. Manfaat Penelitian.....	5
F. Metodologi Penelitian .....	6
<b>BAB II KAJIAN TEORI .....</b>	8
A. Persaman Tak Linier .....	8
B. Lokalisasi Akar .....	10
C. Metode Pencarian Akar .....	10
D. Kesalahan (Galat) .....	12
E. Deret Taylor .....	13



F. Kekonvergenan .....	14
G. Metode Untuk Persamaan Tak Linier .....	16
1. Metode N-R .....	16
2. Metode Halley .....	19
H. Algoritma .....	26
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	31
A. Pembentukan Formula Metode Prediktor Korektor Halley .....	31
B. Algoritma Metode Prediktor Korektor Halley .....	32
C. Contoh Permasalahan .....	33
D. Analisa Kekonvergenan Metode Prediktor Korektor Halley .....	38
<b>BAB IV PENUTUP</b> .....	53
A. Kesimpulan .....	53
B. Saran .....	54
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	55
<b>LAMPIRAN</b> .....	56

## DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
1. Perbandingan Metode N-R dan Metode PKH dengan tebakan awal 5 .....	35
2. Perbandingan Metode N-R dan Metode PKH dengan tebakan awal -3 .....	35
3. Perbandingan Metode N-R dan Metode PKH dengan tebakan awal -0.4 .....	45

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. Program dan hasil output berdasarkan Metode N-R .....	55
2. Program dan hasil output berdasarkan Metode Prediktor Korektor Halley .....	57

# B A B I

## PENDAHULUAN

### A. Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari dan berperan penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan. Salah satu permasalahan yang diselesaikan dengan matematika yaitu penentuan solusi dari persamaan tak linier. Solusi dari persamaan tak linier yaitu berupa akar persamaan. Akar persamaan tak linier dapat ditemukan dengan dua cara yaitu secara analitik dan secara numerik.

Proses penyelesaian secara analitik digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan yang masih tergolong sederhana dan masih bisa menggunakan formula matematika, dimana dengan menggunakan rumus matematika akan menghasilkan sebuah nilai eksak (nilai sesungguhnya). Contohnya polinom dengan  $f(x) = 0$ , apabila  $f(x)$  adalah linier, kuadrat, atau berpangkat tiga maka akar eksaknya dapat ditemukan dengan metode analitik seperti menggunakan rumus  $abc$ . Contoh sederhana misalkan persamaan tak linier berbentuk kuadrat  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , atau persamaan tak linier yang lain misalnya,

a.  $x^4 + 40x^3 + 10x^2 + 100x = 0$ ,

b.  $\tanh(x) - (x) = 0$ ,

c.  $x - \sin(x) = 0$ .



Dalam kenyataannya, akar-akar persamaan tak linier tersebut tidak mudah untuk ditemukan secara analitik, kecuali pada kasus-kasus yang sederhana, oleh karena itu diperlukan suatu metode untuk mencari hampiran akar polinomial  $f(x)$  yaitu metode numerik. Metode numerik disajikan dalam bentuk algoritma yang dapat dihitung secara cepat dan mudah. Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik merupakan pendekatan analisis matematis.

Menurut Sutarno (2005:1), metode numerik adalah teknik-teknik yang digunakan untuk merumuskan masalah-masalah matematika agar dapat diselesaikan dengan operasi-operasi aritmatika (hitungan) biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Mengingat bahwa algoritma yang dikembangkan dalam metode numerik adalah algoritma pendekatan, maka dalam algoritma tersebut akan muncul istilah iterasi yaitu pengulangan proses perhitungan dengan kata lain perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang sehingga diperoleh hasil yang mendekati nilai penyelesaian eksak. Metode numerik juga dapat diaplikasikan menggunakan program komputer sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan.

Beberapa metode numerik yang digunakan untuk menemukan akar persamaan tak linier adalah Metode Bagi Dua, Metode Posisi Palsu, Metode Newton-Raphson (N-R), Metode Secant, Metode Halley dan metode lainnya. Metode Bagi Dua dan Metode Posisi Palsu adalah metode dengan memanfaatkan selang akar (metode tertutup) sehingga terjamin kekonvergenannya. Sementara Metode N-R dan Metode Secant termasuk

kedalam metode terbuka yang hanya memerlukan tebakan awal. Kelemahan dari metode terbuka yaitu tidak terjamin kekonvergenannya.

Setiap metode memiliki karakteristik, kelebihan dan kekurangan. Karakteristik dari Metode Bagi Dua terletak pada fungsi yang kontinu (Susila,1992:30). Metodenya sangat sederhana namun kekonvergenannya lambat. Karakteristik Metode N-R adalah memakai konsep garis singgung dimana turunan pertamanya tidak boleh sama dengan nol (Susila,1992:41). Dengan demikian kekonvergenannya tidak dapat dijamin. Sementara Metode Secant adalah metode yang diperoleh dari metode N-R namun menghindari perhitungan turunan dari fungsi (Susila,1992:48). Metode Secant lebih lambat jika dibandingkan dengan Metode N-R tetapi lebih disukai bilamana kerja penghitungan suatu nilai  $f'(x)$  lebih lama daripada  $\frac{1}{2}$  kali kerja penghitungan nilai  $f(x)$

Ide dari metode N-R adalah jika diberikan satu tebakan awal pada titik  $(x_i, f(x_i))$  maka dapat ditarik garis singgung hingga memotong sumbu  $x$ . Titik potong dengan sumbu  $x$  ini biasanya merupakan terkaan akar yang lebih baik dibandingkan terkaan sebelumnya. Sementara Metode Halley merupakan salah satu pengembangan dari Metode N-R, dimana Metode N-R ini sudah banyak dikenal dan diaplikasikan untuk penyelesaian akar persamaan tak linier. Metode Halley merupakan metode yang diperoleh melalui ekspansi Deret Taylor dan dengan menggunakan Metode N-R. Kekonvergenan Metode Halley dalam menemukan akar lebih cepat jika dibandingkan dengan Metode N-R.

Sebuah metode baru dalam pencarian akar persamaan tak linier muncul karena adanya kelebihan dan kekurangan dari metode-metode sebelumnya. Salah satunya adalah Metode Prediktor-Korektor Halley untuk persamaan tak linier, yang pada intinya menggunakan metode N-R dan metode Halley.

Metode N-R merupakan metode yang mudah diimplementasikan, dan memiliki laju kekonvergenan bersifat kuadratik jika hampiran dekat ke akar, namun Metode N-R mungkin tidak stabil jika dimulai dari titik yang jauh dari akar yang hendak dicari sehingga metode N-R akan konvergen secara lambat dan mungkin gagal. Sementara itu Metode Halley lebih stabil dibandingkan metode N-R, meskipun titik awal dimulai jauh dari akar yang hendak dicari, namun metode Halley mampu tetap stabil dan memiliki kekonvergenan kubik. Kelebihan Metode N-R dan metode Halley dimanfaatkan untuk mencari akar persamaan tak linier dengan formula dinamakan Prediktor Korektor Halley.

Metode Prediktor Korektor Halley memanfaatkan metode N-R untuk menemukan nilai baru yang nantinya akan digunakan sebagai nilai masukan dalam metode Halley, sehingga dengan kata lain Metode N-R berperan untuk memprediksi nilai baru yang akan digunakan dan selanjutnya nilai tersebut dikoreksi dengan Metode Halley. Hal ini dikarenakan metode Halley memiliki kekonvergenan yang lebih cepat dari Metode N-R. Modifikasi dari Metode Halley ini dinamakan Metode Prediktor-Korektor Halley.

Berdasarkan latar belakang masalah, maka dilakukan penelitian untuk membahas Metode Prediktor-Korektor Halley dalam menentukan akar

persamaan tak linier. Untuk itu penelitian ini diberi judul “ **Menentukan Akar Persamaan Tak Linier dengan Metode Prediktor-Korektor Halley**”

## **B. Perumusan Masalah**

Dari latar belakang yang diuraikan di atas, maka permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah, “ Bagaimana menentukan akar persamaan tak linier menggunakan Metode Prediktor-Korektor Halley serta seberapa laju kekonvergenannya ?”

## **C. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian**

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kepustakaan dengan berpedoman pada berbagai buku dan sumber – sumber yang relevan terhadap permasalahan solusi numerik untuk optimasi, khususnya untuk solusi numerik dengan Metode Prediktor-Korektor Halley. Sesuai dengan rumusan masalah, maka pertanyaan penelitian yang diajukan pada penelitian ini adalah :

1. Bagaimana proses pembentukan formula serta menemukan akar dari Metode Prediktor-Korektor Halley untuk persamaan tak linier ?
2. Bagaimana algoritma dari Metode Prediktor-Korektor Halley untuk persamaan tak linier?
3. Seberapa cepat laju kekonvergenan dari Metode Prediktor-Korektor Halley untuk persamaan tak linier?



#### **D. Tujuan Penelitian**

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Menemukan formula serta akar persamaan tak linier dengan Metode Prediktor-Korektor Halley untuk persamaan tak linier
2. Menyusun algoritma Metode Prediktor-Korektor Halley untuk persamaan tak linier.
3. Mengetahui kekonvergenan Metode Prediktor-Korektor Halley untuk persamaan tak linier

#### **E. Manfaat Penelitian**

Adapun manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Bagi peneliti dapat menambah wawasan tentang cara pencarian akar persamaan tak linier, terutama yang berderajat tinggi
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya metode numerik mengenai cara menentukan akar-akar persamaan tak linier menggunakan Metode Prediktor-Korektor Halley untuk persamaan tak linier.
3. Bagi peneliti lain dapat menjadikan penelitian ini sebagai bahan tambahan keustakaan.

#### **F. Metodologi Penelitian**

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan teori-teori dari berbagai buku dan sumber yang relevan, sehingga diperoleh jawaban atas permasalahan yang diteliti.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk memecahkan permasalahan penelitian adalah:

1. Mengamati masalah yang terkait dengan akar persamaan tak linier.
2. Mengkaji prinsip penggunaan metode N-R dan metode Halley untuk menyelesaikan akar persamaan tak linier.
3. Menggabungkan Metode N-R dan Metode Halley untuk menemukan solusi persamaan tak linier dengan cara menemukan tebakan akar baru dengan Metode N-R (prediktor) terlebih dahulu kemudian menjadikannya sebagai tebakan awal pada metode Halley (korektor).
4. Menyusun algoritma untuk Metode Prediktor-Korektor Halley untuk persamaan tak linier dalam menyelesaikan akar persamaan tak linier.
5. Menerapkan algoritma yang telah dibuat ke dalam program komputer.
6. Menganalisa galat dan laju kekonvergenan dari Metode Prediktor-Korektor Halley
7. Menyimpulkan hasil yang diperoleh berdasarkan teori yang telah dipelajari

## BAB IV

### PENUTUP

#### A. Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang diperoleh berdasarkan penelitian yang telah dilakukan adalah:

1. Formula Metode Prediktor Korektor Halley adalah

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f'(y_n)f(y_n)}{2[f'(y_n)]^2 - f''(y_n)f(y_n)}, \text{ dengan } y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

2. Algoritma dari Metode Prediktor Korektor Halley untuk solusi akar persamaan tak linear adalah

Masukan :

Tebakan awal  $x_0$ ,

Fungsi  $f$ ,

Maksimal iterasi  $M$ ,

Batas galat maksimal  $e$

Proses :

- a. Masukkan tebakan awal  $(x_0)$ ,  $(M)$  , galat  $(e)$
- b. Hitung nilai  $f(x_n)$ ,  $f'(x_n)$  , Apabila nilai  $f'(x_0)=0$  maka program gagal

Jika ada, hitung  $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

- c. Hitung nilai  $f(y_n)$ ,  $f'(y_n)$ ,  $f''(y_n)$ ,
- d. Masukan nilai tersebut dalam formula

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f'(y_n)f(y_n)}{2[f'(y_n)]^2 - f''(y_n)f(y_n)}$$

e. Hitung galat  $\left| \left( \frac{x_{n+1} - x_0}{x_0} \right) \right|$ , apabila nilai galat kecil dari

(e) maka nilai  $x_{n+1}$  merupakan hampiran akar yang terbaik,

f. Jika belum kecil dari (e) maka ganti nilai  $x_0 := x_{n+1}$  kemudian ulangi dari langkah b,

Keluaran :

Akar

3. Metode ini memiliki persamaan galat  $e_{n+1} = (c_2^5 - c_2^3 c_3)e_n^6 + O(e_n^7)$

Sehingga berdasarkan kekonvergenan dapat diartikan bahwa Metode

Prediktor Korektor Halley ini memiliki orde kekonvergenan enam.

## B. Saran

Penelitian pada skripsi ini merupakan penelitian yang dikerjakan dengan sumber literatur tentang pencarian akar persamaan tak linear. Adapun saran yang diberikan pada penelitian ini adalah diharapkan peneliti selanjutnya dapat memodifikasi metode ini menjadi bebas turunan karena disini masih menggunakan turunan pertama dan kedua.



## DAFTAR PUSTAKA

- Conte, Samuel D. 1992. *Dasar-Dasar Analisis Numerik*. Jakarta: Erlangga
- Hager, William W. 1988. *Applied Numerical Linier Aljebra*. United States of America : Prentice-Hall International Editions
- Inayat, Noor Khalida & Muhammad Aslam Noor. 2007. “*Predictor-Corrector Halley Method for Nonlinear Equations*.” Jurnal Applied Mathematics And Computation. 1587-1591.
- Mathews, John H., *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering, Second Edition*, Prentice-Hall International, Inc, United States of America. 1992.
- Martono, Koko. 1999. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga
- Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika
- Sutarno, Heru. 2005. *Metode Numerik*. Bandung: PT Sinar Baru Algesindo
- Spanos, Aris. 1986. *Statistical Foundations of Econometric Modelling*. New York : Cambridge University Press
- Susila, I Nyoman. 1992. *Metode Numerik*. Bandung: FMIPA ITB
- Tri Danang Massandy, “*Perhitungan Nilai Golden Ratio dengan Beberapa Algoritma Solusi Persamaan Nirlanjar*”, Makalah IF4058 Topik Khusus Informatika I – Sem. II Tahun 2011/2012