KARAKTERISTIK DISTRIBUSI MAXWELL-BOLTZMANN

SKRIPSI

sebagai salah satu persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh

ARTINA PUSPITA

NIM 14030002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2018

HALAMAN PERSETUJUAN SKRIPSI

Karakteristik Distribusi Maxwell-Boltzmann

Nama	: Artina Puspita
NIM	: 14030002
Program Studi	: Matematika (S-1)
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 30 Juli 2018

Disetujui oleh
Pembimbing

Dra. Hj Dewi Murni, M.Si
NIP. 19670828 1992003 2 002

HALAMAN PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Nama	: Artina Puspita
NIM	: 14030002
Program Studi	: Matematika (S-1)
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

dengan judul:

KARAKTERISTIK DISTRIBUSI MAXWELL-BOLTZMANN

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Padang

Padang, 30 Juli 2018

Tim Penguji

	Nama	Tanda tangan
Ketua	: Dra. Hj. Dewi Murni, M.Si	
Anggota	: Yenni Kurniawati, M.Si	
Anggota	: Dra. Hj. Helma, M.Si	

SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Artina Puspita
NIM/TM	: 14030002/2014
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: MIPA UNP

Dengan ini menyatakan, nahwa skripsi saya dengan judul "**Karakteristik Distribusi Maxwell-Boltzmann**" adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan Negara.

Dengan demikian pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Padang, 03 Agustus 2018

Diketahui oleh

Ketua Jurusan Matematika,

Muhammad Subhan, S.Si, M.Si
NIP. 19701126 199903 1 002

saya yang menyatakan,

METERAI TEMPEL
5DC4AAFF212208145
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Artina Puspita
NIM. 14030002

ABSTRAK

Artina Puspita : Karakteristik Distribusi Maxwell-Boltzmann

Selain distribusi spesial kontinu maupun diskrit, terdapat distribusi lainnya yaitu distribusi Maxwell-Boltzmann. Distribusi ini merupakan distribusi peluang kontinu yang pertama kali didefinisikan dan digunakan dalam bidang fisika untuk menggambarkan kecepatan partikel pada gas ideal. Fungsi padat peluang dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah

$$f(x;a) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3}, & x \geq 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38\ \mathrm{J/K}$ adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik. Hal penting yang perlu diketahui dari suatu distribusi adalah parameter-parameternya seperti *mean*, variansi, *skewness*, *kurtosis*, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik yang merupakan ciri-ciri atau karakteristik dari suatu distribusi. Dengan demikian tujuan penelitian ini adalah menentukan karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann.

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian dasar (teoritis), dengan menganalisis teori-teori yang relevan terhadap analisis peluang berdasarkan pada kajian kepustakaan. Dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi, langkah kerja yang dilakukan adalah sebagai berikut: pertama mencari mean dan variansi dari distribusi Maxwell-Boltzmann, kedua menguji parameter a pada distribusi Maxwell-Boltzmann dengan metode momen untuk memperoleh penduga parameter, ketiga mencari *skewness*, *kurtosis*, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik dengan menggunakan teorema-teorema dasar dalam statistika diantaranya fungsi peluang, fungsi distribusi, nilai ekspektasi, dan momen.

Hasil penilitian ini berupa parameter-parameter dari distribusi Maxwell-Boltzmann yaitu: *mean* dengan rumus $E[X] = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, variansi dengan rumus $\sigma^2 = \frac{a^2}{\pi}(3\pi - 8)$, *skewness* dengan rumus $a_3{}^* = \frac{2\sqrt{2}(16-5\pi)}{(3\pi-8)\sqrt{(3\pi-8)}}$, *kurtosis* dengan rumus $\alpha_4^* = \frac{15\pi^2+16\pi-192}{9\pi^2-48\pi+64}$, kemudian fungsi pembangkit momen dengan rumus $M_x(t) = at\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 2(a^2t^2+1)\Phi(at)e^{\frac{a^2t^2}{2}}$ dan yang terakhir fungsi karakteristik dengan rumus $\phi(t) = i\left\{at\sqrt{\frac{2}{\pi}} - (a^2t^2-1)e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\left[\mathrm{erfi}\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) - i\right]\right\}$.

Kata kunci : Distribusi Maxwell-Boltzmann, Karakteristik Distribusi, Parameter-parameter Distribusi.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillahirabbil'aalamiin. Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Karakteristik Distribusi Maxwell-Boltzmann".**

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan pada program sarjana S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang. Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis banyak mendapat sumbangan pemikiran, bimbingan, serta saran dan petunjuk dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Hj. Dewi Murni, M.Si, dosen pembimbing dan Penasehat Akademik sekaligus Sekteratis Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang.
2. Ibu Dra. Hj. Helma, M.Si dan Ibu Yenni Kurniawati, S.Si, M.Si, sebagai dosen Penguji.
3. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si, sebagai Ketua Prodi Matematika Universitas Negeri Padang.
4. Bapak Muhammad Subhan, S.Si, M.Si sebagai Ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang.

5. Seluruh pihak yang turut membantu dan mendukung penulis dalam penyelesaian. Semoga semua bimbingan, bantuan, dan kerjasamanya dapat dibalas oleh Allah SWT sebagai amal ibadah.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk memberikan yang terbaik, namun penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini belum sempurna, karena keterbatasan pengetahuan dan kemampuan yang penulis miliki. Untuk itu kritik dan saran sangat penulis harapkan demi kesempurnaan penyusunan skripsi berikutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca umumnya. Amin

Padang,   Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

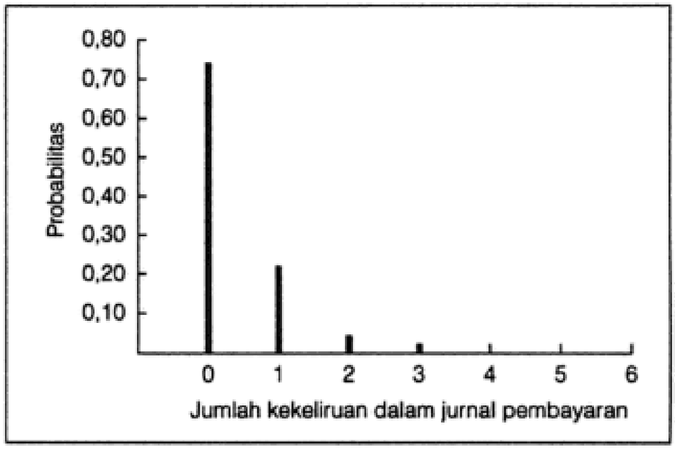
A. Latar Belakang Masalah

Statistika inferensial adalah cabang statistika yang berhubungan dengan cara-cara menganalisis sebagian data untuk sampai pada penarikan kesimpulan mengenai keseluruhan kumpulan data induknya. Menurut Walpole (1992: 113) generalisasi dari statistika inferensial mempunyai ketidakpastian, karena hanya memandang sebagian dari seluruh data yang ada. Untuk itu diperlukan model matematik yang secara teori dapat menjelaskan perilaku populasi tersebut. Dimana model matematik secara teoritik ini disebut dengan distribusi peluang.

Distribusi peluang terbagi atas dua bagian berdasarkan peubah acaknya. Jika peubah acaknya kontinu maka ia disebut distribusi peluang kontinu. Sebaliknya, jika peubah acaknya diskrit maka ia dinamakan distribusi peluang diskrit. Beberapa contoh dari distribusi peluang kontinu yaitu distribusi nornal, distribusi eksponensial, distribusi gamma dan lain-lain. Sedangkan contoh dari distribusi peluang diskrit yaitu distribusi seragam diskrit, distribusi binomial, distribusi hipergeometrik dan lain-lain (Walpole, 1995: 182-269).

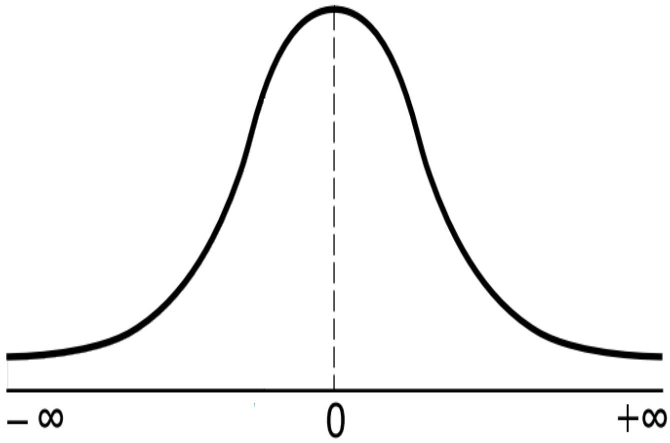
Setiap distribusi peluang memiliki karakteristik masing-masing. Karakteristik dari suatu distribusi bisa dilihat dari parameter-parameternya. Parameter yang dilihat berupa *mean*, variansi, *skewness*, *kurtosis*, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik. Setiap parameter tersebut memiliki kegunaan yang berbeda-beda. *Mean* dan variansi berguna untuk pemusatan data, *skewness* dan *kurtosis* berguna untuk melihat bentuk grafik, seperti kemiringan dan posisi puncak dari distribusi tersebut. Sedangkan fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik untuk melihat keluarganya.

Salah satu contoh distribusi peluang spesial diskrit yang sering dijumpai pada mata kuliah jurusan Matematika yaitu distribusi Poisson dengan parameternya λ. Distribusi ini banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari terutama dalam bidang teori antrian. Menurut Mason (1996: 264) karaktersitik dari distribusi Poisson yaitu distribusi probabilitasnya selalu menjulur positif seperti contoh pada gambar berikut:



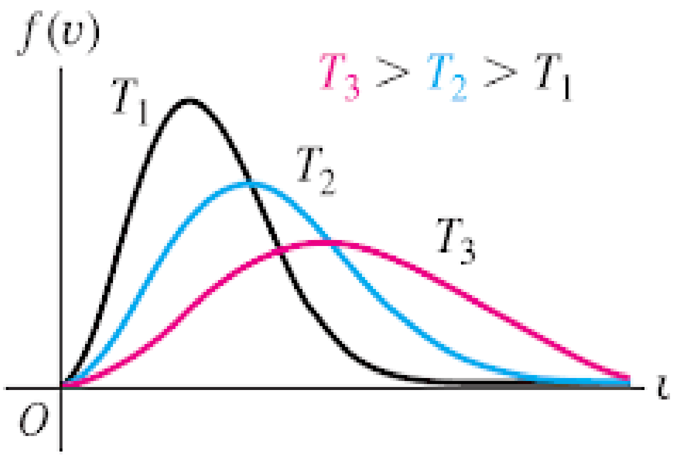
Gambar 1. Distribusi Probabilitas Poisson Untuk $\boldsymbol{\mu = 0,3}$

Sedangkan untuk distribusi spesial kontinu yang sering dijumpai adalah distribusi normal. Aplikasi dari distribusi normal sangatlah luas penggunaannya. Menurut Soetopo (2017: 83) salah satu aplikasi dari distribusi normal adalah dalam bidang analisis hidrologi. Distribusi normal bersifat simetris terhadap parameter μ. Bentuk distribusi normal dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 2. Distribusi Probabilitas Normal

Selain distribusi spesial kontinu maupun diskrit, terdapat distribusi lainnya yang perannya tak kalah penting dalam pengembangan ilmu pengetahuan. Salah satu distribusi yang bukan termasuk distribusi spesial kontinu maupun diskrit adalah distribusi Maxwell-Boltzmann. Distribusi Maxwell-Boltzmann merupakan distribusi peluang kontinu yang dinamai oleh James Clerk Maxwell dan Ludwig Boltzmann. Distribusi ini pertama kali didefinisikan dan digunakan dalam bidang fisika (khususnya dalam mekanika statistik) untuk menggambarkan kecepatan partikel pada gas ideal. Distribusi ini bergantung pada suhu sistem dan massa partikel. Seperti yang terlihat pada (Young, 2008: 612) gambar berikut:



Gambar 3. Distribusi Probabilitas Maxwell-Boltzmann

Aplikasi dari distribusi Maxwell-Boltzmann menurut Wati (2014: 1) adalah menetukan kecepatan molekuler. Salah satu penerapannya ialah pada distribusi partikel tabung gas rumahan baik yang 3 kg maupun 12 kg. Dengan memahami distribusi Maxwell-Boltzmann, kita dapat mengetahui bagaimana kecepatan molekular yang terjadi pada tabung dan juga fenomena ledakan tabung gas. Selain itu juga berguna dalam pelebaran spektrum akibat efek doppler contohnya untuk menghitung kecepatan bintang-bintang. Menurut Laurendeau (2005: 292) fungsi padat peluang dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah

$$f(x;a) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3}, & x \geq 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38$ J/K adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dilakukan penelitian terhadap masalah ini dengan judul "**Karakteristik Distribusi Maxwell-Boltzmann**".

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah "Bagaimanakah parameter-parameter yang dapat menentukan sifat dan karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann?"

C. Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka batasan masalah dari penelitian ini adalah hanya mengkaji tentang parameter-parameter distribusi Maxwell-Boltzmann.

D. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas, maka pendekatan penelitian yang digunakan adalah analisis teori peluang. Adapun pertanyaan penelitian yang akan dijawab dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana *Mean* dari distribusi Maxwell-Boltzmann?
2. Bagaimana Variansi dari distribusi Maxwell-Boltzmann?
3. Bagaimana *Skewness* dari distribusi Maxwell-Boltzmann?
4. Bagaimana *Kurtosis* dari distribusi Maxwell-Boltzmann?
5. Bagaimana Fungsi Pembangkit Momen dari distribusi Maxwell Boltzmann?
6. Bagaimana Fungsi Karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann?

E. Tujuan Penelitian

Berdasarkan pertanyaan penelitian di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan *Mean* dari distribusi Maxwell-Boltzmann.
2. Menentukan Variansi dari distribusi Maxwell-Boltzmann.
3. Menentukan *Skewness* dari distribusi Maxwell-Boltzmann.
4. Menentukan *Kurtosis* dari distribusi Maxwell-Boltzmann.
5. Menentukan Fungsi Pembangkit Momen dari distribusi Maxwell-Boltzmann.
6. Menentukan Fungsi Karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann.

F. Manfaat Penelitian

Melalui penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi peneliti, pembaca, dan peneliti selanjutnya yaitu:

1. Menambah wawasan dan ilmu pengetahuan bagi peneliti dan pembaca tentang bentuk fungsi padat peluang dan fungsi distribusi komulatif dari distribusi Maxwell-Boltzmann.
2. Sebagai bahan masukan bagi peneliti selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian.
3. Memberikan informasi dan pengetahuan bagi pembaca tentang *mean*, variansi, *skewness*, *kurtosis*, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann.

G. Metodologi Penelitian

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian dasar (teoritis), dengan menganalisis teori-teori yang relevan terhadap analisis peluang berdasarkan pada kajian kepustakaan. Dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi, langkah kerja yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mencari *Mean* dan Variansi dari distribusi Maxwell-Boltzmann.
2. Menguji parameter a pada distribusi Maxwell-Boltzmann dengan metode momen untuk memperoleh penduga parameter
3. Mencari *skewness*, *kurtosis*, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik dengan menggunakan teorema-teorema dasar dalam statistika diantaranya fungsi peluang, fungsi distribusi, nilai ekspektasi, dan momen.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Kajian teori ini berisikan tentang konsep, teorema dan akibat yang akan digunakan pada bab selanjutnya. Beberapa konsep analisis peluang akan dijelaskan pada bab ini seperti:

A. Fungsi peluang

Fungsi peluang dari peubah acak kontinu dinamakan juga fungsi padat peluang. Fungsi padat peluang dapat menunjukkan bentuk distribusi dari harga-harga peubah acak. Definisi yang harus dipenuhi oleh fungsi padat peluang (Walpole, 2003: 85) adalah:

Definisi 1:

Sebuah fungsi $f(x)$ dinamakan fungsi padat peluang dari peubah acak kontinu X yang terdefinisi di semua himpunan bilangan real R dan memenuhi persamaan berikut:

1. $f(x) \geq 0$ untuk $x \epsilon R$
2. $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

   Dengan syarat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

B. Fungsi Distribusi

Fungsi distribusi bergantung pada fungsi peluang. Fungsi distribusi dikenal juga dengan distribusi kumulatif yang dilambangkan dengan $F(x)$.

Distribusi untuk peubah acak kontinu didefinisikan (Walpole, 1995: 87) sebagai berikut:

Definisi 2:

Suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi padat $f(x)$ memiliki distribusi kumulatif $F(x)$ sebagai berikut:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

untuk $-\infty < x < \infty$.

C. Nilai Ekspektasi

Nilai ekspektasi suatu peubah acak merupakan konsep sangat penting pada kajian distribusi peluang. Nilai ekspektasi dari suatu peubah acak X dinyatakan dengan $E(X)$ atau $E[X]$. Ekspektasi matematika adalah nilai rata-rata suatu fungsi distribusi. Seperti yang dijelaskan oleh Canavos (1984: 60) nilai ekspektasi didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3:

Nilai ekspektasi peubah acak X adalah rata-rata atau mean dari X dan diberikan oleh:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\ dx$$

untuk X kontinu, dimana $f(x)$ adalah fungsi padat peluang.

Definisi 4:

Secara umum nilai ekspektasi suatu fungsi $g(x)$ dari peubah acak kontinu X dapat ditulis seperti rumus di bawah

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx$$

Selain Definisi 3 dan Definisi 4 terdapat juga teorema dari ekspektasi yaitu:

Teorema 1:

Menurut Freund (1987: 139) jika a dan b merupakan suatu konstanta, maka

$$E(ax + b) = aE(x) + b$$

Bukti:

Dengan menggunakan Definisi 3, Definisi 4 dengan $g(x) = ax + b$, dan Definisi 1 nomor 2 diperoleh

$$E(ax + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (ax)\, f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} (b)\, f(x)\, dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} (x)\, f(x)\, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = aE(x) + b(1)$$

$$= aE(x) + b\blacksquare$$

Terdapat dua akibat dari Teorema 1 di atas yaitu:

Akibat 1:

Jika a konstan maka

$$E(ax) = aE(x)$$

Bukti:

Dengan menggunakan Definisi 3 dan Definisi 4 dengan $g(x) = ax$, diperoleh

$$E(ax) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax)\, f(x)\, dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = aE(x)\blacksquare$$

Akibat 2:

Jika b konstan maka

$$E(b) = b$$

Bukti:

Dengan menggunakan Definisi 1 nomor 2 dan Definisi 4 dengan $g(x) = a$, diperoleh:

$$E(b) = \int_{-\infty}^{\infty} (b)\, f(x)\, dx = b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = b(1) = b \blacksquare$$

D. Momen

Momen dari peubah acak x merupakan nilai yang diharapkan dari fungsi X tertentu. Momen-momen ini adalah langkah yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan karakteristik dari suatu distribusi. Terdapat beberapa definisi tentang momen yaitu:

Definisi 5:

Menurut Canavos (1984: 63) misalkan X peubah acak. Momen ke r terhadap titik asal didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_r' = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, f(x)\, dx$$

Definisi 6:

Menurut Canavos (1984: 64) misalkan X peubah acak. Pusat momen ke r terhadap titik asal didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_r = E(X - \mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r\, f(x)\, dx$$

Definisi 7:

Menurut Freund (1999: 141) μ_2 disebut juga dengan variansi dari suatu distribusi X dan dinotasikan oleh σ^2, $Var(X)$ atau $V(X)$.

Variansi dari suatu distribusi dapat dirumuskan dalam Teorema 2 sebagai berikut:

Teorema 2:

Menurut Rohatgi (1976: 89) Jika $\sigma^2(x)$ merupakan variansi dari suatu peubah acak X, maka

$$\sigma^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mu_2 = E(X-\mu)^2 &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)\\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2\\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + \big(E(X)\big)^2\\ &= E(X^2) - 2\big(E(X)\big)^2 + \big(E(X)\big)^2\\ &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \blacksquare\end{aligned}$$

Selain Teorema 2 mengenai rumus variansi terdapat juga Teorema 3 tentang *skewness* dan Teorema 4 tentang *kurtosis* sebagai berikut:

Teorema 3:

Menurut Canavos (1984: 65-66) momen ketiga atau *skewness* terhadap titk asal diberikan oleh:

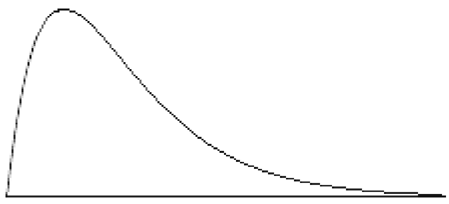
$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$$

Bukti:

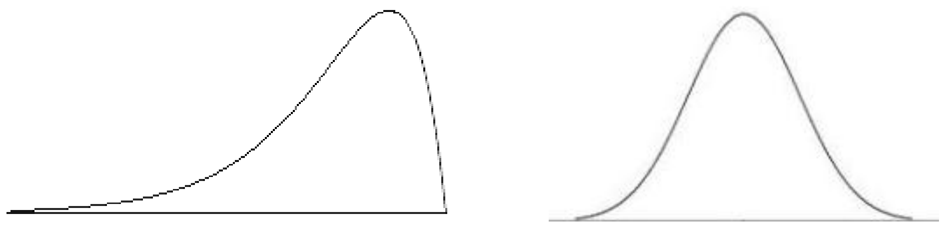
$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = E(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3)$$

$$\mu_3 = E(X^3) - 3E(X^2)\mu + 3E(X)\mu^2 - E(\mu^3)$$
$$= \mu_3' - 3\mu_2'\mu + 3\mu^3 - \mu^3$$
$$= \mu_3' - 3\mu_2'\mu + 2\mu^3 \blacksquare$$

Untuk peubah acak yang distribusi peluangnya memiliki puncak tunggal, terdapat tiga kemungkinan yaitu jika $\mu_3 < 0$ distribusi itu dinamakan *negatively skewed*, jika $\mu_3 > 0$ distribusi itu dinamakan *positively skewed*, dan jika $\mu_3 = 0$ maka dinamakan *symmetrical*.



(a)



(b) (c)

Gambar 4. (a) *Positively Skewed*, (b) *Negatively Skewed*, (c) *Symmetric*

Standar momen ketiga atau yang dikenal dengan koefisien *skewness* diberikan oleh

$$\alpha_3^* = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} \tag{2.1}$$

Teorema 4:

Menurut Canavos (1984: 65-67) momen keempat dari titik asal terkait dengan *kurtosis* dari suatu distribusi peluang X. Dengan momen keempat dari titik asal adalah

$$\mu_4 = E(X-\mu)^4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4$$

Bukti:

$$\mu_4 = E(X-\mu)^4 = E(X^4 - 4X^3\mu + 6X^2\mu^2 - 4X\mu^3 + \mu^4)$$

$$\mu_4 = E(X^4) - 4E(X^3)\mu + 6E(X^2)\mu^2 - 4E(X)\mu^3 + \mu^4$$

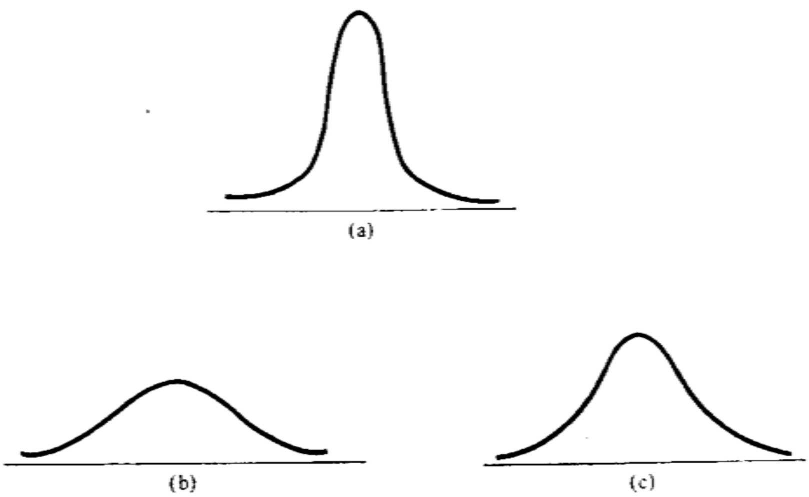
$$= \mu_4' - 4\mu_3'\mu + 6\mu_2'\mu^2 - 4\mu^4 + \mu^4$$

$$= \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4 \blacksquare$$

Standar momen keempat atau yang dikenal dengan koefisien *kurtosis* diberikan oleh

$$\alpha_4{}^* = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} \tag{2.2}$$

Jika $\alpha_4 > 3$ distribusi peluangnya relatif memiliki keruncingan yang tinggi disebut dengan *leptokurtic*, jika $\alpha_4 < 3$ distribusi peluangnya memiliki puncak yg datar disebut *platykurtic,* dan jika $\alpha_4 = 3$ maka distribusi peluangnya memiliki puncak yg tidak terlalu runcing dan tidak pula terlalu datar disebut dengan *mesokurtic*.



Gambar 5. (a) *Leptokurtic*, (b) *Platykurtic*, (c) *Mesokurtic*

E. Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen berguna untuk melihat *family* atau keluarga dari suatu distribusi peluang. Untuk mencari fungsi pembangkit momen dari suatu distribusi peluang dapat digunakan definisi dibawah ini:

Definisi 8:

Menurut Freund (1987: 153) fungsi pembangkit momen dari peubah acak X, dimana X kontinu dan terdefinisi, diberikan oleh

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\ dx$$

Dalam penyelesaian masalah yang terlibat dalam penggunaan fungsi pembangkit momen dapat disederhanakan dengan Teorema 5 berikut ini:

Teorema 5:

Menurut Freund (1987: 156) jika a dan b merupakan suatu konstanta, maka

1. $M_{X+a}(t) = E\left(e^{(x+a)t}\right) = e^{at} M_X(t)$
2. $M_{bX}(t) = E(e^{bxt}) = M_X(bt)$
3. $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left(e^{\left(\frac{X+a}{b}\right)t}\right) = e^{\frac{a}{b}t} M_X\left(\frac{t}{b}\right)$

Bukti :

1. $M_{X+a}(t) = E\left(e^{(x+a)t}\right) = e^{at} M_X(t)$

Dengan menggunakan Definisi 8 dengan $X = X + a$, diperoleh

$$M_{X+a}(t) = E\left(e^{(x+a)t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+a)t} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt+ta} f(x)\, dx$$

$$M_{X+a}(t) = E\left(e^{(x+a)t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\, e^{ta} f(x)\, dx$$

$$= e^{at} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x)\, dx$$

$$= e^{at} M_X(t) \blacksquare$$

2. $M_{bX}(t) = E(e^{bxt}) = M_X(bt)$

   Dengan menggunakan Definisi 8 dengan $X = bX$, diperoleh

$$M_{bX}(t) = E\left(e^{(bx)t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(bx)t} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x)bt} f(x)\, dx$$

$$= M_X(bt) \blacksquare$$

3. $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left(e^{\left(\frac{x+a}{b}\right)t}\right) = e^{\frac{a}{b}t} M_X\left(\frac{t}{b}\right)$

   Dengan menggunakan Definisi 8 dengan $X = \frac{X+a}{b}$, diperoleh

$$M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left(e^{\left(\frac{x+a}{b}\right)t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{x+a}{b}\right)t} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{at}{b}}\, e^{\frac{xt}{b}} f(x)\, dx$$

$$= e^{\frac{at}{b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t}{b}(x)} f(x)\, dx$$

$$= e^{\frac{a}{b}t} M_X\left(\frac{t}{b}\right) \blacksquare$$

F. Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik berguna untuk mencirikan suatu distribusi, fungsi karakteristik merupakan perluasan dari fungsi pembangkit momen, tetapi fungsi pembangkit momen hanya terbatas pada bilangan real saja. Walaupun fungsi pembangkit momennya tidak ada, tapi fungsi karakteristiknya selalu ada karena fungsi karakteristik memiliki nilai imajiner. Hal ini adalah kegunaan utama dari fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik dilambangkan (Spiegel, 2004: 67-68) seperti berikut:

$$\phi(t) = M_X(it) = E\left(e^{itx}\right)$$

Untuk memperoleh fungsi karakteristik dari suatu distribusi dapat digunakan definisi berikut:

Definisi 9:

Fungsi karakteristik dari variabel acak X peubah acak kontinu didefinisikan (Dedewicz,1995: 323) sebagai:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

dimana $i =$ imajiner.

G. Distribusi Maxwell-Boltzmann

Distribusi Maxwell-Boltzmann sangat diperlukan dalam menentukan karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann. Hal utama yang dibutuhkan dalam menentukan karakteristik distribusi Maxwell-Boltzmann adalah fungsi padat peluang dari distribusi Maxwell-Boltzmann. Fungsi padat peluang dari distribusi maxwell-boltzmann adalah

$$f(x;a) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3}, & x \geq 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases} \tag{2.3}$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38$ J/K adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik (Laurendeau, 2005: 292).

H. Distribusi Gamma

Distribusi gamma merupakan salah satu distribusi yang diperlukan dalam menentukan karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann dengan fungsi padat peluang dari distribusi Gamma (Freund, 1987: 210) adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \text{ yang lainnya} \end{cases} \qquad (2.4)$$

dimana $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$

Untuk mempermudah memperoleh hasil dengan menggunakan fungsi padat peluang dari distribusi gamma dibutuhkan definisi tentang fungsi gamma yaitu:

Definisi 10:

Fungsi gamma (Freund, 1987: 210) adalah

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \quad untuk\ \alpha > 0$$

dengan mengintegrasikan fungsi gamma diatas bagian per bagian maka diperoleh teorema berikut :

Teorema 6:

Sifat-sifat fungsi gamma (Freund, 1987: 210):

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Bukti:

1. $\Gamma(1) = 1$

Dengan mensubstitusikan nilai 1 ke Definisi 10, diperoleh

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1\blacksquare$$

2. $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$

Dengan menjabarkan rumus fungsi gamma, sehingga diperoleh

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = (-x^{\alpha-1}e^{-x})|_0^\infty - \int_0^\infty -(\alpha-1)\,x^{(\alpha-1)-1}e^{-x}dx$$

$$= 0 + (\alpha-1)\int_0^\infty x^{(\alpha-1)-1}e^{-x}\,dx$$

$$= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\blacksquare$$

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Dengan menggunakan fungsi gamma dengan $x = y^2/2$ dimana $2\,dx = 2y\,dy$, sehingga diperoleh

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{y^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}-1} e^{-\left(\frac{y^2}{2}\right)}y\,dy$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{y^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{y^2}{2}\right)}y\,dy = \int_0^\infty \sqrt{2}e^{-\left(\frac{y^2}{2}\right)}\,dy$$

$$= \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{y^2}{2}\right)}\,dy$$

kemudian dengan merubah ke dalam koordinat kutub dan untuk mendapatkan $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ maka dicari $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$ terlebih dahulu sehingga

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left[\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{y^2}{2}\right)}\,dy\right]\left[\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{y^2}{2}\right)}\,dy\right]$$

$$= \left[\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{y^2}{2}\right)}\,dy\right]\left[\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}\,dy\right]$$

$$= 2\iint_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-\frac{1}{2}b^2} + 1\right)\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1)\,d\theta = 2[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Sehingga

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\blacksquare$$

I. Distribusi Normal

Distribusi normal juga merupakan salah satu distribusi yang diperlukan dalam menentukan karakteristik dari distribsi Maxwell-Boltzmann dengan fungsi padat peluang dari distribusi normal atau disebut juga distribusi Gaussian (Spiegel, 1975: 109) yaitu:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.5}$$

dimana μ dan σ adalah mean dan standar deviasinya. Menurut Hogg (2005: 163) distribusi normal baku dengan $\sigma = 1$, $\mu = 0$ dan peubah acak Z, diberikan oleh

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \, dw \tag{2.6}$$

Fungsi $\Phi(z)$ berkaitan langsung dengan tabulasi fungsi error, $\mathrm{erf}(z)$ diberikan (Spiegel, 1975: 109) oleh

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-u^2} \, du \tag{2.7}$$

J. Penduga Parameter

Sampel yang diambil dari suatu populasi haruslah mewakili populasi tersebut sehingga parameter (popupasi) diduga melalui statistik (sampel). Penduga parameter yang baik harus takbias seperti definisi (Freund, 1987: 333) berikut ini:

Definisi 11:

Suatu statistik $\hat{\theta}$ dikatakan estimator takbias dengan parameter θ jika dan hanya jika $E(\hat{\theta}) = \theta$

Untuk memperoleh penduga parameternya dibutuhkan metode-motede seperti metode momen, metode maksimum *likelihood* atau metode *bayesian*. Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah metode momen yang didefinisikan (Freund, 1987: 348) sebagai berikut:

Definisi 12:

Momen sampel ke-k dari himpunan observasi $x_1, x_2, \ldots$, dan x_n adalah *mean* dari pangkat ke-k mereka dan dinotasikan dengan m'_k dengan rumus

$$m'_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}$$

Dengan demikian, $m'_k = \mu'_k$ untuk $k = 1,2, \dots, p$, untuk p parameter dari polulasi.

BAB III
PEMBAHASAN

Karakteristik suatu distribusi dapat dilihat pada parameter-parameternya seperti *mean*, variansi, *skewness*, *kurtosis*, fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik. Karakteristik inilah yang membedakan distribusi yang satu dengan yang lainnya. Untuk menentukan karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann diperlukan fungsi padat peluang dari distribusi Maxwell-Boltzmann. Bentuk fungsi padat peluang dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah:

$$f(x;a) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3}, & x \geq 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38\ \mathrm{J/K}$ adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik (Laurendeau, 2005: 292).

Sebelum menentukan karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann dibuktikan terlebih dahulu bahwa fungsi padat peluang distribusi Maxwell-Boltzmann memenuhi Definisi 1. Menurut Definisi 1 suatu fungsi peluang dikatakan fungsi padat peluang jika memenuhi persamaan berikut:

1. $f(x) \geq 0$ untuk $x \in R$
2. $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

   Dengan syarat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Dengan mensubstitusikan fungsi padat peluang distribusi Maxwell-Boltzmann ke dalam persamaan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ diperoleh

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \left[x\left(-a^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -a^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\, dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \left[0 + \int_0^\infty a^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\, dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \left[a^2 \int_0^\infty e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^\infty e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)^2}\, dx \right] \tag{3.1}$$

dengan memisalkan $\frac{x}{a\sqrt{2}} = z$ dan menurunkan fungsi z terhadap x diperoleh $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a\sqrt{2}}$, atau $dx = a\sqrt{2}\, dz$. Dengan batas ketika $x = 0$ maka $z = 0$ dan ketika $x = \infty$ maka $z = \infty$. Sehingga persamaan (3.1) di atas menjadi

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3}\, dx = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^\infty a\sqrt{2}\, e^{-z^2}\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^\infty e^{-z^2}\, dx \right] \tag{3.2}$$

dimana

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y^2} dy = i$$

Dengan merubah ke dalam bentuk integral kutub, diperoleh

$$i^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

$$= \iint_0^\infty e^{-(y^2+x^2)} dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{b \to \infty} \left(\int_0^b e^{-u}\, du \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Diperoleh

$$i = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{3.3}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3) ke dalam persamaan (3.2) maka diperoleh

$$\int_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{(2a^2)}}}{a^3}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$$

$$= 1$$

karena $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ berarti fungsi padat peluang distribusi Maxwell-Boltzmann memenuhi kriteria suatu fungsi peluang, sehingga fungsi padat peluang distribusi Maxwell-Boltzmann merupakan suatu fungsi peluang.

Berikut ini akan dijelaskan mengenai parameter-parameter dari distribusi Maxwell-Boltzmann yang menentukan karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann. Parameter-parameter tersebut adalah:

A. *Mean* dari Distribusi *Maxwell-Boltzmann*.

Mean dari suatu distribusi peluang merupakan kecendrungan dari suatu data. Kecendrungan suatu data ini disebut juga dengan ukuran pemusatan data. *Mean* merupakan ukuran pemusatan data yang sering digunakan karena melibatkan seluruh data.

Berdasarkan Definisi 3 yaitu ekspektasi atau *mean* dari X dan dengan mensubstitusikan fungsi padat peluang dari distribusi Maxwell-Boltzmann yang terdapat di dalam persamaaan (2.3), maka ekspektasi dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah:

$$E[X] = \int_0^\infty x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{(2a^2)}}}{a^3} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty x^2 e^{\frac{-x^2}{(2a^2)}} x \, dx \qquad (3.4)$$

Dengan memisalkan $\frac{x^2}{2a^2} = u \to x^2 = 2a^2 u$, kemudian menurunkan fungsi u terhadap x sehingga menjadi $\frac{du}{dx} = \frac{x}{a^2}$. Dan menyederhanakannya menjadi $x\,dx = a^2 du$. Untuk batasnya, ketika $x = 0$ maka $u = 0$ dan $x = \infty$ maka $u = \infty$. Selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan (3.4) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$E[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty 2a^2 u e^{-u} \, a^2 du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2a \int_0^\infty u e^{-u} \, du$$

berdasarkan Definisi 10 diperoleh

$$E[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2a \int_0^\infty u^{2-1} e^{-u} \, du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2a \left(\Gamma(2)\right)$$

menurut Teorema 6 nomor 2 diperoleh

$$E[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2a\left((2-1)\Gamma(2-1)\right)$$

$$E[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}2a\big((1)\Gamma(1)\big)$$

menurut Teorema 6 nomor 1 diperoleh

$$E[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}2a\big((1)(1)\big)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}2a(1)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}2a \qquad (3.5)$$

Jadi mean dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah

$$E[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}2a$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38\ \mathrm{J/K}$ adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik.

B. Variansi dari Distribusi *Maxwell-Boltzmann*.

Variansi dari distribusi Maxwell-Boltzmann dapat dicari dengan Teorema 2. Untuk memperoleh variansi, terlebih dahulu diperoleh $E[X^2]$ dengan menggunakan Definisi 5 sehingga diperoleh persamaan

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \qquad (3.6)$$

dengan mensubstitusikan fungsi padat peluang distribusi Maxwell-Boltzman pada persamaan (2.3) ke dalam persamaan (3.6) diperoleh persamaan berikut:

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty x^4 e^{\frac{-x^2}{2a^2}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty x^3 e^{\frac{-x^2}{2a^2}} x \; dx \tag{3.7}$$

Dengan memisalkan $\frac{x^2}{2a^2} = u \rightarrow x^2 = 2a^2 u,$ kemudian menurunkan fungsi u terhadap x sehingga menjadi $\frac{du}{dx} = \frac{x}{a^2}$. Dan menyederhanakannya menjadi $x\ dx = a^2 du$. Untuk batasnya, ketika $x = 0$ maka $u = 0$ dan $x = \infty$ maka $u = \infty$. Selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan (3.7) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$E[X^2] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty (2a^2 u)^{\frac{3}{2}} e^{-u} a^2 \, du$$

$$= 4a^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (u)^{\frac{3}{2}} e^{-u} \, du$$

berdasarkan Definisi 10 diperoleh

$$E[X^2] = 4a^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (u)^{\frac{5}{2}-1} e^{-u} \, du$$

$$= 4a^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \right)$$

menurut Teorema 6 nomor 2 diperoleh

$$E[X^2] = 4a^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{5}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{5}{2} - 1\right) \right)$$

$$E[X^2] = 4a^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$= 4a^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

menurut Teorema 6 nomor 3 diperoleh

$$E[X^2] = 4a^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\right)$$

$$= 3a^2 \tag{3.8}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.5) dan (3.8) ke Teorema 2 maka diperoleh persamaan berikut:

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= 3a^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}2a\right)^2$$

$$= 3a^2 - \frac{8a^2}{\pi}$$

$$= \frac{a^2}{\pi}(3\pi - 8) \tag{3.9}$$

Jadi variansi dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah

$$E[X] = \frac{a^2}{\pi}(3\pi - 8)$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38\ \mathrm{J/K}$ adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik.

Estimator takbias

Suatu estimator dikatakan baik apabila estimator tersebut takbias. Sebelum mengestimasi estimator tersebut, diperoleh penduga parameter. Untuk memperoleh penduga parameter dibutuhkan metode-metode seperti metode momen, metode *likelihood*, dan metode *bayesian*. Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah metode momen, dengan menggunakan metode momen seperti yang terdapat pada Definisi 12 diperoleh

$$m_1' = \mu_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

berdasarkan Definisi 5 maka $\mu_1' = E[X]$ sedangkan $E[X]$ menurut Definisi 3 adalah *mean* dari distribusi Maxwell-Boltzmann, dimana *mean* dari distribusi Maxwell-Boltzmann terdapat pada persamaan (3.5) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$m_1' = \mu_1' = E[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}2a$$

maka

$$\hat{a} = \frac{m_1'}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

karena

$$m_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

maka penduga parameter $\hat{a}$ adalah pada persamaan berikut:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{3.10}$$

Hal ini terbukti karena persamaan (3.10) memenuhi Definisi 11 yaitu:

$$E(\hat{a}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mu_1'$$

$$E(\hat{a}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$$

$$= a$$

Jadi penduga parameter takbias dengan metode momen untuk distribusi Maxwell-Boltzmann adalah

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

C. *Skewness* dari Distribusi *Maxwell-Boltzmann*.

Skewness berguna untuk melihat bentuk grafik dari suatu distribusi. Skewness biasa juga disebut kemencengan atau kemiringan. *Skewness* dapat diperoleh dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.1) tetapi persamaan tersebut membutuhkan Teorema 3, begitu juga dengan Teorema 3 membutuhkan persamaan lain untuk memperoleh μ_3 yaitu Definisi 5. Jadi sebelum menentukan *skewness*, langkah pertama yang harus dilakukan yaitu memperoleh μ_3'. Kemudian μ_3 dan terakhir diperoleh persamaan *skewness*nya. Untuk μ_3' dapat diperoleh dengan menggunakan Definisi 5 dengan demikian diperoleh rumus μ_3' pada persamaan berikut:

$$\mu_3' = E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)\, dx \tag{3.11}$$

dengan mensubstitusikan fungsi padat peluang distribusi Maxwell-Boltzman persamaan (2.3) ke dalam persamaan (3.11), diperoleh

$$\mu_3' = \int_{0}^{\infty} x^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3} dx$$

$$\mu_3' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a^3}\int_0^\infty x^5 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a^3}\int_0^\infty x^4 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}x\ dx \tag{3.12}$$

Dengan memisalkan $\frac{x^2}{2a^2} = u \to x^2 = 2a^2u$, kemudian menurunkan fungsi u terhadap x sehingga menjadi $\frac{du}{dx} = \frac{x}{a^2}$. Dan menyederhanakannya menjadi $x\,dx = a^2du$. Untuk batasnya, ketika $x = 0$ maka $u = 0$ dan $x = \infty$ maka $u = \infty$. Selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan (3.12) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\mu_3' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a^3}\int_0^\infty (2a^2u)^2e^{-u}\,a^2du$$

$$= 4a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u^2e^{-u}du$$

berdasarkan Definisi 10 diperoleh

$$\mu_3' = 4a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (u)^{3-1}e^{-u}\,du$$

$$= 4a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big(\Gamma(3)\big)$$

menurut Teorema 6 nomor 2 diperoleh

$$\mu_3' = 4a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big((3-1)\Gamma(3-1)\big)$$

$$= 4a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big((2)\Gamma(2)\big)$$

$$\mu_3' = 4a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big((2)(1)\Gamma(1)\big)$$

berdasarkan Teorema 6 nomor 1 diperoleh

$$\mu_3' = 4a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big((2)(1)(1)\big)$$

$$= 4a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2)$$

$$= 8a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad (3.13)$$

Kemudian disubstitusikan persamaan (3.5), (3.8) dan (3.13) ke dalam Teorema 3 sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\mu_3 = 8a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 3(3a^2)\left(2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + 2\left(2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^3$$

$$= 8a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 18a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{32a^3}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$= \frac{32a^3}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 10a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$= a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{32}{\pi} - 10\right)$$

$$= a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{32 - 10\pi}{\pi}\right) \qquad (3.14)$$

disubstitusikan persamaan (3.9) dan persamaan (3.14) ke dalam persamaan (2.1) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\alpha_3^* = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{32-10\pi}{\pi}\right)}{\left(\frac{a^2}{\pi}(3\pi-8)\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{32-10\pi}{\pi}\right)}{\frac{a^3}{\pi}(3\pi-8)\sqrt{\frac{1}{\pi}(3\pi-8)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\frac{32-10\pi}{\pi}\right)}{\frac{(3\pi-8)}{\pi}\sqrt{(3\pi-8)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(32-10\pi)}{(3\pi-8)\sqrt{(3\pi-8)}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(16-5\pi)}{(3\pi-8)\sqrt{(3\pi-8)}} \qquad (3.15)$$

Jadi *skewness* dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah

$$\alpha_3^* = \frac{2\sqrt{2}(16-5\pi)}{(3\pi-8)\sqrt{(3\pi-8)}}$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38\ \mathrm{J/K}$ adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik.

D. *Kurtosis* dari Distribusi *Maxwell-Boltzmann*.

Kurtosis berguna untuk melihat bentuk grafik dari suatu distribusi. *Kurtosis* biasa juga disebut keruncingan atau posisi puncak suatu grafik. *Kurtosis* dapat diperoleh dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.2) tetapi persamaan tersebut membutuhkan Teorema 4, begitu juga dengan Teorema 4 membutuhkan persamaan lain untuk memperoleh μ_4 yaitu Definisi 5. Jadi sebelum menentukan *kurtosis*, langkah pertama yang harus dilakukan yaitu memperoleh μ'_4. Kemudian μ_4 dan terakhir diperoleh persamaan *kurtosis*nya. Untuk μ'_4. dapat diperoleh dengan menggunakan Definisi 5 dengan demikian diperoleh rumus μ'_4. pada persamaan berikut:

$$\mu'_4. = E(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4\, f(x)\, dx \tag{3.16}$$

dengan mensubstitusikan fungsi padat peluang distribusi Maxwell-Boltzman persamaan (2.3) ke dalam persamaan (3.16), diperoleh

$$\mu'_4 = \int_0^{\infty} x^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^{\infty} x^6 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^{\infty} x^5 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\, x\, dx \tag{3.17}$$

Dengan memisalkan $\frac{x^2}{2a^2} = u \rightarrow x^2 = 2a^2 u$, kemudian menurunkan fungsi u terhadap x sehingga menjadi $\frac{du}{dx} = \frac{x}{a^2}$. Dan menyederhanakannya menjadi $x\, dx = a^2 du$. Untuk batasnya, ketika $x = 0$ maka $u = 0$ dan $x = \infty$ maka $u = \infty$. Selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan (3.17) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\mu'_4 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^{\infty} (2a^2 u)^{\frac{5}{2}} e^{-u}\, a^2\, du$$

$$= 8a^4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{\frac{5}{2}} e^{-u}\, du$$

berdasarkan Definisi 10 diperoleh

$$\mu_4' = 8a^4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (u)^{\frac{7}{2}-1} e^{-u}\, du$$

$$= 8a^4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\right)$$

menurut Teorema 6 nomor 2 diperoleh

$$\mu_4' = 8a^4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{7}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{7}{2} - 1\right)\right)$$

$$= 8a^4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$= 8a^4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$= 8a^4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

menurut Teorema 6 nomor 3 diperoleh

$$\mu_4' = 8a^4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\right)$$

$$= 15a^4 \tag{3.18}$$

Kemudian disubstitusikan persamaan (3.5), (3.8), (3.13), dan (3.18) ke dalam Teorema 4 sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\mu_4 = 15a^4 - 4\left(8a^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\left(2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + 6(3a^2)\left(2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2 - 3\left(2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^4$$

$$= 15a^4 - 64a^4\left(\frac{2}{\pi}\right) + 72a^4\left(\frac{2}{\pi}\right) - 48a^4\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

$$= \frac{a^4}{\pi^2}(15\pi^2 + 16\pi - 192) \tag{3.19}$$

dengan disubstitusikannya persamaan (3.9) dan persamaan (3.19) ke dalam persamaan (2.2) maka diperoleh persamaan berikut:

$$\alpha_4^* = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} = \frac{\frac{a^4}{\pi^2}(15\pi^2 + 16\pi - 192)}{\left(\frac{a^2}{\pi}(3\pi - 8)\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{a^4}{\pi^2}(15\pi^2 + 16\pi - 192)}{\frac{a^4}{\pi^2}(3\pi - 8)^2}$$

$$= \frac{15\pi^2 + 16\pi - 192}{9\pi^2 - 48\pi + 64} \tag{3.20}$$

Jadi *kurtosis* dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah

$$\alpha_4^* = \frac{15\pi^2 + 16\pi - 192}{9\pi^2 - 48\pi + 64}$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38$ J/K adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik.

E. Fungsi Pembangkit Momen dari Distribusi *Maxwell-Boltzmann*.

Fungsi pembangkit momen berguna untuk melihat keluarga dari suatu distribusi. Untuk mencari fungsi pembangkit momen dapat digunakan Definisi 8. Dengan mensubstitusikan persamaan fungsi padat peluang distribusi Maxwell-Boltzmann pada persamaan (2.3) ke dalam Definisi 8 diperoleh persamaan berikut:

$$M_x(t) = \int_0^\infty e^{tx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3} dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{tx} x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}} dx$$

$$M_x(t) = \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^2 e^{tx-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^2 e^{\frac{2a^2tx-x^2}{2a^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^2 e^{\frac{a^4t^2-(x-a^2t)^2}{2a^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{a^2t^2}{2}}\int_0^\infty x^2 e^{\frac{-(x-a^2t)^2}{2a^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{a^2t^2}{2}}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a^2t}{a}\right)^2}\,dx \qquad (3.21)$$

Dengan memisalkan $\frac{x-a^2t}{a} = z \rightarrow x = az + a^2t,$ kemudian menurunkan fungsi z terhadap x sehingga menjadi $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a}$. Dan menyederhanakannya menjadi $dx = a\,dz$. Untuk batasnya, ketika $x = 0$ maka $z = -at$ dan $x = \infty$ maka $u = \infty$. Selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan (3.21) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$M_x(t) = \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{a^2t^2}{2}}\int_{-at}^\infty a(az+a^2t)^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

$$= \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{a^2t^2}{2}}\int_{-at}^\infty (a^2z^2+2a^3tz+a^4t^2)e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

$$= \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{a^2t^2}{2}}\left[\int_{-at}^\infty a^2z^2e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz + \int_{-at}^\infty 2a^3tze^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \right.$$

$$\left. + \int_{-at}^\infty a^4t^2e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\right]$$

$$M_x(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{a^2t^2}{2}} \left[\int_{-at}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + 2at \int_{-at}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right.$$
$$\left. + a^2t^2 \int_{-at}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] \tag{3.22}$$

dimana

$$\int_{-at}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = z\left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\Bigg|_{-at}^{\infty} - \int_{-at}^{\infty} -e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
$$= 0 + (-at)\left(e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\right) + \int_{-at}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Berdasarkan persamaan (2.6) maka bentuk $\int_{-at}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ bisa dirubah menjadi

$$\int_{-at}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = (-at)e^{-\frac{a^2t^2}{2}} + \sqrt{2\pi} \int_{-at}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
$$= (-at)e^{-\frac{a^2t^2}{2}} + \sqrt{2\pi}\Phi(at) \tag{3.23}$$

Dan untuk

$$\int_{-at}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \lim_{b\to\infty} \int_{-at}^{b} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-\frac{b^2}{2}} + e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\right)$$
$$= e^{-\frac{a^2t^2}{2}} \tag{3.24}$$

selanjutnya disubstitusikan persamaan (3.23) dan (3.24) ke dalam persamaan (3.22) sehingga diperoleh persamaan berikut

$$M_x(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{a^2t^2}{2}} \left[(-at)e^{-\frac{a^2t^2}{2}} + \sqrt{2\pi}\Phi(at) + 2ate^{-\frac{a^2t^2}{2}} \right.$$

$$\left. + a^2t^2\sqrt{2\pi}\Phi(at) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{a^2t^2}{2}} \left[\sqrt{2\pi}\Phi(at) + ate^{-\frac{a^2t^2}{2}} + a^2t^2\sqrt{2\pi}\Phi(at) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{a^2t^2}{2}} \left[ate^{-\frac{a^2t^2}{2}} + (a^2t^2 + 1)\sqrt{2\pi}\Phi(at) \right]$$

$$= at\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 2(a^2t^2 + 1)\Phi(at)e^{\frac{a^2t^2}{2}} \qquad (3.25)$$

Jadi fungsi pembangkit momen dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah

$$M_x(t) = at\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 2(a^2t^2 + 1)\Phi(at)e^{\frac{a^2t^2}{2}}$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38\ \mathrm{J/K}$ adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik.

F. Fungsi Karakteristik dari Distribusi *Maxwell-Boltzmann*.

Fungsi karakteristik sama halnya dengan fungsi pembangkit momen hanya saja fungsi karakteristik selalu ada walaupun fungsi pembangkit momennya tidak ada. Ini adalah kelebihan dari fungsi karakteristik, karena mengandung imajiner (i). Untuk memperoleh fungsi karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann digunakan Definisi 9. Dengan mensubstitusikan fungsi padat peluang distribusi Maxwell-Boltzmann yang terdapat pada persamaan (2.3) ke dalam Definisi 9 maka diperoleh

$$\phi(t) = \int_{0}^{\infty} e^{itx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3} dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{itx} x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}} dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{itx-\frac{x^2}{2a^2}} dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{\frac{2a^2itx-x^2}{2a^2}} dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{\frac{-a^4t^2+\left(ix+a^2t\right)^2}{2a^2}} dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{\frac{\left(x+a^2t\right)^2}{2a^2}} dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{\left(-x+a^2ti\right)^2}{2a^2}} dx \qquad (3.26)$$

Dengan memisalkan $\frac{-x+a^2ti}{a\sqrt{2}} = z \rightarrow x = a^2ti - a\sqrt{2}z$, kemudian menurunkan fungsi z terhadap x sehingga menjadi $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{-a\sqrt{2}}$. Dan menyederhanakannya menjadi $dx = \left(-a\sqrt{2}\right) dz$. Untuk batasnya, ketika $x = 0$ maka $z = \frac{ati}{\sqrt{2}}$ dan $x = \infty$ maka $z = \infty$. Selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan (3.26) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\phi(t) = \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{a^2t^2}{2}} \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} \left(a^2ti - a\sqrt{2}z\right)^2 e^{-z^2} \left(-a\sqrt{2}\right) dz$$

$$\phi(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}a^2} e^{-\frac{a^2t^2}{2}} \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} \left(-a^4t^2 - 2\sqrt{2}a^3tiz + 2a^2z^2\right)e^{-z^2}\, dz$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}a^2} e^{-\frac{a^2t^2}{2}} \left[\int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} -a^4t^2 e^{-z^2}\, dz - \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} 2\sqrt{2}a^3tiz\, e^{-z^2}\, dz \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} 2a^2z^2e^{-z^2}\, dz \right]$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}a^2} e^{-\frac{a^2t^2}{2}} \left[-a^4t^2 \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{2}a^3ti \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} z\, e^{-z^2}\, dz + 2a^2 \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} z^2e^{-z^2}\, dz \right]$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{a^2t^2}{2}} \left[-a^2t^2 \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz - 2\sqrt{2}ati \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} z\, e^{-z^2}\, dz \right.$$

$$\left. + 2 \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} z^2e^{-z^2}\, dz \right] dx \tag{3.27}$$

karena

$$\int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{0} e^{-z^2} dz + \int_{0}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

Maka berdasarkan persamaan (2.7) hasil dari bentuk $\int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{0} e^{-z^2} dz$ adalah

$$\int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{0} e^{-z^2} dz = -\int_{0}^{\frac{ati}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{ati}{\sqrt{2}}\right)$$

Dan bentuk $\int_{0}^{\infty} e^{-z^2} dz$ diperoleh pada persamaan (3.3) sehingga

$$\int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{0} e^{-z^2} dz + \int_{0}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= -\int_{0}^{\frac{ati}{\sqrt{2}}} e^{-z^2}\, dz + \int_{0}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{ati}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad (3.28)$$

Untuk integral berikut diperoleh persamaan:

$$\int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} ze^{-z^2}\, dz = \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{b} ze^{-z^2}\, dz$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}e^{\frac{a^2t^2}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{a^2t^2}{2}} \qquad (3.29)$$

Kemudian bentuk integral berikut diperoleh persamaan:

$$\int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} z^2 e^{-z^2}\, dz = z\left(-\frac{1}{2}e^{-z^2}\right)\Bigg|_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} - \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} -\frac{1}{2}e^{-z^2}\, dz$$

$$\int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} z^2 e^{-z^2}\, dz = \frac{ati}{2\sqrt{2}} e^{\frac{a^2t^2}{2}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{ati}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

$$= \frac{ati}{2\sqrt{2}} e^{\frac{a^2t^2}{2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{ati}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$$

$$= \frac{ati}{2\sqrt{2}} e^{\frac{a^2t^2}{2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\operatorname{erf}\left(\frac{ati}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \qquad (3.30)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.28), (3.29), (3.30) ke dalam persamaan (3.27) diperoleh persamaan berikut:

$$\phi(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{a^2t^2}{2}} \left[-a^2t^2 \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{ati}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right) - 2\sqrt{2}ati\left(\frac{1}{2} e^{\frac{a^2t^2}{2}}\right) + 2\left(\frac{ati}{2\sqrt{2}} e^{\frac{a^2t^2}{2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\operatorname{erf}\left(\frac{ati}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\right)\right]$$

$$= -a^2t^2 e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{ati}{\sqrt{2}}\right) + a^2t^2 e^{-\frac{a^2t^2}{2}} + 2ati\sqrt{\frac{2}{\pi}} - ati\sqrt{\frac{2}{\pi}} + e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{ati}{\sqrt{2}}\right) - e^{-\frac{a^2t^2}{2}}$$

$$= -(a^2t^2 - 1) e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{ati}{\sqrt{2}}\right) + a^2t^2 e^{-\frac{a^2t^2}{2}} + ati\sqrt{\frac{2}{\pi}} - e^{-\frac{a^2t^2}{2}}$$

$$= ati\sqrt{\frac{2}{\pi}} - (a^2t^2 - 1) i e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\operatorname{erfi}\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) + (a^2t^2 - 1) e^{-\frac{a^2t^2}{2}}$$

$$= ati\sqrt{\frac{2}{\pi}} + (a^2t^2 - 1) e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\left[1 - i\operatorname{erfi}\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\phi(t) = ati\sqrt{\frac{2}{\pi}} - i(a^2t^2 - 1)e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\left[\operatorname{erfi}\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) - i\right]$$

$$= i\left\{at\sqrt{\frac{2}{\pi}} - (a^2t^2 - 1)e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\left[\operatorname{erfi}\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) - i\right]\right\} \qquad (3.31)$$

Jadi fungsi karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann adalah

$$\phi(t) = i\left\{at\sqrt{\frac{2}{\pi}} - (a^2t^2 - 1)e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\left[\operatorname{erfi}\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) - i\right]\right\}$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38\ \mathrm{J/K}$ adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada bab pembahasan dapat disimpulkan bahwa distribusi Maxwell-Boltzmann dengan fungsi padat peluang

$$f(x;a) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{\frac{-x^2}{2a^2}}}{a^3}, & x \geq 0 \\ 0, & x \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

dengan $a = \sqrt{\frac{kT}{m}}$, dimana m adalah massa partikel, $k = 1{,}38\ \mathrm{J/K}$ adalah konstanta Boltzmann dan T temperatur termodinamik mempunyai karakteristik sebagai berikut :

1. *Mean* dari distribusi Maxwell-Boltzmann

$$E[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2a$$

2. Variansi dari distribusi Maxwell-Boltzmann

$$\sigma^2 = \frac{a^2}{\pi}(3\pi - 8)$$

3. *Skewness* dari distribusi Maxwell-Boltzmann

$$\alpha_3{}^* = \frac{2\sqrt{2}(16 - 5\pi)}{(3\pi - 8)\sqrt{(3\pi - 8)}}$$

4. *Kurtosis* dari distribusi Maxwell-Boltzmann

$$\alpha_4^* = \frac{15\pi^2 + 16\pi - 192}{9\pi^2 - 48\pi + 64}$$

5. Fungsi Pembangkit Momen dari distribusi Maxwell-Boltzmann

$$M_x(t) = at\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 2(a^2t^2 + 1)\Phi(at)e^{\frac{a^2t^2}{2}}$$

6. Fungsi Karakteristik dari distribusi Maxwell-Boltzmann

$$\phi(t) = i\left\{at\sqrt{\frac{2}{\pi}} - (a^2t^2 - 1)e^{-\frac{a^2t^2}{2}}\left[\text{erfi}\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) - i\right]\right\}$$

B. Saran

Adapun saran yang dapat diberikan memberikan pemikiran yang lebih lanjut mengenai distribusi Maxwell-Boltzman adalah:

1. Sebelum menganalisis suatu distribusi alangkah baiknya untuk mengetahui jenis dari distribusi peluangnya.
2. Penelitian ini dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya seperti mencari realibilitas dari distribusi Maxwell-Boltzmann, estimasi parameter dengan berbagai metode, dan aplikasi dari distribusi Maxwell-Boltzmann terutama dalam bidang fisika statistik.