MENENTUKAN ALGORTIMA ALIRAN MAKSIMUM PADA PENDISTRIBUSIAN PRODUK

Skripsi

Diajukan kepada Tim Penguji Skripsi Jurusan Matematika
Sebagai Salah Satu Syarat Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

SISKA WAHYUNI
NIM. 83977

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2012

HALAMAN PENGESAHAN

Nama	:	Siska Wahyuni
NIM	:	83977
Program Studi	:	Matematika
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

dengan judul

Menentukan Algoritma Aliran Maksimum pada Pendistribusian Produk

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi
Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 16 Juli 2012

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
1. Ketua	: Drs. H. Mukhni, M. Pd	1.
2. Sekretaris	: Dra. Arnellis, M. Si	2.
3. Anggota	: Dr. Armiati, M. Pd	3.
4. Anggota	: Drs. H. Yarman, M. Pd	4.
5. Anggota	: Meira Parma Dewi, S.Si, M.Kom	5.

ABSTRAK

Siska Wahyuni : **Menentukan Algortima Aliran Maksimum pada Pendistribusian Produk**

Pendistribusian produk merupakan salah satu permasalahan yang berkaitan dengan pengiriman komoditas atau produk dari pabrik ke pengecer yang bisa diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Aliran maksimum adalah suatu aliran yang mencapai nilai tertinggi (maksimum) terhadap produk yang dikirimkan dari pabrik ke pengecer. Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana bentuk algoritma aliran maksimum pada pendistribusian produk.

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah mendapatkan bentuk algoritma yang digunakan untuk memperoleh aliran maksimum pada jaringan transportasi yang dimodelkan oleh graf berarah yang mempunyai bobot, kemudian mempresentasikan data yang telah didapatkan ke dalam bentuk graf berarah yang mempunyai bobot selanjutnya mengaplikasikan algoritma tersebut untuk mendapatkan aliran maksimum.

Hasil penelitian berupa algoritma yang digunakan untuk menentukan aliran maksimum pada jaringan transportasi dengan langkah-langkah sebagai berikut: setiap sisi pada jaringan transpotasi diberi aliran awal nol, label simpul sumber dengan $(-,\infty)$, selanjutnya beri label pada setiap simpul sampai simpul pembuangan dengan beberapa aturan tertentu, jika simpul z sudah berlabel maka akan ditemukan jalan dari simpul a ke simpul z, setelah ditemukan jalan dari a ke z maka aliran disepanjang jalan tersebut dapat dinaikkan. Hal ini dilakukan secara berulang-ulang sampai tidak ditemukan lagi jalan yang akhirnya dapat dinaikkan. Dengan menerapkan algoritma aliran maksimum pada pendistribusian produk air minum dalam kemasan di PT Amanah Insanillahia maka jumlah aliran maksimumnya adalah 87864,6 Liter air selama bulan Desember 2011.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah Swt, atas rahmat dan hidayah-Nya yang telah diberikan kepada penulis berupa ketabahan, ketekunan dan keuletan, sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi ini dengan sebaik-baiknya yang diberi judul: **"Menentukan Algortima Aliran Maksimum pada Pendistribusian Produk".**

Semua hambatan dan tantangan dalam penyusunan Skripsi ini merupakan nikmat tersendiri yang dianugerahkan kepada penulis sebagai pengalaman hidup yang tak ternilai. Semuanya akan kembali kepada sumber segala sumber ilmu pengetahuan di jagad raya ini yaitu Allah Swt. Yang Maha Mengetahui sebagaimana yang telah tersirat dan tersurat.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih atas segala sesuatu yang telah diberikan kepada penulis baik berupa dorongan moril maupun materil, sehingga sangat membantu terselesaikannya Skripsi ini, yaitu kepada:

1. Bapak Drs. Mukhni, M. Pd. Dosen Pembimbing I.
2. Ibu Dra. Arnellis, M. Si. Dosen Pembimbing II sekaligus sebagai Penasehat Akademik.
3. Ibu Dr. Armiati, M. Pd, Bapak Drs. Yarman, M. Pd, dan Ibu Meira Parma Dewi, S. Si, M. Kom sebagai dosen penguji Skripsi.
4. Ketua Jurusan Matematika Ibu Dr. Armiati, M. Pd.
5. Ketua Program Studi Matematika Ibu Dra. Dewi Murni, M. Si

6. Bapak dan Ibu staf Pengajar dan Labor Jurusan Matematika FMIPA UNP.
7. Seluruh rekan Mahasiswa Jurusan Matematika khususnya angkatan 2007 FMIPA UNP.
8. Semua pihak yang telah rela memberikan bantuan sampai terlaksananya penyusunan Skripsi ini.

Semoga bimbingan, dorongan serta pengorbanan yang telah diberikan mendapat ridho dari Allah SWT. Penulis telah berusaha dengan maksimal untuk menyelesaikan Skripsi ini, namun penulis menyadari baik isi maupun penulisan ini masih jauh dari kesempurnaan. Untuk itu kepada pembaca, penulis mengharapkan saran dan kritikan yang sifatnya membangun demi perbaikan di masa yang akan datang

Padang,   Juli 2012

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Teori graf merupakan topik yang banyak mendapat perhatian saat ini, karena model-model yang ada pada teori graf berguna dalam menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari seperti masalah pendistribusian produk, masalah penyaluran arus listrik, masalah penyaluran air dalam pipa distribusi dan berbagai permasalahan lainnya. Pendistribusian produk merupakan masalah yang berkaitan dengan pengiriman komoditas atau produk antara dua simpul, yaitu simpul sumber (*source)* dan simpul pembuangan (*sink)*. Simpul sumber merupakan simpul yang tidak mempunyai sisi masuk dan simpul pembuangan merupakan simpul yang tidak mempunyai sisi keluar. Selanjutnya pendistribusian produk dapat digambarkan atau dimodelkan ke dalam bentuk graf berarah yang mempunyai bobot.

Menurut Liu (1995:221) suatu graf berarah yang mempunyai bobot dinamakan jaringan transportasi (*transport network)* jika memenuhi sejumlah syarat berikut: “1) terhubung dan tidak mempunyai lup, 2) terdapat satu dan hanya satu simpul yang tidak mempunyai sisi masuk, 3) terdapat satu dan hanya satu simpul yang tidak mempunyai sisi keluar, 4) pembobot setiap sisi merupakan sebuah bilangan nyata yang tidak negatif”. Berdasarkan pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa jaringan transportasi dalam teori graf dapat mempresentasikan suatu model umum bagi pendistribusian produk dari tempat produksi ke pengecer dengan kendala berupa batas maksimum terhadap banyaknya barang yang dapat dikirimkan. Selanjutnya dari jaringan transportasi dapat ditentukan bagaimana aliran maksimal untuk pengiriman produk dari sebuah pabrik ke tempat pemasaran.

Aliran maksimum (*maximum flow*) di dalam suatu jaringan transportasi adalah suatu aliran yang mencapai nilai tertinggi (maksimum) terhadap produk yang dapat dikirimkan dari simpul sumber ke simpul pembuangan suatu jaringan transportasi dengan mempertimbangkan kapasitasnya. Kapasitas dapat berupa besarnya permintaan atau penawaran akan barang yang melalui rute tersebut. Jika dalam masalah pendistribusian produk, pabrik disebut sebagai simpul sumber, tempat pemasaran atau tujuan sebagai simpul pembuangan dan distributor sebagai simpul tengah, maka bagaimana mendapatkan aliran maksimum pengiriman produk dari satu simpul sumber ke satu simpul pembuangan dengan melewati rute-rute dan simpul tengah dengan mempertimbangkan bahwa aliran pada suatu rute tidak boleh melebihi kapasitas rute tersebut dan jumlah aliran yang masuk ke suatu simpul harus sama dengan jumlah aliran yang keluar dari simpul tersebut.

Dalam ilmu matematika untuk menyelesaikan permasalahan aliran maksimum tersebut digunakan suatu langkah matematis, yaitu algortima aliran maksimum. Prinsip dasar dari algoritma aliran maksimum adalah mulai dengan sebuah aliran dan secara berulang tingkatkan nilai dari aliran tersebut sampai tidak ada lagi peningkatan yang mungkin. Sehingga hasil dari peningkatan aliran tersebut adalah sebuah aliran maksimum. Richard

Jhonsonbaugh telah merumuskan langkah-langkah algoritma aliran maksimum sebagai berikut: 1) Mulai dengan sebuah aliran, 2) Misal P adalah sebuah jalan dari simpul a ke simpul z dalam sebuah jaringan G yang memenuhi kondisi berikut: 2a) Untuk setiap busur maju di P, maka $\phi(i,j) < w(i,j)$, 2b) Untuk setiap busur mundur di P, maka $0 < \phi(i,j)$. Jika tidak ada jalan yang seperti ini, maka berhenti dan aliran sudah maksimal, 3) Tingkatkan aliran pada jalan tersebut dengan $i(W) = \min X$. Dimana X merupakan jumlah dari $w(i,j) - \phi(i,j)$, untuk busur maju dan busur mundur di P didefinisikan:

$$\phi^*(i,j) = \begin{cases} \phi(i,j), & (\mathrm{i,j}) \notin W \\ \phi(i,j) + i(W), & \text{untuk busur maju } (i,j) \text{dari W} \\ \phi(i,j) - i(W), & \text{untuk busur mundur } (i,j) \text{dari W} \end{cases}$$

Namun setelah menerapkan algoritma tersebut pada pendistribusian produk peneliti merasa masih terdapat kesulitan dalam menerapkan algoritma. Kesulitan tersebut muncul jika angka-angka yang digunakan cukup besar, seperti halnya angka pendistribusian sebuah produk pada perusahaan yang cukup besar. Karena jika angka yang digunakan cukup besar maka akan susah melihat besarnya peningkatan aliran yang bisa ditingkatkan pada suatu rute akibatnya juga akan terdapat kesulitan dalam menentukan jalan dari simpul sumber ke simpul tujuan yang masih bisa ditingkatkan. Untuk mengatasi kesulitan-kesulitan dalam penggunaan algoritma tersebut peneliti mencoba menyusun kembali algoritma aliran maksimum pada pendistribusian produk berdasarkan pada prinsip dasar algoritma aliran maksimum dan pendapat Richard Jhonsonbaugh serta teorema dan definisi tentang aliran maksimum.

Sebagai contoh peneliti pemakaian algoritma tersebut peneliti mencoba menerapkannya pada pendistribusian produk air minum dalam kemasan di PT. Amanah Insanillahia yang dimodelkan ke dalam bentuk graf berarah yang mempunyai bobot dimana pabrik tempat produksi produk sebagai simpul sumber, distributor sebagai simpul tengah dan pengecer sebagai simpul pembuangan serta jumlah permintaan terhadap produk air minum dalam kemasan yang melalui rute tersebut sebagai kapasitasnya. Selanjutnya peneliti akan menentukan jumlah barang maksimal yang dapat didistribusikan oleh perusahaan tersebut selama satu bulan (30 hari).

B. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah "Bagaimana bentuk algoritma aliran maksimum pada pendistribusian produk?"

C. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas maka pendekatan yang digunakan adalah analisis teori yang relevan dengan permasalahan yang akan dibahas dan untuk lebih spesifiknya penulisan tugas akhir ini, maka perlu kiranya pertanyaan penelitian yang akan dijawab pada pembahasan nantinya. Adapun pertanyaan penelitiannya adalah:

1. Bagaimana bentuk algoritma yang digunakan untuk memperoleh aliran maksimum pada jaringan transportasi yang dimodelkan oleh graf berarah yang mempunyai bobot pada proses pendistribusian produk?

2. Bagaimana pengaplikasian algoritma tersebut dalam menentukan jumlah aliran maksimum pendistribusian produk air minum dalam kemasan di PT. Amanah Insanillahia?

D. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah maka tujuan yang ingin peneliti capai adalah:

1. Untuk mendapatkan bentuk algoritma yang digunakan untuk memperoleh aliran maksimum pada jaringan transportasi yang dimodelkan oleh graf berarah yang mempunyai bobot pada proses pendistribusian produk.
2. Untuk mengetahui pengaplikasian algoritma tersebut dalam menentukan jumlah aliran maksimum pendistribusian produk air minum dalam kemasan di PT. Amanah Insanillahia?

E. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah

1. Penelitian ini bermanfaat pada bidang transportasi khususnya pengiriman barang yaitu untuk mendapatkan aliran maksimum pada pendistribusian barang.
2. Memberikan masukan kepada penulis dan pembaca mengenai apa itu algoritma aliran maksimum dan bagaimana pemakaiannya.
3. Sebagai bahan referensi dan memberikan sumbangan ilmu pengetahuan bagi penelitian selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian di bidang teori graf khususnya tentang aliran maksimum.

F. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoirtis), metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan menganalisa teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan kepada studi kepustakaan. Langkah awal dalam penelitian ini dimulai dengan mengumpulkan teori-teori yang berhubungan dengan permasalahan yang dihadapi sebagai penunjang untuk menjawab permasalahan.

Berikutnya langkah kerja dalam penelitian ini :

1) Mendapatkan bentuk algoritma yang digunakan untuk memperoleh aliran maksimum yang dimodelkan oleh graf berarah yang mempunyai bobot pada proses pendistribusian produk
2) Mempresentasikan data pendistribusian produk yang telah didapatkan dalam graf berarah yang mempunyai bobot.
3) Mengaplikasikan algoritma aliran maksimum untuk menentukan jumlah aliran maksimum pada pendistribusian produk air minum dalam kemasan di PT Amanah Insanillahia.

BAB II
KAJIAN TEORI

Untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum dibutuhkan kajian-kajian teori tentang graf dan konsep dasar tentang jaringan (*network*) serta algoritma aliran maksimum. Adapun terminologi graf dan jaringan transportasi serta algoritma aliran maksimum akan dibahas masing-masing teori tersebut sebagai berikut:

1. Definisi dan Terminologi Graf

Beberapa kejadian di dunia ini dapat digambarkan dengan graf yang terdiri dari himpunan simpul-simpul bersama-sama dengan sisi yang menghubungkan simpul tersebut. Sebagai contoh simpul dapat mewakili pabrik, distributor atau pengecer, sedangkan garis merupakan aliran transportasi.

Definisi Graf

Dalam bahasa sehari-hari, sebuah graf adalah himpunan objek-objek yang dinamakan titik atau simpul dihubungkan oleh penghubung yang dinamakan garis atau sisi (id.wikipedia.org :1). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik (melambangkan simpul) yang dihubungkan oleh garis-garis (melambangkan sisi) atau garis berarah (melambangkan busur).

Secara matematis graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi G = (V, E), yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

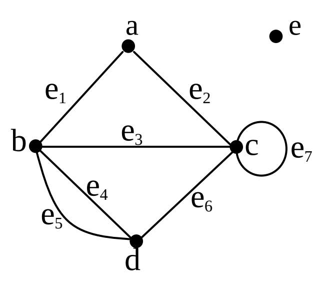
(Rinaldi Munir,2010:356)

Definisi graf tersebut menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buahpun, tetapi simpulnya harus ada minimal satu.

Sebuah graf G dapat digambarkan dengan menggunakan titik sebagai simpul dan sisi digambarkan dengan segmen garis (lurus atau lengkung) yang menghubungkan dua simpul yang berelasi. Letak simpul dan jarak antara dua simpul serta bentuk garis penghubung kedua simpul tersebut dapat digambarkan secara bebas. Himpunan simpul-simpul di graf G dinotasi dengan V(G) dan himpunan sisinya dinotasikan dengan E(G).

Terminologi Graf

Dalam pembahasan tentang graf sering digunakan terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf seperti ketetanggaan, jalan, terhubung, graf ganda, graf berbobot, graf berarah dan lain sebagainya. Berikut ini akan didefinisikan beberapa terminologi dalam graf yang sering dipakai dalam penelitian ini.



Graf $\mathbf{G_1}$

Berdasarkan graf G_1, dimana $V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G_1) = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (d, b), (c, d), (c, c)\}$ atau yang diwakili oleh $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$.

Definisi 1.1 (Ketetanggaan)

Dua buah simpul dikatakan bertetangga (*Adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. (Rinaldi Munir,2010:365).

Tinjau graf G_1 : simpul a bertetangga dengan simpul b dan c, simpul a tidak bertetangga dengan simpul d karena tidak terhubung langsung.

Definisi 1.2 (Jalan)

Suatu jalan (*walk*) pada sebuah graf adalah sederetan simpul dan sisi berganti-ganti $W = a, (a, b), b, (b, c), \ldots, (x, y), z$. (Suryadi, 1994:3)

Suatu *walk* yang setiap sisinya berbeda maka *walk* itu disebut *trail* (jejak). Suatu *trail* yang setiap simpulnya berbeda, maka disebut *path* (lintasan).

Sebagai contoh tinjau graf G_1 :

$$Walk : a, e_1, b, e_4, d, e_6, c, e_3, b, e_1, a, e_2, c$$

$$Trail : a, e_1, b, e_4, d, e_5, b, e_3, c, e_7, c$$

$$Path : a, e_1, b, e_5, d, e_6, c$$

Pada contoh graf graf G_1 terlihat bahwa suatu *walk* boleh memuat simpul dan sisi yang sama. Suatu *trail* merupakan suatu *walk* yang setiap sisinya berbeda akan tetapi boleh memuat simpul yang sama, sedangkan *path* merupakan *walk* yang setiap simpul dan sisinya berbeda

Definisi 1.3 (Terhubung)

Dua buah simpul i dan simpul j disebut terhubung jika terdapat lintasan dari i ke j. G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul i dan j dalam himpunan V terdapat lintasan dari i dan j. Jika tidak, maka G disebut graf tak-terhubung (*disconnected graph*). (Rinaldi Munir,2010:371).

Tinjau graf G_1 : graf G_1 merupakan graf tak-terhubung karena tidak terdapat lintasan yang menghubungkan simpul e ke simpul lainnya. Untuk graf G_1-{e} dikatakan graf terhubung karena setiap mengambil 2 simpul maka diperoleh lintasan yang menghubungkannya. Misalnya simpul a ke d, lintasannya berupa:

- $a, e_1, b, e_3, c, e_6, d$
- $a, e_2, c, e_3, b, e_4, d$
- a, e_1, b, e_4, d

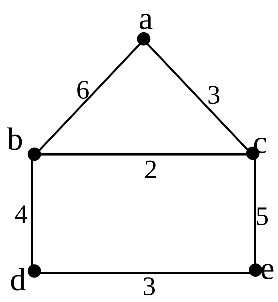
Definisi 1.4 (Graf ganda)

Pada suatu graf mungkin saja terdapat 2 sisi atau lebih yang menghubungkan 2 simpul tertentu. Sisi yang semacam ini disebut sisi ganda (multiple edges). Sisi yang menghubungkan simpul tertentu dengan dirinya sendiri disebut gelang (loop). Graf yang memuat gelang dan sisi ganda disebut graf ganda (Budayasa,2007:79).

Tinjau graf G_1 : Graf G_1 merupakan contoh graf ganda karena simpul b dan dihubungkan oleh 2 buah sisi, yaitu sisi e_4 dan e_5. Sisi e_7 adalah sebuah gelang, karena sisi tersebut menghubungkan simpul c dengan dirinya sendiri.

Definisi 1.5 (Graf berbobot)

Graf berbobot (*weitghted graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (berbobot). (Rinaldi Munir, 2010:376)



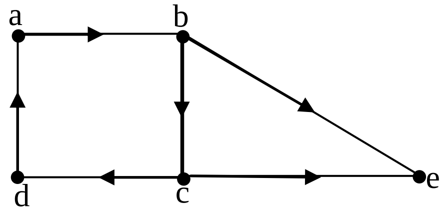
Graf **G_2**

Graf G_2 merupakan salah satu contoh graf berbobot (*weitghted graph*).

Definisi 1.6 (Graf berarah)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut graf berarah. Pada graf berarah, sisi berarahnya disebut busur (*arc*). Pada graf berarah v_1v_2 dan $v_2v_1$menyatakan dua busur yang berbeda. Dengan kata lain $v_1v_2 \neq v_2v_1$ (Rinaldi Munir,2010:358).

Pada dasarnya graf berarah tidak berbeda dengan graf yang telah diuraikan pada pengertian graf sebelumnya, hanya saja pada graf berarah setiap sisinya mempunyai arah.



Graf G_3

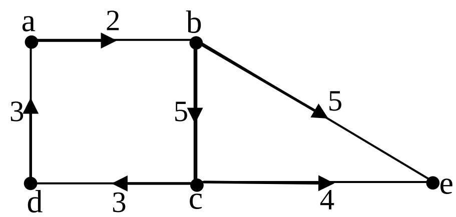
Graf G_3 merupakan contoh graf berarah.

Definisi 1.7 (Graf berarah berbobot)

Graf berarah berbobot adalah graf yang setiap sisinya mempunyai orientasi arah dan bobot.

(repository.usu.ac.id; 3)

Graf G_4 berikut ini merupakan contoh graf berarah berbobot.



Graf G_4

Definisi 1.8 (Derajat)

Derajat keluar atau *out degree* (od v) dari simpul i pada graf berarah G adalah jumlah simpul yang bertetangga dari i, derajat masuk atau *in degree* (id v) dari simpul i adalah jumlah simpul dari G yang bertetangga ke i. (Chartrand, 1997:14)

Derajat simpul pada graf berarah G didefinisikan : Deg $(i) = od(i) + id(i)$

Tinjau graf G_3 : $Deg\ (a) = 2$ karena $od\ (a) = 1$ $id(a) = 1$

$Deg\ (b) = 3$ karena $od\ (b) = 2$ $id(b) = 1$

$Deg\ (c) = 3$ karena $od\ (c) = 2$ $id(c) = 1$

$Deg\ (d) = 2$ karena $od\ (d) = 1$ $id(d) = 1$

$Deg\ (e) = 2$ karena $od\ (e) = 0$ $id(e) = 2$

Untuk selanjutnya bentuk graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf berarah yang mempunyai bobot.

2. Jaringan Transportasi

Suatu jaringan transportasi mempresentasikan suatu model bagi transportasi benda/barang dari tempat asal pasokan ke tujuan melalui berbagai rute pengiriman dengan kendala berupa batas maksimum terhadap banyaknya barang yang dapat dikirimkan melalui rute-rute tersebut.

Definisi 2.1 (Jaringan transportasi)

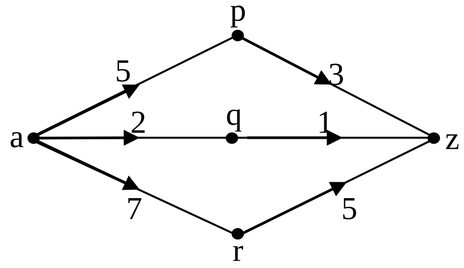
Suatu graf terboboti dinamakan jaringan transportasi (*transport network*) jika memenuhi syarat berikut:

a. Merupakan graf terhubung dan tidak mempunyai lup.
b. Ada satu dan hanya satu simpul di dalam graf itu yang tidak mempunyai sisi masuk
c. Ada satu dan hanya satu simpul di dalam graf itu yang tidak mempunyai sisi keluar
d. Pembobotan setiap sisi berupa sebuah bilangan nyata tidak negatif.

(Liu, 1995:221)

Didalam suatu jaringan transportasi, simpul yang tidak mempunyai sisi masuk dinamakan sumber (*source*) dan dilambangkan dengan simpul *a*. Simpul yang tidak mempunyai sisi keluar dinamakan pembuangan (*sink*) dan dilambangkan dengan simpul *z*. Pembobot suatu sisi dinamakan kapasitas (*capacity*) sisi tersebut. Kapasitas sisi (*i*,*j*) dilambangkan dengan w(*i*,*j*).

Graf G_5 merupakan contoh jaringan transportasi.



Graf G_5

Pada contoh graf G_5 simpul a merupakan pabrik dan simpul z merupakan pengecer serta simpul p, q dan r merupakan distributor yang mengirimkan barang/produk dari pabrik ke pengecer. Sedangkan pembobot masing-masing sisi adalah jumlah barang yang dikirimkan antara dua simpul.

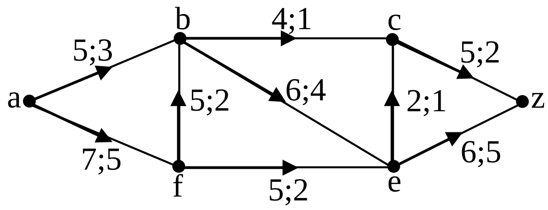
Definisi 2.2 (Aliran maksimum)

Aliran (*flow*) di dalam suatu jaringan transportasi (□) ialah pemberian suatu bilangan tidak negatif $\phi(i,j)$ kepada setiap sisi (i,j) sedemikian rupa sehingga syarat-syarat berikut terpenuhi:

a. $\phi(i,j) \leq \mathrm{w}(i,j)$ untuk setiap sisi (i,j)
b. $\sum_{\mathrm{semua}\ i} \phi(i,j) = \sum_{\mathrm{semua\ k}} \phi(j,k)$ untuk setiap simpul j kecuali sumber a dan pembuangan z

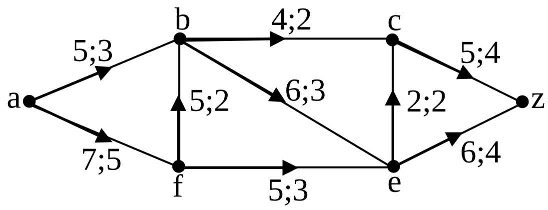
(Liu, 1995:222)

Dengan demikian $\phi(i,j)$ adalah banyaknya barang yang akan dikirim melalui rute (i,j) dengan syarat: (1) banyaknya barang yang akan dikirim melalui suatu rute tidak boleh melebihi kapasitas rute tersebut, (2) banyaknya barang yang menuju suatu simpul harus sama dengan banyaknya barang yang keluar dari simpul tersebut, kecuali di simpul sumber dan pembuangan. Bilangan pertama pada setiap sisi pada aliran dalam jaringan transportasi menunjukkan kapasitas sisi. Bilangan kedua menunjukkan aliran dalam jaringan transportasi yang terjadi dalam sisi tersebut. Dimana antara kedua bilangan tersebut dibatasi dengan sebuah (;) untuk memisahkan kedua bilangan tersebut agar tidak terjadi kerancuan dalam mempersentasikannya.



Graf G_6

Bentuk jaringan transportasi pada G_6 pelabelan nilai kapasitas dengan aliran pada tiap-tiap sisi memenuhi $\phi(i,j) \leq w(i,j)$. Aliran yang masuk ke simpul f yaitu $\phi(a,f)$ adalah 5, aliran yang keluar dari simpul f adalah $\phi(f,b) + \phi(f,e) = 2 + 2 = 4$, jaringan transportasi tersebut bukanlah suatu aliran maksimum (berdasarkan definisi 2.2 b).



Graf G_7

Graf G_7 memenuhi kondisi aliran maksimum karena banyaknya barang yang akan dikirim melalui setiap rute lebih kecil dari kapasitas rute tersebut dan banyaknya barang yang menuju suatu simpul harus sama dengan banyaknya barang yang keluar dari simpul tersebut, sehingga model graf itu adalah sebuah aliran yang diberikan oleh jaringan transportasi. Misalnya simpul b, aliran yang masuk ke b adalah $\phi(a,b) + \phi(f,b) = 3 + 2 = 5$, dan aliran yang keluar dari b adalah $\phi(b,c) + \phi(b,e) = 2 + 3 = 5$, sehingga aliran yang masuk pada simpul b sama dengan aliran yang keluar dari simpul b atau $\sum_{i \in V} \phi(i,b) = \sum_{j \in V} \phi(b,j)$. Jadi total aliran yang keluar dari simpul a sama dengan total aliran yang masuk ke simpul z.

Masalah aliran maksimum dapat dimodelkan sebagai berikut:

Fungsi objektif

Maksimumkan nilai aliran (ϕ)

Fungsi kendala

$$\sum_{j\in V}\phi(i,j)-\sum_{j\in V}\phi(j,i)=\begin{cases}\phi & ,\text{untuk } i=\mathrm{a}\\ 0 & ,\text{untuk i } \epsilon \mathrm{V}-\{\mathrm{a},\mathrm{z}\}\\ -\phi & ,\text{untuk i}=\mathrm{z}\end{cases}$$

(web.mit.edu/: 1)

Definisi 2.3 (Nilai aliran)

Besaran $\sum_{i\in V}\phi(i,j)$ dinamakan nilai aliran ϕ (*value of the flow* ϕ) dan dilambangkan dengan ϕ_v. Dapat ditulis sebagai berikut:

$$\phi_v=\sum_{i\in V}\phi(a,i)=\sum_{k\in V}\phi(k,z)$$

(Liu, 1995:222)

Yang berarti bahwa total aliran keluar di simpul sumber sama dengan total aliran yang masuk di simpul pembuangan.

Definisi 2.4 (Jenuh)

Untuk suatu aliran busur (i,j) dikatakan jenuh (*saturated*) jika $\phi(i,j)=w(i,j)$ dan dikatakan belum jenuh (*unsaturated*) jika $\phi(i,j)<w(i,j)$ (Liu, 1995:222).

Sehingga aliran maksimum (*maximum flow*) di dalam suatu jaringan transportasi adalah suatu aliran yang mencapai nilai tertinggi yang mungkin tercapai.

Berdasarkan graf G_7 sisi (e, c) jenuh karena kapasitas pada sisi tersebut sama dengan nilai alirannya yaitu 2, sedangkan sisi yang lainnya tidak jenuh. Maka nilai alirannya adalah $\phi_v = \sum_{i \in V} \phi(a, i) = \phi(a, b) + \phi(a, f) = 5 + 3 = 8$. Dimana $\sum_{i \in V} \phi(a, i)$ adalah jumlah aliran yang keluar dari simpul a ke simpul yang bertetangga dari a, yaitu simpul b dan simpul f. Selanjutnya perhatikan jumlah aliran yang masuk ke simpul z sama dengan jumlah aliran yang keluar dari simpul a yaitu $\phi_v = \sum_{i \in V} \phi(i, z) = \phi(c, z) + \phi(e, z) = 4 + 4 = 8$, dimana $\sum_{i \in V} \phi(i, z)$ adalah jumlah yang masuk ke simpul z, sedangkan simpul c dan e adalah simpul yang bertetangga dengan simpul z.

3. Potongan (*a cut*) dalam Jaringan Transportasi

Potongan adalah bentuk-bentuk graf bagian dari graf terhubung G yang penghapusannya memisahkan beberapa simpul dengan simpul lain di G.

Definisi 3.1 (Potongan)

Potongan (*a cut*) di dalam suatu jaringan transportasi ialah suatu himpunan potongan dari graf takterhubungkan (yang diperoleh dari jaringan transportasi itu dengan mengabaikan arah sisi-sisinya) yang memisahkan simpul sumber dari simpul pembuangannya (Liu, 1995:223).

Notasi $(P, \bar{P})$ digunakan untuk menyatakan suatu potongan yang membagi simpul-simpul itu menjadi dua himpunan bagian P atau $\bar{P}$, dengan P mengandung simpul sumber dan $\bar{P}$ mengandung simpul pembuangan.

Definisi 3.2 (Kapasitas potongan)

Kapasitas suatu potongan dilambangkan dengan $w(P,\bar{P})$ didefinisikan sebagai jumlah kapasitas sisi-sisi yang saling bersisian dari simpul-simpul di dalam P ke simpul-simpul di dalam $\bar{P}$, dengan kata lain.

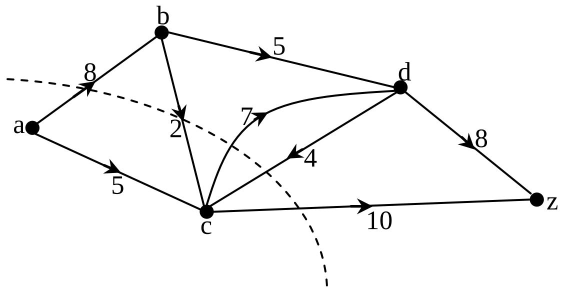
$$w(P,\bar{P}) = \sum_{i\epsilon P, j\epsilon \bar{P}} w(i,j)$$

(Liu, 1995:223)

Contoh

Garis putus-putus pada graf di bawah mengindentifikasi sebuah potongan yang memisahkan himpunan simpul-simpul $P = \{a, c\}$ dari himpunan simpul-simpul $\bar{P} = \{b, d, z\}$. Kapasitas potongan gambar tersebut adalah:

$$w(P,\bar{P}) = w(a,b) + w(c,d) + w(c,z) = 8 + 7 + 10 = 25$$



Garf G_8

Teorema 3.1

Nilai suatu aliran di dalam sebuah jaringan transportasi lebih kecil atau sama dengan kapasitas sembarang potongan manapun dalam jaringan itu.

(Liu, 1995:223)

Bukti.

Misalkan N sebuah jaringan, ϕ sebuah aliran dan $(P, \bar{P})$ sebuah potongan di suatu jaringan transportasi. Untuk simpul sumber a nilai aliran (*value of the flow*)

$$\phi_v = \sum_{i \in V} \phi(a, i) - \sum_{j \in V} \phi(j, a)$$

Karena derajat masuk a adalah 0 maka $\phi(j, a) = 0$, sehingga :

$$\phi_v = \sum_{i \in V} \phi(a, i)$$

Untuk simpul $x \epsilon P - \{a\}$

$$\sum_{i \in V} \phi(x, i) - \sum_{j \in V} \phi(j, x) = 0$$

Dengan menjumlahkan semua aliran yang keluar dari simpul *x* dari semua simpul *x* di *P* (termasuk a) yaitu dengan menggabungkan persamaan

$$\phi_v = \left[\sum_{i \in V} \phi(a, i) - \sum_{j \in V} \phi(j, a)\right] + \sum_{\substack{x \in p \\ x \neq a}} \left[\sum_{i \in V} \phi(x, i) - \sum_{j \in V} \phi(j, x)\right]$$

$$= \sum_{x \epsilon P, i \in V} \phi(x, i) - \sum_{x \epsilon P, j \in V} \phi(j, x)$$

$$= \left[\sum_{x \epsilon P, i \epsilon P} \phi(x, i) + \sum_{x \epsilon P, i \epsilon \bar{P}} \phi(x, i)\right] - \left[\sum_{x \epsilon P, i \epsilon P} \phi(x, i) + \sum_{x \epsilon P, j \epsilon \bar{P}} \phi(j, x)\right]$$

Karena kedua penjumlahan dilakukan untuk semua simpul di P, maka:

$$\sum_{x \epsilon P, i \epsilon P} \phi(x, i) = \sum_{x \epsilon P, i \epsilon P} \phi(x, i)$$

Sehingga

$$\phi_v = \sum_{x \epsilon P, i \epsilon \bar{P}} \phi(x, i) - \sum_{x \epsilon P, j \epsilon \bar{P}} \phi(j, x)$$

Namun karena $\sum_{x\epsilon P, j\epsilon \bar{P}} \phi(j,x)$ tidak pernah negatif, maka akan diperoleh

$$\phi_v \leq \sum_{x\epsilon P, i\epsilon \bar{P}} \phi(x,i) \leq \sum_{x\epsilon P, j\epsilon \bar{P}} w(x,i) = w(P,\bar{P})$$

Definisi 3.3 (Busur maju)

Suatu jalan (*walk*) $W = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ dalam suatu graf G dari suatu jaringan transportasi N, kemudian penggabungan busur-busur dalam N dengan bentuk $v_{i-1}v_i$dikatakan busur maju dari W dan bentuk $v_i v_{i-1}$ dikatakan busur mundur dari W (Cahrtran,1993:21)

Definisi 3.4 (Peningkatan aliran)

Jika ϕ adalah suatu aliran dalam N dengan gabungan jalan W, terdapat graf dasar G dan suatu bilangan bulat nonnegatif. $\mathrm{i(W)}$ dinamakan peningkatan aliran (*increment*) dari W yang didefinisikan oleh:

$$\mathrm{i(W)} = \min\ \{\mathrm{i}(i,j),\ \text{adalah suatu gabungan busur} - \text{busur dengan W}\}$$

Dimana:

$$\mathrm{i}(i,j) = \begin{cases} w(i,j) - \phi(i,j), & \text{jika } (i,j) \text{ adalah gabungan busur maju dari W} \\ \phi(i,j), & \text{jika} (j,i) \text{adalah gabungan busur mundur dari W} \end{cases}$$

(Cahrtrand, 1993:69)

Definisi 3.5 (Fungsi peningkatan aliran)

Jika ϕ adalah suatu aliran dalam jaringan N, peningkatan aliran dari *walk* (jalan) W dilambangkan dengan $i(W)$, maka fungsi penambahan aliran $\phi^*(i,j)$ didefinisikan oleh:

$$\phi^*(i,j) = \begin{cases} \phi(i,j) + i(W), & \text{untuk busur maju } (i,j) \text{dari W} \\ \phi(i,j) - i(W), & \text{untuk busur mundur } (i,j) \text{dari W} \\ \phi(i,j), & \mathrm{(i,j)} \notin W \end{cases}$$

(Cahrtrand, 1993:75)

Perhatikan graf G_5. Misalkan pilih jalan $W = a, f, b, c, e$ yang mempunyai sisi maju $(a, f), (f, b), (b, c)$ dan sisi mundur (c, e). Maka :

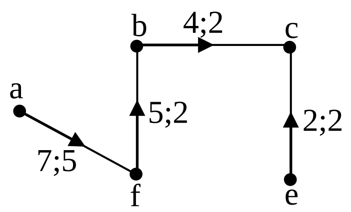
$i(a, f) = w(a, f) - \phi(a, f) = 7 - 5 = 2$

$i(f, b) = w(f, b) - \phi(f, b) = 5 - 2 = 3$

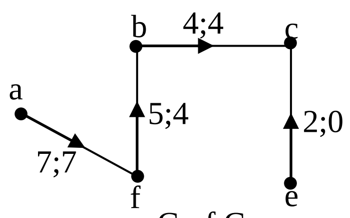
$i(b, c) = w(b, c) - \phi(b, c) = 4 - 2 = 2$

$i(c, e) = \phi(c, e) = 2$

Sehingga $i(W) = \min\{2,3,2,2\} = 2$. Ini berarti aliran pada $W = a, f, b, c, e$ dapat ditingkatkan sebesar 2 unit. Hal ini dapat dijelaskan dengan melihat graf G_9 dan G_{10}.



Graf G_9



Graf G_{10}

Keterangan:

- Sisi (a, f) dengan kapasitas 7 dan aliran awalnya 5 akibat mendapat peningkatan alirannya menjadi 7. Begitupun untuk sisi $(f, b), (b, c)$.
- Untuk sisi (c,e) dengan kapasitas 2 dan aliran awal 2 diganti alirannya menjadi nol, karena sisi (c,e) adalah sisi mundur yang aliran pada sisi ini dapat diturunkan untuk meningkatkan nilai aliran sebesar 2 dari jalan $W = a, f, b, c, e$.

4. Algoritma Aliran Maksimum (*Maximum Flow*)

Algoritma yang biasa digunakan untuk mencari aliran maksimum dalam suatu jaringan transportasi adalah algoritma aliran maksimum. Sebenarnya gagasan dasar dari algoritma ini cukup sederhana, yakni mulailah dengan sebuah aliran dan secara berulang tingkatkan nilai dari aliran tersebut sampai tidak ada lagi peningkatan yang mungkin. Sehingga hasil dari peningkatan aliran tersebut adalah sebuah aliran maksimum.

Pada algortima aliran maksimum, untuk meningkatkan nilai dari aliran yang telah diberikan maka harus ditentukan terlebih dahulu sebuah jalan dari simpul sumber ke simpul pembuangan dan selanjutnya meningkatkan nilai aliran disepanjang jalan tersebut. Jika telah ditentukan sebuah jalan dari simpul sumber ke simpul pembuangan dimana nilai aliran dari setiap sisi kurang dari kapasitas sisi tersebut maka nilai dari aliran tersebut dapat ditingkatkan.

Secara garis besar algoritma aliran maksimum atau juga dinamakan prosedur pemberian label meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mulai dengan sebuah aliran
2. Tentukan sebuah jalan *W* dan tingkatkan nilai aliran disepanjang jalan tersebut semaksimal mungkin.
3. Ulangi langkah 2 sampai tidak ada lagi jalan yang bisa ditingkatkan.

(Jhon A. Dossey, 1972:285)

Berikut ini adalah algoritma aliran maksimum menurut Richard Jhonsonbaugh:

1. Mulai dengan sebuah aliran
2. Misal P adalah sebuah jalan dari simpul a ke simpul z dalam sebuah jaringan G yang memenuhi kondisi berikut:

a. Untuk setiap busur maju di P, maka $\phi(i,j) < w(i,j)$
b. Untuk setiap busur mundur di P, maka $0 < \phi(i,j)$

Jika tidak ada jalan yang seperti ini, maka berhenti dan aliran sudah maksimal.

3. Tingkatkan aliran pada jalan tersebut dengan $i(W)$

$$i(W) = \min X$$

Dimana X merupakan jumlah dari $w(i,j) - \phi(i,j)$, untuk busur maju dan busur mundur di P didefinisikan:

$$\phi^*(i,j) = \begin{cases} \phi(i,j), & (\mathrm{i,j}) \notin W \\ \phi(i,j) + i(W), & \text{untuk busur maju } (i,j) \text{dari W} \\ \phi(i,j) - i(W), & \text{untuk busur mundur } (i,j) \text{dari W} \end{cases}$$

(Richard,2001:398)

5. Pendistribusian Produk Air Minum dalam Kemasan di PT. Amanah Insanillahia

Salah satu cara untuk mengatasi masalah perolehan air bersih, aman, sehat dan terjamin kebersihannya tersebut, terutama di kota-kota besar adalah melalui produk air minum dalam kemasan yang dibuat produsen minuman untuk memenuhi kebutuhan masyarakat akan air minum sehat. Selain alasan kesehatan dan keamanan, konsumen memilih air minum dalam kemasan karena faktor kesenangan atau gaya hidup juga karena harganya terjangkau dan praktis dalam mengkonsumsi.

Sistem distribusi tidak langsung adalah sistem distribusi yang tidak dijalankan oleh produsen, akan tetapi dijalankan oleh pihak lain. (Henry, 2000: 700). PT. Amanah Insanillahia merupakan salah satu contoh yang menerapkan sistem ini karena pendistribusian produknya dilakukan oleh perusahaan lain, yaitu CV. Panama Jaya Sukses Batusangkar. Diperlukannya pihak lain dalam pendistribusian produk karena keefisienannya yang lebih tinggi dalam penyediaan barang untuk konsumen. melalui kontak, pengalaman dan spesialisasi. Biasanya para perantara memberikan sesuatu yang lebih dari yang mungkin dilakukan oleh produsen sendiri.

PT Amanah Insanillahia adalah perusahaan milik swasta dengan modal perorangan yang dimiliki oleh H. Darwin dan bergerak dalam bidang usaha Air Minum Dalam Kemasan. Sumber mata air yang diolah atau diproses diambil dari sumber mata air Kiambang yang berlokasi di Jl. Putri Bungsu Simpang Kiambang Batusangkar. PT Amanah Insanillahia mengolah Air Minum Dalam Kemasan dengan merek AMIA dan mempunyai empat jenis produk yaitu kemasan botol 1500 ml, botol 600 ml, gelas 240 ml dan gallon 19 L. Untuk produk ukuran 240 ml dalam satu karton terdapat 48 kemasan. Produk ukuran 600 ml dalam satu karton berisi 24 kemasan. Sedangkan untuk produk ukuran 1500 ml dalam satu karton terdapat 12 kemasan.

Saat ini pensidtribusian produk air minum dalam kemasan dengan merek AMIA terdiri atas 7 distributor, yaitu H. Nasir, Toko Panama, Toko Rizki, Toko Kurnia Illahi, Toko Raudah Pasaman, Oki dan Toko Kurnia Batusangkar. Ke 7 distributor tersebut terletak di beberapa daerah, yakni Batusangkar, Padang Panjang, Bukittinggi, Padang, Lintau dan Pasaman.

Berdasarkan data distribusi produk air minum dalam kemasan untuk merek AMIA selama bulan Desember 2011 jumlah produk yang dikirimkan dari pabrik ke H. Nasir adalah 500 karton dan jumlah yang dikirim oleh H. Nasir ke pengecer sebanyak 400 karton. Toko Panama mendapat 2000 karton dari pabrik dan mendistribusikan sebanyak 1900 karton ke pengecer. Toko Rizki yang berada di Lintau menerima 600 karton dari pabrik dan mendistribusikan sebanyak 500 karton ke pengecer. Toko Kurnia Illahi mendapat kiriman dari pabrik sejumlah 1250 karton dan mendistribusikan sebanyak 1000 karton ke pengecer. Selanjutnya Toko Raudah Pasaman juga mendapat kiriman dari pabrik sebanyak 1250 karton dan telah mendistribusikan sebanyak 1100 karton ke pengecer. Distributor Oki mendapat kiriman produk sebanyak 1800 karton dan telah mendistribusikan sebanyak 1600 karton ke pengecer. Terakhir toko Kurnia Batusangkar yang mendapatkan kiriman produk dari pabrik sebanyak 400 karton dan telah mendistribusikan sebanyak 400 karton ke pengecer.

Selanjutnya dari sistem pendistribusian produk dari pabrik ke pengecer dapat dipresentasikan ke dalam graf berarah yang mempunyai bobot dengan pabrik, distributor dan pengecer sebagai simpul dan dilambangkan dengan huruf, serta jumlah barang yang dikirimkan melalui rute tersebut merupakan pembobot sisi.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

1. KESIMPULAN

Berdasarkan analisa yang telah dilakukan pada bab-bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

a. Untuk mendapatkan aliran maksimum pendistribusian produk air minum dalam kemasan di PT Amanah Insanillahia dari pabrik ke pengecer sesuai dengan data pada tabel 1 yang dimodelkan dalam graf berarah yang mempunyai bobot maka dapat digunakan suatu langkah matematis yaitu dengan menggunakan algoritma aliran maksimum. Secara garis besar langkah-langkah dari algoritma ini adalah sebagai berikut: setiap sisi pada jaringan transpotasi diberi aliran awal nol, label simpul sumber dengan $(-,\infty)$, selanjutnya beri label pada setiap simpul sampai simpul tujuan dengan beberapa aturan, jika simpul z sudah berlabel maka akan ditemukan jalan dari simpul a ke simpul z, setelah ditemukan jalan dari a ke z maka aliran disepanjang jalan tersebut dapat dinaikkan. Hal ini dilakukan secara berulang-ulang sampai tidak ditemukan lagi jalan yang akhirnya dapat dinaikkan.

b. Dengan menerapkan algoritma aliran maksimum pada pendisttribusian produk air minum dalam kemasan di PT Amanah Insanillahia maka didapatkan bahwa jumlah aliran maksimumnya adalah sebanyak 87864,6 Liter air selama bulan Desember 2011.

2. SARAN

Penulis menyadari dalam melakukan penelitian ini terdapat banyak kekurangannya. Untuk masalah pencarian aliran maksimum (*maximum flow*) pada pendistribusian produk yang mempunyai simpul sumber yang banyak atau *super sink* dan simpul tujuan yang jumlahnya banyak atau *super source*, maka untuk menyelesaikan aliran maksimum akan semakin sulit. Untuk itu penulis menyarankan untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum ini menggunakan bahasa pemograman.

DAFTAR PUSTAKA

Bucley, F. M. Lewintete. 2003. *A Friendly Introduction to Graph Theory*. Pearson Education Inc. New Jersey.

Budayasa, Ketut. 2007. *Teori graph dan aplikasinya*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.

Chartrand, G. 1993. Oellermann. *Apllied and Algorithmatic Graph Theory*. Mcgraw-Hill Inc. New York.

Chartrand, Gary. 1997. *Graphs and Digraphs Second Edision*. Greg Hubit Booworks. USA

Dossey, Jhon A. 1972. *Discrete Mathematics*. Harper Collins Publishers. United State of America.

Jhonsonbaugh, Richard. 2001. *Discrete Mathematics Fifth Edition*. Prentice Hall. New Jersey.

H.S, Suryadi. 1994.*Pengantar Teori Graf*. Lembaga Pengembangan Soal Matematika. Jakarta.

Http://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Appendix-C.pdf diakses tanggal 2 April 2011.

Http://id.wikipedia.org/wiki/Graf diakses tanggal 30 Maret 2012.

Http://repository.usu.ac.id/bitstream/123456789/28699/3/Chapter%20II.pdf diakses tanggal 4 April 2012.

Liu, C. L. 1995. *Dasar-Dasar Matematia Diskrit*. Gramedia Pustaka. Jakarta.

Munir, Rinaldi. 2010. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Informatika. Bandung.

Simamora, Henry. 2000. Manajemen Pemasaran Internasional Jilid II. Salemba Empat. Jakarta