

**ANALISIS RAMBATAN GELOMBANG ELEKTROMAGNETIK DALAM
FIBER OPTIK MENGGUNAKAN PENDEKATAN *FINITE DIFFERENCE***

METODE *LAASONEN*

SKRIPSI

untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Memperoleh Gelar Sarjana Sains



Oleh

RADHIYAH MARDHIYAH

NIM. 12770/2009

PROGRAM STUDI FISIKA

JURUSAN FISIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2014

PERSETUJUAN SKRIPSI

**ANALISIS RAMBATAN GELOMBANG ELEKTROMAGNETIK DALAM
FIBER OPTIK MENGGUNAKAN PENDEKATAN *FINITE DIFFERENCE*
METODE *LAASONEN***

Nama : Radhiyah Mardhiyah
NIM : 12770
Program Studi : Fisika
Jurusan : Fisika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 20 Januari 2014

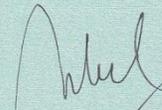
Disetujui Oleh

Pembimbing I,



Dra. Hidayati, M.Si
NIP. 19671111 199203 2 001

Pembimbing II,



Drs. Masril, M.S
NIP. 19631201 198903 1 001

PENGESAHAN

Dinyatakan Lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi

Program Studi Fisika Jurusan Fisika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Padang

Judul : Analisis Rambat Gelombang Elektromagnetik Dalam
Fiber Optik Menggunakan Pendekatan *Finite Difference*
Metode *Laasonen*

Nama : Radhiyah Mardhiyah

NIM : 12770

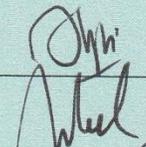
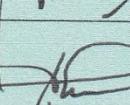
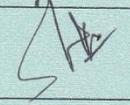
Program Studi : Fisika

Jurusan : Fisika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, Februari 2014

Tim Penguji

Nama		Tanda Tangan
1. Ketua	: Dra. Hidayati, M.Si	1. 
2. Sekretaris	: Drs. Masril, M.S	2. 
3. Anggota	: Drs. Akmam, M.Si	3. 
4. Anggota	: Nofi Yendri Sudiar, S.Si, M.Si	4. 
5. Anggota	: Drs. Mahrizal, M.Si	5. 

SURAT PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang lazim.

Padang, 19 Januari 2014

Yang menyatakan,

Radhiyah Mardhiyah

ABSTRAK

Radhiyah Mardhiyah : Analisis Rambatan Gelombang Elektromagnetik dalam Fiber Optik Menggunakan Pendekatan *Finite Difference Metode Laasonen*

Gelombang Nonlinier Schrodinger (NLS) merupakan gelombang yang merambat dalam fiber optik. Gelombang NLS memiliki karakteristik gelombang dengan penjalaran gelombang yang stabil dan merambat tanpa perubahan bentuk. Karakteristik ini merupakan sifat dari soliton sebagai gelombang nonlinier. Penelitian ini bertujuan mengkaji dan menganalisis perilaku penjalaran gelombang NLS dengan memperlihatkan pengaruh panjang gelombang ($N\lambda$) pada amplitudonya.

Penelitian yang dilakukan termasuk jenis penelitian dasar menggunakan pendekatan numerik. Pendekatan numerik yang digunakan adalah *Finite Difference metode Laasonen* yaitu suatu metoda untuk mendekati harga turunan suatu fungsi setiap titik pada domain solusi. Selanjutnya dengan metoda ini dirancang program menggunakan *software* Matlab R.7 melalui persamaan *nonlinier schrodinger* (NLS) dan solusi soliton.

Berdasarkan solusi soliton yang dihasilkan, dapat dianalisis sifat gelombang NLS yang menunjukkan bahwa besar amplitudo (A) gelombang NLS dipengaruhi oleh panjang gelombang (λ). Hasil dari pemograman yaitu berupa tampilan output berupa grafik dan pemodelan. Hasil pemodelan persamaan gelombang NLS untuk panjang gelombang ($N=1$) yaitu panjang gelombang sebanding dengan nilai amplitudo. Hasil pemodelan untuk variasi panjang gelombang ($N=2$) juga menunjukkan bahwa panjang gelombang sebanding dengan amplitudo. Jadi, pemodelan gelombang NLS menunjukkan bahwa panjang gelombang sebanding dengan amplitudo.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Allah S.W.T yang telah memberikan karuniaNya sehingga penulis dapat melaksanakan penelitian dan menyelesaikan skripsi ini. Sebagai judul skripsi ini yaitu: “Analisis Rambat Gelombang Elektromagnetik dalam Fiber Optik Menggunakan Pendekatan *Finite Difference* Metode *Laasonen*”. Penulisan laporan skripsi ini berguna untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) UNP.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis dibantu dan dibimbing oleh berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Hidayati, M.Si, sebagai dosen Pembimbing I yang telah membimbing dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Masril, M.Si sebagai dosen Pembimbing II yang telah membimbing dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Akmam, M.Si sebagai ketua Jurusan Fisika FMIPA UNP sekaligus dosen penguji
4. Bapak Nofi Yendri Sudiar, S.Si, M.Si, dan Bapak Drs. Mahrizal, M.Si, sebagai dosen penguji.
5. Ibu Dr. Ratnawulan, M.Si sebagai penasehat akademik.
6. Bapak dan Ibu Staf Pengajar Jurusan Fisika FMIPA UNP.

7. Semua pihak yang telah membantu dalam perencanaan, pelaksanaan, penyusunan dan penyelesaian skripsi ini.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan menjadi amal shaleh bagi Bapak dan Ibu serta mendapat balasan yang berlipat ganda dari Allah SWT.

Penulis menyadari bahwa dalam laporan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan kelemahan. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran untuk menyempurnakan skripsi ini. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Padang, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
ABSTRAK	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI.....	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR LAMPIRAN.....	viii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Perumusan Masalah.....	3
C. Pembatasan Masalah.....	3
D. Tujuan Penelitian	4
E. Pertanyaan Penelitian.....	4
F. Kontribusi Penelitian	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
A. Gelombang.....	5
B. Gelombang Non Linier Schrodinger.....	7
C. Solusi Persamaan NLS.....	16
D. Fiber Optik.....	22
E. Pendekatan <i>Finite Difference</i>	24

BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	29
A. Jenis Penelitian	29
B. Waktu dan Tempat Penelitian.....	29
C. Pelaksanaan Penelitian.....	29
D. Instrumen Penelitian	30
E. Desain Penelitian	31
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	37
A. Hasil Rancangan Program	37
B. Variasi Panjang Gelombang terhadap Amplitudo	38
C. Pembahasan	43
BAB V PENUTUP.....	45
A. Kesimpulan	45
B. Saran	45
DAFTAR PUSTAKA	47
LAMPIRAN.....	49

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1. Gelombang Elektromagnetik	6
2. Bentuk Gelombang NLS untuk $N = 1$	20
3. Profil Persamaan NLS untuk $N = 2$	22
4. Struktur Fiber Optik	22
5. <i>Tight Buffer</i>	23
6. <i>Waterproof Cable</i>	24
7. <i>Hybryd and Composite Cable</i>	24
8. Kurva Suatu Fungsi yang Berjarak h yang Dibagi Sama Besar	25
9. Flowchart Solusi Persamaan NLS Menggunakan Pendekatan <i>Finite Difference</i> Metode <i>Laasonen</i>	36
10. Pemodelan Persamaan NLS untuk $N=1$ dengan Solusi Eksak	37
11. Pemodelan Persamaan NLS untuk $N=1$ dengan Metoda <i>Laasonen</i>	38
12. Pemodelan Persamaan NLS untuk $N=1$ dengan Metode <i>Laasonen</i> ($\lambda = 0.8\mu\text{m}$)	39
13. Pemodelan Persamaan NLS untuk $N=1$ dengan Metode <i>Laasonen</i> ($\lambda = 1.3\mu\text{m}$)	39
14. Pemodelan Persamaan NLS untuk $N=1$ dengan Metode <i>Laasonen</i> ($\lambda = 1.6\mu\text{m}$)	40
15. Pemodelan Persamaan NLS untuk $N=2$ dengan metode <i>Laasonen</i> (λ_1 dan $\lambda_2 = 1\mu\text{m}$ dan $0.5\mu\text{m}$)	41
16. Pemodelan Persamaan NLS untuk $N=2$ dengan metode <i>Laasonen</i> (λ_1 dan $\lambda_2 = 1.6\mu\text{m}$ dan $0.8\mu\text{m}$)	41
17. Pemodelan Persamaan NLS untuk $N=2$ dengan metode <i>Laasonen</i> (λ_1 dan $\lambda_2 = 1.6\mu\text{m}$ dan $1\mu\text{m}$)	42

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. List program.....	49

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Perkembangan teknologi pada saat sekarang ini banyak berpengaruh pada berbagai bidang diantaranya bidang ekonomi, sosial, budaya, dan sains. Salah satu bidang yang sangat dipengaruhi adalah sains khususnya bidang ilmu fisika. Fisika adalah salah bidang ilmu yang membahas tentang gejala-gejala yang terjadi dalam kehidupan dan alam semesta baik yang linier maupun yang nonlinier. Gejala nonlinier adalah fenomena umum dalam fisika karena semua fenomena alam semesta bersifat nonlinier. Salah satu contoh dari gejala nonlinier adalah soliton.

Soliton adalah gelombang nonlinier yang cepat rambatnya dipengaruhi oleh amplitudo. Pada tahun 1834, Jhon Scott Russel mengamati suatu gerak gelombang tunggal yang bergerak sepanjang kanal tanpa mengalami perubahan bentuk maupun pengurangan laju rambat gelombang (Wadati, 2001). Keunikan soliton adalah mampu mempertahankan bentuk dan strukturnya setelah bertumbukan dengan soliton lainnya dan soliton tunggal dapat menjalar pada jarak yang jauh tanpa ada perubahan kecepatan dan bentuk. Berarti soliton selama penjalarnya tidak mengalami pengurangan energi dan dapat memperkuat diri serta mempertahankan bentuknya selama penjalaran dengan kecepatan konstan. Kecepatan penjalaran soliton sebanding dengan amplitudo,

semakin besar amplitudo maka kecepatannya semakin besar juga. Konsep soliton banyak digunakan dalam perkembangan teknologi diantaranya adalah model partikel subatomik, transfer energi pada syaraf sistem manusia, komunikasi serat optik, fluxons pada *Josephson Junction*, sistem *Deoxyribonucleic acid* (DNA), dan lain-lain. Salah satu bidang teknologi yang menggunakan konsep soliton adalah komunikasi fiber optik.

Menurut Crisp (2001) “fiber optik adalah sebuah kaca murni yang panjang dan tipis yang dapat mampu membimbing cahaya”. Dalam penggunaannya beberapa fiber optik dijadikan satu dalam sebuah tempat yang dinamakan kabel optik dan digunakan untuk mengantarkan data digital yang berupa sinar dalam jarak yang sangat jauh.

Fiber optik memanfaatkan cahaya yaitu gelombang elektromagnetik sebagai gelombang pembawa informasi yang akan dikirimkan. Pada bagian pengirim isyarat informasi diubah menjadi isyarat optik, lalu diteruskan ke saluran informasi yang terbuat dari serat optik sebagai pemandu gelombang. Sesampainya di penerima, berkas cahaya ditangkap oleh detektor cahaya, yang berfungsi untuk mengubah besaran optik menjadi besaran elektrik. Di sini cahaya mengalami pelebaran dan pelemahan, disebabkan karena ketidakmurnian bahan serat, yang menyerap serta menyebarkan cahaya.

Salah satu jenis kabel optik yaitu *Dense Wavelength Division Multiplexing* (DWDM). DWDM adalah suatu teknologi transfer data yang memanfaatkan beberapa panjang gelombang yang berbeda sebagai kanal untuk

mengirim data melalui sebuah serat optik tunggal secara bersamaan. Menurut Meiyanto (2001) persamaan nonlinier schrodinger (NLS) dapat menggambarkan dengan baik sistem komunikasi optik nonlinier dalam orde durasi pikodetik memiliki solusi 2 soliton. Kemungkinan memiliki solusi N-soliton. Solusi persamaan NLS untuk 1 panjang gelombang bisa di selesaikan secara analitik. Tetapi untuk pulsa atau gelombang yang memiliki 2 atau lebih panjang gelombang yang dikirimkan dalam waktu bersamaan jika diselesaikan secara analitik akan menemukan kesulitan karena memerlukan waktu yang lama dan penyelesaian yang rumit. Untuk mengatasi masalah tersebut digunakan metoda pendekatan yaitu pendekatan *finite difference* metoda *laasonen*.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang ”**Analisis Rambatan Gelombang Elektromagnetik dalam Fiber Optik Menggunakan *Finite Difference* Metode *Laasonen***”.

B. Perumusan masalah

Sesuai dengan latar belakang yang telah dikemukakan, perumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana pemodelan dan analisis rambatan gelombang elektromagnetik ketika banyak panjang gelombang ($N\lambda$) yang dikirimkan melalui pulsa dengan pendekatan *finite difference* metode *laasonen* untuk $N = 1$ dan 2 .

C. Pembatasan Masalah

Berdasarkan perumusan masalah dan mengingat luasnya cakupan penelitian ini maka penulis akan menfokuskan permasalahan pada pemodelan

dan analisis rambatan gelombang elektromagnetik ketika banyak panjang gelombang ($N\lambda$) yang dikirimkan melalui pulsa dengan pendekatan *finite difference* metode *laasonen* $N = 1$ dan 2 .

D. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang hendak dicapai pada penelitian ini adalah

1. Memperlihatkan pemodelan rambatan gelombang elektromagnetik pada fiber optik.
2. Menganalisis rambatan gelombang elektromagnetik ketika banyak panjang gelombang ($N\lambda$) yang dikirimkan melalui pulsa dengan N adalah 1 dan 2 .

E. Pertanyaan Penelitian

Adapun tujuan yang hendak dicapai pada penelitian ini adalah

1. Bagaimana bentuk pemodelan rambatan gelombang elektromagnetik pada fiber optik.
2. Bagaimana analisis rambatan gelombang elektromagnetik ketika banyak panjang gelombang ($N\lambda$) yang dikirimkan melalui pulsa dengan N adalah 1 dan 2 .

3. Kontribusi Penelitian

Adapun penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat dan kontribusi yaitu :

1. Penelitian sendiri, dapat menyelesaikan studi Sarjana Fisika
2. Bagi pembaca dapat berupa informasi mengenai pemodelan dan kajian rambatan gelombang elektromagnetik pada fiber optik.
3. Penelitian lainnya, sebagai referensi dan acuan bagi peneliti.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Gelombang

Gelombang merupakan suatu gejala gangguan yang merambat dalam selang waktu tertentu ke ruang sekitarnya. Gelombang dapat terjadi apabila suatu sistem diganggu dari posisi kesetimbangannya dan gangguan itu merambat dari suatu daerah sistem ke daerah lainnya. Gerak gelombang dapat dilihat sebagai perpindahan berupa pulsa energi dan momentum dari suatu tempat ke tempat lain (Giancolli, 1998).

Gerak gelombang merupakan gejala yang ditimbulkan oleh suatu gangguan lokal pada besaran fisis tertentu serta perambatan gangguan itu dalam medium disekitarnya. Gangguan tersebut dapat berupa osilasi kedudukan partikel, osilasi tekanan atau kerapatan massa dalam medium bersangkutan, dan osilasi medan listrik/ magnet. Kecuali gelombang elektromagnetik, perambatan gangguan lokal tersebut selalu berlangsung dalam medium material (Tjia, 1993).

Berdasarkan medium perambatannya, gelombang dapat dibedakan menjadi :

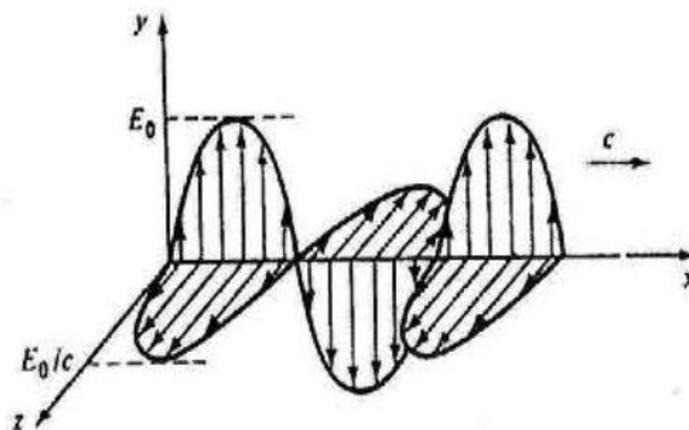
a. Gelombang mekanik

Gelombang mekanik adalah gelombang yang dalam perambatannya memerlukan medium. Contohnya gelombang bunyi, gelombang tali, gelombang permukaan air dan lain sebagainya.

b. Gelombang elektromagnetik

Gelombang elektromagnetik adalah gelombang yang dalam perambatannya tidak memerlukan medium. Contohnya gelombang cahaya, gelombang radio, radiasi inframerah dan ultraviolet, sinar X, sinar gamma, dan lain sebagainya.

Gelombang elektromagnetik adalah gelombang yang dihasilkan karena perubahan medan magnet (**H**) menghasilkan medan listrik (**E**) dan perubahan medan listrik menghasilkan medan magnet. Akhir dari perubahan medan-medan ini yang berinteraksi menghasilkan gelombang medan listrik dan medan magnet yang benar-benar dapat merambat dalam ruang dimana medan itu timbul. Jadi, gelombang elektromagnetik merupakan interaksi antara perubahan medan magnet dan perubahan medan listrik.



Gambar 1. Gelombang Elektromagnetik
(sumber : Supriyanto, 2007)

Dari Gambar 1 dapat diketahui bahwa arah medan listrik dan medan magnet saling tegak lurus. Amplitudo antara kedua medan E_0 dan B_0 , berlaku hubungan $E_0 = cB_0$. c adalah kecepatan rambat gelombang elektromagnetik.

Jika suatu medium bersifat linier, maka

$$D = \epsilon E \quad \text{dan} \quad H = \frac{1}{\mu} B \quad (1)$$

Bila medium bersifat homogen, maka nilai konstanta permivitas, ϵ , dan permeabilitas, μ tidak mengalami variasi pada setiap titik dalam medium, sehingga persamaan maxwell dapat dinyatakan sebagai

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

Besar kecepatan rambat gelombang elektromagnetik adalah

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3)$$

Biasanya kecepatan rambat gelombang elektromagnetik pada suatu medium lebih rendah dibandingkan dengan kecepatan rambat gelombang elektromagnetik.

B. Gelombang Nonlinier Schrodinger

Soliton adalah gelombang nonlinier yang dapat memperkuat diri dan mempertahankan bentuknya sementara perjalanan dengan kecepatan konstan. Soliton terjadi disebabkan oleh efek [nonlinier](#) dan efek dispersif dalam medium yang saling mengkompresi. Efek dispersif merujuk pada [hubungan dispersi](#), hubungan antara frekuensi dan kecepatan gelombang dalam medium (Hidayati,2005).

Pada tahun 1834, John Scott Russell menjelaskan :

"Saya yakin akan lebih baik memperkenalkan fenomena ini dengan mendeskripsikan keadaan dari pengenalan pertama saya dengannya. Saya sedang mengamati gerak kapal sepanjang kanal sempit yang ditarik dengan cepat oleh sepasang kuda, ketika kapalnya tiba-tiba berhenti - tidak demikian halnya dengan massa air pada kanal yang telah digerakkannya; gelombang itu berakumulasi mengelilingi haluan kapal dalam keadaan golakan dahsyat, dan kemudian dengan tiba-tiba meninggalkan haluan kapal, menjalar ke depan dengan kecepatan besar, dalam bentuk gundukan air yang melanjutkan penjarannya sepanjang kanal tanpa mengalami perubahan bentuk atau pengurangan kecepatan. Saya mengikuti gelombang itu di punggung kuda, dan setelah menyusuli, gelombang itu terus menjalar pada laju sekitar delapan atau sembilan mil per jam, dengan tetap mempertahankan bentuk awalnya, panjangnya sekitar tiga puluh kaki dan tingginya sekitar satu setengah kaki. Tingginya secara berangsur menurun, dan setelah pengejaran satu atau dua mil saya kehilangannya pada belokan kanal."

Berdasarkan pengamatan John Scott Russell dapat disimpulkan bahwa gelombang soliton merupakan gelombang yang selama penjarannya tidak mengalami perubahan bentuk dan pengurangan kecepatan. Secara umum soliton mempunyai sifat terlokalisasi dalam ruang, tidak berubah bentuk terhadap gangguan kecil, apabila kedua soliton bertumbukan, maka tumbukannya lenting sempurna.

Perambatan gelombang pada optik dapat diturunkan dari persamaan Maxwell (satuan Gaussian) dalam bahan, yaitu:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

- Ket: **E** : medan listrik (volt/m)
B : fluks atau induksi magnetik (weber/m atau Tesla)
H : medan magnet (ampere/m)
J : rapat arus (ampere/m)
D : perpindahan listrik (coulomb/m)
 ρ : rapat muatan listrik (coulomb/m)

Persamaan (4), (5), (6), (7) adalah perasamaan hukum Faraday, hukum Ampere, dan hukum Gaussian. Dari persamaan (4) diketahui bahwa arah getar medan listrik harus saling tegak lurus dengan arah getar medan magnet.

Diasumsikan dalam keempat persamaan di atas tidak ada rapat muatan listrik dan rapat arus listrik luar yang di berikan, $\rho = J = 0$, rapat arus **D** dan **B** menimbulkan reaksi medan listrik dan medan magnet di dalam medium dan hubungan keduanya dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (9)$$

ε_0 adalah permivitas ruang hampa dan μ_0 adalah permeabilitas ruang hampa, dan **P** dan **M** adalah induksi listrik dan polarisasi magnetik. Jika tidak terdapat muatan luar maka $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ serta mediumnya non magnetik ($\mathbf{M} = 0$), sehingga dengan melakukan curl pada persamaan (4) :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

Untuk bahan dielektrik isotropik bersifat non magnetik berarti $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (11)$$

Dari persamaan (5) diketahui: $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$ sehingga persamaan (11) dapat ditulis

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} \quad (12)$$

Tinjau vektor identitas untuk medan listrik \mathbf{E} berbentuk

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

Sehingga persamaan (12) menjadi

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} \quad (13)$$

Berarti

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} \quad (14)$$

atau

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} = 0 \quad (15)$$

Dari persamaan (1) dan (2) persamaan (15) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Persamaan (16) merupakan persamaan gelombang linier untuk gelombang elektromagnetik dengan kecepatan rambat c .

Medium \mathbf{D} dan \mathbf{E} dalam domain frekuensi dengan menggunakan persamaan tranformasi Fourier adalah :

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(r, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (17a)$$

$$\mathbf{E}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(r, t) e^{-i\omega t} dt \quad (17b)$$

$$\mathbf{D}(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(r, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (17c)$$

$$\mathbf{D}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(r, t) e^{-i\omega t} dt \quad (17d)$$

Berdasarkan persamaan (17) ini persamaan (15) menjadi

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E}(r, \omega) - \mu_0 (-i\omega)^2 \mathbf{D}(r, \omega) = 0 \quad (18)$$

Dalam serat optik, berlaku hubungan (Agrawal,1995);

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\chi^1 E + \chi^3 E^3 + \dots), \quad (19)$$

atau dalam notasi Vektor

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^1 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^3 E^2 \mathbf{E} + \dots, \quad (20)$$

χ adalah polarisabilitas (kemampuan polarisasi) atau suseptibilitas (sifat mudah terpengaruh) dielektrik dalam medium. Relasi medan perpindahan listrik dapat dituliskan:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}, \quad (21a)$$

Dari persamaan (21a) bisa diketahui bahwa perpindahan listrik (\mathbf{D}) dipengaruhi oleh medan listrik, polarisasi linier dan polarisasi nonlinier.

Polarisasi linier dan nonlinier tercakup dalam persamaan (20). Substitusi persamaan (20) ke persamaan (21a) menghasilkan :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + (\varepsilon_0 \chi^1 + \varepsilon_0 \chi^3 |E|^2 + \dots) \mathbf{E}, \quad (21b)$$

Jika ditinjau bahwa suseptibilitas nonlinier yang dominan sampai suseptibilitas orde tiga, maka persamaan (21b) menjadi :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 (1 + \chi^1 + \chi^3 |E|^2 + \dots) \mathbf{E} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \end{aligned} \quad (21c)$$

$$\text{Untuk } n^2 = \varepsilon_r, \quad (22a)$$

Maka

$$n^2 = 1 + \chi^1 + \chi^3 |E|^2 \quad (22b)$$

Indeks bias diatas terdiri dari indeks bias linier dan nonlinier,

$$n^2 = n_L^2 + n_{NL}^2 I(t) \quad (23)$$

dengan indeks bias linier adalah

$$n = \sqrt{1 + \chi^1} \quad (24)$$

Koefisien n_{NL} adalah indeks bias nonlinier dan sebanding dengan suseptibilitas orde ketiga ($n_{NL}^2 = \chi^3$). Dari persamaan (23), indeks bias bergantung pada intensitas dengan $I(t) \sim |E|^2$.

Relasi \mathbf{D} dan \mathbf{E} dari persamaan (8) dan dapat pula dinyatakan oleh persamaan (21c) jika digunakan pendefenisian konstanta dielektrik berdasarkan persamaan (21b) maka menghasilkan:

$$\mathbf{D}(r, t) = \varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}(r, t) \quad (25)$$

dimana n adalah indeks bias yang bergantung frekuensi dan intensitas medan listrik dalam persamaan (23)

$$n = n_L(\omega) + n_{NL}|E|^2 \equiv n(\omega, E) \quad (26)$$

Tinjau kembali persamaan (25) dan lakukan transformasi Fourier melalui defenisi persamaan (16) diperoleh

$$\mathbf{D}(r, \omega) = \varepsilon_0 n(\omega, E)^2 \mathbf{E}(r, \omega) \quad (27)$$

Persamaan (25) jika disubstitusikan ke dalam persamaan (18) menjadi

$$\nabla^2 \mathbf{E}(r, \omega) + \frac{\omega^2 n(\omega, E)^2}{c^2} \mathbf{E}(r, \omega) = 0 \quad (28)$$

Selanjutnya gunakan defenisi k dan ω

$$k(\omega, E)^2 = \frac{\omega^2 n(\omega, E)^2}{c^2} \quad (29)$$

Dari persamaan (29) terlihat bilangan gelombang sebagai fungsi dari frekuensi (ω) dan intensitas medan listrik (\mathbf{E}). Substitusikan persamaan (26) ke persamaan (29) menghasilkan :

$$\begin{aligned} k(\omega, E)^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} [n_L(\omega) + n_{NL}|E|^2]^2 \\ k(\omega, E) &= \frac{\omega}{c} n_L(\omega) + \frac{\omega}{c} n_{NL}|E|^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Suku pertama dari persamaan (30) adalah konstanta gelombang $k(\omega)$, suku kedua merupakan suku tambahan sebagai konsekuensi indeks bias terhadap intensitas.

Selanjutnya di defenisikan konstanta nonlinieritas sebagai (Hasegawa, 2000) :

$$\gamma = \frac{\omega n_{NL}}{c}$$

Medan listrik dalam serat optik yang merambat pada arah z dapat di ungkapkan melalui

$$E(z, t) = A(z, t) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)] \quad (31)$$

k_0 dan ω_0 menyatakan bilangan gelombang dan frekuensi gelombang pembawa, serta $A(z, t)$ diasumsikan sebagai fungsi selubung (*envelope*) yang bervariasi

lambat terhadap jarak (*slowly varying envelope*). Persamaan dinamika selubung medan listrik $A(z,t)$ dapat diperoleh dengan cara, pertama-tama persamaan (31) di transformasikan ke dalam domain frekuensi

$$\begin{aligned}
 E(z, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) e^{i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) e^{i\omega t} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) e^{ik_0 z} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \\
 &= e^{ik_0 z} A(z, \omega - \omega_0)
 \end{aligned} \tag{32}$$

Selanjutnya disubstitusikan persamaan (32) ke persamaan (28) dengan mengingat bahwa arah perambatan gelombang hanya pada sumbu z

$$\nabla^2 e^{ik_0 z} A(z, \omega - \omega_0) + \frac{\omega^2 n(\omega, E)^2}{c^2} e^{ik_0 z} A(z, \omega - \omega_0) = 0$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 (ik_0)^2 A(z, \omega - \omega_0) + 2(ik_0) \frac{\partial}{\partial z} A(z, \omega - \omega_0) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A(z, \omega - \omega_0) + \\
 k(\omega, E)^2 A(z, \omega - \omega_0) = 0
 \end{aligned} \tag{33}$$

Berdasarkan asumsi bahwa fungsi selubung bervariasi lambat terhadap waktu (*slowly varying envelope*), maka diperkenankan mengaproksimasi persamaan (33) dengan mengabaikan suku ketiga, ini artinya fungsi selubung boleh bergerak namun percepatan harus jauh lebih kecil daripada kecepatannya (Agrawal, 1995)

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \tag{34}$$

Persamaan (33) dapat diaproksimasikan menjadi

$$2(ik_0) \frac{\partial}{\partial z} A(z, \omega - \omega_0) + [k(\omega, E)^2 - k_0^2] A(z, \omega - \omega_0) = 0 \quad (35)$$

Mengingat bahwa $k(\omega, E)$ seperti dinyatakan dalam persamaan (30), maka dapat ditulis

$$k(\omega, E) = k(\omega) + \Delta k(\omega, E) \quad (36)$$

$k(\omega, E)$ dapat diuraikan dalam ekspansi deret Taylor di sekitar pusat ω_0 terhadap k dan diperoleh :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0)k_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} k_2 + \dots, \quad (37)$$

Kemudian, persamaan (36) dan (37) dapat digunakan untuk menghitung suku $[k(\omega, E)^2 - k_0^2]$ dalam persamaan (35). Dapat dituliskan kembali persamaan (35) dalam bentuk :

$$i \frac{\partial}{\partial z} A(z, \omega - \omega_0) + \left[(\omega - \omega_0)k_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} k_2 + \Delta k \right] A(z, \omega - \omega_0) = 0 \quad (38)$$

Lakukan transformasi Fourier balik (invers) terhadap persamaan (38) dan akan didapatkan persamaan :

$$i \frac{\partial}{\partial z} A(z, t) + ik_1 \frac{\partial}{\partial t} A(z, t) - \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(z, t) + \Delta k A(z, t) = 0 \quad (39)$$

Dengan membandingkan Δk pada persamaan (36) dan (30), persamaan (39) dapat ditulis dalam bentuk :

$$i \frac{\partial}{\partial z} A(z, t) + ik_1 \frac{\partial}{\partial t} A(z, t) - \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(z, t) + \frac{\omega}{c} n_{NL} |E|^2 A(z, t) = 0$$

maka persamaan (39) di representasikan dalam bentuk :

$$i \frac{\partial}{\partial z} A(z, t) + ik_1 \frac{\partial}{\partial t} A(z, t) - \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(z, t) + [\gamma |A(z, t)|^2] A(z, t) = 0 \quad (40)$$

Persamaan (40) dapat di sederhanakan dengan transformasi koordinat bergerak dengan kecepatan sama dengan kecepatan grup V_g sebagai berikut :

$$\tau = t - \frac{z}{V_g} \quad (41)$$

Dari transformasi pada persamaan (41) serta menggunakan aturan differensial persamaan (40) dapat ditulis menjadi :

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (42)$$

Jika ditinjau perambatan pulsa dalam medium dimana $k_2 < 0$ (anomalous dispersion), maka persamaan (42) dengan mengambil $k_2 = -k_2$ menjadi :

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \gamma |A|^2 A = 0$$

atau

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = i\gamma |A|^2 A \quad (43)$$

Persamaan (43) mendeskripsikan perambatan gelombang optik melalui medium bersifat dispersif dan nonlinier. Suku yang mengandung k_2 dari persamaan (43) memperlihatkan pengaruh faktor dispersi kecepatan grup dalam medium, sedangkan suku yang mengandung γ dari persamaan (43) memperlihatkan terjadinya efek *self phase modulation*.

Solusi soliton persamaan NLS persamaan (43) untuk satu panjang gelombang yang merambat pada serat optik dapat dihitung menggunakan berbagai metoda. Misalnya, melalui integrasi langsung dapat diperoleh solusi stasioner untuk 1 soliton dan dengan transformasi dapat diperoleh solusi 1 soliton berjalan seperti yang ditulis Hous dan Wong (1996) berbentuk :

$$A(z, t) = A_0 \operatorname{sech} \left[A_0 \sqrt{\frac{\gamma}{2k_2}} (t - 2Vt) \right] \exp \left[iVt - i \left(V^2 - \frac{A^2 \gamma}{2k_2} \right) z \right] \quad (44)$$

Persamaan (44) solusi 1 soliton untuk persamaan NLS dalam fungsi ruang dan waktu. A_0 merupakan amplitudo awal dari gelombang soliton, γ merupakan faktor nonlinieritas dan k_2 merupakan lambang dari faktor dispersif.

C. Solusi Persamaan NLS

Langkah untuk mendapatkan persamaan NLS diasumsi bahwa mediumnya bersifat *kerr-like* yaitu mengubah indeks bias fiber secara nonlinier yang menghasilkan *self-confine* pada pulsa sehingga efek *distorsi* pada pulsa yang disebabkan oleh dispersi dapat dihilangkan dan memiliki respon lambat, dengan demikian intensitas gelombang hanya memiliki peran terhadap perubahan indeks bias.

Jika pada persamaan (39) harga $k_2 = 1$ dan setiap A memiliki sejumlah N komponen, maka persamaan NLS tersebut menjadi

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \gamma \sum_{m=1}^N |A|^2 A = 0 \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

atau

$$i(A_z)_1 + \frac{1}{2}(A_{\tau\tau})_1 + \gamma \sum_{m=1}^N |A_m|^2 A_m = 0 \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

dengan $\sum_{m=1}^N |A_m|^2$ adalah perubahan indeks bias yang dihasilkan oleh seluruh komponen yang inkoheren dari berkas cahaya pada fiber optik, A_m adalah berkas cahaya ke- m yang dapat berupa bilangan kompleks sehingga $|A_m|^2 = A_m A_m^*$ dan N adalah jumlah mode linier yang berkontribusi terhadap soliton.

Solusi stasioner dari persamaan (45) adalah (Ankhiewicz, 1998)

$$A_m(\tau, z) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varphi_m(\tau) e^{\frac{i\lambda_m^2 z}{2}} \quad (46)$$

dengan $\varphi_m(\tau)$ adalah fungsi real dan λ_m adalah nilai eigen. Persamaan (46)

disubstitusikan ke persamaan (45)

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varphi_m(\tau) e^{\frac{i\lambda_m^2 z}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varphi_m(\tau) e^{\frac{i\lambda_m^2 z}{2}} \\ & + \gamma \sum_{m=1}^N \left| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varphi_m(\tau) e^{\frac{i\lambda_m^2 z}{2}} \right|^2 \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varphi_m(\tau) e^{\frac{i\lambda_m^2 z}{2}} = 0 \\ & - \frac{\lambda_m^2}{2} \varphi_m(\tau) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \varphi_m(\tau) + \left[\sum_{n=1}^N \varphi_n^2 \right] \varphi_m(\tau) = 0 \\ & - \lambda_m^2 \varphi_m(\tau) + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \varphi_m(\tau) + 2 \left[\sum_{n=1}^N \varphi_n^2 \right] \varphi_m(\tau) = 0 \\ & \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \varphi_m + 2 \left[\sum_{n=1}^N \varphi_n^2 \right] \varphi_m = \lambda_m^2 \varphi_m \end{aligned} \quad (47)$$

Persamaan (47) adalah persamaan differensial biasa yang integrabel untuk sembarang λ_m real nondegenerasi dan persamaan diffrensial orde dua dengan solusi berbentuk (Boas,1983)

$$\left(\sum_{m=1}^N \frac{e^{(\lambda_m + \lambda_n)\tau}}{(\lambda_m + \lambda_n)} + \delta_{mn} \right) \frac{\varphi_n(\tau)}{\sqrt{2\lambda_m}} = -e^{\lambda_n \tau} \quad (48)$$

Apabila dinyatakan dalam bentuk matriks, maka persamaan (48) dapat di tulis sebagai berikut

$$D_{m,n} \frac{\varphi_n(\tau)}{\sqrt{2\lambda_m}} = -e_n \quad (49)$$

$e_n = e^{\lambda_n \tau}$, $e_m = e^{\lambda_m \tau}$, $D_{m,n}$ adalah komponen (m,n) dalam matriks D_N yang dapat ditulis dalam bentuk

$$D_{m,n} = \sum_{m=1}^N \frac{e_m e_n}{\lambda_m + \lambda_n} + \delta_{mn} \quad (50)$$

Untuk $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{untuk } m = n \\ 0 & \text{untuk } m \neq n \end{cases}$

Solusi dari $\varphi_m(\tau)$ persamaan (50) dapat di selesaikan dengan metode matriks

$$\varphi_m(\tau) = \sqrt{2\lambda_m} (D_{m,n})^{-1} e_n \quad (51)$$

$(D_{m,n})^{-1}$ adalah invers dari matriks D_N .

Berdasarkan persamaan (51) solusi umum dari persamaan NLS yang berorde N dapat ditulis sebagai berikut

$$\Phi_N(\tau) = \sum_{m=1}^N (\varphi_m(\tau))^2 \quad (52)$$

Pada persamaan (49) perumusan $e_n = e^{\lambda_n \tau}$ dapat diubah defenisinya ke dalam bentuk lain

$$e_n = \sqrt{2\lambda_n a_n} e^{\lambda_n \bar{\tau}_n} \quad (53)$$

$\bar{\tau}_n = \tau - \tau_n$, menyatakan letak dari tiap soliton tunggal yang berkontribusi terhadap gelombang NLS pada multisoliton kompleks, a_n adalah konstanta positif sembarang.

$$a_n = \prod_{m \neq n} c_{m,n} \quad ; \quad c_{m,n} = c_{n,m} = \frac{\lambda_m + \lambda_n}{|\lambda_m - \lambda_n|} \quad ; \quad m < n$$

$c_{m,n}$ adalah koefisien yang positif dan λ_m adalah nilai eigen.

1. Solusi persamaan NLS untuk N=1

Untuk N=1 solusi persamaan NLS menurut persamaan (50) dapat ditentukan sebagai berikut

$$D_{m,n} = \sum_{m=1}^N \frac{e_m e_n}{\lambda_m + \lambda_n} + \delta_{mn}$$

$$D_{11} = \frac{\sqrt{2\lambda_1}e^{\lambda_1\bar{\tau}_1}\sqrt{2\lambda_1}e^{\lambda_1\bar{\tau}_1}}{\lambda_1 + \lambda_1} + 1$$

$$D_1 = e^{2\lambda_1\bar{\tau}_1} + 1 \quad (54)$$

Pada persamaan (54) pembilang dan penyebut dikalikan dengan $e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1}$

$$D_1 = \frac{e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1} + e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1}}{e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1}} \quad (55)$$

Kemudian di cari inversnya

$$D^{-1} = \frac{e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1}}{e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1} + e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1}} \quad (56)$$

Sehingga hasilnya

$$D^{-1} = -\frac{e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1}}{2 \cosh(\lambda_1\bar{\tau}_1)} = -\frac{1}{2} \operatorname{sech}(\lambda_1\bar{\tau}_1) e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1} \quad (57)$$

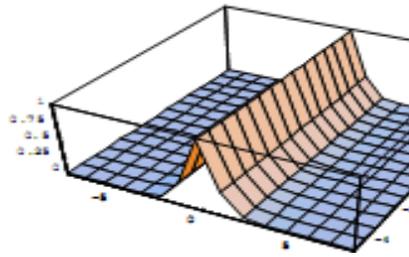
Untuk memperoleh solusi persamaan untuk NLS N=1 substitusikan persamaan (57) ke persamaan (51)

$$\varphi_1(\tau) = \sqrt{2\lambda_1} \left(-\frac{1}{2} \operatorname{sech}(\lambda_1\bar{\tau}_1)\right) e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1} e_n \quad (58)$$

Kemudian substitusikan ke persamaan (52) sehingga menghasilkan

$$\Phi_1(\tau) = \left(\sqrt{2\lambda_1} \left(-\frac{1}{2} \operatorname{sech}(\lambda_1\bar{\tau}_1)\right) e^{-\lambda_1\bar{\tau}_1} e_n\right)^2$$

$$= \lambda_1^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_1\tau_1) \quad (59)$$



Gambar 2. Bentuk Gelombang NLS untuk N=1
(sumber : Paken Pandiangan,2006)

Gambar 2 merupakan pemodelan bentuk gelombang NLS untuk N=1 artinya panjang gelombang yang merambat hanya satu.

2. Solusi persamaan NLS untuk N=2

Untuk N=2 elemen matriknya ditulis menurut persamaan (50) sebagai berikut

$$D_{11} = 1 + a_1 e^{2\lambda_1 \bar{\tau}_1}$$

$$D_{22} = 1 + a_2 e^{2\lambda_2 \bar{\tau}_2}$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} e^{\lambda_1 \bar{\tau}_1 + \lambda_2 \bar{\tau}_2}$$

atau

$$D = \begin{pmatrix} 1 + a_1 e^{2\lambda_1 \bar{\tau}_1} & \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} e^{\lambda_1 \bar{\tau}_1 + \lambda_2 \bar{\tau}_2} \\ \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} e^{\lambda_1 \bar{\tau}_1 + \lambda_2 \bar{\tau}_2} & 1 + a_2 e^{2\lambda_2 \bar{\tau}_2} \end{pmatrix} \quad (60)$$

dengan

$$a_1 = a_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (61)$$

Invers matriks D dapat di cari melalui

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} C_{ij}^T \quad (62)$$

C_{ij} adalah kofaktor dari d_{ij} dan C_{ij}^T adalah transpose dari C_{ij} . Apabila pembilang dan penyebut pada persamaan (62) dikalikan $e^{-(\lambda_1 \bar{\tau}_1 + \lambda_2 \bar{\tau}_2)}$ maka solusinya adalah

$$\varphi_1(\tau) = \frac{2\lambda_1}{F_2} \sqrt{a_1} \cosh(\lambda_2 \bar{\tau}_2) \quad (63)$$

dan

$$\varphi_2(\tau) = \frac{2\lambda_2}{F_2} \sqrt{a_1} \sinh(\lambda_1 \bar{\tau}_1) \quad (64)$$

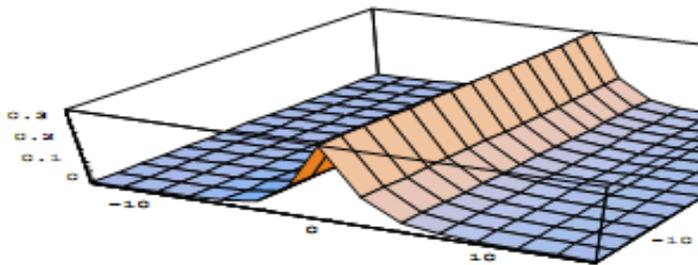
dimana

$$F_2 = \cosh(\lambda_1 \bar{\tau}_1 + \lambda_2 \bar{\tau}_2) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cosh(\lambda_1 \bar{\tau}_1 - \lambda_2 \bar{\tau}_2) \quad (65)$$

Apabila persamaan (63) dan (64) disubstitusikan ke persamaan (52) maka solusi persamaan NLS untuk N=2 adalah

$$\Phi_2(\tau) = \frac{4}{F_2^2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} [\lambda_1^2 \cosh^2(\lambda_2 \bar{\tau}_2) + \lambda_2^2 \sinh^2(\lambda_1 \bar{\tau}_1)] \quad (66)$$

Bentuk dan profil persamaan NLS untuk N=2 terlihat pada gambar 3



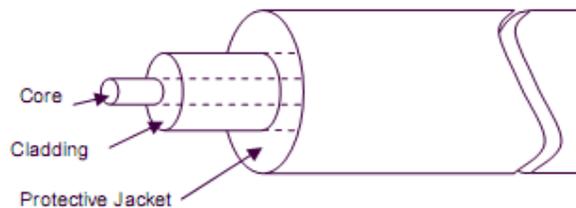
Gambar 3. Profil Persamaan NLS untuk N=2
(sumber : Paken Pandiangan,2006)

Gambar 3 merupakan profil persamaan NLS untuk N=2 berdasarkan solusi analitik. Untuk mencari solusi analitik untuk N=2 dibutuhkan waktu yang lama dan penyelesaian yang rumit. Apalagi untuk N yang lebih besar tentu akan lebih

rumit, untuk itu di gunakan solusi numerik untuk mempermudah penyelesaian dan memperlihatkan pemodelan dari gelombang NLS.

D. Fiber Optik

Serat optik terdiri dari tiga bagian utama yaitu *core*, *cladding*, dan *coating*. Core merupakan bagian utama dari serat optik karena pada *core* ini informasi yang berupa pulsa cahaya ditransmisikan.



Gambar 4. Struktur Fiber Optik
(Sumber : Mohammad Azadeh, 2009)

Core dan *cladding* biasanya terbuat dari bahan silika, kaca, atau plastik yang berkualitas tinggi dan bebas air. *Core* memiliki indeks bias yang lebih besar daripada *cladding* ($n_1 > n_2$) hingga pada batas kritis, sehingga memungkinkan terjadinya pembiasan total bagian dalam fiber optik (*total internal reflection*) dan pemantulan sempurna. Cahaya akan selalu merambat dalam *core* hingga ke ujung serat. *Coating (jacket)* berfungsi sebagai pelindung *core* dan *cladding* dari tekanan fisik luar, terbuat dari bahan plastik yang sangat berkualitas.

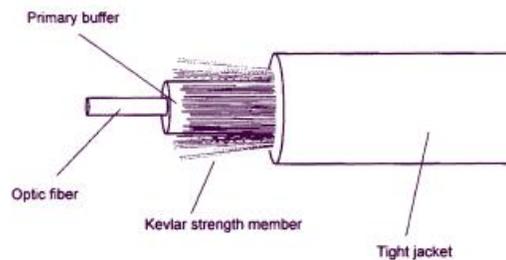
Serat optik umumnya di klasifikasi menjadi :

- a. *Multimode Step Index*, dengan jari-jari *core* 25 – 60 μm , *cladding* 50 – 150 μm .
- b. *Multimode Graded Index*, dengan jari-jari *core* 10 -35 μm , *cladding* 50 – 80 μm .
- c. *Monomode Step Index*, jari-jari *core* 1 -16 μm , *cladding* 10 – 100 μm .

Hingga kini saluran serat optik yang terbuat dari bahan-bahan gelas terbaik telah mampu menyediakan redaman hanya 0,2 dB/km, dan mampu bekerja pada frekuensi diatas 1 GHz.

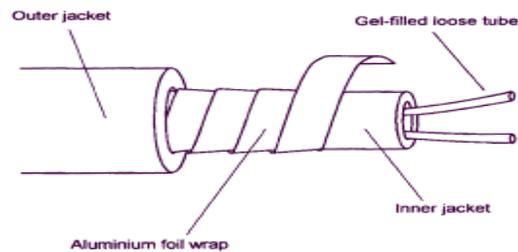
Beberapa contoh fiber optik yang sering digunakan:

1. *Indoor/outdoor Tight Buffer*



Gambar 5. *Tight Buffer*
(sumber:John Crisp,2001)

2. *Waterproof Cable*



Gambar 6. *Waterproof Cable*
(sumber:John Crisp,2001)

3. *Hybrid and Composite Cable*

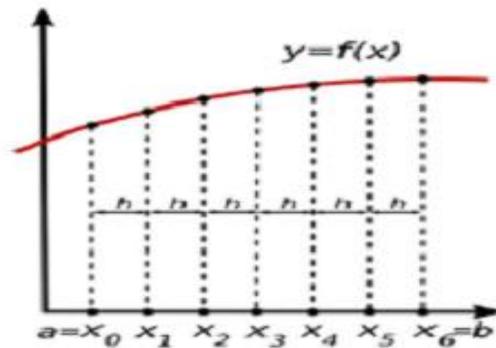


Gambar 7. *Hybrid and Composite Cable*
(sumber:John Crisp,2001)

E. Pendekatan *Finite Difference*

Diferensial numerik adalah salah satu metoda numerik yang digunakan untuk menyelesaikan solusi persamaan diferensial biasa dan persamaan parsial. Caranya adalah menggantikan turunan yang muncul ke dalam persamaan diferensial dengan pendekatan *finite difference* yang teraproksimasi. Metoda ini digunakan untuk menentukan solusi numerik persamaan NLS.

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (67)$$



Gambar 8. Kurva Suatu Fungsi yang Berjarak h yang dibagi Sama Besar.
(sumber: Supriyanto Suparno,2008)

Berdasarkan Gambar 8 pilih angka integer sembarang yaitu $N > 0$ sehingga memnagi interval dari a sampai b dengan $(N+1)$, sehingga

$$h = \frac{b-a}{N+1} \quad (68)$$

maka titik-titik x merupakan sub-interval antara a dan b yang dapat dinyatakan sebagai

$$\tau_n = x_n = a + nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N + 1 \quad (69)$$

Karena persamaan (70) dibangun oleh dua parameter τ dan z , maka parameter z juga dapat ditulis sebagai

$$z_m = a + mh, \quad m = 0, 1, \dots, N + 1 \quad (70)$$

h dideskripsikan sebagai $\Delta\tau$ dan Δz ($h = \Delta\tau = \Delta z$).

Selanjutnya persamaan (67) diubah dalam bentuk metoda finite difference.

Penyelesaian solusi differensial secara numerik dapat diselesaikan menggunakan pendekatan deret Taylor yang dapat dituliskan (Nakamura, 1993):

$$A(x + \Delta x) = A(x) + (\Delta x) \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + \dots$$

Aproksimasi turunan jarak ($\frac{\partial A}{\partial z}$) dapat ditulis persamaannya

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{A_n^{m+1} - A_n^m}{\Delta z} + O(\Delta z) \quad (71)$$

Kemudian aproksimasi turunan kedua terhadap waktu ($\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2}$) dapat didekati

dengan deret Taylor $A(\tau + \Delta\tau)$ dan $A(\tau - \Delta\tau)$ yang dapat dituliskan :

$$A(\tau + \Delta\tau) = A(\tau) + (\Delta\tau) \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \frac{(\Delta\tau)^3}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} + \dots \quad (72)$$

$$A(\tau - \Delta\tau) = A(\tau) - (\Delta\tau) \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - \frac{(\Delta\tau)^3}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} + \dots \quad (73)$$

Jumlahkan persamaan (72) dan persamaan (73)

$$A(\tau + \Delta\tau) + A(\tau - \Delta\tau) = A(\tau) + (\Delta\tau)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + 2 \frac{(\Delta\tau)^3}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} + \dots \quad (74)$$

Sehingga turunan kedua terhadap waktu dapat ditulis :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = \frac{A_{n+1}^m - 2A_n^m + A_{n-1}^m}{\Delta \tau^2} + O(\Delta \tau) \quad (75)$$

Metoda Finite Difference terbagi dua yaitu metoda *Implicit* dan *Explicit*. Metoda *Implicit* terdiri dari metoda *Laasonen*, metoda *Crank-Nicolson*, dan *Beta Formulation*. Metoda *Explicit* terbagi yaitu metoda *Forward Time Central space (FTCS)*, metoda *Richardson*, dan metoda *DuFort-Frankel* (Hoffmann, 2000).

Pada penelitian ini akan digunakan metoda *implicit* yaitu metoda *Laasonen*. Metoda *Laasonen* tidak memiliki syarat kestabilan atau stabil tidak bersyarat(*unconditional stabil*) sehingga stabil untuk segala kondisi dan memiliki error yang rendah. Selain kestabilan, syarat lain yang harus di penuhi yaitu konsistensi dan konvergensi. Konsistensi adalah membuktikan persamaan yang telah didiskritisasi jika disubstitusikan persamaan deret Taylor maka akan menghasilkan persamaan umum kembali. Apabila dihasilkan persamaan umum kembali maka persamaan tersebut telah konsisten.

Pemodelan gelombang NLS dalam fiber optik membutuhkan *boundary condition* (kondisi awal) dalam pembuatan programnya. Adapun *boundary condition* yang digunakan adalah

$$A(0, x) = A(1, x) = 0 \quad x \in [0, X]$$

$$A(t, 0) = A_0(t) \quad t \in [0, 1]$$

Untuk $\gamma > 0$ maka

$$1. A(x, t) = \sqrt{\frac{1}{\gamma}} \lambda_1 \operatorname{sech}\left(\left(\frac{\lambda_1(t-50)}{60}\right) / 2\right)$$

$$2. A(x, t) = p \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \operatorname{sech}(pt - 2pqx + c_2) e^{(iqt+i(p^2-q^2)x+ic_1)}$$

Dimana p, q, c_1, c_2 adalah konstanta sembarang. Kedua solusi ini valid jika nilai $\gamma > 0$. Untuk solusi kedua merupakan gambaran gelombang soliton berjalan untuk kasus dengan gangguan yang besar.

Nilai γ harus bernilai lebih besar dari nol karena efek nonlinieritas tidak mungkin bernilai minus atau nol. Hal ini disebabkan dalam suatu bahan selalu ada hambatan atau redaman yang menyebabkan gangguan walupun nilainya sangat kecil.

Persamaan (70) didiskritisasi dengan metoda *Laasonen* dapat ditulis :

$$\frac{A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta z} = -\frac{ik_2}{2(\Delta\tau)^2} [A_{i+1}^{n+1} - 2A_i^{n+1} + A_{i-1}^{n+1}] + \gamma|A|^2 A \quad (76)$$

$\gamma|A|^2 A$ dapat dimisalkan nol karena merupakan konstanta, persamaan (76)

menjadi

$$\frac{A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta z} = \frac{ik_2}{2(\Delta\tau)^2} [A_{i+1}^{n+1} - 2A_i^{n+1} + A_{i-1}^{n+1}] \quad (77)$$

Deret Taylor untuk tiap A_i^n yaitu (Hoffmann, 2000),

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \frac{\partial A}{\partial z} (\Delta z) + O(\Delta z)^2 \quad (78a)$$

$$\begin{aligned} A_{i+1}^{n+1} &= A_i^n + \frac{\partial A}{\partial z} (\Delta z) + \frac{\partial A}{\partial \tau} (\Delta \tau) + (\Delta z)(\Delta \tau) \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \tau} \\ &+ \frac{\partial^2 A (\Delta z)^2}{\partial z^2} \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 A (\Delta \tau)^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{2} + O[(\Delta z)^3, (\Delta \tau)^3] \end{aligned} \quad (78b)$$

$$\begin{aligned} A_{i-1}^{n+1} &= A_i^n + \frac{\partial A}{\partial z} (\Delta z) - \frac{\partial A}{\partial \tau} (\Delta \tau) - (\Delta z)(\Delta \tau) \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \tau} \\ &+ \frac{\partial^2 A (\Delta z)^2}{\partial z^2} \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 A (\Delta \tau)^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{2} + O[(\Delta z)^3, (\Delta \tau)^3] \end{aligned} \quad (78c)$$

Subtitusikan persamaan (78a), (78b), dan (78c) ke persamaan (77) menghasilkan

$$\frac{\partial A}{\partial z} + O(\Delta z) = \frac{ik_2}{2} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + O[(\Delta z), (\Delta \tau)] \right] \quad (79)$$

Kemudian persamaan (77) dapat disederhanakan dan ditulis kembali yaitu

$$A_i^n = -\frac{ik_2(\Delta z)}{2(\Delta \tau)^2} [A_{i+1}^{n+1} - 2A_i^{n+1} + A_{i-1}^{n+1}] + A_i^{n+1} \quad (80)$$

Selanjutnya Persamaan (80) diselesaikan menggunakan matrik tridiagonal .

BAB V PENUTUP

A. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisa numerik dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya menghasilkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Pemodelan gelombang NLS berupa Grafik yang menunjukkan hubungan yang sebanding antara amplitudo (A) terhadap panjang gelombang (λ).
2. Amplitudo (A) gelombang NLS dipengaruhi oleh banyak panjang gelombang ($N\lambda$) yaitu:
 - a. Pada panjang gelombang $N=1$, panjang gelombang berbanding lurus dengan amplitudo (A)
 - b. Pada panjang gelombang $N=2$, panjang gelombang berbanding lurus dengan amplitudo (A)

Semakin besar nilai panjang gelombang yang dikirimkan melalui pulsa maka amplitudo gelombang semakin besar juga, karena panjang gelombang sebanding dengan kecepatan gelombang. Hasil ini dengan teori soliton yaitu kecepatan gelombang sebanding dengan amplitudo

B. SARAN

Dari kesimpulan yang penulis dapatkan, penulis menyarankan untuk lebih lanjut :

1. Menggunakan pendekatan *Finite Difference* dengan metoda lain yang cocok untuk membandingkan hasil dan menggunakan orde yang lebih tinggi untuk memperoleh kesalahan yang lebih kecil dan mengurangi gangguan pada bentuk gelombang.
2. Memodelkan persamaan NLS untuk jumlah N yang lebih besar.