ANALISIS MODEL TUBERKULOSIS DENGAN TINGKAT PERKEMBANGAN CEPAT DAN LAMBAT

SKRIPSI

untuk memenuhi sebagian persyaratan guna memperoleh gelar sarjana sains

GUSKA VARIENTI NOVER
NIM 72991

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2012

PERSETUJUAN SKRIPSI

Judul	:	**Analisis Model Tuberkulosis dengan Tingkat Perkembangan Cepat dan Lambat.**
Nama	:	Guska Varienti Nover
Nim	:	72991
Program Studi	:	Matematika
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 25 April 2012

Disetujui oleh:

Pembimbing I	Pembimbing II
Muhammad Subhan, M.Si	Dra. Dewi Murni, M.Si
NIP. 19701126 199903 1 002	NIP. 19670828 199203 2 002

PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa :

Nama	: Guska Varienti Nover
NIM	: 72991
Prog. Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan Judul Skripsi

ANALISIS MODEL TUBERKULOSIS
DENGAN TINGKAT PERKEMBANGAN CEPAT DAN LAMBAT

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 25 April 2012

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
Ketua	: Muhammad Subhan, S.Si, M.Si	
Sekretaris	: Dra. Dewi Murni, M.Si	
Anggota	: Drs. Yusmet Rizal, M.Si	
Anggota	: Dra. Hj.Helma, M.Si	
Anggota	: Riry Sriningsih, S.Si, M.Sc	

SURAT PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa tugas akhir ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang lazim.

Padang, 25 April 2012

Yang menyatakan,

Guska Varienti Nover

ABSTRAK

Guska Varienti Nover : Analisis Model Tuberkulosis dengan Tingkat Cepat dan Lambat

ABSTRAK

Tuberkulosis (TB) adalah suatu jenis penyakit yang disebabkan oleh bakteri *mycrobacterium tuberkulosis*. Penyakit TB adalah penyakit infeksi kronis menular yang masih merupakan masalah kesehatan di dunia termasuk Indonesia. Untuk melihat bagaimana penyebaran penyakit tuberkulosis, dapat dilakukan dengan memodelkan penyebaran penyakit tersebut kedalam bentuk model matematika.

Secara umum penelitian ini bertujuan untuk memodelkan penyebaran penyakit tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat. Untuk mencapai tujuan tersebut maka dilakukan analisis teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan tinjauan kepustakaan. Penelitian ini dimulai dengan membentuk model matematika dari penyebaran tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat, kemudian menganalisa model matematika penyebaran penyebaran tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat

Model matematika penyebaran tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat adalah :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S$$
$$\frac{dE}{dt} = (1-p)\beta SI - (\mu + k)E$$
$$\frac{dI}{dt} = p\beta SI + kE + -(\mu + d)I$$

Pada model didapat dua titik tetap yaitu titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit $P_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0{,}0\right)$ dan titik tetap endemik $P_1 = (S^*, E^*, I^*)$. Titik tetap P_0 stabil saat $R_0 < 1$ artinya dalam populasi TB tidak mewabah dan tidak stabil saat $R_0 > 1$ artinya penyakit TB mewabah dalam populasi. Titik tetap P_1 stabil saat $R_0 > 1$ artinya mewabahnya TB pada populasi. Dari nilai R_0 diperoleh faktor-faktor yang mempengaruhi terjadinya epidemi yaitu laju penularan TB dan peluang kelompok rentan bisa langsung menularkan TB, dengan mengontrol kedua faktor tersebut maka dapat mengurangi terjadinya epidemi TB.

Kata kunci : model tuberkulosis, bilangan reproduksi dasar, titik tetap, kestabilan titik tetap.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan petunjuk, rahmat, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul ” Analisis Model Tuberkulosis dengan Tingkat Cepat dan Lambat”. Adapun tujuan penulisan Skripsi ini adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang.

Dalam menyelesaikan Skripsi ini penulis banyak mendapatkan bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Untuk itu, dalam kesempatan ini dengan segala kerendahan hati perkenankanlah penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Muhammad Subhan, S.Si., M.Si., Pembimbing I sekaligus sebagai penasehat akademis dan sekretaris jurusan matematika FMIPA UNP.
2. Ibu Dra. Dewi Murni, M.Si., Pembimbing II, sekaligus sebagai ketua program studi matematika.
3. Bapak Drs. Yusmet Rizal, M.Si., Ibu Dra. H Helma, M.Si., Ibu Riry Sriningsih, M.Sc., sebagai Penguji Skripsi.
4. Ibu Dr. Armiati, M.Pd., Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNP.
5. Bapak-bapak dan Ibu-ibu staf pengajar Jurusan Matematika FMIPA UNP.

6. Seluruh Staf Administrasi dan Staf Labor Komputer Matematika FMIPA UNP.
7. Karyawan serta segenap Civitas Akademika FMIPA UNP.
8. Seluruh keluarga besar penulis yang telah memberikan dorongan dan motivasi.
9. Seluruh teman-teman seangkatan yang telah memberikan semangat dan motivasi.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan pada penulis dapat menjadi amal ibadah di sisi-Nya.

Penulis juga menyadari bahwa Skripsi ini masih banyak kekurangan. Penulis mengharapkan adanya kritikan dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Skripsi ini dan untuk perbaikan di masa yang akan datang. Semoga Skripsi ini dapat memberikan arti dan manfaat bagi penulis sendiri dan pembaca.

Padang, April 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Tuberkulosis (TB) adalah suatu jenis penyakit yang disebabkan oleh bakteri *mycrobacterium tuberkulosis*. Bakteri ini pertama kali ditemukan oleh Robert Koch pada tanggal 24 maret 1882. Untuk mengenang jasa beliau maka bakteri tersebut dinamakan *Baksil Koch*, bahkan penyakit TB pada paru-paru pun dikenal dengan nama *Koch Pulmonum* (KP). Bakteri ini berbentuk batang dan bersifat tahan asam sehingga dikenal juga sebagai Batang Tahan Asam (BTA) (Anonim 2011).

Penyakit TB adalah penyakit infeksi kronis menular yang masih merupakan masalah kesehatan di dunia termasuk Indonesia. Diperkirakan sekitar sepertiga penduduk dunia telah terinfeksi oleh *Mycrobacterium tuberkulosis*. Pada tahun 1995, diperkirakan 95% kasus TB dan 98% kematian akibat TB di dunia, terjadi pada negara-negara berkembang. Demikian juga, kematian wanita akibat TB lebih banyak daripada kematian karena kehamilan, persalinan, dan nifas (depkes RI 2007:3). Beberapa fakta menyatakan bahwa sampai saat ini makin banyak terjadi wabah-wabah penyakit yang sering ditimbulkan oleh faktor sosial, diantaranya penyakit TB. TB bisa menyerang siapa saja, namun sebagian besar penderita tuberkulosis adalah kelompok usia produktif (15-50 tahun). Secara regional ditemukan fakta bahwa empat puluh persen (40%) dari kasus tuberkulosis dunia ditemukan di wilayah Asia Tenggara dan hampir satu juta kematian terjadi setiap tahunnya yang sembilan puluh lima persennya diakibatkan dari kasus-kasus TB yang dilaporkan terjadi di Banglades, India, Indonesia, Myanmar, dan Thailand. Di negara-negara tersebut, TB telah dikenal sebagai salah satu masalah kesehatan masyarakat yang paling besar. Situasi tersebut menjadi lebih rumit dengan penyebaran HIV yang sangat cepat dan munculnya jenis TB yang kebal terhadap pengobatan. Indonesia adalah negara dengan masalah TB, ketiga terbesar di dunia. Tahun 2004 tercatat 211.753 kasus baru tuberkulosis di Indonesia, dan diperkirakan sekitar 300 kematian terjadi setiap hari. Setiap tahunnya kasus baru tuberkulosis bertambah seperempat juta (Syafrizal 2008:2-3).

Tidak hanya berdampak pada kesehatan, TB juga berdampak pada faktor ekonomi. Hal ini karena sekitar 75 % pasien TB adalah kelompok usia yang paling produktif secara ekonomis (15-50 tahun). Diperkirakan seorang pasien TB dewasa akan kehilangan rata-rata waktu kerjanya 3 sampai 4 bulan. Hal tersebut berakibat pada kehilangan pendapatan tahunan rumah tangganya sekitar 20-30%. Jika ia meninggal akibat TB, maka ia akan kehilangan pedapatannya sekitar 15 tahun. Situasi TB di dunia semakin memburuk, jumlah kasus TB meningkat dan banyak yang tidak berhasil disembuhkan, terutama pada negara yang dikelompokkan dalam 22 negara dengan masalah TB besar (*high burden countries*). Menyikapi hal tersebut, pada tahun 1993, WHO mencanangkan TB sebagai kedaruratan dunia (*global emergency*) (depkes RI 2007:3-4).

Memodelkan proses penyebaran penyakit akan mempermudah dalam mengenali dinamika penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Ada banyak model dinamika penyebaran penyakit diantaranya model SIR (*Susceptible*, *Infected*, *Recorvery*), model SEIR (*Susceptible*, *Expose*, *Infected*, *Recorvery*) dan model-model lainnya. *Susceptible* merupakan suatu kondisi individu yang rentan terkena penyakit, *Expose* merupakan suatu kondisi individu yang tertular penyakit tetapi tidak dapat menularkan kepada orang lain, *Infected* merupakan kondisi individu yang tertular penyakit dan dapat menularkan kepada orang lain, dan *Recorvery* merupakan kondisi individu yang telah sembuh dari penyakit yang dideritanya.

Untuk melihat bagaimana penyebaran TB, dapat dilakukan dengan memodelkan penyebaran penyakit tersebut ke dalam bentuk model matematika lebih khususnya berbentuk model *compartmental* (pembagian kelas-kelas) epidemiologi. Telah ada model matematika dari penyebaran tuberkulosis diantaranya adalah SEI, pada model ini individu yang terinfeksi belum dapat menularkan kepada orang lain karena bakteri didalam tubuh bersifat dormant (tidak aktif). Individu akan bisa menularkan penyakit TB ini jika bakteri TB tidak lagi bersifat *dormant* (tidak aktif). Pada model ini dikenal dengan pencampuran homogen yang artinya tidak adanya perbedaan antara individu yang telah lama tertular dengan yang baru tertular. Disini semua individu yang masuk kedalam sub populasi *infected* (I) harus melalui tahap *exposed* (E). Walaupun demikian, pada kenyataannya ada beberapa kasus dimana pasien TB bisa langsung menginfeksi individu lain segera setelah tertular TB. Hal ini dipengaruhi oleh daya tahan tubuh individu terhadap bakteri TB dan kondisi lingkungan penderita TB. Untuk itu dalam penelitian ini akan dibahas mengenai tingkat perkembangan cepat dan lambat penyebaran bakteri TB. Dalam penelitian ini, model SEI tersebut akan dibuat klaster (pengelompokkannya) sehingga kita dapat memperoleh model tingkat perkembangan cepat dan lambatnya. Model dengan perkembangan cepat adalah keadaan individu rentan tertular TB langsung berubah menjadi penular aktif TB, sedangkan tingkat perkembangan lambat adalah keadaan individu yang tertular TB sebelum berubah menjadi penular aktif TB melalui tahap *expose* (hanya tertular dan tidak bisa menularkan TB). Setelah mendapatkan model maka akan dianalisis titik tetap (*equilibrium*) dan nilai rasio reproduksi model penyebaran TB. Sehingga dapat diprediksikan tindakan yang tepat untuk meminimalisir penyakit tuberkulosis.

Sehingga berdasarkan uraian di atas penelitian ini akan mengkaji tentang "Analisis Model Tuberkulosis dengan Tingkat Perkembangan Cepat dan Lambat"

B. Pembatasan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas maka batasan masalah yang akan dibahas adalah model tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat, analisis dinamikanya meliputi analisis kestabilan lokal.

C. Perumusan Masalah

Dari pendahuluan yang telah diuraikan, permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana dinamika penyebaran penyakit tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat? .

D. Pendekatan Penelitian dan Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas maka metode pendekatan yang digunakan adalah penerapan konsep-konsep yang ada pada model matematika SEI untuk memecahkan permasalahan yang dihadapi. Adapun pertanyaan penelitian adalah :

1. Bagaimana model tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat?
2. Apa faktor-faktor yang mempengaruhi terjadinya epidemi?
3. Apa interpretasi dari model tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat?

E. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan permasalahan yang akan dibahas, tujuan penelitian ini adalah :

1. Mendapatkan model tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat.
2. Mendapatkan faktor-faktor yang mempengaruhi penyebaran tuberkulosis persatuan waktu.
3. Mendapatkan interpretasi dari model tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat.

F. Manfaat penelitian

Diharapkan penelitian ini bisa memberikan tambahan wawasan kepada penulis dan pembaca mengenai model penyebaran penyakit, khususnya model tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat dan memberikan informasi kepada pihak terkait tentang perilaku penyebaran penyakit tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat sehingga memungkinkan solusi penanggulangan yang tepat.

G. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian adalah studi literatur, yaitu menggunakan teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang akan dibahas dengan berlandaskan tinjauan pustaka. Langkah kerja yang akan dilakukan adalah :

1. Menentukan model tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat.
2. Mencari faktor-faktor yang mempengaruhi penyebaran tuberkulosis persatuan waktu.
3. Mencari titik tetap dari model tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat.
4. Menganalisis kestabilan titik tetap dari model tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat.
5. Membuat interpretasi dari hasil analisis kestabilan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Untuk dapat mengetahui model penyebaran tuberkulosis dengan tingkat penyebaran cepat dan lambat maka akan dibahas teori mengenai tuberkulosis.

A. Tuberkulosis (TB) dan Kejadiannya

1. Tuberkulosis

Tuberkulosis (TB) adalah penyakit menular langsung yang disebabkan oleh kuman TB (*Mycrobacterium Tuberculosis*). Sebagian besar kuman TB menyerang paru, tetapi juga mengenai organ tubuh lainnya.

2. Cara penularan

Penularan TB melalui udara yang tercemar oleh mikrobakterium tuberkulosis yang dilepaskan oleh penderita TB saat batuk, dimana pada anak-anak umumnya berasal dari orang dewasa yang menderita TB. Pada waktu batuk atau bersin, pasien menyebar kuman ke udara dalam bentuk percikan dahak (*droplet nuclei*). Sekali batuk dapat menghasilkan sekitar 3000 percikan dahak. Umumnya penularan terjadi dalam ruangan dimana percikan dahak berada dalam waktu yang lama. Ventilasi dapat mengurangi jumlah percikan, sementara sinar matahari langsung dapat membunuh kuman. Percikan dapat bertahan selama beberapa jam dalam keadaan gelap dan lembab.

Daya penularan seorang pasien ditentukan oleh banyaknya kuman yang dikeluarkan dari parunya. Makin tinggi derajat kepositifan hasil pemeriksaan dahak, makin menular pasien tersebut. Faktor yang memungkinkan seseorang terpajan kuman TB ditentukan oleh konsentrasi percikan dalam udara dan lamanya menghirup udara tersebut.

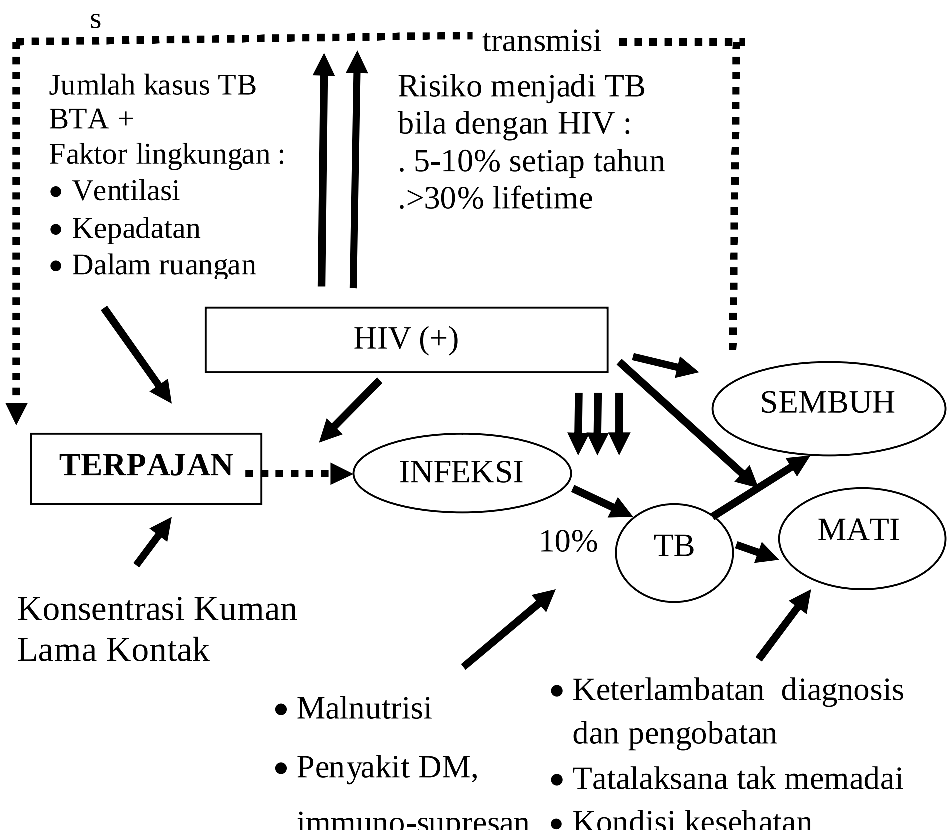
3. Risiko penularan

Risiko tertular tergantung dari tingkat pajanan dengan percikan dahak. Pasien TB paru dengan BTA positif memberikan risiko lebih besar dari pasien TB paru BTA negatif. Risiko penularan setiap tahunnya ditunjukkan dengan *Annual Risk of Tuberculosis Infection (ARTI)* yaitu proporsisi penduduk yang berisiko terinfeksi TB selama satu tahun. ARTI sebesar 1% berarti 10 (sepuluh) orang diantara 1000 penduduk terinfeksi setiap tahun. ARTI di Indonesia bervariasi antara 1-3%. Infeksi TB dibuktikan dengan perubahan reaksi tuberkulin negatif menjadi positif.

4. Risiko menjadi sakit TB

Hanya sekitar 10% yang terifeksi TB akan menjadi sakit TB. Dengan ARTI 1%, diperkirakan diantara 100.000 penduduk rata-rata terjadi 1000 terinfeksi TB dan 10% diantaranya (100 orang) akan menjadi sakit TB setiap tahun. Sekitar 50 diantaranya adalah pasian dengan BTA positif. Faktor yang mempengaruhi kemungkinan seseorang menjadi pasien TB adalah daya tahan tubuh yang rendah, diantaranya adalah infeksi HIV/AIDS dan malnutrisi (gizi buruk). HIV merupakan faktor risiko yang paling kuat bagi yang terinfeksi TB menjadi sakit TB. Infeksi HIV mengakibatkan kerusakan luas sistem daya tahan tubuh seluler (cellular immunity), sehingga jika terjadi infeksi penyerta (opportunistic), seperti tuberkulosis, maka yang bersangkutan akan menjadi sakit parah bahkan bisa mengakibatkan kematian. Bila jumlah orang terinfeksi HIV meningkat, maka jumlah pasien TB akan meningkat, dengan demikian penularan di masyarakat akan meningkat pula.

Faktor risiko kejadian TB, secara ringkas digambarkan pada gambar berikut :



Gambar 1. Faktor Risiko Kejadian TB

5. Riwayat alamiah pasien TB tidak diobati

Pasien yang tidak diobati setelah 5 tahun akan :

a. 50% meninggal

b. 25% akan sembuh sendiri dengan daya tahan tubuh yang tinggi

c. 25% menjadi kasus kronis yang tetap menular

(Depkes RI 2007:4-6).

6. Patogenesis Tuberkulosis

a. Tuberkulosis primer

Kuman tuberkulosis yang masuk melalui saluran napas akan bersarang dijaringan paru sehingga akan terbentuk suatu sarang pneumonik, yang disebut sarang primer atau afek primer. Sarang primer ini mungkin timbul di bagian mana saja dalam paru, berbeda dengan sarang reaktivasi. Dari sarang primer akan kelihatan peradangan saluran getah bening menuju hilus (limfangitis lokal). Peradangan tersebut diikuti oleh pembesaran kelenjar getah bening di hilus (limfadenitis regional). Afek primer bersama-sama dengan limfangitis regional dikenal sebagai kompleks primer. Kompleks primer ini akan mengalami salah satu nasib sebagai berikut :

i. Sembuh dengan tidak meninggalkan cacat sama sekali (*restitution ad integrum*)

ii. Sembuh dengan meninggalkan sedikit bekas (antara lain sarang Ghon, garis fibrotik, sarang perkapuran di hilus)

iii. Menyebar dengan cara :

Perkontinuitatum, menyebar ke sekitarnya. Salah satu contoh adalah *epituberkulosis*, yaitu suatu kejadian penekanan bronkus, biasanya bronkus lobus medius oleh kelenjar hilus yang membesar sehingga menimbulkan obstruksi pada saluran napas bersangkutan, dengan akibat *atelektasis*. Kuman tuberkulosis akan menjalar sepanjang bronkus yang tersumbat ini ke lobus yang *atelektasis* dan menimbulkan peradangan pada lobus yang *atelektasis* tersebut, yang dikenal sebagai *epituberkulosis*. Penyebaran secara *bronkogen*, baik di paru bersangkutan maupun ke paru sebelahnya atau tertelan.

Penyebaran secara *hematogen* dan *limfogen*. Penyebaran ini berkaitan dengan daya tahan tubuh, jumlah dan virulensi kuman. Sarang yang ditimbulkan dapat sembuh secara spontan, akan tetetapi bila tidak terdapat imuniti yang adekuat, penyebaran ini akan menimbulkan keadaan cukup gawat seperti tuberkulosis milier, *meningitis tuberkulosa*, *typhobacillosis Landouzy*. Penyebaran ini juga dapat menimbulkan tuberkulosis pada alat tubuh lainnya, misalnya tulang, ginjal, anak ginjal, genitalia dan sebagainya. Komplikasi dan penyebaran ini mungkin berakhir dengan sembuh dengan meninggalkan sekuele (misalnya pertumbuhan terbelakang pada anak setelah mendapat *ensefalomeningiti*s, tuberkuloma) atau meninggal. Semua kejadian di atas adalah perjalanan tuberkulosis primer.

b. Tuberkulosis Pasca-Primer

Dari tuberkulosis primer ini akan muncul bertahun-tahun kemudian tuberkulosis post-primer, biasanya pada usia 15-40 tahun. Tuberkulosis post primer mempunyai nama yang bermacam macam yaitu tuberkulosis bentuk dewasa, *localized tuberculosis,* tuberkulosis menahun, dan sebagainya. Bentuk tuberkulosis inilah yang terutama menjadi problem kesehatan rakyat, karena dapat menjadi sumber penularan. Tuberkulosis post-primer dimulai dengan sarang dini, yang umumnya terletak di segmen apikal dari lobus superior maupun lobus inferior. Sarang dini ini awalnya berbentuk suatu sarang pneumonik kecil. Nasib sarang pneumonik ini akan mengikuti salah satu jalan sebagai berikut :

i. Diresopsi kembali, dan sembuh kembali dengan tidak meninggalkan cacat. Sarang tadi mula-mula meluas, tetapi segera terjadi proses penyembuhan dengan penyebukan jaringan fibrosis.

ii. Selanjutnya akan membungkus diri menjadi lebih keras, terjadi perkapuran, dan akan sembuh dalam bentuk perkapuran. Sebaliknya dapat juga sarang tersebut menjadi aktif kembali, membentuk jaringan keju dan menimbulkan kaviti bila jaringan keju dibatukkan keluar.

iii. Sarang pneumonik meluas, membentuk jaringan keju (jaringan kaseosa). Kaviti akan muncul dengan dibatukkannya jaringan keju keluar. Kaviti awalnya berdinding tipis, kemudian dindingnya akan menjadi tebal (*kaviti sklerotik*). Nasib kaviti ini :

    1) Mungkin meluas kembali dan menimbulkan sarang pneumonik baru. Sarang pneumonik ini akan mengikuti pola perjalanan seperti yang disebutkan diatas

    2) Dapat pula memadat dan membungkus diri (*encapsulated*), dan disebut tuberkuloma. Tuberkuloma dapat mengapur dan menyembuh, tetapi mungkin pula aktif kembali, mencair lagi dan menjadi kaviti lagi

3) Kaviti bisa pula menjadi bersih dan menyembuh yang disebut *open healed cavity*, atau kaviti menyembuh dengan membungkus diri, akhirnya mengecil. Kemungkinan berakhir sebagai kaviti yang terbungkus, dan menciut sehingga kelihatan seperti bintang (*stellate shaped*).

(PDPI, 2002 : 3-4)

Untuk mengetahui penanggulangan dari penyakit TB maka dibuatlah suatu model matematika dari penyebaran bakteri TB tersebut.

B. Model Matematika

Menurut Susanta (1993:1.3), model adalah gambaran (perwakilan) suatu objek yang disusun dengan tujuan tertentu, objek disini berupa kejadian, proses, sistem dan sebagainya. Suatu model berfungsi untuk menirukan atau menggambarkan semirip mungkin prilaku / keadaan objek yang diamati sesuai dengan tujuan penyusunan model. Adapun tujuan penyusunan model adalah untuk mengenali perilaku suatu objek dengan cara mencari keterkaitan antar unsur-unsurnya, untuk mengadakan optimisasi dalam objek, untuk mengadakan pendugaan (prediksi) untuk memperbaiki keadaan objek.

Model adalah gambaran (perwakilan) suatu objek atau fenomena yang disusun dengan tujuan tertentu. Pemodelan adalah proses penyederhanaan masalah ke dalam bentuk model tertentu yang dapat digunakan secara umum, sedangkan model matematika adalah suatu pola yang merupakan deskripsi dari verifikasi (pemeriksaan) suatu fenomena yang diperoleh dengan menggunakan kaidah-kaidah atau bahasa matematika. Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Masalah-masalah tersebut dapat dibawa kedalam model matematis dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu.

Proses untuk menyelesaikan permasalahan suatu fenomena secara matematika menurut Susanta (1993:1.15-1.17) adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah yang sesungguhnya.
2. Mengadakan penyederhanaan. Di sini dicari semua peubah yang ada kaitannya dengan masalah dan dicoba mencari relasi antar mereka. Bila diperlukan, diadakan penyederhanaan masalah dengan cara misalnya, memotong peubah yang kurang relevan, menyederhanakan hubungan, memperkecil lingkupdan sebagainya. Sebagai hasil diperoleh suatu penghampiran terhadap masalah yang sesungguhnya yang lebih sederhana dan diharapkan lebih mudah untuk dirumuskan. Pada langkah ini juga dibuat asumsi yang akan digunakan dalam menyusun model.
3. Merumuskan masalah dalam bahasa matematika (menyusun model). Pada langkah kedua ini, semua peubah dan relasi-relasinya dinyatakan dengan lambing matematika dan dicoba untuk mengenali pola masalah matematika mana yang sesuai dengan masalah tersebut.
4. Menyelesaikan masalah dalam model dengan alat matematika yang sesuai. Rumusan yang diperoleh yang dinyatakan dalam istilah dan pengertian-pengertian matematika diselesaikan dengan alat matematika yang sesuai. Pada umumnya perumusan matematika belum memberikan jawaban secara langsung, sehingga perlu adanya proses secara matematika yang meliputi perhitungan, penyelesaian persamaan, pembuktian teorema dan sebagainya.
5. Menafsirkan kembali informasi yang diperoleh kedalam fenomena yang ada. Sesudah penyelesaian secara matematika diperoleh, hasilnya harus ditafsirkan kembali atau diterjemahkan kedalam situasi nyata, supaya dapat diuji dengan eksperimen atau pengamatan.
6. Melakukan pengujian model. Hasil penafsiran kembali perlu diuji apakah cukup benar dalam sisitemnya semula. Hal ini dapat dikerjakan antara lain dengan cara mengadakan percobaan-percobaan atau simulasi. Kemudian melaksanakan hasil yang sudah dianggap cukup benar untuk mencapai tujuan semula.

Model matematika ada beberapa macam diantaranya model dinamika penyebaran penyakit atau lebih dikenal dengan model epidemi.

1. Model Dinamika Penyebaran Penyakit (Epidemi)

Ada banyak model epidemi diantaranya model SIR (*Susceptible*, *Infected*, *Recorvery*), model SEIR (*Susceptible*, *Expose*, *Infected*, *Recorvery*) dan model-model lainnya. Di mana *Susceptible* merupakan suatu kondisi individu yang rentan terkena penyakit, *Expose* merupakan suatu kondisi individu yang tertular penyakit tetapi tidak dapat menularkan kepada orang lain, *Infected* merupakan kondisi individu yang tertular penyakit dan dapat menularkan kepada orang lain, dan *Recorvery* merupakan kondisi individu yang telah sembuh dari penyakit yang dideritanya.

Dalam model epidemi dikenal angka basic reproduksi yang lebih dikenal dengan R_0. R_0 ini digunakan untuk mengetahui faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi penyebaran tuberkulosis per satuan waktu.

2. Angka Basic Reproduksi (R_0)

Untuk mengetahui dinamika penyebaran tuberkulosis, digunakan suatu angka yang menjadi ukuran untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi epidemi atau tidak. Angka tersebut dikenal dengan *angka basic reproduksi* (R_0).

Menurut John Guardiola (2003:1) *angka basic reproduksi* (R_0) adalah ambang batas parameter yang mencirikan masalah matematika tentang infeksi penyakit. R_0 secara luas digunakan untuk memodelkan matematika epidemi. R_0 dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 1

Basic reproduction number R_0 adalah angka rata-rata dari infeksi kedua yang dihasilkan ketika satu individu yang terinfeksi masuk kedalam populasi virgin.

(Guardiola, 2003:1)

Karena terbukti, meskipun definisi ini pada awalnya diberikan untuk model yang mewakili penyebaran infeksi dalam suatu populasi, namun dapat dengan mudah diperluas untuk kasus penyebaran infeksi virus dalam organisme hanya dengan mengganti "satu individu terinfeksi" dengan "satu sel yang terinfeksi" dan "populasi virgin" dengan "populasi sel rentan". Pentingnya R_0 terletak pada kenyataan bahwa untuk banyak infeksi dinamika model (baik dalam suatu populasi dan pada suatu organisme) diasumsikan bahwa infeksi bisa memulai dalam populasi sepenuhnya rentan jika dan hanya jika $R_0 > 1$.

Sebuah teknik terkenal untuk memperoleh ekspresi untuk R_0 adalah untuk melakukan keseimbangan dan analisis stabilitas sistem Odes mewakili model. Kami meringkas teknik dan makna dari R_0 dengan menggunakan contoh sederhana, tapi pertama-tama kita perlu mengingat beberapa definisi stabilitas. Pertimbangkan nonlinier Odes otonom sistem:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(y(t)\big) \quad t \in [0, T] \\ y(0) &= y_0, y \in R^n, f: R^n \to R^n \end{aligned} \tag{1}$$

(Guardiola, 2003:1-2)

Definisi 2

Sebuah stasioner atau titik ekuilibrium $y^* \in R^n$ (yaitu titik tersebut $f\big((y^*) = 0\big)$ dikatakan :

a) Stabil jika $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\in$ seperti $\forall y_0 \colon \|y_0 - y^*\| < \delta_\in$ maka solusinya y memenuhi $\|y(t) - y^*\| < \in$;

b) Stabil asimtotik jika stabil dan ∃δ seperti yang

$\forall y_0 \colon \|y_0 - y^*\| < \delta \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = y^*$

c) Stabil asimtotik global jika stabil asimtotik $\forall y_0 \in R^n$

Definisi di atas umumnya diberikan dengan mengasumsikan bahwa titik ekuilibrium dalam diskusi adalah $y^* = 0$. Hal ini hanya akan mengharuskan kita untuk melakukan transformasi sederhana dari koordinat $\bar{y} = y - y^*$. Kadang-kadang b) disebut sebagai stabilitas asimtotik lokal sedangkan c) sering disebut stabilitas lengkap.

(Guardiola, 2003:2)

Ada beberapa metode yang bisa digunakan untuk menentukan R_0. Salah satunya adalah *next generation matrix.*

a. *Next Generation Matrix*

Next generation matrix dilambangkan dengan K. Matriks ini digunakan untuk menentukan nilai-nilai R_0. Nilai-nilai R_0 ditentukan dengan mencari modus terbesar dari K, yaitu $R_0 = \rho(FV^{-1})$. Matriks K merupakan matriks tak negatif, sehingga nilai eigennya juga taknegatif.

Misalnya terdapat n kompartemen terinfeksi penyakit dan m kompartemen bebas penyakit, dengan $x \in R^n$ dan $y \in R^m$ merupakan subpopulasi dari masing-masing kompartemen. Lambang F_i merupakan matriks dari koefisien rata-rata peningkatan infeksi sekunder pada kompartemen ke-i dan V_i merupakan rata-rata peningkatan penyakit, penurunan tingkat kematian dan kesembuhan pada kompartemen ke-i, ditulis sebagai berikut:

$$x' = Fx - Vx \tag{2}$$

Persamaan diatas dievaluasi pada titik bebas penyakit, sehingga diperoleh *next generation matrix* adalah $K = FV^{-1}$.

(Brauer, 2008 : 163)

Untuk model SEIR R_0 dapat dicari dengan cara :

$$R_{\mathbf{0}} = MD^{-1} \tag{3}$$

(Castillo-Chaves,2002:6)

Dengan mengetahui langkah-langkah pembentukan model di atas maka dapat diperoleh model matematika dari penyebaran bakteri tuberkulosis.

C. Model Sederhana Tuberkulosis

Endemi tuberkulosis merupakan sistem non linear yang kompleks sehingga diperlukan model matematika untuk mengetahui transmisi penyebarannya. Model sederhana penyebaran TB berisi tiga persamaan diferensial biasa yang menjelaskan pengertian tuberkulosis secara biologi. Populasi dimodelkan ke dalam tiga kelompok yaitu *Susceptible* (S) yaitu subpopulasi yang rentan terinfeksi TB, *Expose/ Latently* (E) yaitu subpopulasi atau individu yang telah terinfeksi TB namun tidak dapat menularkan penyakit tersebut, dan *Active Infectious* (I) yaitu subpopulasi atau individu yang telah terinfeksi TB.

Model dasar yang akan digunakan adalah model yang disusun oleh Baojon Song dan Carlos Castillo (2002:10). Diasumsikan :

1. Jumlah kelahiran adalah konstan, Λ
2. Laju penularan penyakit adalah konstan, β
3. Seseorang dalam kelas E dapat berubah status menjadi I dengan laju konstan, k
4. Laju kematian alami adalah konstan, μ
5. Laju kematian karena TB adalah konstan, d
6. Laju kematian akibat TB tidak ada pada kelas E
7. Tidak adanya kesembuhan permanen
8. Adanya pencampuran homogen, dimana tidak ada perbedaan antara individu yang telah lama terjangkit dengan yang baru terjangkit, semua individu yang berada pada kelas I semua memasuki tahap *exposed* (E).

Variabel :

S : subpopulasi individu rentan terhadap penyakit tuberkulosis (orang)

E : subpopulasi atau individu yang telah terinfeksi TB namun tidak dapat menularkan penyakit tersebut (orang)

I : subpopulasi atau individu yang telah terinfeksi TB dan dapat menularkannya ke orang lain (orang)

Parameter :

Λ : jumlah kelahiran (orang / tahun)

μ : laju kematian alamiah (per tahun)

β : laju penularan TB akibat adanya kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan (per tahun)

d : laju kematian karena TB (per tahun)

k : laju perubahan ke TB aktif (per tahun)

Model yang diperoleh dari asumsi dan parameter diatas adalah :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S \quad (4)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\mu + k)E \quad (5)$$

$$\frac{dI}{dt} = kE - (\mu + d)I \quad (6)$$

Dari model didapat :

$$R_0 = \frac{\beta}{(\mu + d)} \frac{}{(k + \mu)} \quad (7)$$

(Baojon Song dan Carlos Castillo, 2002:10)

Dari asumsi pencampuran homogen menyatakan R_0 adalah garis lurus pada parameter β_1. Hal ini tidak hanya pembatasan tapi jelas tidak benar pada umumnya. Untuk itu diperkenalkan metode yang berbeda dimana individu yang terinfeksi adalah individu yang memiliki frekuensi yang besar melakukan kontak dengan penderita TB yang mempunyai kemungkinan untuk menderita TB.

Model epidemi dari penyebaran TB diatas dapat kita lihat bahwa model merupakan persamaan diferensial. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial di atas dibutuhkan teori-teori mengenai persamaan diferensial biasa diantaranya sistem dinamik, PDB, nilai eigen, dan lain-lain.

D. Persamaan Diferensial

1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Secara umum didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tak diketahui. (Finizio,1988:1)

Definisi 4

Turunan tertinggi yang terjadi dalam persamaan diferensial dinamakan orde dari persamaan diferensial. (Hariyani,2007:9-10)

Definisi 5

Persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = F(x)$ dengan $a_0, a_1, \dots, a_n$ dan F fungsi - fungsi dari x saja dan

$a_0(x) \neq 0$ dinamakan persamaan diferensial linear orde n, persamaan tersebut linear dalam $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. (Hariyani,2007:8)

Persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

Definisi 6

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. (Ross, 1989:2)

Definisi 7

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas. (Ross, 1989:2)

Dari sudut pandang kelinearan, persamaan diferensial dapat dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial non linear, seperti yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 8

Persamaan diferensial linear adalah persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah tak bebas dan turunan-turunannya.

Bentuk umum PD linear adalah:

$$a_m(x)\frac{d^m y}{dx^m}+a_{m-1}(x)\frac{d^{(m-1)}y}{dx^{(m-1)}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=r(x)$$

dengan $a_i(x): i=1,2,...,m$, didefenisikan dan kontinu pada suatu selang I ada. Jika $\exists x \in I \ni a_m(x) \neq 0$ maka persamaan diferensial linear tingkat m.

(Santosa,1999:17)

Persamaan diferensial yang bukan persamaan diferensial linear disebut persamaan diferensial non linear, berikut diberikan definisinya.

Definisi 9

Persamaan diferensial $F(x, y, y',..., y^{(m)})=0$ adalah persamaan diferensial non linear jika salah satu dari yang berikut dipenuhi oleh *F*:

1. *F* tak berbentuk polinom dalam $y, y',..., y^{(m)}$
2. *F* berbentuk polinom berpangkat ≥ 2 dalam $y, y',..., y^{(m)}$

(Santosa, 1999:18)

2. Sistem Persamaan Diferensial

Sebanyak *n* persamaan diferensial akan membentuk suatu sistem yang disebut dengan sistem persamaan diferensial. Suatu sistem persamaan diferensial terbagi dua, yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan non linear, seperti yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 10

Sistem persamaan diferensial linear orde satu dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + b(t), \qquad x(0) = x_0$$

dengan A adalah matrik koefisien berukuran $n\ x\ n$ dan *b(t)* fungsi kontinu. Sistem tersebut dinamakan sistem persamaan diferensial linear orde 1 dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Jika $b(t) = 0$ sistem dikatakan homogen dan dikatakan non homogen jika $b(t) \neq 0$. (Perko, 1996 : 60)

Definisi 11

Sistem persamaan diferensial non linear orde satu dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = F(t, x)$$

dengan $x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, dan $F(t, x) = \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, \dots, x_n \\ F_2(t, x_1, \dots, x_n \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}$, jika $F(t, x)$ fungsi non linear pada $x_1, \dots, x_n$ maka sistem disebut sebagai sistem persamaan diferensial non linear. (Perko, 1996 : 65)

3. Sistem dinamik

Definisi 12

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang berubah dipengaruhi oleh waktu, dinyatakan dengan : $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$

dimana $x \epsilon R^n, t \epsilon R$ (Hariyani,2007:7)

4. Titik Tetap

Untuk mengetahui titik tetap dari sistem persamaan diferensial digunakan definisi berikut :

Definisi 13

Diberikan sistem autonomous

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Suatu titik (x^*, y^*) pada kedua persamaan $f(x^*,y^*) = 0$ dan $g(x^*,y^*) = 0$

Maka titik (x^*, y^*) disebut titik tetap dari (11). (Ross,1984:634)

Definisi 14

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = F(x)$, dimana $x \in R^n$. Titik x* disebut titik tetap bila $F(x^*) = 0$. (Finizio, 1988 : 288)

5. Teori Kestabilan Titik Tetap

Untuk mengetahui kriteria titik tetap dibutuhan orbit yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 15

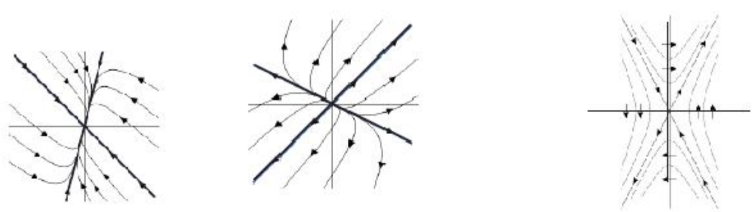
Orbit merupakan lintasan yang mengitari titik tertentu pada suatu bidang. Sedangkan daerah tempat melintasi dinamakan *medan orbit.* Orbit solusi suatu sistem persamaan differensial adalah lintasan yang dilalui oleh solusi di bidang (x, y). (Santosa, 1999 : 35)

Kriteria titik tetap berdasarkan cara orbit atau lintasan mendekati atau menjauhi titik tetap adalah sebagai berikut:

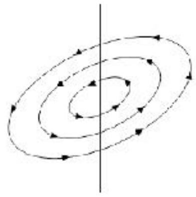
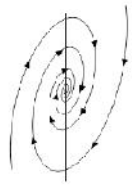
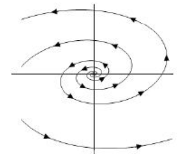
a) Jika orbit-orbit menjauhi atau mendekati titik dekat melalui garis-garis lurus, maka titik tetap disebut *simpul sejati.*
b) Jika orbit-orbit menjauhi atau mendekati titik dekat melalui garis-garis lengkung, maka titik tetap disebut *simpul tak sejati.*
c) Jika orbit-orbit mendekati suatu arah dan menjauhi arah lain maka titik tetap disebut *pelana (sadel).*
d) Jika orbit-orbit mendekati atau menjauhi titik tetap secara spiral maka disebut *spiral.*
e) Jika orbit-orbit berupa kurva tertutup disekeliling titik tetap disebut *pusat (center).*

(Santosa, 1999 : 35)

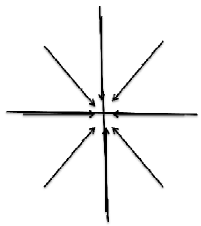
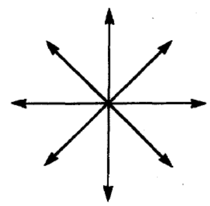
Berikut dapat dilihat gambar kriteria kestabilan berdasarkan cara orbit atau lintasan mendekati atau menjauhi titik tetap.



Titik simpul (stabil) Titik simpul (tak stabil) Titik sadel

Titik pusat Titik spiral (stabil) Titik spiral (tak stabil)

Titik simpul stabil sejati Titik simpul tak stabil sejati

Gambar 2. Kriteria kestabilan dari titik tetap ditinjau dari cara orbit mendekati atau menjauhi titik tetap

Adapun teori kestabilan dari titik tetap adalah:

Definisi 16

Pandang sistem persamaan differensial non linear

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Karena sistem persamaan differensial non linear orde satu maka dilakukan pelinearan dengan menggunakan ekspansi taylor untuk suatu titik tetap (x*, y*) sebagai berikut (Verhulst, 1990 : 12):

$$f(x,y) = f(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*) + \frac{\partial f(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial x}(x-\mathrm{x}^*) + \frac{\partial f(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial y}(y-\mathrm{y}^*) + \varphi_1(x,y)$$

$$g(x,y) = g(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*) + \frac{\partial g(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial x}(x-\mathrm{x}^*) + \frac{\partial g(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial y}(y-\mathrm{y}^*) + \varphi_2(x,y)$$

dengan $\lim_{(x,y)\to(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)} \frac{\varphi_i(x,y)}{[(x-\mathrm{x}^*)+(y-\mathrm{y}^*)]^{\frac{1}{2}}} = 0, \qquad i = 1,2$

sehingga

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x-\mathrm{x}^* \\ y-\mathrm{y}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\mathrm{x}^* \\ y-\mathrm{y}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1(x-\mathrm{x}^*),(y-\mathrm{y}^*) \\ \varphi_2(x-\mathrm{x}^*),(y-\mathrm{y}^*) \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dz}{dt} = Az + \varphi(z)$$

dengan $z = \begin{bmatrix} x-\mathrm{x}^* \\ y-\mathrm{y}^* \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$.

Karena $\varphi(z)$ sangat kecil maka dapat diabaikan. Matrik A merupakan matrik jacobi yang dihitung di titik $(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)$ yang didefinisikan $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$.

Persamaan $\frac{dz}{dt} = Az$ disebut pelinearan.

Pandang sistem persamaan diferensial autonomous (mandiri) $\frac{dX}{dt} = AX$

dimana A = matriks koefisien.

Misalkan sistem diatas mempunyai solusi berbentuk $x(t) = \bar{k}e^{\lambda t}$ dengan konstanta $\boldsymbol{\lambda}$ dan vektor $\bar{k}$ memenuhi:

$A\bar{k} = \lambda\bar{k}$ atau $(A - \lambda I)\bar{k} = 0$

Agar diperoleh solusi tak nol dari x maka haruslah $\bar{k}$ vektor tak nol, sehingga $det(A - \lambda I) = 0$.

Misalkan sistem di atas mempunyai matriks koefisien berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Agar $x^* = (0{,}0)$ satu-satunya titik tetapnya, harus diasumsikan $\det A = \Delta = ad - bc \neq 0$. Jika $\tau = a + d$ adalah *trace* dari matriks A. Maka $det(A - \lambda I) = 0$, ditulis sebagai:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sehingga

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$ad - (a + d)\lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\lambda^2 - \tau\boldsymbol{\lambda} + \Delta = 0$$

Sehingga nilai eigen A:

$$\lambda_{12} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})$$

Pada persamaan di atas terdapat tiga kasus, dimana tergantung pada nilai $(\tau^2 - 4\Delta)$ positif, negatif atau nol.

Kasus I

$(\tau^2 - 4\Delta) > 0$ dengan $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

Maka solusi umum adalah $x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ dengan λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen, vektor v_1 dan $v_2$adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen.

Kemungkinan:

a) $\lambda_1 < 0\ \lambda_2 < 0$

Bila $\tau < 0$ dan $\Delta > 0$

Dari persamaan diatas didapat $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ maka titik tetapnya s*tabil.*

b) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Bila $\tau > 0$ dan $\Delta > 0$.

Dari persamaan diatas didapat $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ maka titik tetapnya *tidak stabil.*

c) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$

Bila $\tau < 0$ dan $\Delta < 0$.

Karena $\lambda_1 < 0$ maka $x(t) = c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$. Karena $\lambda_2 > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$. Berarti $x(t)$ akan menuju nol sepanjang vektor v_1 dan menuju tak hinga sepanjang vektor v_2, sehingga titik tetapnya merupakan titik *sadel* dan bersifat *tidak stabil.*

Kasus II

$(\tau^2 - 4\Delta) = 0$ dengan $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$

Maka solusi umum adalah $x(t) = (c_1 + c_2)e^{\lambda t}$

Kemungkinan nilai eigen ada 2 sehingga:

a) $\lambda > 0$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$

maka titik tetapnya *tidak stabil.*

b) $\lambda < 0$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

maka titik tetapnya *stabil.*

Kasus III

$(\tau^2 - 4\Delta) < 0$ dan λ_1, λ_2 kompleks

Misalkan $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ dan $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ dengan α dan β bilangan real.

Sistem persamaan differensial yang mempunyai nilai eigen $\alpha \pm \beta i$ adalah:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha y \qquad (8)$$

Dalam koordinat polar (r, θ), x dan y dinyatakan dalam bentuk $x = r\,cos\theta$ dan $y = r\,sin\theta$ sehingga diperoleh $r^2 = x^2 + y^2$ dan $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

Turunan dari $r^2 = x^2 + y^2$ adalah:

$$rr' = xx' + yy' \qquad (9)$$

Subsitusi persamaan (8) ke (9), diperoleh:

$$r' = \alpha r$$

$$r(t) = r(0)e^{\alpha t} \qquad (10)$$

Turunkan $\tan\theta$ adalah

$$sec^2(\theta)\theta' = \frac{xy' - yx\prime}{x^2} \qquad (11)$$

Subsitusi (8) ke (11):

$$r^2(\theta)' = -\beta(x^2 + y^2)$$

$$(\theta)' = -\beta \tag{12}$$

Maka

$$\theta(t) = -\beta(t) + \theta_0 \tag{13}$$

Dengan θ_0 adalah nilai θ untuk $t = 0$.

Kasus pada solusi (10) dan (13), yaitu:

a) $\alpha < 0$

Karena $\alpha < 0$*, maka r(t) berkurang jika t bertambah.*

Jika $\beta > 0$*, maka* $\theta(t)$ akan berkurang jika *t* bertambah, sehingga arah orbit searah jarum jam menuju titik asal.

Jika $\beta < 0$*, maka* $\theta(t)$ akan bertambah jika *t* bertambah, sehingga arah orbit berlawanan arah jarum jam menuju titik asal.

Sehingga titik tetap bersifat *spiral stabil.*

b) $\alpha > 0$

Karena $\alpha > 0$*, maka* $r(t)$ *bertambah, jika t bertambah.*

Jika $\beta > 0$ *maka* $\theta(t)$ akan berkurang jika t bertambah, sehingga arah gerak orbit searah jarum jam menuju titik asal.

Jika $\beta < 0$ *maka* $\theta(t)$ akan bertambah jika t bertambah, sehingga arah gerak orbit berlawanan arah jarum jam menuju titik asal.

Sehingga titik tetap bersifat *spiral tak stabil.*

c) $\alpha = 0$

Karena $\alpha = 0$, *maka* $r(t)$ *tidak berubah sepanjang waktu.*

Jika $\beta < 0$ *maka* $\theta(t)$ bertambah jika t bertambah.

Jika $\beta > 0$ *maka* $\theta(t)$ berkurang jika t bertambah.

Karena $r(t)$ tetap maka gerak orbit membentuk suatu lingkaran sehingga titik tetap bersifat *stabil neural*.

Dari uraian di atas, kestabilan titik tetap mempunyai tiga sifat yaitu:

i. Stabil jika:
   1. Tiap nilai eigen bernilai real negatif.
   2. Bagian real nilai eigen kompleks adalah lebih kecil atau sama dengan nol.

ii. Tak stabil jika:
   1. Tiap nilai eigen real positif.
   2. Bagian real nilai eigen kompleks adalah lebih besar dari nol.
   3. Sadel jika perkalian dua buah nilai eigen real adalah negatif.

6. Nilai Eigen

Definisi 17

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks n x n, maka sebuah vektor taknol x pada $\boldsymbol{R}^n$ disebut **vektor eigen** (*eigenvector*) dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{Ax}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$: jelasnya, $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut **nilai**

eigen (*eigenvalue*) dari $\boldsymbol{A}$, dan $\boldsymbol{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang **terkait** dengan **λ.** (Anton,2004:384)

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $\boldsymbol{A}$, n x n, kita menuliskan kembali $\boldsymbol{Ax = \lambda x}$ sebagai $\boldsymbol{Ax = \lambda Ix}$ atau secara ekuivalen,

$$(\boldsymbol{\lambda I - A)x = 0} \quad (14)$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari persamaan ini. Akan tetapi, menurut teorema pernyataan-pertanyaan yang ekuivalen persamaan (14) memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$$\boldsymbol{det(\lambda I - A) = 0} \quad (15)$$

Persamaan ini disebut **persamaan karakteristik** (characteristic equation) matriks $\boldsymbol{A}$: skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen $\boldsymbol{A}$. Apabila diperluas lagi, determinan $\boldsymbol{det(\lambda I - A)}$ adalah sebuah polynomial $\boldsymbol{p}$ dalam variabel **λ** yang disebut sebagai ***polinomial karakteristik*** (*characteristic polynomial*) matriks ***A.***

Dapat ditunjukkan bahwa jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks n x n, maka polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}$ memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1; jelasnya, polinomial karakteristik ***p(x)*** dari sebuah matriks n x n memiliki bentuk

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n \quad (16)$$

Berdasarkan Teorema Dasar Aljabar bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \quad (17)$$

Memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga sebuah matriks n x n memiliki sebanyak-banyaknya n nilai eigen yang berbeda.

(Anton,2004:385)

7. Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh Hurwitz menunjukkan adakah akar-akar tak stabil persamaan polynomial n (n=berhingga) tanpa perlu menyelesaikannya. Untuk sistem kendali, kestabilan mutlak langsung dapat diketahui dari koefisien-koefisien persamaan karakteristik.

Prosedur :

a. Tulis persamaan orde-n dalam bentuk sebagai berikut:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Dengan koefisien-koefisien : besaran nyata dan $a_n \neq 0$ (akar di titik asal sudah dihilangkan)

b. Bila ada koefisien yang bernilai 0 atau negatif disamping adanya koefisien positif (sistem tak stabil). Kondisi perlu (tetapi belum cukup) untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom positif dan lengkap.

c. Bila semua koefisien positif, buat tabel Routh sebagai berikut:

$$
\begin{array}{cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

Dengan koifisien

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \qquad c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \qquad c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1} \qquad c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

$$\vdots \qquad d_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1} \qquad \vdots$$

$$d_2 = \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1}$$

$$\vdots$$

d. Kriteria kestabilan Routh : banyaknya akar tak stabil = banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama tabel Routh.

e. Syarat perlu dan cukup untuk stabil :

   i. Semua koefisien persamaan karakteristik positif, dan

   ii. Semua suku pada kolom pertama tabel Routh bertanda positif.

Contoh

Diberikan sistem dinamik sebagai berikut:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

Buat tabel routh

s^3	a_0	a_2
s^2	a_1	a_3
s^1	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	
s^0	a_3	

Terlihat bahwa sistem stabil bila:

$a_1 a_2 > a_0 a_3$

(Riyadi,2010:16-17)

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika penyebaran tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat adalah :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = (1-p)\beta SI - (\mu + k)E$$

$$\frac{dI}{dt} = p\beta SI + kE + -(\mu + d)I$$

Model penyebaran tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = p\beta SI + kE - (\mu + d)I$$

Model penyebaran tuberkulosis dengan tingkat perkembangan lambat :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = (1-p)\beta SI - (\mu + k)E$$

$$\frac{dI}{dt} = kE + (\mu + d)I$$

Dari model di atas diperoleh dua titik tetap yaitu $P_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$ dan $P_1 = (S^*, E^*, I^*)$, dengan $S^* = \frac{\mu^2+kd+\mu d+\mu k}{\beta(\mu p+k)}$,

$E^* = \frac{(-1+p)(-\Lambda\beta\mu p-\Lambda\beta k+\mu^3+\mu kd+\mu^2 d+\mu^2 k)}{\beta(\mu p-k)(k-\mu)}$, dan

$I^* = -\frac{-\Lambda\beta k-\Lambda\beta\mu p+\mu^3+\mu kd+\mu^2 k+\mu^2 k}{\beta(\mu^2+kd+\mu k+\mu d)}$, dan

$R_0 = p\frac{\Lambda}{\mu}\frac{\beta}{(\mu+d)} + (1-p)\frac{\Lambda}{\mu}\frac{k}{(\mu+k)}\frac{\beta}{(\mu+d)}$. Dari R_0 dapat disimpulkan titik P_0 stabil saat $R_0 < 1$ dan tidak stabil saat $R_0 > 1$, titik P_1 stabil saat $R_0 > 1$.

2. Faktor-faktor yang mempengaruhi terjadinya epidemi dapat dilihat dari

$$R_0 = p\frac{\Lambda}{\mu}\frac{\beta}{(\mu+d)} + (1-p)\frac{\Lambda}{\mu}\frac{k}{(\mu+k)}\frac{\beta}{(\mu+d)}$$

Faktor-faktor yang mempengaruhi terjadinya epidemi dalam suatu populasi, yaitu laju penularan (β), laju perubahan menjadi TB aktif (k), laju kematian karena penyakit TB (d), laju kematian alami (μ), jumlah kelahiran (Λ), peluang seseorang bisa langsung menjadi TB aktif (p). Dari semua faktor, laju penularan (β) dan peluang seseorang bisa langsung menjadi TB aktif (p) merupakan faktor yang paling mempengaruhi terjadinya epidemi pada suatu populasi.

Hal ini dapat kita lihat dari $R_0 = \frac{\Lambda}{\mu}\frac{\beta}{(\mu+d)}\frac{\mu p+k}{(\mu+k)}$, dari persamaan tersebut dapat dilihat bahwa p dan β berbanding lurus dengan R_0, artinya semakin besar nilai p dan β maka semakin besar nilai R_0.

3. Interpretasi

Hal ini berarti dengan mengontrol nilai p dan β kita dapat memperkecil terjadinya epidemi. Kita dapat mengontrol nilai p dengan memberikan daya tahan tubuh kepada individu pada subpopulasi rentan misalnya dengan memberikan vaksinasi atau dengan memberikan makanan yang dapat meningkatkan daya tahan tubuh seseorang. Mengontrol nilai β dapat dilakukan dengan cara mengurangi kontak langsung antara penderita dengan individu rentan. Mengurangi kontak langsung dapat dilakukan dengan mengisolasi penderita TB sehingga kemungkinan terjadinya kontak langsung bisa berkurang. Setelah nilai p dan β berkurang maka epidemi yang ada pada populasi dapat berkurang.

B. Saran

1. Bagi intansi Pukesmas dan Dinas Kesehatan

Menjadi hal yang sangat penting untuk membedakan penyebaran dengan tingkat perkembangan cepat atau dengan tingkat perkembangan lambat sehingga penanganan penderita secara dini dapat dilakukan dengan optimal.

2. Bagi Peneliti Lain

Pada pembahasan tugas akhir ini telah dijelaskan model matematika penyebaran tuberkulosis dengan tingkat perkembangan cepat dan lambat, sehingga untuk lebih kedepannya dapat diteliti lebih lanjut pada upaya pengendalian dan pencegahan.

Daftar Pustaka

Anonim.2011.http://www.google.co.id/264.tuberculosis-paru-tb-paru/html. (Diakses tanggal 11 Mei 2011 pukul 10.23 WIB)

Anton, Howard & Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kedelapan*. Jakarta : Erlangga.

Brauer, Fred. Dkk. 2008. *Mathematical Epidemiology, Mhatematical Biosciences Subseries*. Springer.

Castillo-Chavez, Carlos, Baojong Song, & Juan Pablo Aparicio. (2002). *Tuberculosis Models with Fast and Slow Dynamics: the role of close and casual contacts.* Mathematical Biosciences 180 (2002) 187-205.

Castillo-Chavez, Carlos, Baojong Song.2002.*An Overview of Dynamical Models of Tuberculosis.* Technical Report of BSBC, Cornel University: Ithaca.

Castillo-Chavez, Carlos, Zhilan Feng, dan Wengzhang Huang. 2000. *On The Computation of* R_0*and Its Role on Global Stability.* University Alabama:USA.

Depkes RI.2007. *Pedoman Nasional Penanggulangan Tuberkuosis.* Edisi 2, Cetakan Pertama.

Finizio,N,& Ladas,G.1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*.alih bahasa Widiarti, S.Edisi ke-2. Jakarta : Erlangga.

Guardiola, John & Antonia Vecchio.2003. *The basic reproduction number for infections dynamicsmodels and the global stability of stationary points*.http://www.na.iac.cnr.it/rapporti/2003/Vecchio_RT_269 03.pdf didownload tanggal 27 september 2011 pukul 20.40 WIB.

Hariyani, Novi.2007. *Analisa Dinamika Model Pnyebaran Penyakit Ebola Tanpa Kekebalan, Tugas Akhir*. Universitas Negeri Padang. Padang: Universitas Negeri Padang.

Perhimpunan Dokter Paru Indonesia.2002.*Tuberkulosis, Pedoman Diagnosis & Penatalaksanaan di Indonesia.* file://///Jad4/data-web/Back-Up/public_html%20-%20Klik%20PDPI-040805/konsensus/tb/tb.html (1 of 29)14/03/2006 0:39:37.

Perko, Lawrence. 1996. *Differential Equations and Dynamical Systems. Second Edition.* Springer

Riyadi, Sugeng. 2011. *Persamaan Logistik untuk Dua Jenis Kelamin, Tugas Akhir*. Universitas Negeri Padang. Padang: Universitas Negeri Padang.

Roberts, M. G. & J. A. P. Heesterbeek. 2003. *A New Method for Estimating The Effort Required to Control an Infectious Disease*.

Ross, Shepley. 1984. *Differensial Equations*. Jhon Wiley & Sons. New York.

Santosa, Widiarti. & R. J. Pamuntjak. 1999. *Persamaan Diferensial Biasa*. DEPDIKBUD.

Susanta, B & Bambang Soedijono. 1993. *Model Matematika*. Jakarta: Karunika Jakarta UT.

Syafrizal, Tridjoko Hadianto, & Mubasysyir Hasanbasri. 2008. *Pengelolaan Penanganan Pengobatan Tuberkulosis di RS DR M Djamil Padang*. Working Paper Series No. 7 Januari 2008, First Draft. KMKP Universitas Gadjah Mada: Yogyakarta.

Verhulst, Ferdinant.1990. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical System*. Spieger. Verlag. Heidelberg