

**PEMODELAN PERILAKU GELOMBANG SOLITER INTERNAL
DI ATMOSFER MENGGUNAKAN PERSAMAAN KORTEWEG
DE VRIES MELALUI PENDEKATAN *FINITE*
DIFFERENCE METODA LAASONEN**

SKRIPSI

*Diajukan kepada Tim Penguji Skripsi Jurusan Fisika Sebagai Salah Satu
Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains*



Oleh

AYU PUTRI NINGSIH

NIM. 12769/2009

**PROGRAM STUDI FISIKA
JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG**

2014

PERSETUJUAN SKRIPSI

PEMODELAN PERILAKU GELOMBANG SOLITER INTERNAL DI ATMOSFER MENGGUNAKAN PERSAMAAN *KORTEWEG DE VRIES* MELALUI PENDEKATAN *FINITE DIFFERENCE* METODE *LAASONEN*

Nama : Ayu Putri Ningsih
NIM : 12769
Program Studi : Fisika
Jurusan : Fisika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 23 Januari 2014

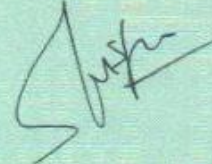
Disetujui Oleh

Pembimbing I,



Dra. Hidayati, M.Si
NIP. 19671111 199203 2 001

Pembimbing II,



Nofi Yendri Sudiar S.Si, M.Si
NIP. 19781110 200604 1 001

PENGESAHAN

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi

Program Studi Fisika Jurusan Fisika

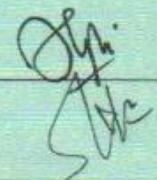
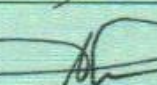
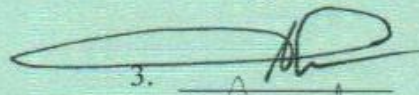
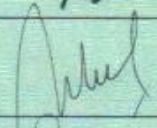
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Padang

Judul : Pemodelan Perilaku Gelombang Soliter Internal di
Atmosfer Menggunakan Persamaan Korteweg de Vries
Melalui Pendekatan Finite Difference Metode Laasonen
Nama : Ayu Putri Ningsih
NIM : 12769
Program Studi : Fisika
Jurusan : Fisika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 28 Januari 2014

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
1. Ketua	: Dra. Hidayati, M.Si	1. 
2. Sekretaris	: Nofi Yendri Sudiar, S.Si, M.Si	2. 
3. Anggota	: Drs. Akmam, M.Si	3. 
4. Anggota	: Drs. Masril, M.S	4. 
5. Anggota	: Syafriani, S.Si, M.Si, Ph.D	5. 

SURAT PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang lazim.

Padang, Februari 2014

Yang menyatakan,

ABSTRAK

Ayu Putri Ningsih : **Pemodelan Gelombang Soliter Internal di Atmosfer
Menggunakan Persamaan Korteweg De Vries Melalui
Pendekatan *Finite Difference* Metode *Laasonen***

Gelombang soliter internal adalah gelombang yang terjadi di dalam suatu fluida. Gelombang ini muncul karena adanya perubahan rapat massa pada lapisan di dalam fluida. Salah satu gelombang soliter internal yang ditemui adalah gelombang soliter internal di atmosfer seperti yang terjadi pada fenomena ‘*Morning glory*’ di Australia. Gelombang soliter internal di Atmosfer ini memiliki karakteristik gelombang dengan penjararan gelombang yang stabil dan merambat tanpa perubahan bentuk. Karakteristik ini merupakan sifat dari soliton sebagai gelombang nonlinier. Penelitian ini bertujuan mengidentifikasi dan memodelkan gelombang Soliter internal atmosfer dengan memperlihatkan pengaruh amplitudo, rapat massa lapisan dan ketinggian lapisan.

Penelitian yang dilakukan termasuk jenis penelitian dasar menggunakan pendekatan numerik. Pendekatan numerik yang digunakan adalah *Finite Difference* metode *Laasonen* yaitu suatu metode untuk mendekati harga turunan suatu fungsi setiap titik pada domain solusi. Selanjutnya dengan metode ini dirancang program menggunakan *software* Matlab R.7 melalui persamaan *Korteweg de Vries* dan solusi soliton.

Berdasarkan solusi soliton yang dihasilkan, dapat dianalisis sifat gelombang soliter internal atmosfer yang menunjukkan bahwa besar kecepatan gelombang soliter internal atmosfer dipengaruhi oleh amplitudo gelombang. Hasil dari pemograman yaitu berupa tampilan output dalam bentuk grafik dan pemodelan. Hasil ini dapat memperlihatkan pengaruh variasi amplitudo, rapat massa dan ketinggian terhadap kecepatan gelombang. Amplitudo gelombang sebanding dengan kuadrat kecepatan gelombang.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan karunia-Nya sehingga penulis dapat melaksanakan penelitian dan menyelesaikan skripsi ini. Sebagai judul skripsi ini yaitu: “Pemodelan Perilaku Gelombang Soliter Internal di Atmosfer Menggunakan Persamaan *Korteweg De Vries* Melalui Pendekatan *Finite Difference* Metode *Laasonen*”. Penulisan laporan skripsi ini berguna untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) UNP.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis dibantu dan dibimbing oleh berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Hidayati, M.Si, sebagai dosen Pembimbing I yang telah membimbing dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Nofi Yendri Sudiar, S.Si, M.Si sebagai dosen Pembimbing II yang telah membimbing dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Akmam, M.Si sebagai ketua Jurusan Fisika FMIPA UNP sekaligus dosen penguji
4. Bapak Drs. H. Masril, M.Si dan Ibuk Syafriani, S.Si, M.Si, Ph.D sebagai dosen penguji.
5. Ibu Dr. Ratnawulan, M.Si sebagai penasehat akademik.
6. Bapak dan Ibu Staf Pengajar Jurusan Fisika FMIPA UNP.
7. Semua pihak yang telah membantu dalam perencanaan, pelaksanaan, penyusunan dan penyelesaian skripsi ini.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan menjadi amal shaleh bagi Bapak dan Ibu serta mendapat balasan yang berlipat ganda dari Allah SWT.

Penulis menyadari bahwa dalam laporan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan kelemahan. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran untuk menyempurnakan skripsi ini. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Padang, Februari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
ABSTRAK	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR LAMPIRAN	viii
DAFTAR TABEL	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Perumusan Masalah.....	4
C. Pembatasan Masalah	4
D. Tujuan Penelitian.....	5
E. Pertanyaan Penelitian	5
F. Kontribusi Penelitian	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	6
A. Gelombang	5
B. Gelombang Non Linier	9
C. Gelombang Soliter Internal Atmosfer	12
D. Persamaan <i>Korteweg de Vries</i> Gelombang Soliter Internal Atmosfer.	17

E. Metoda <i>Finite Difference</i>	21
BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	30
A. Jenis Penelitian.....	30
B. Tempat Penelitian.....	30
C. Pelaksanaan Penelitian	30
D. Instrumen Penelitian.....	31
E. Desain Penelitian.....	31
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	39
A. Rancangan Program	39
B. Hasil Pemograman	
1. Variasi Amplitudo dengan Rapat Massa dan Ketinggian Lapisan Tetap.....	43
2. Variasi Rapat Masa Dan Ketinggian Lapisan dengan Amplitudo Tetap.....	49
3. Variasi Waktu dengan Amplitudo, Rapat Massa dan Ketinggian Lapisan Tetap	54
C. Pembahasan.....	58
BAB V PENUTUP	61
A. Kesimpulan	61
B. Saran	61
DAFTAR PUSTAKA	62
LAMPIRAN	64

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1. Gelombang Air dengan Amplitudo Tetap	8
2. Kondisi Sinoptik Pembentukan Morning Glory	14
3. Sketsa Gelombang Soliter Internal Atmosfer	18
4. Contoh Bentuk Gelombang Soliter Internal	21
5. Matrik pentadiagonal	36
6. Flowchart kondisi awal pada pemodelan	37
7. Flowchart pemodelan gelombang	38
8. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer variasi amplitudo $a = 0.5 \text{ m}$ dengan Solusi analitik dalam Bentuk 2 Dimensi (ketinggian dalam skala nilai satuan)	40
9. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer variasi amplitudo $a = 0.5 \text{ m}$ dengan Solusi analitik dalam Bentuk 2 Dimensi (ketinggian dalam skala nilai ratusan)	41
10. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer variasi amplitudo $a = 0.5 \text{ m}$ dengan Metode <i>Laasonen</i> dalam Bentuk 2 Dimensi	42
11. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer variasi amplitudo $a = 0.1 \text{ m}$ dengan Metode <i>Laasonen</i> dalam Bentuk 2 Dimensi	44
12. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer variasi amplitudo $a_1 = 0.1 \text{ m}$ dengan Solusi analitik dalam Bentuk 3 Dimensi	45
13. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer variasi amplitudo $a_1 = 0.5 \text{ m}$ dengan Solusi analitik dalam Bentuk 2 Dimensi	45
14. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer variasi amplitudo $a_2 = 0.5 \text{ m}$ dengan Solusi analitik dalam Bentuk 3 dimensi	46

15. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer variasi amplitudo $a_1 = 0.8 \text{ m}$ dengan Solusi analitik dalam Bentuk 2 Dimensi	47
16. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer variasi amplitudo $a_3 = 0.8 \text{ m}$ dengan Solusi analitik dalam Bentuk 3 Dimensi	48
17. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Pemodelan Persamaan Soliter Internal Atmosfer Variasi rapat massa ($\rho_2 = 0.9$ dan $\rho_1 = 0.5$) dan Ketinggian ($h_2=0.7$ dan $h_1 = 1.1$) Metode <i>Laasonen</i> 2 dimensi.....	50
18. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Pemodelan Persamaan Soliter Internal Atmosfer Variasi rapat massa ($\rho_2 = 0.9$ dan $\rho_1 = 0.5$) dan Ketinggian ($h_2=0.7$ dan $h_1 = 1.1$) Metode <i>Laasonen</i> 3 dimensi.....	51
19. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Pemodelan Persamaan Soliter Internal Atmosfer Variasi rapat massa ($\rho_2 = 1$ dan $\rho_1 = 0.6$) dan Ketinggian ($h_2=0.8$ dan $h_1 = 1.2$) Metode <i>Laasonen</i> 2 dimensi.....	52
20. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Pemodelan Persamaan Soliter Internal Atmosfer Variasi rapat massa ($\rho_2 = 1$ dan $\rho_1 = 0.6$) dan Ketinggian ($h_2=0.8$ dan $h_1 = 1.2$) Metode <i>Laasonen</i> 3 dimensi.....	52
21. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Pemodelan Persamaan Soliter Internal Atmosfer Variasi rapat massa ($\rho_2 = 1.1$ dan $\rho_1 = 0.9$) dan Ketinggian ($h_2=1$ dan $h_1 = 1.3$) Metode <i>Laasonen</i> 2 dimensi.....	53
22. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Pemodelan Persamaan Soliter Internal Atmosfer Variasi rapat massa ($\rho_2 = 1.1$ dan $\rho_1 = 0.9$) dan Ketinggian ($h_2=1$ dan $h_1 = 1.3$) Metode <i>Laasonen</i> 3 dimensi.....	54
23. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer saat $t=0.1$ sekon.....	55
24. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer saat $t=0.2$ sekon.....	56
25. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer saat $t=0.3$ sekon.....	56
26. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer saat $t=0.4$ sekon.....	57
27. Pemodelan Gelombang Soliter Internal Atmosfer saat $t=0.5$ sekon.....	57

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. List program	64

DAFTAR TABEL

TABEL	Halaman
1. Perbandingan Nilai Amplitudo dengan Kecepatan Gelombang	49

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Pengamatan tentang gejala-gejala di atmosfer merupakan fenomena menarik untuk dipelajari. Salah satunya adalah gelombang pada atmosfer. Gelombang yang terjadi di atmosfer dan menarik untuk diketahui adalah gelombang soliter internal. Gelombang soliter internal banyak ditemui pada lapisan atmosfer. Gelombang soliter internal muncul karena adanya perbedaan rapat massa dari setiap lapisan fluida di atmosfer. Perubahan rapat massa pada setiap lapisan atmosfer disebabkan oleh perubahan temperatur udara akibat adanya pemanasan oleh matahari. Gelombang soliter internal tidak dapat dilihat langsung oleh mata, tetapi gelombang ini dapat divisualisasikan oleh keadaan awan.

Banyak peneliti yang telah melakukan penelitian mengenai gelombang soliter internal di atmosfer. Salah satu diantaranya yang dilakukan oleh Reeder dan beberapa peneliti lainnya. Mereka melakukan penelitian mengenai fenomena “*Morning Glory*” di Laut Australia (Reeder et.al.,1995). *Morning Glory* adalah nama yang diberikan untuk suatu susunan awan rendah yang diamati dari Selatan hingga Utara Queensland. Susunan awan tersebut sejajar dengan yang lain dan sering kali memanjang secara horizontal hingga ratusan kilometer. Susunan awan-awan ini merambat tanpa mengalami perubahan bentuk dan

kecepatan dalam beberapa jam. Kecepatan rambat susunan awan-awan ini lebih besar dari kecepatan angin pada arah yang sama akibat perubahan tekanan hingga beberapa milibar.

Keuntungan yang diperoleh dengan mengetahui keberadaan gelombang soliter internal atmosfer dalam bidang penerbangan adalah memberikan informasi kepada pilot pesawat terbang . Diketuinya keberadaan gelombang ini dapat memperkirakan sejauh mana pesawat dapat terbang dengan aman di atas permukaan bumi.

Perambatan gelombang soliter internal pada lapisan di atmosfer terjadi akibat adanya perbedaan rapat massa antara lapisan atmosfer. Gelombang soliter internal atmosfer ini terjadi di lapisan troposfer. Lapisan atmosfer yang ditinjau diasumsikan terdiri dari tiga lapisan, yaitu lapisan bawah, lapisan permukaan dan lapisan atas. Pada lapisan bawah, kecepatan angin relatif tetap sedangkan rapat massanya berubah secara lambat. Pada lapisan permukaan (pada ketinggian tertentu), kecepatan angin dan rapat massanya berubah secara cepat. Pada lapisan atas, kecepatan dan rapat massanya relatif tetap (konstan). Gelombang soliter internal muncul pada lapisan bawah dan lapisan permukaan, karena pada lapisan-lapisan ini rapat massanya tak konstan.

Gelombang soliter internal sebagai gelombang atmosfer yang bergerak secara horizontal dan memiliki periode waktu. Bila dilihat dari sifat gelombangnya, gelombang soliter internal atmosfer merambat tanpa adanya perubahan bentuk serta tetap stabil melawan tumbukan. Sifat ini merupakan

karakteristik dari soliter. Soliter adalah sebuah gelombang nonlinear yang bersifat terlokalisasi dan merambat tanpa perubahan serta stabil melawan tumbukan dan mempertahankan identitasnya (Ridwan, 2007). Jadi menurut sifatnya gelombang soliter internal atmosfer ini dapat dikatakan sebagai soliton. Namun secara keberadaan dan karakteristiknya belum dilakukan penelitian dan pengkajian lebih lanjut khususnya di lapisan troposfer bawah daerah Indonesia.

Penggunaan faktor-faktor yang menyebabkan terjadinya gelombang soliter internal atmosfer sebagai sebuah soliter dalam sebuah persamaan yang dapat memperlihatkan bagaimanakah keadaan gelombang ini. Keadaan gelombang ini dianalisis menggunakan metode numerik yang menghasilkan sebuah solusi yang nantinya akan digunakan untuk memodelkan gelombang soliter internal atmosfer ini.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti, mereka hanya meneliti tentang persamaan dan solusi dari gelombang soliter internal. Ada juga yang meneliti berdasarkan data satelit yang didapatkan tentang keberadaan gelombang soliter internal atmosfer ini. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengetahui perilaku gelombang internal dengan menggunakan solusi soliter berupa persamaan *Korteweg-de Vries* (KdV). Persamaan KdV merupakan persamaan pendekatan untuk aplikasi air dangkal. Gelombang air dangkal disini maksudnya gelombang yang memiliki amplitudo lebih kecil dari panjang gelombang. Persamaan KdV ini nantinya akan menghasilkan solusi persamaan nonlinier. Untuk mengetahui perilaku

gelombang ini maka persamaan yang dihasilkan akan diselesaikan menggunakan pendekatan metode *Finite Difference*. Metode *Finite Difference* merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mendekati harga turunan suatu fungsi pada setiap titik domain solusi dari persamaan differensial. Untuk mengetahui perilaku dari gelombang tersebut maka akan dibuat sebuah model dari gelombang ini.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis tertarik melakukan penelitian tentang **“Pemodelan Perilaku Gelombang Soliter Internal di Atmosfer Menggunakan Persamaan Korteweg de Vries Melalui Pendekatan *Finite Difference* Metode Laasonen.”**

B. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dikemukakan di atas, dapat dirumuskan permasalahan penelitian yaitu bagaimana model gelombang soliter internal atmosfer yang dipengaruhi oleh rapat massa dan ketinggian lapisan atmosfer melalui pendekatan metode *Finite Difference*?

C. Pembatasan Masalah

Berdasarkan perumusan masalah dan mengingat luasnya cakupan penelitian ini dibatasi:

1. Identifikasi perilaku gelombang soliter internal atmosfer secara numerik.
2. Pemodelan gelombang soliter internal atmosfer dengan memperlihatkan pengaruh rapat massa dan ketinggian lapisan atmosfer.

D. Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan rumusan penelitian dapat ditentukan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini, yaitu : bagaimana bentuk perilaku gelombang Soliter internal di atmosfer bila menggunakan persamaan KdV?

E. Tujuan Penelitian

Dari perumusan masalah dalam penelitian ini, dapat dijelaskan bahwa penelitian ini bertujuan untuk :

1. Mengkaji dan menganalisis perilaku gelombang soliter internal atmosfer menggunakan solusi persamaan *Korteweg de Vries*.
2. Memperlihatkan model perilaku gelombang soliter internal atmosfer dengan program Matlab 7.0.
3. Menghitung kecepatan gelombang.

F. Kontribusi Penelitian

Adapun penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat dan kontribusi yaitu :

1. Peneliti, untuk mengaplikasikan ilmu yang didalami di perkuliahan dan merealisasikannya dalam bentuk informasi bagi masyarakat.
2. Peneliti lainnya, sebagai referensi dan acuan bagi penelitian lanjutan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Gelombang

Gelombang merupakan suatu gejala gangguan yang merambat dalam selang waktu tertentu ke ruang sekitarnya. Gelombang dapat terjadi apabila suatu sistem diganggu dari posisi kesetimbangannya dan gangguan itu merambat dari suatu daerah sistem ke daerah lainnya. Gerak gelombang dapat dilihat sebagai perpindahan berupa pulsa energi dan momentum dari suatu tempat ke tempat lain (Giancolli, 1998).

Gelombang dapat dibedakan atas beberapa aspek. Berdasarkan medium perambatan suatu gelombang, gelombang dapat dibedakan menjadi (Giancolli, 1998):

a. Gelombang mekanik

Gelombang mekanik adalah gelombang yang dalam perambatannya memerlukan medium. Contohnya gelombang bunyi, gelombang tali, gelombang permukaan air dan lain sebagainya.

b. Gelombang elektromagnetik

Gelombang elektromagnetik adalah gelombang yang dalam perambatannya tidak memerlukan medium. Contohnya gelombang cahaya, gelombang radio, radiasi inframerah dan ultraviolet, sinar X, sinar gamma, dan lain sebagainya.

Berdasarkan pembagian gelombang di atas maka gelombang soliter internal atmosfer termasuk gelombang mekanik. Medium perantara gelombang ini adalah udara.

Berdasarkan bentuk mediumnya, gelombang juga dapat dibedakan menjadi :

a. Gelombang Air

Gelombang air merupakan gelombang yang dibangkitkan dipermukaan air yang disebabkan oleh faktor pembangkitnya. Gelombang tersebut contohnya gelombang laut yang dibangkitkan oleh tiupan angin di permukaan laut, gelombang pasang surut yang dibangkitkan oleh gaya tarik benda-benda langit terutama matahari dan bulan terhadap bumi, gelombang tsunami yang disebabkan adanya letusan gunung berapi atau gempa di laut dan sebagainya.

b. Gelombang Udara

Gelombang udara merupakan gelombang yang merambat di udara. Gelombang ini mencakup gelombang elektromagnetik dan gelombang atmosfer yang ada di lapisan udara. Contoh gelombang ini adalah gelombang cahaya dan gelombang radio yang tidak membutuhkan medium dalam perambatannya, gelombang Kelvin dan gelombang Rossby yang disebabkan adanya transfer vertikal momentum di lapisan atmosfer bumi .

Bentuk gelombang secara umum dapat dilihat pada gejala rambatan gelombang air yang diperlihatkan oleh seperti Gambar 1 .



Gambar 1. Gelombang air dengan Amplitudo Tetap
(Wikipedia)

Berdasarkan Gambar 1 dapat dianalisa, jika gelombang bergerak dengan kecepatan v dan merambat ke kanan searah sumbu- x , maka fungsi gelombangnya adalah $y = f(x - vt)$ dan jika gelombangnya merambat ke kiri sumbu x maka fungsi gelombangnya adalah $y = f(x + vt)$. Secara umum persamaan gelombang yang merambat pada sumbu x dapat dituliskan sebagai berikut :

$$y = f(x \pm vt) \quad (1)$$

Selanjutnya dengan mendifferensial persamaan (1) secara parsial terhadap x dan t diperoleh :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Keterangan : y adalah simpangan gelombang

t adalah waktu perambatan gelombang

x adalah posisi gelombang

v adalah cepat rambat gelombang

Persamaan (2) disebut persamaan umum gelombang linier. Secara matematis persamaan ini merupakan persamaan differensial linier orde dua, dengan besaran y adalah besaran yang bergantung pada x dan t . Salah satu solusi dari persamaan (2) berbentuk :

$$y(x, t) = a \sin(k(x - vt)) \quad (3)$$

Variabel y merupakan simpangan dari gelombang, a adalah amplitudo, k adalah bilangan gelombang, v adalah cepat rambat gelombang, dan t adalah waktu perambatan gelombang (Giancoli, 1998). Berdasarkan persamaan (3) dapat dilihat bahwa cepat rambat gelombang tidak dipengaruhi oleh amplitudo. Gelombang yang cepat rambatnya tidak dipengaruhi oleh amplitudo disebut gelombang linier. Dan sebaliknya gelombang yang cepat rambatnya dipengaruhi oleh besar amplitudo disebut dengan gelombang nonlinier.

B. Gelombang Non Linear

Gejala mengenai gelombang nonlinier merupakan salah satu bentuk permasalahan fisika yang umum terjadi di alam, artinya semua fenomena alam semesta yang memiliki sifat nonlinier. Salah satu contohnya adalah soliter. Soliter disebut juga dengan gelombang soliter dalam medium nonlinier.

Kajian mengenai gelombang nonlinier ini bermula pada tahun 1834. Seorang fisikawan Skotlandia bernama John Scott Russell mengamati suatu gerak gelombang tunggal yang bergerak sepanjang kanal tanpa mengalami perubahan bentuk maupun pengurangan laju lambat gelombang. Berdasarkan hasil

pengamatan tersebut Russel mampu menghasilkan gelombang serupa dalam satu eksperimen dan mendapatkan bahwa laju gelombang tersebut sebanding dengan amplitudonya. Gelombang tunggal tersebut dikenal dengan gelombang Russel.

Fenomena ini membuat peneliti lain melakukan penyelidikan terhadap gejala gelombang Russel ini. Peneliti tersebut meneliti bagaimana gelombang tersebut bisa terjadi. Boussinesq (1872) dan Rayleigh (1876) berhasil memperoleh profil sech² pada gelombang Russel. Korteweg dan de Vries (1895) dapat mendeskripsikan penjalaran gelombang satu arah pada gelombang Russel yang dikenal dengan persamaan Korteweg de Vries atau persamaan KdV. Korteweg dan de Vries mencari solusi analitik persamaan KdV dan dapat membuktikan persamaan bahwa kecepatan yang didapatkan oleh Russel ternyata benar. Model KdV kembali diselidiki oleh Zabusky dan Kruskal (1965) yang menggunakan nama soliter pada gelombang menyendiri yang pertama kali diamati oleh Russel.

Persamaan cepat rambat gelombang bergantung pada amplitudo, sesuai dengan pengamatan yang dilakukan Russel adalah sebagai berikut (Drazin, 1989)

$$c^2 = g(h + a) \quad (4)$$

Keterangan :
 c adalah cepat rambat gelombang
 g adalah percepatan gravitasi
 h adalah kedalaman air tanpa gangguan
 a adalah amplitudo

Berdasarkan persamaan (4) dikatakan bahwa untuk h konstan semakin besar a maka c juga semakin besar, sehingga gelombang ini tidak bisa dikategorikan sebagai gelombang linier, melainkan gelombang nonlinier. Jadi

gelombang nonlinier dapat juga dikatakan sebagai gelombang yang cepat rambatnya tergantung pada amplitudo.

Gelombang nonlinier akan menghasilkan persamaan nonlinier yang dapat dianalisis untuk dimanfaatkan dalam kajian tertentu. Berikut beberapa jenis persamaan nonlinier dan kajian terapannya (Miftahul, 2005):

- a. Persamaan *Burger* untuk aplikasi di bidang akustik nonlinear dan turbulensi.
- b. Persamaan Kadomtshv-Petviashvilli dan persamaan Korteweg-de Vries untuk aplikasi di bidang gelombang laut dangkal, gelombang Rossby atmosfer, jaringan transmisi listrik.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 u \frac{\partial u}{\partial x} + a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

- c. Persamaan Schrodinger nonlinear untuk aplikasi di bidang komunikasi serat optik tanpa repeater.

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \beta \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma |E|^2 E = 0$$

- d. Persamaan medan Affine-Toda dan persamaan Sine-Gordon untuk aplikasi di bidang switching superkonduktor, pulsa optik ultra pendek.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \omega^2 \sin \Phi = 0$$

- e. Persamaan *Ernst* untuk aplikasi di bidang kosmologi, black holes dan monopol.

Berdasarkan jenis persamaan nonlinear dan kajian terapannya yang telah dijelaskan maka persamaan yang digunakan untuk gelombang soliter internal atmosfer adalah persamaan Korteweg de Vries (KdV). Penggunaan persamaan KdV ini dikarenakan kajian terapan gelombang soliter internal atmosfer ini sama dengan gelombang laut dangkal.

C. Gelombang Soliter Internal Atmosfer

Gelombang internal adalah suatu gelombang yang terjadi di dalam suatu fluida. Gelombang ini muncul karena adanya perubahan rapat massa di setiap lapisan di dalam fluida. Gelombang soliter internal atmosfer ini terjadi di lapisan troposfer.

Pada lapisan troposfer suhu rata-rata atmosfer berkurang menurut ketinggian. Hal ini menyebabkan kerapatan udara pada setiap lapisannya juga akan berkurang. Lapisan troposfer ini merupakan tempat atau daerah terjadinya cuaca sehingga banyak ahli meteorologi yang memperhatikan daerah ini. Ahli yang pernah meneliti gelombang ini adalah Victor C. Tsai, Hiroo Kanamori, and Juliette Artru. Mereka mengatakan bahwa jenis cuaca yang terjadi di lapisan ini adalah perubahan suhu yang mendadak, angin, tekanan dan kelembaban udara yang dirasakan sehari-hari. Mereka mengamati keadaan ini menggunakan data yang diperoleh dari Trinet Seismograph dan Barograph Network di Southern California.

Pengamatan gelombang soliter internal atmosfer dapat dibagi menjadi dua kelas yaitu gelombang soliter internal atmosfer yang terjadi di bagian bawah

troposfer (beberapa ratus meter dari permukaan tanah) dan di bagian atas toposfer. Pengamatan kelas pertama, gelombang soliter internal atmosfer memiliki skala horizontal 100 m sampai beberapa kilometer dengan kecepatan fase gelombangnya 10 m/s terisolasi gelombang elevasi. Pengamatan kelas kedua, gelombang ini memiliki skala horizontal sekitar 100 km dan kecepatan fasenya berkisar dari 25 m/s sampai 100 m/s terisolasi gelombang depresi. (James W. Rottman, 1992)

Salah satu gelombang soliter internal yang ditemui di lapisan atmosfer adalah gelombang soliter internal atmosfer, seperti yang terjadi pada fenomena "Morning Glory" di Australia. Fenomena Morning Glory ini dapat dilihat dengan mengamati kondisi awan. Awan yang terbetuk saat fenomena ini adalah seperti gulungan (*roll cloud*) yang membentang dari ratusan meter sampai puluhan kilometer di udara. *Morning Glory* yang terjadi di Australia, gulungan awan merambat dari arah barat daya dari Cape York Peninsula di utara Queensland Australia di bagian atas Teluk Carpentaria menuju ke Teluk Negara utara Queensland. Gulungan awan ini memiliki lebar sekitar 4 km dan tinggi lebih dari 2 km dari ketinggian beberapa ratus meter diatas permukaan tanah. Pada fenomena *Morning glory* terjadi penurunan tekanan hingga beberapa milibar.



Gambar 2. Kondisi Sinoptik Pembentukan Morning Glory di Teluk Carpentaria Selatan (James W. Rottman).

Gelombang soliter internal atmosfer juga pernah ditemukan di California. Gelombang yang ditemukan memiliki amplitudo besar pada tekanan yang nilainya antara 0,8 – 1,3 mbar, periode 700 – 1400 s dan kecepatan propagasi 5 – 25 m/s sehingga disimpulkan bahwa gelombang ini adalah gelombang gravitasi internal yang terjebak dalam lapisan yang stabil dikarenakan adanya inverse suhu. Beberapa dari gelombang yang memiliki amplitudo yang besar dan berkembang menjadi gelombang soliter (nonlinear gelombang gravitasi interval) mirip dengan “Morning Glory” yaitu gelombang yang sama ketika diamati di Australia yang disebut juga gelombang Morning Glory LA. Gelombang ini dapat menyebabkan badai, angin Santa Ana atau peristiwa teleseismik besar. Amplitudo gelombang yang sangat besar mengganggu keselamatan penerbangan.

Penentuan perilaku gelombang soliter internal atmosfer ini membutuhkan analisa dari suatu persamaan gerak gelombang. Persamaan ini

mengambarkan keadaan dari gelombang soliter internal atmosfer. Penurunan persamaan gerak gelombang internal di atmosfer berdasarkan asumsi bahwa atmosfer sebagai fluida incompressible. Hal ini menyatakan bahwa rapat massa fluida tidak bergantung kepada tekanan. Solusi persamaan gerak gelombang internal ditentukan berdasarkan asumsi gelombang berjalan. Hubungan antara frekuensi sudut ω dan bilangan gelombang k dapat dijelaskan dengan persamaan

$$u = e^{i(\omega t - kx)} \quad (5)$$

Konstanta x adalah koordinat sebenarnya. Pada kasusnya dinyatakan bahwa kecepatan fase $c = \omega/k$ mempunyai nilai maksimum c_0 saat k menuju 0 untuk gelombang dengan panjang gelombang yang cukup besar. Hal ini berarti untuk nilai k yang cukup kecil nilai frekuensi sudut dinyatakan dengan persamaan (Benjamin, 1966)

$$\omega = kc_0(1 - \beta k^2) \quad (6)$$

Konstanta $\beta = \frac{H^2}{6}$, H merupakan ketinggian dari fluida. β merupakan konstanta positif, tergantung kepada fluida yang diamati. Sebagai contoh dalam relasi dispersi pengamatan gelombang permukaan air dengan ketinggian H .

$$\beta = \frac{1}{6} H^2. \quad (7)$$

Penggunaan teorema Fourier pada persamaan (7) menghasilkan bentuk umum persamaan gelombang dengan panjang gelombang yang sangat kecil yang merambat pada x positif dinyatakan dengan persamaan (Benjamin, 1966)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + c_0 \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (8)$$

Persamaan (8) dapat digunakan jika variabel k pada persamaan (5) bernilai sangat kecil. Pemahaman kasus secara umum jika efek dispersi frekuensi diabaikan, efek non linear pada amplitudo terbatas dapat dianalisis tanpa pendekatan lebih lanjut dengan menggunakan teori ‘air dangkal’ untuk gelombang permukaan. Untuk gelombang yang berkembang maju ke arah daerah pada saat $u = 0$, terlihat bahwa variable u tetap dengan pendekatan

$$\frac{\partial x}{\partial t} = c_0 + Cu \quad (9)$$

dimana C adalah sebuah konstanta. Persamaan (9) dikalikan dengan $\frac{\partial u}{\partial x}$ sehingga persamaan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = (c_0 + Cu) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

Penyelesaian persamaan (10) menghasilkan persamaan sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (c_0 + Cu) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

Persamaan (11) dijadikan persamaan yang bertanda positif karena c_0 dan Cu disesuaikan dengan nilai yang mempengaruhinya, sehingga persamaan (11) akan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + Cu \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

Penggunaan persamaan dilakukan untuk menurunkan perkiraan kestabilan terhadap efek dispersi dan amplitudo terbatas. Penyempurnaan persamaan yang menghubungkan antara efek dispersi dengan efek non liner

adalah dengan dengan menambahkan persamaan terakhir dari persamaan (8) yang mewakili efek dispersi ke dalam persamaan (12) yang menyatakan efek nonlinear. Sehingga persamaan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + Cu \frac{\partial u}{\partial x} + c_0 \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (13)$$

Persamaan (13) merupakan persamaan KdV gelombang soliter internal atmosfer.

D. Persamaan Korteweg & de Vries Gelombang Soliter Internal Atmosfer

Persamaan *Korteweg de Vries* untuk gelombang soliter internal atmosfer ini sesuai dengan persamaan (13). Solusi berjalan persamaan (13) dari $u = (x - ct)$ dengan menggunakan solusi periodik fungsi elliptik Jacobian yang ditentukan oleh Korteweg & de Vries. Solusi persamaan gelombang soliter internalnya adalah

$$u = a \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{aC}{12c_0\beta}} (x - ct) \quad (14)$$

dengan , $a = 3 \frac{(c-c_0)}{c}$

Hubungan antara kecepatan gelombang c dengan kecepatan maksimum c_0 dari gelombang yang sangat kecil adalah sebanding dengan amplitudo a dan panjang gelombang

$$\lambda = \sqrt{\frac{12 c_0 \beta}{aC}}. \quad (15)$$

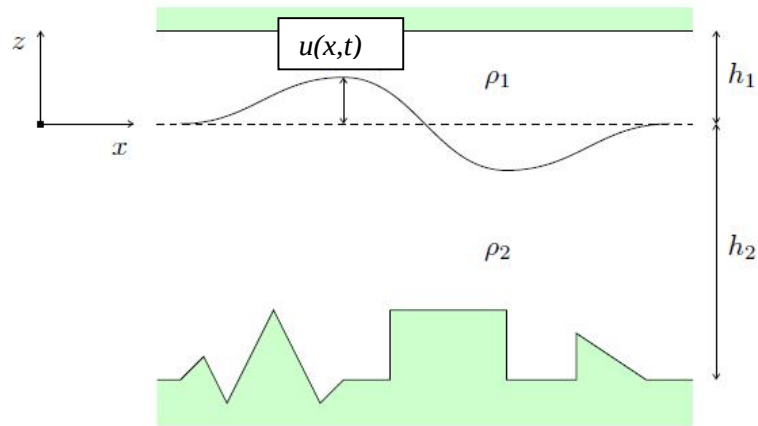
$\frac{12c_0\beta}{c} = O(1)$, dimana $a\lambda^2 = O(1)$ sehingga ,

$$a\lambda^2 = \frac{12c_0\beta}{c} \quad (16)$$

Untuk kasus sesuai dengan persamaan (16), frekuensi sudut untuk panjang gelombang yang sangat kecil dapat ditentukan menggunakan persamaan

$$\omega = kc_0(1 - \gamma)|k| \quad (17)$$

Pembahasan mengenai fluida dua lapisan berhubungan dengan kondisi rapat massa dan ketinggian pada kedua lapisan tersebut. Rapat massa pada lapisan bawah dan lapisan atas disebut dengan ρ_2 dan ρ_1 dan ketinggian fluida adalah h_2 dan h_1 . Ilustrasi dari gelombang soliter internal atmosfer dapat dilihat pada gambar 3.



Gambar 3. Sketsa Gelombang Soliter Internal Atmosfer
(Ailin Ruiz De Zarate, 2007)

Selanjutnya fluida bersifat tak termampatkan dan tak kental, dan partikel fluida bergerak secara irrotational persamaan dasar dari sistem fluida tersebut dapat dinyatakan sebagai fungsi potensial ϕ_1 dan ϕ_2 yang memenuhi persamaan

$$\phi_1(x, h_1, t) = 0 \quad (18)$$

$$\phi_2(x, h_2, t) = 0 \quad (19)$$

Persamaan (18) dan persamaan (19) memiliki arti yang sama sehingga diubah menjadi

$$\phi_1(x, h_1, t) = \phi_2(x, h_2, t) = 0 \quad (20)$$

Kondisi gelombang soliter internal ini dapat ditulis dengan persamaan

$$u_t + \phi_{1x}u_x = \phi_{1z} \quad (21)$$

$$u_t + \phi_{2x}u_x = \phi_{2z} \quad (22)$$

Karena $\nabla^2\phi_{1,2} = 0$, dengan menggunakan persamaan (20), (21) dan (22) maka akan menghasilkan persamaan

$$\rho_1 \left(\phi_{1t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi_1|^2 + gu \right) = \rho_2 \left(\phi_{2t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi_2|^2 + gu \right) \quad (23)$$

Persamaan (23) merupakan persamaan Bernoulli yang berlaku pada lapisan fluida yang memiliki perbedaan rapat massa. Disini digunakan notasi dengan indek 1 menyatakan fluida yang berada di lapisan atas dan indek 2 untuk fluida lapisan bawah.

Kecepatan fase dari gelombang ini dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (T. Brooke Benjamin, 1966):

$$c^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{k(\rho_2 \coth kh_2 + \rho_1 \coth kh_1)} \quad (24)$$

Kecepatan fase gelombang ini bernilai maksimum saat harga k memuji 0, sehingga persamaan (24) menjadi

$$c_{mak}^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 / h_2 + \rho_1 / h_1)} \quad (25)$$

Nilai $c_{mak}^2 = c_0^2$, sehingga persamaan (25) menjadi

$$c_0^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 / h_2 + \rho_1 / h_1)} \quad (26)$$

Persamaan (26) diakarkan agar dihasilkan persamaan untuk menentukan nilai c_0 yang dibutuhkan dalam penyelesaian persamaan KdV gelombang soliter internal atmosfer pada persamaan (14). persamaan (26) akan menjadi

$$c_0 = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 / h_2 + \rho_1 / h_1)}} \quad (27)$$

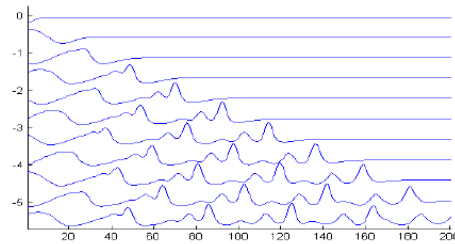
Substitusi persamaan (7) dan (27) ke Persamaan KdV gelombang soliter internal atmosfer sehingga menghasilkan persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 / h_2 + \rho_1 / h_1)}} \frac{\partial u}{\partial x} + C u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 / h_2 + \rho_1 / h_1)}} H^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (28)$$

Dimana nilai C didapat menggunakan persamaan (Wiranto, 2006)

$$C = \frac{3c_0(\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2)}{2h_1 h_2 (\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)} \quad (29)$$

Persamaan (28) ini akan digunakan untuk mengetahui solusi numerik persamaan gelombang soliter internal atmosfer. Solusi dari persamaan ini akan digunakan dalam pemodelan gelombang soliter internal atmosfer.



Gambar 4. Contoh bentuk gelombang soliter internal
(L.H Wiryanto)

E. Metoda *Finite Difference*

Perancangan suatu program aplikasi untuk memodelkan suatu persamaan gelombang memerlukan perhitungan numerik yang korelatif. Gejala gelombang soliter internal memiliki hasil akhir dalam bentuk persamaan differensial, sehingga metoda yang dapat menyelesaikan persamaan tersebut adalah metoda *Finite Difference*. Metoda *Finite Difference* merupakan suatu operasi differensial yang mengubah persamaan menjadi selisih nilai fungsi dengan tingkat pendekatan yang dikehendaki.

Metode *Finite Difference* melakukan pendekatan numerik terhadap persamaan diiferensial dengan mengambil nilai batas yang dapat ditentukan. Penggunaan metode ini dalam pencarian solusi persamaan diferensial memanfaatkan polynomial Taylor untuk mengevaluasi fungsi, sehingga relatif lebih mudah untuk diselesaikan.

Turunan dari fungsi secara matematis didefenisikan sesuai dengan persamaan:

$$f' = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} \quad (30)$$

Turunan tersebut merupakan limit dari hasil bagi selisih, yaitu pengurangan dua buah nilai yang besar ($f(x+h)-f(x)$) dan membaginya dengan bilangan yang kecil (h). Pada persamaan (30) dilakukan pendekatan sehingga menjadi :

$$f'_h(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (31)$$

Persamaan (31) dapat juga dihitung dengan menggunakan deret Taylor untuk fungsi $f(x+h)$, yaitu :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2!} f''(x) + .. \quad (32)$$

Persamaan (32) dapat ditulis $f'(x)$ sebagai berikut :

$$f'(x) = \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2!} f''(x)] \quad (33)$$

Persamaan (33) ini adalah deret untuk $f'(x)$ aproksimasi. Bila dilakukan aproksimasi sampai dua suku pertama dengan menggunakan metode *Forward Difference* akan diperoleh :

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h) \quad (34)$$

Turunan kedua untuk fungsi $f(x)$ adalah ;

$$f''(x) = \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} + O(h) \quad (35)$$

Selain menggunakan metoda *Forward Difference*, juga dapat dihitung menggunakan central difference. Metode ini memanfaatkan polynomial Taylor untuk mengevaluasi f'' dan f' pada $f(x+h)$ dan $f(x-h)$ seperti berikut ini:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) \quad (36)$$

dan

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) \quad (37)$$

Jika persamaan (36) dan (37) ini dijumlahkan kemudian mengeliminasi turunan kedua $f'(x)$. Dari sini $f'(x)$ dapat ditentukan persamaan sebagai berikut :

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (38)$$

Dengan cara yang sama $f''(x)$ dapat dicari sebagai berikut :

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (39)$$

Persamaan KdV secara komputasi dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *Finite Difference* dengan menghasilkan solusi persamaan differensial untuk masing-masing konstanta. Metode *Finite Difference* terbagi dua yaitu *Explicit Method* dan *Implicit Method*. *Explicit Method* terdiri dari *The Forward Time Central Space (FTCS)*, *The Richardson method* dan *The DuFort-Frankel method*. *Implicit Method* terdiri dari *The Laasonen Method*, *The Crank-Nicolson Method* dan *Beta Formulation Method* (Hoffman, 2000).

Penelitian ini menggunakan *Implicit Method* yaitu *the Laasonen method*. Ciri khas dari metode ini adalah penggunaan diferensial beda depan pada waktu (time) dan beda tengah pada ruang (space). Metode ini tidak memiliki syarat kestabilan atau stabil tidak bersyarat (*unconditional stabil*). Selain kestabilan, syarat lain yang harus dimiliki oleh persamaan adalah konsisten dan konvergensi.

Pembuktian konsistensi persamaan yang telah didiskritisasi adalah menggunakan deret Taylor. Sedangkan konvergensi dilihat dengan cara membandingkan solusi persamaan yang didapat secara analitik dan pendekatan numerik menggunakan metode tertentu.

Pemodelan gelombang soliter internal atmosfer ini membutuhkan *boundary condition* (kondisi awal) dalam pembuatan programnya. Adapun *boundary condition* yang digunakan adalah

$$u = f(x) \text{ saat } t = 0 \text{ dengan } -\infty < x < \infty,$$

Diman $f(x)$ akan berfungsi saat nilai x mendekati ∞ , dalam hal ini x bernilai positif (gelombang berjalan di sumbu positif) dengan

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^N |\lambda_n| \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{a|\lambda_n|}{6a}} \left(x - \frac{2}{3} b |\lambda_n| t + C_n \right) \right], \quad \text{nilai } \lambda_n \text{ hanya}$$

digunakan untuk persamaan Schrodinger. Persamaan $u(x, t)$ untuk gelombang soliter internal atmosfer menjadi $u(x, t) = 2 \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{a}{6a}} x - \frac{2}{3} b t + c_n \right]$, dengan nilai $n = 1$ dan $c_n = 0$.

Secara fisis syarat batas (*boundary condition*) saat $t = 0$ dengan $-\infty < x < \infty$ dimana $u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^N |\lambda_n| \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{a|\lambda_n|}{6a}} \left(x - \frac{2}{3} b |\lambda_n| t + C_n \right) \right]$ menyatakan bahwa gelombang soliter internal dapat menjalar sepanjang jarak yang tak terbatas di atmosfer tergantung seberapa lama gelombang tersebut

muncul di atmosfer sehingga bentuk gelombang tersebut seperti gelombang $sech^2$.

Persamaan KdV (persamaan 13) untuk gelombang soliter internal atmosfer yang telah didapatkan dapat diselesaikan dengan metode *Finite Difference*. Persamaan (13) yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + Cu \frac{\partial u}{\partial x} + c_0 \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (40)$$

Persamaan (40) diubah bentuknya menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial u}{\partial x} - Cu \frac{\partial u}{\partial x} - c_0 \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (41)$$

Untuk memudahkan pembuatan pola *Finite Difference* persamaan di atas maka dikelompokkan berdasarkan variable yang sama, sehingga persamaan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-c_0 - Cu) \frac{\partial u}{\partial x} + (-c_0 \beta) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (42)$$

Pendiskritisasian persamaan dapat dilakukan dengan pendekatan sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{(\Delta t)} \quad (43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2(\Delta x)} \quad (44)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} - 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}}{2(\Delta x)^3} \quad (45)$$

dimana Δt dan Δx merupakan lebar selang diskritasi waktu dan space. Sedangkan untuk variable yang ada pada persamaan di atas dinyatakan sebagai n , $x = i$ dan, $u(x, t) = u_i^n$ untuk i, n berupa bilangan bulat.

Persamaan (42) diubah bentuknya dengan pemisalan bahwa $(-c_0 - Cu) = a$ dan $(-c_0\beta) = b$ agar memudahkan dalam perhitungan. Sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (46)$$

Persamaan (43), (44) dan (45) disubsitusikan ke dalam persamaan (46) untuk menggantikan suku-suku pada persamaan (46) agar didapatkan persamaan *Finite difference*.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{(\Delta t)} = a \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2(\Delta x)} \right) + b \left(\frac{u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}}{2(\Delta x)^3} \right) \quad (47)$$

Persamaan (47) akan dilakukan pengujian konsistensi peramaan menggunakan deret Taylor sebagai berikut :

a. $\frac{1}{2(\Delta t)} (u_i^{n+1} - u_i^n)$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t} (\Delta t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + O(\Delta t)^3 \quad (48)$$

b. $\frac{a}{2(\Delta x)} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})$

$$u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t} (\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (\Delta x \Delta t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + O(\Delta t^3, \Delta x^3) \quad (50)$$

$$u_{i-1}^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t} (\Delta t) - \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (\Delta x \Delta t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - O(\Delta t^3, \Delta x^3) \quad (51)$$

c. $\frac{b}{2(\Delta x)^3} (u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1})$

$$\begin{aligned}
u_{i+2}^{n+1} = & u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t}(\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial x}(2\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(\Delta t 2\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(2\Delta x)^2}{2!} + \\
& \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^3}{3!} + \frac{3}{3!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta t)^2 (2\Delta x) + \frac{3}{3!} (\Delta t) (2\Delta x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(2\Delta x)^3}{3!} + \\
& \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \frac{(\Delta t)^4}{4!} + \frac{4}{4!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta t)^3 (2\Delta x) + \frac{6}{4!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta t)^2 (2\Delta x)^2 + \\
& \frac{4}{4!} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta t) (2\Delta x)^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (2\Delta x)^4 + O(\Delta t 2\Delta x)^5
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
u_{i-2}^{n+1} = & u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t}(\Delta t) - \frac{\partial u}{\partial x}(2\Delta x) - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(\Delta t 2\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(2\Delta x)^2}{2!} + \\
& \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^3}{3!} - \frac{3}{3!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta t)^2 (2\Delta x) - \frac{3}{3!} (\Delta t) (2\Delta x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\
& \frac{(2\Delta x)^3}{3!} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \frac{(\Delta t)^4}{4!} + \frac{4}{4!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta t)^3 (2\Delta x) + \frac{6}{4!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta t)^2 (2\Delta x)^2 + \\
& \frac{4}{4!} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta t) (2\Delta x)^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (2\Delta x)^4 - O(\Delta t 2\Delta x)^5
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
u_{i+1}^{n+1} = & u_i^n + \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(\Delta t(\Delta x)) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \\
& + O(\Delta x)^3
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
u_{i-1}^{n+1} = & u_i^n + \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x) - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(\Delta t(\Delta x)) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \\
& O(\Delta x)^3
\end{aligned} \tag{55}$$

Persamaan (55) diubah bentuknya menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\Delta t)} (u_i^{n+1} - u_i^n) = & \frac{a}{2(\Delta x)} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + \frac{b}{2(\Delta x)^3} (u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + \\
& 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1})
\end{aligned} \tag{56}$$

Substitusi persamaan (48), (50), (51), (52), (53), (54) dan (55) ke dalam persamaan (56) sehingga dihasilkan persamaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\Delta t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta t)^2 + O(\Delta t)^3 \right) &= \frac{a}{2(\Delta x)} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \Delta t \Delta x + \right. \\ O(\Delta t^3 \Delta x^3) &+ \left. \left(\frac{4b}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{b}{\Delta x^2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2b}{\Delta x} \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4b(\Delta t^5) + b.O(\Delta t^5 \Delta x^2) \right) \right) \end{aligned} \quad (57)$$

Persamaan (57) disederhanakan bentuknya dengan cara membagi konstanta yang sama pada ruas kiri dan ruas kanan sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2} + O(\Delta t)^2 \right) &= a \frac{\partial u}{\partial x} + \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \Delta t + a.O(\Delta t^3 \Delta x^2) \right) + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \\ \left(\frac{b}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{b}{\Delta x^2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2b}{\Delta x} \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4b(\Delta t^5) + b.O(\Delta t^5 \Delta x^2) \right) \end{aligned} \quad (58)$$

Persamaan (58) sama dengan persamaan (46) dengan menjadikan suku kedua masing- masing persamaan sebagai error persamaan tersebut. Hal ini membuktikan bahwa persamaan tersebut konsisten.

Persamaan (47) diubah bentuknya dengan mengali silang konstanta $(2\Delta t)$ ke ruas kanan sehingga dihasilkan persamaan

$$\begin{aligned} (u_i^{n+1} - u_i^n) &= \frac{a(\Delta t)}{2(\Delta x)} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + \frac{b(\Delta t)}{2(\Delta x)^3} (u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + \\ 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}) \end{aligned} \quad (59)$$

Dengan memisalkan $\frac{a(\Delta t)}{2(\Delta x)} = c$ dan $\frac{b(\Delta t)}{2(\Delta x)^3} = d$ maka persamaan (59) akan menjadi

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) = c (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + d(u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}) \quad (60)$$

Persamaan (60) diubah bentuknya sesuai dengan persamaan yang akan digunakan dalam program pemodelan yaitu

$$u_i^n = d(u_{i-2}^{n+1}) - (c - 2d)(u_{i-1}^{n+1}) + u_i^{n+1} - (2d - c)(u_{i+1}^{n+1}) + d(u_{i+2}^{n+1}) \quad (61)$$

Pembuatan program menggunakan persamaan (61) membutuhkan penyelesaian menggunakan matrik pentadiagonal. Persamaan 61 sama bentuknya dengan persamaan yang solusinya diselesaikan menggunakan matrik pendiagonal yaitu (Graham de Vahl Davis,1986):

$$f_i = a_i x_{i-2} + b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} + e_i x_{i+2}$$

BAB V PENUTUP

A. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisa numerik dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya menghasilkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk pemodelan gelombang soliter internal di atmosfer menggunakan pendekatan *Finite Difference* metode *Laasonen* adalah berupa grafik yang menunjukkan hubungan antara amplitudo dengan kecepatan.
2. Kecepatan gelombang (c) berbanding lurus dengan amplitudo gelombang (a).
3. Kecepatan gelombang berkurang seiring mengecilnya nilai rapat massa (ρ) dan ketinggian gelombang (h) saat amplitudo gelombang (a) tetap.

B. SARAN

Dari kesimpulan yang penulis dapatkan, penulis menyarankan untuk lebih lanjut :

1. Menggunakan pendekatan *Finite Difference* dengan metode lain yang cocok untuk membandingkan hasil dan menggunakan orde yang lebih tinggi untuk memperoleh kesalahan yang lebih kecil dan mengurangi gangguan pada bentuk gelombang.
2. Memodelkan persamaan soliter internal atmosfer dengan menggunakan data yang lebih akurat sesuai dengan alat ukur di lapangan.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad Ridwan, Ginanjar Azie, Jusak S. Kosasih. 2007. *Studi Teoritik Gelombang Permukaan Air dan Soliton pada Air Dangkal*. Bandung : ITB.
- Caillol, P. 2005. *Nonlinear Internal Waves In The Upper Atmosphere*. Loughborough: Loughborough University.
- Christer, D. R, K. J. Mutrhead. 1977. *On Solitary Waves In The Atmosphere*. Cambera : The National University.
- Giancoli, Douglas C. 2001. *Fisika Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga
- Hoffman, Klaus A dan Chiang, Steve T. 2000. *Computation Fluid Dynamics Volume 1 Fourth Edition*. USA : A Publication of Engineering Education System.
- James R. Holton. 1992. *An Introduction to Dynamics Meteorology*. Washington : University of Washington.
- Koop, C. Gary, Gerald Butler. 1980. *An Investigation Of Internal Solitary Waves In Two- Fluid System*. California: Fluid Machanics Department.
- L.H Wiranto, , Warsoma Djohan. 2006. *Metoda Beda Hingga Pada Persamaan KdV Gelombang Interface*. Bandung: FMIPA ITB, *Jurnal Matematika* Vol. 9
- Mehta, Adarsh P. 1999. *Excitation Of Internal Waves In A Three-Layer Fluid*. Kanada : National Library Of Kanada.
- Miftahul Hadi. 2005. *Berkenalan dengan Soliton*. www.fisikanet.lipi.go.id. (diakses tanggal 10 September Januari 2013)
- Nakamura. S. 1993. *Applied Numerical Methods in C*. Tokyo : Prentice-Hall of Japan, Inc.
- Nursaleh. 2009. *Formulasi Asimtotik Untuk Menjelaskan Proses Fisi Gelombang Soliter Internal*. Bogor: IPB.
- Ramaza, Michele. 2008. *Numerical Model And Sensitivity Analysis*. Bologna : Universita Di Bologna.
- Rottman, James W, Roger Grimshaw. *Atmospheric Internal Solitary Wave*. 2001. San Diego : University Of California.

- Tsai, Victor C, Hiroo Kanamori, and Juliette Artru. 2004. *The Morning Glory Wave Of Southern California*. California : California Institute of Technology.
- Utami Adityaningsih, 2006. *Gelombang Soliter Internal Pada Lapisan Atmosfer Ang Memiliki Perubahan Kecepatan Angin Yang Cepat*. Bogor : IPB.
- Zarate, Ailin Ruiz De Zarate and Andre Nachibin. *A Reduced Model for Internal Waves Interacting with Topography at Intermediate Depth*. 2007. Brazil : Instituto De Matematica Pura E Aplicada.