PERHITUNGAN TINGKAT ENERGI PADA SUMUR POTENSIAL KEADAAN TERIKAT MELALUI PERSAMAAN SCHRODINGER MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh

HANIFAH RAHMAYANI
NIM. 12795/2009

PROGRAM STUDI FISIKA
JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2013

PENGESAHAN

Dinyatakan Lulus Setelah Dipertahankan di Depan Tim Penguji Skripsi
Program Studi Fisika Jurusan Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Judul	**: Perhitungan Tingkat Energi Pada Sumur Potensial Keadaan Terikat Melalui Persamaan Schrodinger Menggunakan Metode Beda Hingga**
Nama	: Hanifah Rahmayani
NIM	: 12795
Program Studi	: Fisika
Jurusan	: Fisika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu PengetahuanAlam

Padang, 15 Agustus 2013

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
1. Ketua	: Dra. Hidayati, M.Si	1.
2. Sekretaris	: Pakhrur Razi,S.Pd, M.Si	2.
3. Anggota	: Drs. Mahrizal, M.Si	3.
4. Anggota	: Drs. H. Masril, MS	4.
5. Anggota	: Syafriani, Ph.D	5.

ABSTRAK

Hanifah Rahmayani : **Perhitungan Tingkat Energi pada Potensial Sumur Keadaan Terikat Melalui Persamaan schrodinger Menggunakan Metode Beda Hingga**

Perkembangan teknologi pada ilmu fisika mengantarkan kita dari pemikiran mekanika klasik ke mekanika kuantum. Mekanika kuantum mempunyai persamaan pokok yaitu Persamaan Schrodinger banyak digunakan dalam menyelesaikan berbagai permasalahan, salah satunya partikel dalam kotak. Keadaan partikel dalam kotak adalah keadaan yang diskrit, sehingga perlu dikaji apakah partikel tersebut terdegenerasi atau tidak. Melalui analisis persamaan Schrodinger akan dilihat bentuk pemodelan tingkat energi dan fungsi gelombang dari partikel dalam kotak.

Penelitian yang dilakukan adalah jenis penelitian deskriptif menggunakan pendekatan numerik. Pendekatan numerik yang digunakan adalah metode beda hingga yaitu suatu metode numerik yang digunakan untuk mendapatkan harga turunan suatu fungsi setiap titik pada domain solusi. Selanjutnya dengan metode ini dirancang program dengan menggunakan *Software* MATLAB R2010 melalui persamaaan Schrodinger partikel dalam kotak.

Berdasarkan solusi yang dihasilkan dapat dianalisis tingkat energi dan fungsi gelombang pada partikel dalam kotak khususnya potensial sumur berhingga. Hasil perhitungan numerik diperoleh nilai k, dari solusi persamaan positif diperoleh nilai k_1 dan k_3, sedangkan dari solusi persamaan negatif diperoleh nilai k_2 dan k_4. Penyelesaian nilai k digunakan untuk menentukan tingkatan energi pada potensial sumur. Tingkat energi menunjukkan pemodelan fungsi gelombang. Pada model Potensial Sumur Berhingga, jika diberikan variasi energi potensial V_0 besar, maka diperoleh tingkat energi dan fungsi gelombang kecil, begitu juga sebaliknya jika diberikan variasi energi potensial V_0 kecil maka diperoleh tingkat energi dan fungsi gelombang besar. Jika diberikan variasi lebar sumur kecil diperoleh tingkat energi dan fungsi gelombang kecil dan jika lebar sumur besar tidak terlihat tingkat energi dan fungsi gelombangnya. Bentuk pemodelan tingkat energi dan fungsi gelombang dari partikel dalam kotak diperoleh hasil yang sama sesuai dengan teori.

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah penulis ucapkan kehadirat Allah SWT karena dengan berkat dan rahmatnya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul **“Perhitungan Tingkat Energi pada Potensial Sumur Keadaan Terikat Melalui Persamaan Schrodinger Menggunakan Metode Beda Hingga”**.

Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan program Strata Satu di Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Unversitas Negeri Padang. Selama mengerjakan tugas akhir ini, penulis banyak mengalami kendala dan hambatan. Namun, berkat bantuan dari berbagai pihak akhirnya penulis dapat menyelesaikannya. Untuk itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan penulis kepada:

1. Ibu Dra. Hidayati, M. Si sebagai pembimbing I dan ketua Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.
2. Bapak Pakhrur Razi, S. Pd, M. Si sebagai pembimbing II dan penasehat akademis.
3. Bapak Drs. Mahrizal, M. Si, Bapak Drs. H. Masril, MS dan Ibuk Syafriani, Ph.D selaku tim penguji.
4. Bapak Drs. Akmam, M.Si selaku ketua Jurusan Fisika Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.

5. Bapak/Ibu staf pengajar Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.
6. Staf administrasi dan laboran di Laboratorium Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang.
7. Kedua Orang Tua, keluarga besar, atas doa dan dorongan yang telah diberikan kepada penulis.
8. Rekan-rekan seperjuangan mahasiswa Fisika FMIPA UNP, khususnya 'Fisika 2009' atas motivasi dan kritikan dalam penyusunan tugas akhir ini.
9. Semua pihak yang turut membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga semua bantuan, bimbingan dan arahan yang telah diberikan kepada penulis dapat menjadi amal ibadah dan mendapat balasan dari Allah SWT, amin.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna yang disebabkan oleh keterbatasan pengetahuan dan kemampuan dari penulis. Untuk itu, kritik dan saran sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan bagi penulis sendiri.

Padang , September 2013

HANIFAH RAHMAYANI
12795/2009

DAFTAR ISI

Halaman

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

BAB V PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Fisika merupakan salah satu ilmu sains yang memberikan kontribusi besar terhadap kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Berbagai fenomena alam menarik dapat dijelaskan dengan ilmu Fisika. Begitu pula berbagai hasil teknologi dari yang sederhana hingga modern, sebagian besar merupakan aplikasi dari ilmu Fisika. Ilmu Fisika terbagi atas beberapa kelompok disiplin ilmu, salah satunya Fisika Teori dan Komputasi yang membahas mengenai bentuk kajian teoritis numerik dan pemodelan suatu persamaan.

Pemodelan suatu persamaan differensial dapat dilakukan salah satunya dengan menggunakan metode numerik. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara hitungan. Berbagai permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan khususnya Fisika dapat digambarkan dalam bentuk permasalahan matematika. Apabila persamaan tersebut mempunyai bentuk yang sederhana maka dapat diselesaikan secara analisis. Namun ada beberapa persoalan Fisika yang cukup rumit dan menghabiskan waktu yang banyak untuk menyelesaikannya. Misalnya masalah Fisika yang melibatkan banyak variabel dan parameter serta hubungannya saling ketergantungan antara variabel satu dengan yang lainnya sehingga metode analisis akan memakan waktu yang lama dalam penerapannya. Untuk itu perlu disederhanakan penyelesaiannya dengan menggunakan metode numerik.

Metode numerik mempunyai banyak aplikasi dalam penyelesaian masalah Fisika, misalnya dalam mekanika. Mekanika terdiri dari dua cabang utama yaitu mekanika klasik dan mekanika kuantum, perbedaan pokok antara mekanika klasik dan mekanika kuantum terletak pada cara menggambarkannya. Mekanika klasik, cara menggambarkan keadaan partikel telah ditentukan oleh kedudukan awal, momentum awal serta gaya-gaya yang bereaksi pada partikel tersebut. Apabila keadaan awal diketahui maka keadaan akhir pada waktu tertentu dapat diketahui dengan pasti. Persamaan pokok dalam mekanika klasik adalah Hukum Newton. Sedangkan mekanika kuantum, keadaan suatu partikel tidak dapat ditentukan dengan pasti. Persamaan pokok dalam mekanika kuantum yaitu Persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger dapat menggambarkan keadaan partikel yang tidak bisa dijelaskan pada mekanika klasik.

Persamaan Schrodinger dapat menyelesaikan berbagai permasalahan mikro, salah satunya adalah prilaku partikel dalam kotak. Partikel dalam kotak merupakan sebuah partikel yang bergerak tanpa dipengaruhi oleh energi potensial luar dan dibatasi oleh dinding penghalang yang terpisah sejauh L. Energi potensial pada dinding adalah berhingga sehingga partikel yang datang ke kotak dapat dihitung fungsi gelombangnya. Fungsi gelombang pada partikel dalam kotak ditentukan oleh besarnya energi partikel yang datang dan besar energi potensial kotak. Perhitungan fungsi gelombang dan tingkat energi partikel dalam kotak sulit diperoleh secara analitik melalui perhitungan matematika yang panjang dan analisis grafik. Untuk itu perlu dibuat pemodelan fungsi gelombang dalam kotak dengan melihat fungsi gelombangnya dan tingkat energi.

Solusi persamaan Schrodinger untuk partikel dalam kotak ini dapat diselesaikan menggunakan metode numerik. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan adalah metode beda hingga. Metode beda hingga lebih mudah digunakan dari segi pemograman dengan komputer dan konsep pemograman dengan metode beda hingga juga tidak sulit dipahami. Perancangan program simulasi yang sesuai dengan kerangka teorinya akan lebih dimengerti gejala apa saja yang terdapat pada partikel dalam kotak. Berdasarkan masalah ini, diterapkan metode beda hingga untuk menyelesaikan Persamaan Schrodinger Bebas Waktu (PSBW) yaitu pada partikel dalam kotak.

Berdasarkan latar belakang ini, penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul**" Perhitungan Tingkat Energi pada Potensial Sumur Keadaan Terikat Melalui Persamaan Schrodinger Menggunakan Metode Beda Hingga".**

B. Perumusan Masalah

Perumusan masalah dalam penelitian ini berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan adalah: "Apakah program yang dibuat telah sesuai dengan teori dalam perhitungan tingkat energi dan fungsi gelombang pada potensial sumur?".

C. Batasan Masalah

Batasan masalah yang diuraikan berdasarkan perumusan masalah yang telah dikemukakan adalah:

a. Fungsi gelombang pada partikel dalam kotak pada potensial sumur yang dilihat berdasarkan Persamaan Schrodinger Bebas Waktu.
b. Tingkat energi pada potensial sumur berdasarkan Persamaan Schrodinger Bebas Waktu.
c. Analisis tingkat energi dan fungsi gelombang ketika energi potensial dan lebar sumur divariasikan menggunakan metode beda hingga.

D. Pertanyaan Penelitian

Pertanyaan penelitian yang dibahas dalam permasalahan penelitian yaitu: "Apakah program yang dibuat memberikan hasil yang sama dengan teori untuk potensial sumur menggunakan metode beda hingga?".

E. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan perumusan masalah dalam penelitian ini, dapat dijelaskan bahwa penelitian ini bertujuan untuk:

a. Memperlihatkan bentuk pemodelan tingkat energi dan fungsi gelombang dalam kotak pada potensial sumur dengan metode beda hingga.
b. Menganalisis pengaruh variasi energi potensial (V_0) dan lebar sumur (L) dalam sumur potensial keadaan terikat untuk tingkat energi dan fungsi gelombang.

F. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut:

a. Peneliti sendiri, untuk mengaplikasikan ilmu yang didalami di perkuliahan dan merealisasikannya dalam bentuk informasi bagi masyarakat.
b. Peneliti lainnya, sebagai referensi dan acuan bagi penelitian lanjutan.

BAB II
KAJIAN TEORI

A. Gelombang Materi

Keseluruhan entitas fisis di alam semesta ini dapat dikelompokkan kedalam dua golongan besar, yaitu partikel dan gelombang. Kedua entitas itu dapat dikenali secara mudah berdasarkan kehadirannya, yaitu partikel besifat terlokasir sedangkan gelombang bersifat menyebar. Sebelum efek fotolistrik berhasil dirumuskan, orang berkeyakinan suatu entitas dikenal sebagai gelombang, selamanya dikenal sebagai gelombang. Sebaliknya, sekali entitas dikenal sebagai partikel, selamanya dikenal sebagai partikel.

Sifat gelombang sebagai partikel ditunjukkan oleh suatu radiasi yang dikemukakan oleh Max Planck. Max Planck mencoba menerangkan radiasi karakteristik yang dipancarkan oleh benda mampat. Radiasi yang dipancarkan oleh setiap benda terjadi secara tidak kontinu dipancarkan dalam satuan kecil yang disebut kuanta (energi kuantum). Planck berpendapat bahwa kuanta yang berbanding lurus dengan frekuensi tertentu dari cahaya yang berbanding lurus dengan energi, maka:

$$E = hv = h\frac{\omega}{2\pi} \qquad (1)$$

dan

$$p = \frac{h}{\lambda} = h\frac{k}{2\pi} = \hbar k \qquad (2)$$

E adalah energi kuantum, h adalah tetapan Planck, v adalah frekuensi dengan $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Planck menganggap bahwa energi elektromagnetik yang diradiasikan oelh benda timbul secara terputus-putus meskipun penjalarannya melalui ruang merupakan gelombang elektromagnetik yang kontinu. Gagasan Plank kemudian berkembang menjadi teori baru yang disebut teori kuantum. (Krane,1992)

Einsten mengusulkan bukan cahaya yang dipancarkan tetapi juga menjalar menurut kuanta individual. Hipotesis ini menerangkan efek fotolistrik, yaitu partikel yang terpancar bila frekuensi cahaya cukup tinggi terjadi dalam daerah cahaya tampak dan ultraungu. Hipotesis dari Max Planck dan Einstein menghasilkan rumus empiris tentang efek fotolistrik yaitu:

$$hv = K_{maks} + hV_0 \qquad (3)$$

hv adalah isi energi dari masing-masing kuantum cahaya datang, K_{maks} merupakan energi fotoelektron maksimum dan hV_0 adalah energi yang diperlukan untuk melepaskan sebuah partikel dari permukaaan logam yang disinari. Pemancaran partikel dari permukaan logam karena logam tersebut disinari cahaya disebut dengan teori efek fotolistrik. Dalam kondisi tertentu cahaya menunjukkan sifat sebagai gelombang dan dalam kondisi lain menunjukkan sifat sebagai partikel sehingga disebut dualisme cahaya. (Beiser,1999)

Tahun 1924, Louis dr Broglie, seorang fillsof Perancis, mengajukan hipotesis bahwa “watak ganda yang dimiliki cahaya (gelombang elektromagnetik) juga dimiliki oleh partikel material”. Artinya, partikel material juga dapat menunjukkan watak gelombang sebagaimana ditunjukkan oleh foton. Menurut de Broglie, terhadap setiap partikel yang bernilai E dan bergerak dengan momentum linier p terdapat gelombang yang diasosiasikan dengannya. Gelombang yang diasosiasikan dengan gerak partikel tersebut disebut gelombang materi atau gelombang de Broglie.

Cabang fisika yang menelaah cara mendapatkan fungsi gelombang untuk partikel material dikenal dengan mekanika gelombang atau mekanika kuantum. Edwin Schrodinger (1962) dan Werner Heisberg (1925) secara terpisah berhasil merumuskan cara mendapatkan fungsi gelombang tersebut yang selanjutnya dikenal dengan pelopor mekanika kuantum.

Partikel bebas adalah partikel yang tidak dipengaruhi oleh gaya apapun, sehingga momentum linier dan energinya konstan, tidak bergantung waktu dan tempat. Sehingga, gelombang de Broglie harus memiliki frekuensi dan vektor gelombang konstan dimana-mana. (Sutopo,2003)

Hipotesis de Broglie mengatakan, gelombang materi semestinya berbentuk gelombang monokromatis dengan panjang gelombang $\lambda = h/p$ dan dan frekuensi $v = E/h$. Dapat disimpulkan bahwa gelombang materi tidak mungkin berupa gelombang monokromatis karena gelombang monokromatis menyebar ke seluruh ruangan sedangkan gelombang materi harus dapat mendeskripsikan partikel. Sehingga gelombang materi tersebut harus berupa grup gelombang. (Beiser,1999)

B. Fungsi Gelombang

Fungsi gelombang partikel yang tidak bergantung waktu disimbolkan dengan $\varphi(x)$. $|\varphi(x)|^2$ merupakan rapat peluang partikel berada di x. φ adalah fungsi gelombang dengan pengertian bahwa:

$$\varphi^{*}\varphi dxdydz = PdV \quad (4)$$

P adalah probabilitas keberadaan partikel dalam volume dx dy dz disekitar titik (x,y,z); φ^{*} adalah konjugat dari φ. Probabilitas suatu gelombang memberikan arti bahwa partikel akan ditemukan di sekitar posisi tertentu. Kita juga tidak dapat mengatakan secara pasti bagaimana partikel bergerak sebagai fungsi waktu karena posisi dan momentum partikel dibatasi oleh prinsip ketakpastian Heisenberg. (Beiser,1999)

Fungsi gelombang bagi gelombang materi tidak memiliki arti fisis secara langsung. Artinya, tidak ada besaran fisis yang mengikuti cara fungsi gelombang itu. Oleh karena itu perlu cara tertentu untuk menafsirkan fungsi gelombang secara fisik. Berdasarkan fungsi gelombang tersebut kita dapat mengetahui keberadaan (posisi) partikel dan besarnya momentum yang dimilikinya secara probabilistik.

C. Probabilitas dan Normalisasi

Fungsi gelombang $\varphi(x)$ menyatakan suatu gelombang yang memiliki panjang gelombang dan bergerak dengan kecepatan fase yang jelas. Ketika menafsirkan amplitudonya muncul masalah, nilai mutlaknya menghasilkan probabilitas untuk menemukan partikelnya pada suatu titik tertentu. Dimana

$|\varphi(x)|^2 dx$ memberikan probabilitas untuk menemukan partikel dalam selang dx di x. Rapat probabilitas P(x) terhadap $\varphi(x)$ dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut:

$$P(x)dx = |\varphi(x)|^2\, dx \tag{6}$$

Tafsiran $|\varphi(x)|^2$ ini membantu memahami persyaratan kontinu $\varphi(x)$, walaupun amplitudonya berubah secara tidak jelas dan kontinu. Probabilitas untuk menemukan partikel antara x_1 dan x_2 adalah jumlah semua probabilitas P(x) dx dalam selang antara x_1 dan x_2 adalah sebagai berikut:

$$\int_{x1}^{x2} P(x)dx = \int_{x1}^{x2} |\varphi(x)|^2 dx \tag{7}$$

Total probabilitas untuk menemukan partikel di titik sepanjang sumbu x adalah: (Sutopo,1999)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1 \tag{8}$$

Setiap pemecahan persamaan Schrodinger yang menghasilkan $|\varphi(x)|^2$ bernilai tak hingga tidak digunakan. Hal ini dikarenakan tidak pernah terdapat probabilitas tak hingga untuk menemukan partikel pada titik manapun. Sehingga pemecahannya dengan mengembalikan faktor pengalinya sama dengan nol. Sebagai contoh, jika pemecahan matematika bagi persamaan differensial menghasilkan $\varphi(x) = Ae^{kx} + B\epsilon^{-kx}$ bagi seluruh daerah x > 0, maka syaratnya A = 0 agar pemecahannya mempunyai makna fisika. Jika tidak $\varphi(x)$ akan menjadi tak hingga untuk x menuju tak hingga (tetapi jika pemecahannya dibatasi dalam selang 0 < x < L, maka A tidak boleh sama dengan nol). Tetapi jika pemecahannya berlaku pada seluruh daerah negatif sumbu x < 0 , maka B = 0.

Kedudukan suatu partikel tidak dapat dipastikan, dalam hal ini tidak dapat menjamin kepastian hasil satu kali pengukuran suatu besaran fisika yang bergantung pada kedudukannya. Namun jika menghitung probabilitas yang berkaitan dengan setiap koordinat, maka ditemukan hasil yang mungkin dari pengukuran satu kali atau rata-rata hasil dari sejumlah besar pengukuran berkali-kali. (Eisberg,1970)

D. Persamaan Schrodinger

Persamaan Schrodinger diperlukan untuk menemukan fungsi gelombang bagi suatu sistem mikroskopis. Bentuk paling umum suatu persamaan yang penyelesaiannya berupa suatu fungsi adalah persamaan differensial. Berdasarkan azas tentang pendeskripsian keadaan sistem, yaitu keadaan sistem dideskripsikan sebagai fungsi gelombang $\Psi(x,t)$, kita dapatkan petunjuk bahwa fungsi gelombang $\Psi(x,t)$ yang dihasilkan oleh persamaan Schrodinger harus dapat kita gunakan untuk mengetahui nilai berbagai besaran fisik yang dimiliki sistem. (Sutopo,2003)

Besaran fisik dapat diketahui dengan cara melakukan pengukuran. Menurut azas tentang pengukuran, mengukur adalah mendeskripsikan keadaan sistem saat pengukuran dengan menjalankan operator (yang mewakili besaran fisik yang diukur) pada fungsi gelombang. Penerapannya seperti pengukuran energi total pada sistem konservatif.

Untuk sistem konservatif, berlaku hukum kekekalan energi, yaitu jumlah energi potensial dan energi kinetik bersifat konstan sehingga tidak bergantung pada waktu maupun posisi. Hukum kekekalan energi sebelumnya dijelaskan oleh fisika klasik. Persamaan Schrodinger sebagai teori baru harus konsisten dengan hukum kekekalan energi. Hukum kekekalan energi dapat ditentukan melalui rumusan:

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E \qquad (21)$$

Suku pertama ruas kiri menyatakan energi kinetik, suku kedua menyatakan energi potensial, dan ruas kanan menyatakan suatu tetapan yang disebut dengan energi total.

Persamaan (21) diubah menjadi persamaan operator untuk mendapatkan rumusan kuantum bagi hukum kekekalan energi, sehingga diperoleh:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x) = \hat{E}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = \hat{E}\Psi(x,t) \qquad (22)$$

Kita harus menemukan cara kerja operator $\hat{E}$ karena cara kerja operator $\hat{E}$ terhadap fungsi $\Psi(x,t)$ belum diketahui, untuk itu digunakan asas pengukuran khususnya yang berhubungan dengan dampak pengukuran dengan keadaan sistem. Menurut asas pengukuran, jika fungsi gelombang merupakan fungsi eigen untuk besaran yang diukur maka fungsi gelombang tidak berubah terhadap pengukuran.

Tinjau fungsi gelombang berbentuk $\Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ yang memiliki frekuensi sudut sebesar ω. Berdasarkan kaitan Planck-Einstein $E = \hbar\omega$, maka fungsi gelombang tersebut harus memenuhi persamaan nilai eigen:

$$\hat{E}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i(kx-\omega t)}\right)$$

$$= \hbar\omega\left(e^{i(kx-\omega t)}\right) = \hbar\omega\Psi(x,t) \qquad (23)$$

Setelah mendapatkan cara kerja operator $\hat{E}$, maka persamaan (22) menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \tag{24}$$

Persamaan (24) merupakan persamaan differensial parsial yang menghasilkan fungsi gelombang $\Psi(x,t)$. Persamaan ini memiliki keterbatasan bahwa persamaan tersebut hanya berlaku untuk sistem yang energi potensialnya secara eksplisit tidak bergantung pada waktu t. Keterbatasan ini dapat dihilangkan dengan mempostulatkan bahwa persamaan tersebut juga berlaku untuk sistem yang energi potensialnya secara eksplisit bergantung pada waktu. Sehingga perubahan yang dilakukan cukup mengubah V(x) menjadi V(x,t), sehingga persamaannya menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \tag{25}$$

Persamaan (25) disebut dengan persamaan Schrodinger yang merupakan persamaan Schrodinger 1 dimensi. Sedangkan bentuk persamaan Schrodinger 3 dimensinya menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r,t) + V(r,t)\Psi(r,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(r,t)}{\partial t} \tag{26}$$

∇^2 merupakan bentuk operator Laplacean yang dalam sistem koordinat cartesian berbentuk $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. (Sutopo,2003)

E. Persamaan Schrodinger Bebas Waktu (PSBW)

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan differensial parsial. Persamaan differensial parsial dapat diubah menjadi sistem persamaan differensial biasa dengan cara teknik pemisahan variabel. Fungsi gelombang

$\Psi(x,t)$ dinyatakan dengan perkalian fungsi posisi, misalnya $\varphi(x)$ dengan fungsi waktu, misalnya F(t). Jadi:

$$\Psi(x,t) = \varphi(x)F(t). \quad (27)$$

Sehingga persamaan Schrodinger menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}F(t)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + V(x,t)F(t)\varphi(x) = i\hbar\varphi(x)\frac{dF(t)}{dt} \quad (28)$$

Kedua ruas dibagi dengan $\varphi(x)$F(t) diperoleh:

$$-\frac{\hbar^2}{2m\varphi(x)}\frac{1}{}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + V(x,t) = i\hbar\frac{1}{F(t)}\frac{dF(t)}{dt} \quad (29)$$

Persamaan (29) pada ruas kanan merupakan fungsi t, sedangkan ruas kiri merupakan fungsi x dan t. Satu-satunya suku yang memuat x dan t adalah $\Psi(x,t)$. Ini berarti bahwa pemisahan variabel hanya akan berhasil jika V hanya bergantung pada x saja, atau hanya bergantung pada t saja.

Jika V hanya bergantung pada x, maka persamaan (29) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + V(x) = i\hbar\frac{1}{F(t)}\frac{dF(t)}{dt} \quad (30)$$

Ruas kiri persamaan (30) merupakan fungsi x saja, sedangkan ruas kanannya merupakan fungsi t saja. Jadi persamaan tersebut menyatakan persamaan antara suatu fungsi yang bergantung pada x dengan fungsi lain yang hanya bergantung pada t. Kesamaan semacam itu hanya akan terpenuhi untuk semua x dan t jika masing-masing ruas berupa suatu tetapan, yaitu suatu bilangan yang tidak bergantung pada x maupun t.

Arti fisik dari tetapan tersebut dapat diartikan sebagai berikut. Suku kedua di ruas kiri adalah energi potensial dan suku-suku lainnya baik yang ada di ruas kiri ataupun di ruas kanan harus berdimensikan energi. Karena ruas kiri persamaan tersebut menyatakan jumlah energi kinetik ditambah energi potensial, maka tetapan yang digunakan nanti memiliki arti fisik energi total yang dilambangkan dengan E.

Persamaan (30) dapat dinyatakan sebagai differensial biasa dengan menggunakan tetapan E untuk masing-masing ruas, dimana untuk ruas kiri dapat ditulis:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}+V(x)=E \tag{31}$$

dan ruas kanan:

$$i\hbar\frac{1}{F(t)}\frac{dF(t)}{dt}=E \tag{32}$$

Persamaan (32) dapat diselesaikan sebagai:

$$F(t)=e^{-iEt/\hbar} \tag{33}$$

Berdasarkan persamaan (33) solusi persamaan Schrodinger persamaan (27) berbentuk:

$$\Psi(x,t)=\varphi(x)e^{-iEt/\hbar} \tag{34}$$

Sehingga persamaan (31) dapat diubah menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+V(x)\varphi(x)=E\varphi(x) \tag{35}$$

Persamaan tersebut identik dengan persamaan Schrodinger, perbedaanya adalah persamaan tersebut tidak bergantung pada t. Sehingga persamaan ini sering disebut persamaan Schrodinger Bebas Waktu (PSBW). PSBW hanya dapat digunakan jika potensial sistem secara eksplisit tidak bergantung pada waktu. Persamaan ini diperlukan untuk mendapatkan bagian ruang bagi fungsi gelombang lengkap pada keadaan stasioner. PSBW disebut juga persamaan nilai eigen bagi Hamilton suatu sistem, yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{36}$$

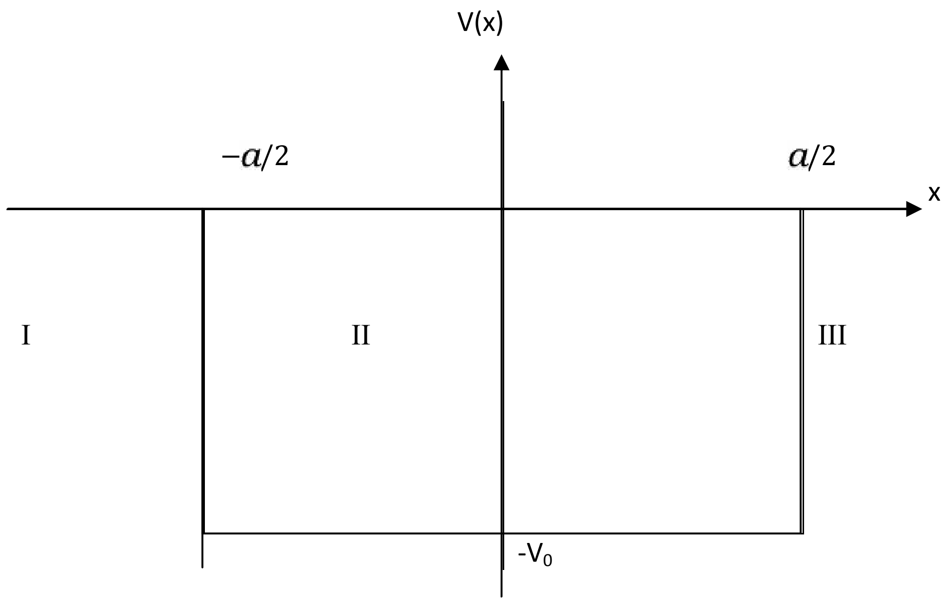
dengan $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx^2} + V(x)$. Dalam hal ini $\varphi(x)$ disebut fungsi eigen dan E disebut nilai eigen.

F. PSBW pada Partikel dalam Kotak

Partikel yang datang pada sebuah kotak potensial yang memiliki dimensi dengan panjangnya L. Potensial ini dapat dinyatakan:

$$V(x) = -V_0 \qquad -a/2 \leq x \leq a/2$$

$$V(x) = 0 \qquad \text{di x lainnya}$$



Gambar 1. Sumur Potensial yang Bersesuain dengan Sebuah Kotak yang Dindingnya Keras Berhingga. (Erkoc,2006)

Potensial pada Gambar 1. bernilai nol untuk daerah $x < -a/2$ dan $x > a/2$, dan bernilai $-V_0$ untuk daerah $-a/2 < x < a/2$. Berarti ada 2 kali perubahan potensial yang dinamakan sumur potensial. Pada sumur potensial partikel yang datang dari sebelah kiri yaitu $x < -a/2$ (daerah I) menuju $-a/2 < x < a/2$ (daerah II) dan keluar ke kanan $x > a/2$ (daerah III). Berdasarkan Gambar 1. keadaan terikat terjadi jika energi total partikel memenuhi ketaksamaan $0 > E > -V_0$. Jika energi partikel lebih dari nol, maka partikel dapat bergerak dari $-\infty$ sampai$+\infty$. Energi potensial V dari partikel berhingga di kedua sisi kotak, sedangkan V berubah di dalam kotak. Karena partikel memilki energi berhingga, partikel mungkin ditemukan di luar kotak.

PSBW partikel dalam kotak dapat ditulis sebagai berikut:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial^2 x} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{37}$$

PSBW pada daerah I dan daerah III dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} - \alpha^2\varphi(x) = 0 \quad \text{dengan} \quad \alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \tag{38}$$

dan PSBW untuk daerah II menjadi:

$$\frac{\partial^2\varphi_{II}(x)}{\partial x^2} + k^2\varphi_{II}(x) = 0 \quad \text{dengan} \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0) \tag{39}$$

sehingga:

$$E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} - V_0 \tag{40}$$

Penyelesaian umum persamaan (38) dan persamaan (39) yang memenuhi syarat sesuai PSBW adalah:

$$\varphi_I(x) = A_1 e^{\alpha x}, \qquad x = -a/2 \tag{41}$$

$$\varphi_{II}(x) = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}, \quad -\frac{a}{2} < x < a/2 \tag{42}$$

$$\varphi_{III}(x) = C_2 e^{-\alpha x}, \qquad x = a/2 \tag{43}$$

Selanjutnya dari syarat kontinuitas di $x = -a/2$ didapatkan hubungan :

$$A_1 e^{-\alpha a/2} = B_1 e^{-ika/2} + B_2 e^{ika/2} \quad (44.a)$$

$$A_1 e^{-\alpha a/2} = \frac{ik}{\alpha}(B_1 e^{-ika/2} - B_2 e^{ika/2}) \quad (44.b)$$

dan syarat kontinuitas di $x = a/2$ didapatkan hubungan:

$$B_1 e^{ika/2} + B_2 e^{-ika/2} = C_2 e^{-\alpha a/2} \quad (45.a)$$

$$-\frac{ik}{\alpha}(B_1 e^{ika/2} + B_2 e^{-ika/2}) = C_2 e^{-\alpha a/2} \quad (45.b)$$

Melalui persamaan (44.a) dan persamaan (44.b) didapatkan hubungan:

$$\left(1 - \frac{ik}{\alpha}\right) B_1 e^{-ika/2} + \left(1 + \frac{ik}{\alpha}\right) B_2 e^{ika/2} = 0 \quad (46)$$

Persamaan (45.a) dan persamaan (45.b) didapatkan hubungan:

$$\left(1 + \frac{ik}{\alpha}\right) B_1 e^{ika/2} + \left(1 - \frac{ik}{\alpha}\right) B_2 e^{-ika/2} = 0 \quad (47)$$

Selanjutnya eliminasi persamaan (46) dan persamaan (47) sehingga diperoleh hubungan:

$$e^{2ika} = \left(\frac{a-ik}{a+ik}\right)^2 \quad (48)$$

Persamaan (48) menunjukkan bahwa agar penyelesaian persamaan Schrodinger memenuhi syarat sebagai fungsi eigen (bernilai berhingga dan kontinu dimana-mana) maka tetapan α dan k harus memenuhi persamaan (48). Karena nilai kedua tetapan tersebut bergantung pada E maka persamaan (48) juga menunjukkan bahwa energi total partikel tidak boleh sembarangan. Persamaan (48) memiliki dua penyelesaian (akar) yaitu:

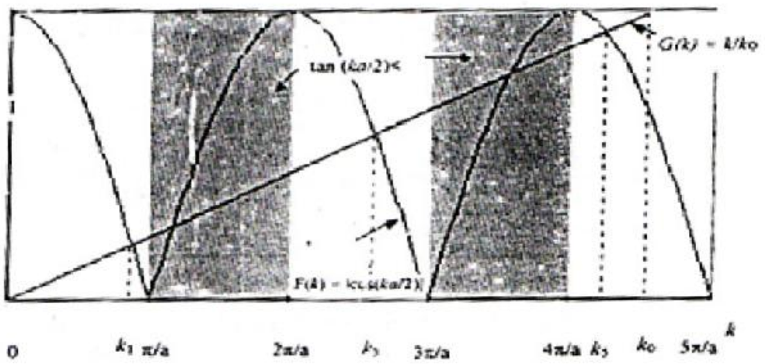
$$e^{ika} = \frac{a-ik}{a+ik} \qquad \text{dan} \qquad -e^{ika} = \frac{a-ik}{a+ik} \quad (49)$$

Persamaan (49) dapat diubah lagi dengan menggunakan identitas trigonometri, sehingga diperoleh bentuk:

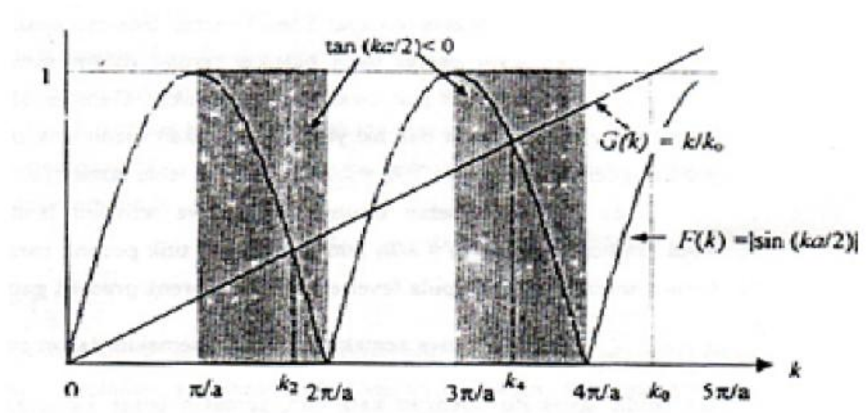
$$\frac{k}{k0} = \left|\cos\left(\frac{kc}{2}\right)\right| \tag{50}$$

$$\frac{k}{k0} = \left|\sin\left(\frac{kc}{2}\right)\right| \tag{51}$$

Persamaan (50) dan persamaan (51) tidak dapat diselesaikan secara analitik. Persamaan ini dapat diselesaikan secara grafik atau dengan program numerik berbantuan komputer. Melalui metoda grafik nilai k didapatkan berdasarkan plot grafik persamaan (50) dan persamaan (51) seperti Gambar 2.



(a)



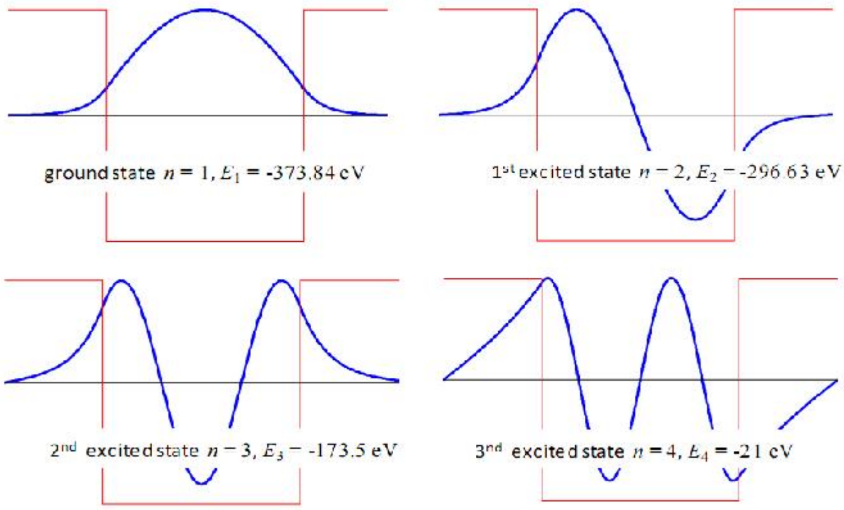
(b)

Gambar 2.Penyelesaian Secara Grafik untuk Mendapatkan Nilai k.

(Sutopo.2003)

Berdasarkan Gambar 2. dapat dilihat bahwa melalui metode grafik dapat diketahui beberapa nilai k. Pada Gambar 2.(a) diperoleh nilai k_1, k_3 dan k_5. Sedangkan pada Gambar 2.(b) diperoleh nilai k_2 dan k_4. Setelah dapat nilai k dapat ditentukan bentuk fungsi gelombang di dalam kotak dan juga nilai energinya. Dapat dilukiskan berbagai tingkat energi, fungsi gelombang dan rapat probabilitas $|\varphi|^2$ yang mungkin untuk beberapa keadaan. Keadaan energi terendah yaitu pada n=1, keadaan ini dikenal sebagai keadaan dasar. Keadaan dengan energi yang lebih tinggi (n>1) dikenal dengan keadaan eksitasi.

> Fungsi gelombang dan tingkat energi pada potensial sumur keadaan terikat dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Seperti yang telah dilakukan Ian Coper(2013:8) *"The m-script was used to find the total energies and its corresponding wavefunctions for a potential well of depth -400 eV and width 0.1 nm. The range for the x-coordinates was from -0.1 nm to +0.1 nm. The value of E was manually adjusted to find the physically acceptable solutions as shown in figure 3. For this potential well, there are four bound states. The total energy for the ground state, n=1 is E_1 = -373.84 eV. Thus, the binding energy of the electron or its ionization energy (energy need to free the electron from its bound state) is E_B= -373.84 eV".*



The four state an electron confined by a potential well of depth -400 eV and width 0.10 nm with x_{min}=-0.10 nm , x_{max}=+0.10 nm.
(Ian Coper.2013)

Hasil dari tampilan Ian Coper tersebut merupakan tampilan fungsi gelombang pada sumur potensial keadaan terikat dengan energi potensial (V_0) -400 eV dan lebar sumur L=0.1 nm dengan x_{min}=-0.1 nm dan x_{max}=+0.1 nm. Pada gambar telihat bahwa terdapat 4 fungsi gelombang dimana saat n=1 diperoleh energi -373,84 eV memperlihatkan setengah gelombang, n=2 energinya – 296,63 eV terdapat satu gelombang, saat n=3 energinya -173,5 eV terdapat 1.5 gelombang dan saat n=4 diperoleh energi totalnya -21 eV memperlihatkan dua gelombang. Sehingga dapat disimpulkan setiap kenaikan n diperoleh kenaikan setengah gelombang.

Aplikasi dari potensial sumur keadaan terikat salah satunya pada sistim atom hidrogen. Teori mekanika kuantum untuk atom dikembangkan setelah perumusan mekanika kuntum yang merupakan sumbangan terpenting pada abad ini. Disamping suatu pembaharuan pendekatan mengenai gejala atomik, teori ini telah memungkinkan untuk mengerti bahwa berbagai hal yang dekat hubungannya seperti bagaimana atom berinteraksi untuk membentuk molekul mantap, asal tabel periodik (tabel berkala) unsur-unsur, dan mengapa zat padat memiliki karakterisasi listrik, magnet, optis dan mekanis. Salah satu yang menjadi pusat perhatian adalah teori kuantum atom hidrogen. (Beiser,1999)

Teori kuantum atom hidrogen memiliki persamaan umum yang sama dengan potensial sumur keadaan terikat, karena memiliki energi potensial (V_0) negatif yaitu:

$$V = -\frac{\epsilon^2}{4\pi\epsilon_C r} \qquad (52)$$

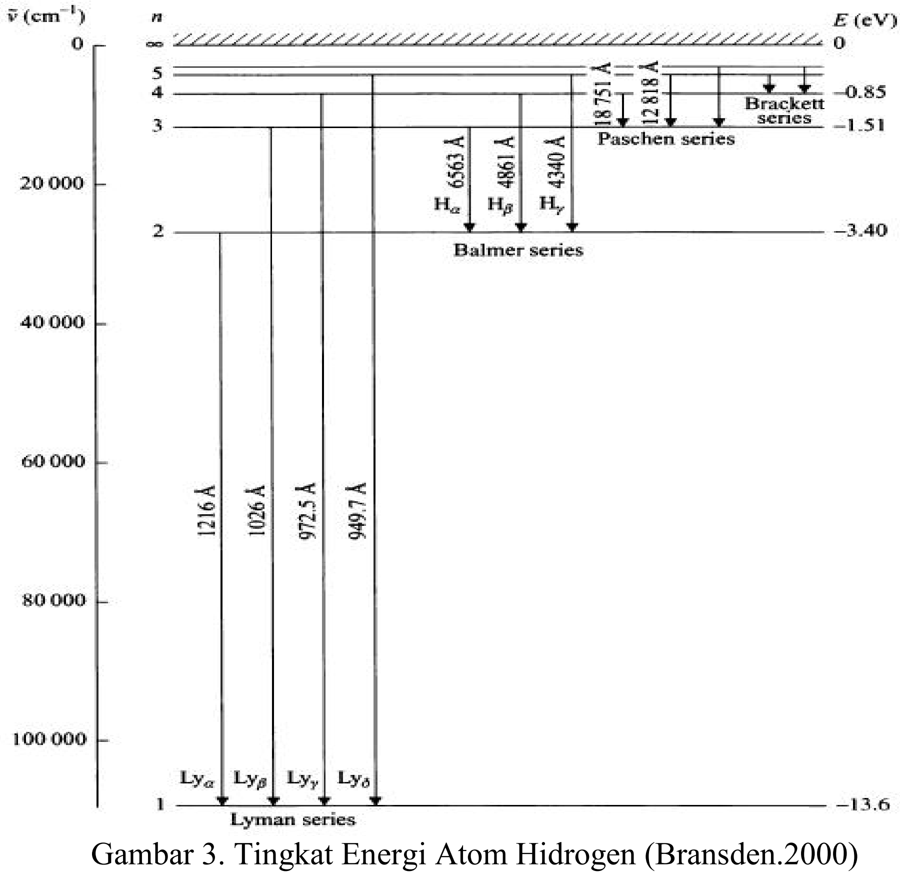
PSBW untuk partikel dalam tiga dimensi yang dipakai dalam persoalan atom hidrogen adalah:

$$\nabla^2\varphi(r,\theta,\emptyset)+\frac{2m}{\hbar^2}V\varphi(r,\theta,\emptyset)=E\varphi(r,\theta,\emptyset) \qquad (53)$$

Persamaan (52) disubstitusikan ke persamaan (53) dan dengan metode matematis yang agak rumit diperoleh fungsi gelombang dan tingkat energi untuk atom hidrogen. Tingkat energi atom E dinyatakan oleh rumus:

$$E_n=-\frac{m\epsilon^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (54)$$

Berdasarkan persamaan (54) terlihat bahwa tingkatan energi atom H bergantung pada keadaan n. Berikut gambaran beberapa tingakt energi dari atom H.



Gambar 3. Tingkat Energi Atom Hidrogen (Bransden.2000)

Gambar 3 memperlihatkan tingkat energi pada atom hidrogen, berdasarkan tingkat energi pada atom hidrogen menunjukkan bahwa partikel tidak dapat memiliki sembarang energi harus memenuhi persamaan (54).

G. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode yang digunakan mengubah problem persamaan differensial biasa nilai batas dari sebuah problem kalkulus menjadi sebuah aljabar. Dengan metode ini persamaan differensial φ' dan φ'' akan diaproksimasikan dengan menggunakan deret Taylor. Deret Taylor adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Bentuk deret taylor dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\varphi(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{k}(x)\frac{(h)^k}{k!} + R_n \quad (55)$$

dengan: $R_n = \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(x+\theta h)$, dengan $0 < \theta < 1$

Jika: $n \to \infty, R_n \to 0$, maka deret Taylor dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\varphi(x+h) = \lim_{n\to\infty} \sum^{n-1} \frac{h^k}{k!}\varphi^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\varphi^{(k)}(x) \quad (56)$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots \quad (57)$$

$$\varphi(x-h) = \varphi(x) - h\varphi'(x) - \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) - \cdots \quad (58)$$

Jika dikurangi persamaan (57) dan (58) dan nilai setelah pangkat 2 diabaikan atau dianggap sangat kecil atau sama dengan nol maka akan didapat:

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h} \quad (59)$$

Apabila persamaan (57) ditambah (58) akan diperoleh:

$$\varphi''(x) = \frac{\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h)}{h^2} \tag{60}$$

Persamaan (59) dan persamaan (60) dapat diterapkan dengan membagi $[x_0,x_N]$ (lihat Gambar 4) menjadi N bagian dengan interval h:

$$h = \frac{x_N - x_0}{N} \tag{61}$$

Gambar 4. Pembagian Interval antara $[x_0,x_N]$

Metode beda hingga yang dicari adalah φ pada x tertentu:

$$x_{i+1} = x_i + h \tag{62}$$

Jika i = 0 maka $x_i = x_0 + h$ dengan menggunakan notasi ini persamaan (59) dan (60) dapat dituliskan:

$$\varphi'(x_i) = \frac{\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_{i-1})}{2h} \tag{63}$$

$$\varphi''(x_i) = \frac{\varphi(x_{i+1})-2\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})}{h^2} \tag{64}$$

Persamaan (63) dan (64) dikenal dengan aproksimasi beda hingga.

H. Persamaan Differensial Biasa (PDB) dengan Nilai Batas

Persoalan teknis lebih sering dijumpai PDB tingkat 2 dengan kondisi batas yang diberikan pada dua titik. Umumnya kedua titik ini ada pada batas-batas domain permasalahan. Karena solusi yang dicari berada pada dua batas yang tertutup, maka problem ini dikenal sebagai problem domain tertutup atau PDB dengan nilai batas. Bentuk umum dari PDB dengan nilai batas untuk kasus 1-dimensi adalah:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + p(x)\frac{d\varphi}{dx} + q(x)\varphi = f(x) \qquad x_0 \leq x \leq x_n \tag{65}$$

dengan nilai-nilai batas:

$$A_1\varphi(x_0) + B_1\frac{d\psi}{dx}(x_0) = \alpha \qquad\qquad A_2\varphi(x_n) + B_2\frac{d\psi}{dx}(x_n) = \beta$$

dimana :

$|A_1| + |B_1| \neq 0$ dan $|A_2| + |B_2| \neq 0$

Tiga kemungkinan jenis kondisi batas yang mungkin diterapkan dalam PDB adalah:

1. Nilai batas konstan (Tipe Dirichlet)

   Nilai batas diberikan sebagai sebuah nilai konstan. Contoh, jika $A_1 = 1$ dan $B_1 = 0$ maka $\varphi(x_0) = \alpha$.

2. Nilai batas Derivatif (Tipe Neuman)

   Nilai batas yang diberikan sebagai sebuah nilai derivatif. Contoh, jika $A_1 = 0$ dan $B_1 = 1$ maka $\psi(x_0) = \alpha$.

3. Nilai batas campuran (Tipe Robin)

   Nilai batas terdiri dari nilai konstan derivatif. Contoh, jika $A_1 = 1$ dan $B_1 = 1$ maka $\varphi(x_0) + \varphi(x_0) = \alpha$.

I. Solusi Numerik Partikel dalam Kotak

Adapun yang menjadi pokok permasalahan ini adalah persamaan dalam berbagai potensial yaitu partikel dalam kotak yang disebut juga persamaan dalam kotak orde dua. Cara umum untuk memecahkan persamaan tersebut dalam bentuk persamaan differensial biasa adalah menuliskan persamaan tersebut dalam bentuk persamaan differensial dengan syarat batas.

Persamaan Schrodinger bebas waktu pada partikel dalam kotak adalah:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial^2 x} = (E-V)\varphi(x)$$

Langkah-langkah yang digunakan untuk memecahkan bentuk numerik persamaan Schrodinger pada potensial sumur keadaan terikat adalah sebagai berikut:

a. Persamaan $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial^2 x} = (E-V)\varphi(x)$ dikonversi ke persamaan untuk PDB (65) $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + p(x)\frac{d\varphi}{dx} + q(x)\varphi = f(x)$ sehingga diperoleh koefisien:

$$p(x)=0, q(x) = \frac{2m(E-V)}{\hbar^2} \text{ dan } f(x)=0 \quad (66)$$

b. Aproksimasi metode beda hingga turunan pertama pada persamaan (63) $\varphi'(x_i) = \frac{\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_{i-1})}{2h}$ dan turunan kedua pada persamaan (64) $\varphi''(x_i) = \frac{\varphi(x_{i+1})-2\varphi(x_i)+\varphi(x_{i-1})}{h^2}$ disubstitusikan ke persamaan (65) didapatkan:

$$\left|1-\frac{1}{2}hp(x)\right|\varphi(x_{x_{i-1}}) - [2-h^2 q(x)]\varphi(x_i) + \left|1+\frac{1}{2}hp(x)\right|\varphi_{x_{i+1}} = h^2 f(x) \quad (67)$$

dengan memasukkan nilai persamaan (65) ke persamaan (66) maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\varphi_{i-1} - \left|2 - h^2\left(\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\right)\right|\varphi_{(i)} + \varphi_{i+1} = 0 \quad (68)$$

Persamaan (68) dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

I=1: $-\left|2-h^2\left(\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\right)\right|\varphi_{(1)} \quad +\varphi_{(2)} \quad +0 \quad +0 \quad =-\varphi_{(0)}$

I=2: $\varphi_{(1)} \quad -\left|2-h^2\left(\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\right)\right|\varphi_{(2)} \quad +\varphi_{(3)} \quad +0 \quad = \quad 0$

I=3: $0 \quad +\varphi_{(2)}-\left|2-h^2\left(\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\right)\right|\varphi_{(3)}+\varphi_{(2)} \quad = \quad 0$

......

I=N-1: $0 \quad 0 \quad +\varphi_{(N-2)}-\left|2-h^2\left(\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\right)\right|\varphi_{(N-1)}= -\varphi_{(N)}$

Dari i=1 hingga i-N-1 persamaan linier diatas dapar dinyatakan dalam bentuk matriks dimensi N*x*N. Bila diambil $k=-\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$ maka bentuk matriksnya menjadi:

$$\begin{bmatrix} -[2-h^2(k^2] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -[2-h^2(k^2] & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -[2-h^2(k^2] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -[2-h^2(k^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ .... \\ -\varphi_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\varphi_0 \\ 0 \\ 0 \\ .... \\ -\varphi_N \end{bmatrix}$$

Persamaan (68) merupakan solusi partikel dalam kotak pada potensial sumur menggunakan metode beda hingga. Berdasarkan persamaan (68) dibuatlah bentuk pemodelan gerak partikel dalam kotak dan tingkatan energi pada partikel dalam kotak sehingga dapat dilihat apakah energi partikel tersebut dapat tergenerasi atau tidak tergenerasi.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pengujian solusi analitik dan analisa terhadap nilai besaran yang telah ditetapkan pada potensial sumur keadaan terikat dapat dikemukakan beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Dihasilkan pemodelan tingkat energi dan fungsi gelombang dengan menggunakan metode beda hingga. Energi menunjukkan banyaknya gelombang yang terjadi pada tingkat tertentu. Kenaikan setengah gelombang menunjukkan kenaikan tingkat energi pada potensial sumur. Program yang dibuat sesuai dengan teori.
2. Pengaruh variasi energi potensial dan lebar sumur terhadap tingkat energi dan fungsi gelombang adalah sebagai berikut:
   a. Pada model potensial sumur keadaan terikat diberikan energi potensial V_0 besar maka akan diperoleh tingkat energi dan fungsi gelombang yang kecil, begitu juga sebaliknya jika diberikan nilai energi potensial V_0 kecil diperoleh tingkat energi dan fungsi gelombang besar.
   b. Saat variasi lebar sumur diperkecil dengan energi potensial tetap diperoleh tingkat energi dan fungsi gelombang 2 keadaan, jika diberikan lebar sumur besar tidak terlihat tingkat energi ataupun fungsi gelombang.

B. Saran

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat dikemukakan saran sebagai tindak lanjut dari penelitian ini:

1. Penelitian ini merupakan penelitian dasar yang masih banyak diabaikan jadi perlu dipertimbangkan lagi. Dimana penelitian ini hanya membahas model sederhana yaitu pada Potensial Sumur Keadaan terikat yang menganggap tidak ada sama sekali pengaruh terhadap waktu, jadi penelitian ini dapat membuat model yang lebih kompleks. Salah satunya dengan mempertimbangkan waktu.
2. Dilakukan penelitian lebih lanjut dengan menggunakan bahasa pemograman lain.

DAFTAR PUSTAKA

Beiser, Arthur. 1999. *Konsep Fisika Modern*. Edisi Keempat. Erlangga, Jakarta.

Basaruddin. 1991. *Metode Beda Hingga Untuk Persamaan diffrensial*. Jakarta:Gramedia.

Bransden,B.H dan C.J. Joachain.2000. *Quantum Mechanics*.Pearson Education Asia:London.

Chapra. 1998. *Numerical Methods For Engineers*. Singapore:M.Graw-Hill Companies,Inc.

Coper,Ian. *Quantum Mechanics Schrodinger Equation Time Independent Bound States*.University of Sydney. diakses tanggal 3 Februari 2013.

Eisberg, R dan Resnick, R.1970. Quantum Physics. Jhon wiley & Sons. NewYork:California.

Ensenanza. 2008.*Solving the Time-Dependent Schrodinger Equation using Finite Difference Method.*Mexico.

Erkock, sakir.2006. Fundamental of Quantum Mechanics.Middle East Technical University,Ankara:Turkey.

Hartanto dan Prasetyo. 2003. *Analisis dan desain Sistem Kontrol Dengan MATLAB*,Yogyakarta:Andi.

Krane, Kenneth. 1992. *Fisika Modern.*Jakarta:UI Press.

Raymond, D.2006. Particle in a Box. http://id.www.physics.nmt.edu/raymond/classes/ph13xbook/node99,html.diakses 23 juni 2012.

Schiff, Leonard I. 1995. *Quantum Mechanics*. The Maple Press company. New York.

Sudirham Sudaryanto dan Ning Utari. 2000. *Mengenal Sifat-Sifat Material* .Jakarta.

Sutopo. 2003. *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang:JICA.