

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR PADA
ALJABAR MAX-PLUS**

SKRIPSI

Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Memperoleh Gelar Sarjana Sains



**CINDI MEIDISIA
NIM. 18340/2010**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2014**

PERSETUJUAN SKRIPSI

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR PADA ALJABAR

MAX-PLUS

Nama : Cindi Meidisia
NIM/BP : 18340/2010
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, Februari 2014

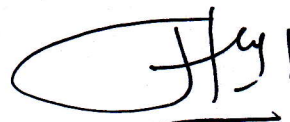
Disetujui Oleh:

Pembimbing I



Drs. Yusmet Rizal, M.Si
NIP.19680121 199303 1 011

Pembimbing II



Dra. Hj. Helma, M.Si
NIP. 19680324 199603 2 001

PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Nama : Cindi Meidisia
NIM : 18340
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

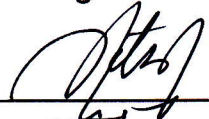
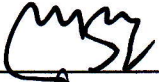
Dengan Judul

**Penyelesaian Sistem Persamaan Linear pada
Aljabar *Max-Plus***

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan didepan Tim Penguji Skripsi
Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 23 Januari 2014

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
1. Ketua	: Drs. Yusmet Rizal, M.Si	1. 
2. Sekretaris	: Dra. Hj. Helma, M.Si	2. 
3. Anggota	: Muhammad Subhan, M.Si	3. 
4. Anggota	: Meira Parma Dewi, M.Kom	4. 
5. Anggota	: Dra. Hj. Minora Longgom Nst, M.Pd	5. 

SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : CINDI MEIDISIA
NIM/TM : 18340/2010
Progran Studi : MATEMATIKA
Jurusan : MATEMATIKA
Fakultas : MIPA UNP

Dengan ini menyatakan, bahwa Skripsi saya dengan judul "**Penyelesaian Sistem Persamaan Linear pada Aljabar *Max-Plus***" adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan Negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Diketahui oleh,

Ketua Jurusan Matematika,



Dr. Armiaati, M.Pd
NIP.19630605 198703 2 002

Saya yang menyatakan,



Cindi Meidisia
NIM. 18340

ABSTRAK

Cindi Meidisia: Penyelesaian Sistem Persamaan Linear pada Aljabar *Max-Plus*

Persamaan linear dapat digunakan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Masalah seperti sistem jaringan kerja merupakan suatu contoh masalah yang diselesaikan menggunakan persamaan linear dengan operasi dasar yang digunakan adalah operasi maksimum (max) dan operasi penjumlahan (+). Sehingga terdapat suatu sistem persamaan linear dengan operasi dasar yang digunakan adalah operasi maksimum (max) dan penjumlahan (+). Pengoperasian seperti ini terdapat pada Aljabar *Max-Plus*. Rumusan masalah pada penelitian ini adalah “Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus*”.

Penelitian ini adalah penelitian teoritis. Metode yang digunakan adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dengan berlandaskan pada kajian kepustakaan.

Hasil yang didapatkan pada penelitian adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $\mathbf{Ax} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{Cx} \oplus \mathbf{d}$ terlebih dahulu diubah kedalam bentuk kanonik, yaitu:

$$\begin{cases} C_{ij} = \varepsilon ; \text{ untuk } A_{ij} > C_{ij} \\ A_{ij} = \varepsilon ; \text{ untuk } A_{ij} < C_{ij} \\ d_i = \varepsilon ; \text{ untuk } b_i > d_i \\ b_i = \varepsilon ; \text{ untuk } b_i < d_i \end{cases}$$

Selanjutnya diselesaikan dengan cara yang sama seperti pada aljabar linear. Solusi dari sistem persamaan linear $\mathbf{x} = \mathbf{Ax} \oplus \mathbf{b}$ adalah $\mathbf{x} = \mathbf{A}^* \otimes \mathbf{b}$ dengan $\mathbf{A}^* = \mathbf{e} \oplus \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}^2 \oplus \dots \oplus \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{A}^{n+1} \oplus \dots$. Dan solusi dari sistem persamaan linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, yaitu:

$$\begin{cases} \text{Memiliki penyelesaian ; untuk } \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\ \text{Tidak punya penyelesaian ; untuk } \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{b} \end{cases}$$

Dimana $\hat{\mathbf{x}}$ adalah sub penyelesaian terbesar dari sistem persamaan linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dengan $-\hat{x}_j = \max_i (-b_i + A_{ij})$.

KATA PENGANTAR



Syukur Alhamdulillah kehadiran Allah SWT karena berkat rahmat dan kurniaNya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Penyelesaian Sistem Persamaan Linear pada Aljabar *Max-Plus***”. Penulisan skripsi ini merupakan salah satu prasyarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada program studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNP.

Dalam pembuatan dan penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan bimbingan dan bantuan yang bersifat membangun dari berbagai pihak. Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Drs. Yusmet Rizal, M.Si., Pembimbing I
2. Ibu Dra. Hj. Helma, M.Si., Pembimbing II
3. Bapak Muhammad Subhan, M.Si., Ibu Meira Parma Dewi, S.Si., M.Kom., dan Ibu Dra. Hj. Minora Longgom Nasution, M.Pd., Tim Penguji
4. Ibu Dr. Armianti, M. Pd., Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNP
5. Ibu Dra. Dewi Murni, M.Si., Ketua Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNP
6. Semua pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu

Semoga semua bimbingan, bantuan, dan doa yang diberikan menjadi amal ibadah yang diridhai Allah SWT.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, masukan dan saran yang bersifat membangun dari berbagai pihak sangat penulis harapkan demi kesempurnaan penulisan dimasa mendatang. Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan sumbangan pemikiran positif bagi setiap pembaca.

Padang, Maret 2014

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
ABSTRAK	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	v
 BAB I. PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Rumusan Masalah	5
C. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian	5
D. Tujuan Penelitian	5
E. Manfaat Penelitian	5
F. Metodologi Penelitian	6
 BAB II. KAJIAN TEORI	
A. Pengertian-Pengertian Dasar	7
B. Sistem Persamaan Linear	12
C. Aljabar <i>Max-Plus</i>	12
D. Sistem Persamaan Linear dalam Aljabar <i>Max-Plus</i>	22
 BAB III. PEMBAHASAN	
A. Sistem Persamaan Linear $Ax \oplus b = Cx \oplus d$	28
B. Sistem Persamaan Linear $x = Ax \oplus b$	58
1. Matriks dan Graf	58
2. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear $x = Ax \oplus b$	62
C. Sistem Persamaan Linear $Ax = b$	64
1. Sub Penyelesaian Terbesar $Ax = b$	65
2. Analisis Penyelesaian Sistem Persamaan Linear $Ax = b$	66
D. Contoh Penerapan	72
 BAB IV. PENUTUP	
A. Kesimpulan	76
B. Saran	77
DAFTAR PUSTAKA	78

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1. Sistem Jaringan Kereta Sederhana	2
2. Grafik Fungsi Linear $y = ac$ dengan $a = f(e)$	24
3. Grafik Fungsi $y = ac$	25
4. Grafik Fungsi $y = b$	25
5. Grafik Gabungan Fungsi $y = ac$ dan $y = b$	25
6. Grafik Fungsi $y = ac \oplus b$	25
7. Presendence Graf dari Matrik A	26
8. Grafik Persamaan 7	30
9. Grafik Persamaan 8	30
10. Grafik Persamaan 9	31
11. Grafik Persamaan 11	32
12. Grafik Persamaan 12	32
13. Grafik Persamaan 13	33
14. Grafik Persamaan 19	35
15. Grafik Persamaan 20	35
16. Grafik Persamaan 21	36
17. Grafik Persamaan 24	37
18. Grafik Persamaan 25	38
19. Grafik Persamaan 26	38
20. Grafik Persamaan 28	39
21. Grafik Persamaan 29	40
22. Grafik Persamaan 30	40
23. Grafik Persamaan 35	42
24. Grafik Persamaan 36	42
25. Grafik Persamaan 37	43
26. Grafik Persamaan 38	44
27. Grafik Persamaan 39	44
28. Grafik Persamaan 41	45

29. Grafik Persamaan 42	46
30. Grafik Persamaan 43	46
31. Grafik Persamaan 44	47
32. Grafik Persamaan 47	48
33. Grafik Persamaan 48	48
34. Grafik Persamaan 49	49
35. Grafik Persamaan 50	49
36. Grafik Persamaan $a > a'$ dan $b > b'$	50
37. Grafik Persamaan $a < a'$ dan $b < b'$	50
38. Grafik Persamaan $a > a'$ dan $b < b'$	51
39. Grafik Persamaan $a < a'$ dan $b > b'$	51
40. Grafik Persamaan $a = a'$ dan $b \neq b'$	51
41. Grafik Persamaan $a \neq a'$ dan $b = b'$	51
42. Grafik Persamaan $a = a'$ dan $b = b'$	52
43. Graf $G(A)$ Tanpa Sirkuit	60

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Persamaan linear beberapa variabel adalah persamaan dalam bentuk polinom yang variabelnya berderajat satu atau nol dan tidak terjadi perkalian antar variabelnya (Budhi, 1995: 4). Bentuk umum dari persamaan linear n variabel adalah $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b merupakan konstanta riil. Sistem persamaan linear adalah kumpulan berhingga banyaknya persamaan linear (Anton, 2004: 3). Solusi dari sistem persamaan linear adalah nilai-nilai dari variabel-variabel dari sistem persamaan linear tersebut.

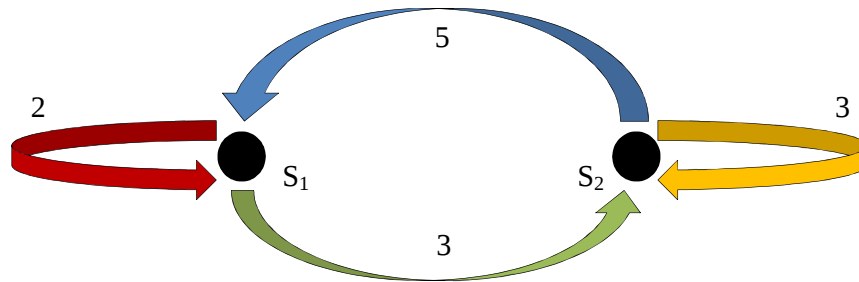
Misalnya terdapat sistem persamaan linear dengan n variabel dan k persamaan, yaitu:

[illegible]

Sistem persamaan linear di atas dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ dengan $\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$, dan $\mathbf{B}$ masing-masing adalah variabel, matriks koefisien, dan matriks konstanta (Sutojo, 2010: 165).

Persamaan linear dapat digunakan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari, seperti sistem jaringan kereta, sistem jaringan telekomunikasi, sistem produksi, sistem pemrosesan paralel pada komputer, dan sebagainya. Hal ini dapat dilakukan dengan memodelkan masalah tersebut ke

dalam model matematika. (Andy, 2004: 131) memberikan suatu contoh sistem jaringan kereta sederhana yang disajikan dalam Gambar 1 berikut:



Gambar 1: Sistem Jaringan Kereta Sederhana

Keterangan:
— : Kereta Pertama
— : Kereta Kedua
— : Kereta Ketiga
— : Kereta Keempat

Misalkan di suatu kota terdapat dua stasiun kereta S_1 dan S_2 yang dihubungkan dengan suatu jaringan rel kereta seperti pada Gambar 1 di atas, dengan dua kereta untuk tiap stasiun. Misalkan pada waktu keberangkatan pertama empat kereta tersebut melakukan perjalanan sebagai berikut. Kereta pertama berangkat dari stasiun S_1 mengantar dan menjemput penumpang di pinggiran kota dan kembali ke S_1 . Kereta kedua berangkat dari stasiun S_1 , mengantar dan menjemput penumpang di tengah kota dan menuju ke stasiun S_2 . Kereta ketiga berangkat dari stasiun S_2 , mengantar dan menjemput penumpang di tengah kota dan menuju ke stasiun S_1 . Kereta keempat berangkat dari stasiun S_2 , mengantar dan menjemput penumpang di pinggiran kota dan kembali ke S_2 . Pada waktu keberangkatan kedua perjalanan kereta sebagai berikut. Kereta pertama dan keempat kembali melakukan perjalanan seperti pada waktu perjalanan sebelumnya. Kereta kedua berangkat dari stasiun S_2 , mengantar dan menjemput penumpang di tengah kota

dan menuju ke stasiun S_1 . Kereta ketiga berangkat dari stasiun S_1 , mengantar dan menjemput penumpang di tengah kota dan menuju ke stasiun S_2 . Pada waktu keberangkatan ketiga perjalanan kereta seperti pada waktu perjalanan pertama, demikian seterusnya. Dengan demikian jaringan rel kereta ini dapat dipandang terdiri dari satu lingkaran dalam ($S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$) dan dua lingkaran luar ($S_1 \rightarrow S_1$ dan $S_2 \rightarrow S_2$).

Kereta mencapai stasiun lain (atau yang sama) setelah waktu tertentu, yang disebut sebagai waktu perjalanan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1 di atas. Keberangkatan kereta di stasiun harus menunggu kedatangan kereta yang lain sehingga penumpang memiliki kesempatan berganti kereta untuk menuju tempat yang diinginkan. Waktu untuk menunggu kereta lain dan penumpang berganti kereta ini telah diperhitungkan dalam waktu perjalanan. Stasiun di pinggiran kota tidak dipertimbangkan karena tidak mempunyai peranan yang penting dalam pemodelan.

Misal tidak ada jadwal keberangkatan kereta dan kereta langsung berangkat setelah penumpang berganti kereta pada suatu stasiun. Anggap $x_i(t+1)$ waktu keberangkatan ke- $t+1$ pada stasiun S_i untuk $i = 1, 2$. Jika proses keberangkatan dan kedatangan suatu kereta berkesinambungan, maka didapatkan:

$$x_1(t+1) = \max(2 + x_1(t), 5 + x_2(t))$$

$$x_2(t+1) = \max(3 + x_1(t), 3 + x_2(t)), \text{ untuk } t = 0, 1, 2, \dots$$

Jika operasi max dinotasikan dengan $\oplus$, operasi penjumlahan dinotasikan dengan $\otimes$, maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$x_1(t+1) = (2 \otimes x_1(t)) \oplus (5 \otimes x_2(t))$$

$$x_2(t+1) = (3 \otimes x_1(t)) \oplus (3 \otimes x_2(t))$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Untuk $t = 0, 1, 2, \dots$ dengan $\mathbf{x}(t+1) = [x_1(t+1), x_2(t+1)]^T$

Ilustrasi di atas memberikan suatu contoh pemodelan matematika yang merupakan persamaan linear dengan operasi dasar yang digunakan adalah operasi maksimum (max) dan operasi penjumlahan (+). Sehingga dari persamaan (1) di atas muncul suatu sistem persamaan linear dengan operasi dasar yang digunakan adalah operasi maksimum (max) dan penjumlahan (+). Pengoperasian seperti ini terdapat pada Aljabar *Max-Plus*.

Aljabar *Max-Plus* didefinisikan dalam suatu himpunan $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ dan dinotasikan dengan $\mathbf{R}_{max}$. Aljabar *Max-Plus* adalah himpunan dengan dua operasi biner yaitu $\oplus$ dan $\otimes$ dimana $a \oplus b$ nilai maksimum antara a dan b , dan $a \otimes b$ adalah penjumlahan antara a dan b (Baccelli, 2001: 102).

Berdasarkan uraian di atas maka ditelaah penyelesaian sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus* $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{x}) \oplus \mathbf{b} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{x}) \oplus \mathbf{d}$, $\mathbf{x} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{x}) \oplus \mathbf{b}$ dan $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Khusus untuk sistem persamaan linear $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{x}) \oplus \mathbf{b} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{x}) \oplus \mathbf{d}$ penelitian dibatasi untuk 2 variabel. Untuk itu penelitian ini diberi judul “**Penyelesaian Sistem Persamaan Linear pada Aljabar *Max-Plus***”.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus*?

C. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian

Pendekatan dan konsep yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang diteliti adalah studi kepustakaan tentang konsep dasar Aljabar *Max-Plus* dengan berpedoman pada buku dan jurnal yang relevan dengan permasalahan. Adapun pertanyaan yang akan dijawab adalah:

1. Bagaimanakah penyelesaian sistem persamaan linear $(A \otimes x) \oplus b = (C \otimes x) \oplus d$
2. Bagaimanakah penyelesaian sistem persamaan linear $x = (A \otimes x) \oplus b$
3. Bagaimanakah penyelesaian sistem persamaan linear $(A \otimes x) = b$

D. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan masalah yang akan dibahas, maka tujuan penelitian ini adalah mengetahui penyelesaian sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus*.

E. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Memberikan tambahan wawasan pengetahuan bagi penulis sendiri khususnya dan pembaca pada umumnya
2. Dapat menjadi landasan dalam menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan sistem persamaan linear pada Aljabar *Max-Plus*

3. Sebagai bahan masukan untuk peneliti selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian

F. Metodologi Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian dasar (teoritis). Adapun metode yang digunakan adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dengan berlandaskan pada kajian kepustakaan. Langkah kerja yang dilakukan adalah meninjau permasalahan yang dihadapi, kemudian mencari teori-teori yang dapat dijadikan penunjang untuk menjawab permasalahan tersebut.

Adapun langkah-langkah untuk mendapatkan jawaban dari permasalahan adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari studi literatur yang mengkaji tentang Aljabar *Max-Plus*, matriks, sistem persamaan linear, dan solusi sistem persamaan linear
2. Menentukan solusi sistem persamaan linear $(A \otimes x) \oplus b = (C \otimes x) \oplus d$
3. Menentukan solusi sistem persamaan linear $x = (A \otimes x) \oplus b$
4. Menentukan solusi sistem persamaan linear $(A \otimes x) = b$
5. Menarik kesimpulan