

# **SIFAT-SIFAT MATRIKS KETETANGGAAN PADA GRAF PETERSEN**

**SKRIPSI**

*Diajukan sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains*



**Oleh:**

**YUCO ALSBALDO  
NIM. 17030080/2017**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI PADANG  
2021**

## PERSETUJUAN SKRIPSI

Judul : Sifat-Sifat Matriks Ketetangaan Pada Graf Petersen  
Nama : Yuco Albaldo  
NIM : 17030080  
Program Studi : Matematika  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 31 Agustus 2021  
Disetujui oleh,  
Pembimbing



Muhammad Subhan, M.Si  
NIP. 19701126 199903 1 002

**HALAMAN PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI**

Nama : Yuco Alsbaldo  
NIM / TM : 17030080/2017  
Program Studi : Matematika  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

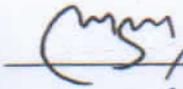
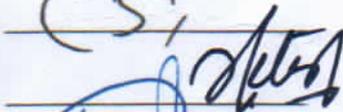
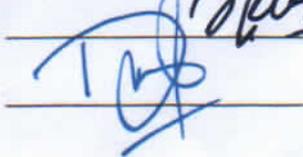
Dengan Judul Skripsi

**SIFAT-SIFAT MATRIKS KETETANGGAAN  
PADA GRAF PETERSEN**

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi  
Program Studi Matematika Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Padang

Padang, 31 Agustus 2021

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
Ketua	: Muhammad Subhan, M.Si	
Anggota	: Drs. Yusmet Rizal, M.Si	
Anggota	: Defri Ahmad, S.Pd, M.Si	

## SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yuco Alsbaldo  
NIM : 17030080  
Program Studi : Matematika  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan, bahwa skripsi saya dengan judul **“Sifat-Sifat Matriks Ketetangaan Pada Graf Petersen”** adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Padang, 31 Agustus 2021

Diketahui oleh,  
Ketua Jurusan Matematika,



Dra. Media Rosha, M.Si  
NIP. 19620815 198703 2 004

Saya yang menyatakan,


Yuco Alsbaldo  
NIM. 17030080

# Sifat-Sifat Matriks Ketetanggaan Pada Graf Petersen

Yuco Albaldo

## ABSTRAK

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Salah satu contoh graf yang paling dikenal dan sangat populer adalah graf Petersen. Graf Petersen sangat populer untuk dipelajari karena keunikannya sebagai contoh penyangkal (*counterexample*) di banyak tempat dan mempunyai banyak sifat menarik. Graf dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks ketetanggaan (*adjacency*) yang dinotasikan  $A(G)$ . Ketika graf dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks ketetanggaan, maka dapat ditentukan determinan dan nilai eigennya.

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis melalui studi kepustakaan. Tujuan dari penelitian untuk mengetahui bagaimana sifat-sifat matriks ketetanggaan pada graf Petersen. Konsep yang akan dibahas pada penelitian ini yaitu bagaimana sifat-sifat dari determinan dan nilai eigen matriks ketetanggaan pada graf Petersen tersebut. Hasil dari penelitian adalah menyimpulkan sifat-sifat nilai determinan dan nilai eigen yang didapatkan ke dalam makna pada teori graf. Hasil dari penelitian adalah determinan dari matriks ketetanggaan pada graf Petersen bernilai positif dengan tiga nilai eigen yang berbeda dan dapat didiagonalisasi karena multiplisitas aljabarnya sama dengan multiplisitas geometri  $m_A = m_G$ .

Kata Kunci: Matriks Ketetanggaan, Graf Petersen, Determinan, Nilai Eigen

# Properties of Adjacency Matrix in Petersen Graph

Yuco Albaldo

## ABSTRACT

Graphs are used to represent discrete objects and the relationships between these objects. One of the best known and very popular examples of graphs is the Petersen graph. The Petersen graph is very popular because of its uniqueness as a counterexample in many places and has many interesting properties. Graphs can be expressed in the form of a matrix adjacency which is denoted. When a graph can be expressed in the form of an adjacency matrix, its determinants and eigenvalues can be determined.

This research is a theoretical research through literature study. The purpose of this study is to find out how the properties of the adjacency matrix on a Petersen graph are. The concept that will be discussed in this research is how the properties of the determinants and eigenvalues of the adjacency matrix on the Petersen graph. The result of the research is that the determinant of the adjacency matrix on the Petersen graph is positive with three different eigenvalues and can be diagonalized because the algebraic multiplicity is the same as the geometric multiplicity  $m_A = m_G$ .

Keywords: Adjacency Matrix, Petersen Graph, Determinants, Eigenvalues.

## KATA PENGANTAR



Syukur Alhamdulillah peneliti ucapkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga peneliti dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir dengan judul “**Sifat-Sifat Matriks Ketetangaan Pada Graf Petersen**”. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW.

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Sains di Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Negeri Padang (UNP). Dalam penulisan dan penyusunan skripsi ini peneliti banyak mendapatkan bantuan dari berbagai pihak, oleh sebab itu peneliti ingin mengucapkan terimakasih atas bantuan berupa dukungan, semangat, bimbingan, petunjuk nasihat dan kerja sama dari berbagai pihak, yaitu kepada:

1. Bapak Muhammad Subhan, M.Si selaku Dosen Pembimbing dan Penasehat Akademik.
2. Bapak Drs. Yusmet Rizal, M.Si dan Bapak Defri Ahmad, S.Pd, M.Si selaku Dosen Penguji.
3. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si selaku Ketua Prodi Matematika dan Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNP
4. Bapak dan Ibu staf pengajar serta karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNP.

5. Orang tua yang selalu memberikan dukungan, motivasi, dan doa restunya.
6. Sahabat, rekan-rekan Matematika angkatan tahun 2017.
7. Semua pihak yang telah membantu selama studi dan penyelesaian skripsi ini yang tidak disebutkan satu persatu.

Semoga dukungan, bimbingan dan kerjasamanya dibalas oleh Allah SWT sebagai amal ibadah, Aamiin Allahumma Aamiin.

Dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Untuk itu peneliti mohon maaf kepada pembaca. Kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangat diharapkan untuk kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga dapat bermanfaat dan dipergunakan sebagaimana mestinya serta dapat menjadi pedoman bagi peneliti selanjutnya. Atas perhatiannya penulis ucapkan terima kasih.

Padang, 2021

Peneliti

## DAFTAR ISI

	Halaman
ABSTRAK .....	i
KATA PENGANTAR .....	iii
DAFTAR ISI .....	v
DAFTAR GAMBAR .....	vii
DAFTAR LAMPIRAN .....	viii
BAB I PENDAHULUAN .....	1
A. Latar Belakang Masalah .....	1
B. Rumusan Masalah .....	3
C. Pertanyaan Penelitian .....	3
D. Tujuan Penelitian .....	4
E. Manfaat Penelitian .....	4
BAB II KERANGKA TEORITIS .....	6
A. Matriks .....	6
B. Determinan .....	7
C. Invers Matriks .....	9
D. Nilai Eigen .....	11
E. Diagonalisasi .....	16
F. Graf .....	19
G. Terminologi Graf .....	21
H. Graf Sederhana Khusus .....	26
I. Matriks Ketetanggaan ( <i>Adjacency Matrix</i> ) .....	27
J. Graf Petersen .....	28
BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....	31
BAB IV PEMBAHASAN .....	32
A. Matriks Ketetanggaan pada Graf Petersen $P(5,2)$ .....	32
B. Determinan Matriks Ketetanggaan pada Graf Petersen $P_{5,2}$ .....	35
C. Invers Matriks Ketetanggaan pada Graf Petersen $P_{5,2}$ .....	45
D. Nilai Eigen ( <i>Spectrum</i> ) dan Vektor Eigen Matriks Ketetanggaan pada Graf Petersen $P_{5,2}$ .....	62
E. Diagonalisasi Matriks Ketetanggaan pada Graf Petersen $P_{5,2}$ .....	65

BAB V PENUTUP .....	71
A. Kesimpulan.....	71
B. Saran .....	71
DAFTAR PUSTAKA .....	72

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Vektor Eigen dari Matriks $2 \times 2$ .....	12
Gambar 2. Tiga buah graf (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu.....	20
Gambar 3. Tiga buah graf $G_1$ , $G_2$ , dan $G_3$ .....	21
Gambar 4. Graf kosong $N_4$ .....	23
Gambar 5. Derajat titik graf. ....	23
Gambar 6. (a) $G$ graf terhubung dan (b) $H$ graf tidak terhubung dengan 3 komponen, yaitu $G_1$ , $G_2$ , $G_3$ .....	25
Gambar 7. Graf lengkap $K_n$ , $3 \leq n \leq 6$ .....	26
Gambar 8. Graf lingkaran $C_n$ , $3 \leq n \leq 6$ .....	26
Gambar 9. Graf teratur derajat 0,1, dan 2. ....	27
Gambar 10. Graf Petersen .....	29
Gambar 11. Graf Petersen $P(5,2)$ .....	32
Gambar 12. Pemberian indeks pada graf Petersen $P(5,2)$ .....	33
Gambar 13. Graf Petersen dengan $a, b, c, d, e$ berada pada titik bagian luar dan $f, g, h, i, j$ berada pada titik bagian dalam. ....	36
Gambar 14. Graf Petersen dengan $a, b, c, d, e$ berada pada titik bagian luar dan $f, g, h, i, j$ berada pada titik bagian dalam dengan urutan titik dalamnya bergeser satu dari graf sebelumnya. ....	41
Gambar 15. Graf Petersen dengan $a, c, e, g, i$ berada pada titik bagian luar dan $b, d, f, h, j$ berada pada titik bagian dalam. ....	42
Gambar 16. Graf Petersen dengan $a, b, e, f, c$ berada pada titik bagian luar dan $d, i, g, j, h$ berada pada titik bagian dalam. ....	43

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Hasil determinan matriks ketetangaan pada graf Petersen .....	74
Lampiran 2. Hasil Inverse matriks ketetangaan pada graf Petersen .....	75
Lampiran 3. Hasil nilai eigen matriks ketetangaan pada graf Petersen .....	76
Lampiran 4. Hasil vektor eigen matriks ketetangaan pada graf Petersen .....	77

# BAB I

## PENDAHULUAN

### A. Latar Belakang Masalah

Teori graf diperkenalkan pada tahun 1736 oleh matematikawan asal Swiss bernama Leonhard Euler dalam tulisannya mengenai pemecahan masalah jembatan Königsberg. Di kota Königsberg memiliki tujuh jembatan yang melintasi sungai Pregel. Permasalahan yang terdapat pada jembatan Königsberg adalah bagaimana melintasi tujuh jembatan dengan hanya tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Pada masalah ini Euler mempresentasikan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi untuk memecahkan teka-teki tersebut. Dari permasalahan itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf. Teori graf terus berkembang dengan ditemukannya berbagai aplikasi dalam menyelesaikan masalah.

Teori graf merupakan pokok bahasan yang memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis.

Secara umum graf  $G$  dapat didefinisikan sebagai suatu himpunan berhingga tak kosong  $V(G)$  dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong)  $E(G)$  yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen  $e$  dalam  $E(G)$  merupakan pasangan berurutan dari titik-titik di  $V(G)$  dapat ditulis dengan notasi  $G = (V, E)$

(Budayasa, 2007: 2). Sebuah graf mempunyai himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ .

Daya tarik teori graf adalah penerapannya yang sangat luas, mulai dari ilmu komputer, teknik kelistrikan, kimia, fisika, biologi, linguistik, sosiologi, ekonomi, manajemen, pemasaran, sampai pemecahan teka-teki dan permainan asah otak. Walaupun penerapannya sangat banyak, yang menarik adalah bahwa teori graf hanya mempelajari titik dan garis.

Salah satu contoh graf yang paling dikenal dan sangat populer adalah graf Petersen. Graf Petersen diambil dari nama Peter Christian Petersen untuk menghargainya karena pada tahun 1898 ia membuktikan bahwa graf Petersen tidak terfaktor-1 (Ginting, 2016). Graf Petersen sangat populer untuk dipelajari karena keunikannya sebagai contoh penyangkal (*counterexample*) di banyak tempat dan mempunyai banyak sifat menarik (Holton dan Sheehan, 1993).

Aplikasi cabang ilmu lain dari matematika dalam teori graf adalah aljabar linear. Matriks merupakan salah satu bidang kajian dasar yang mempelajari ilmu matematika mengenai aljabar linear. Dalam definisinya, matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan, jajaran dari bilangan-bilangan tersebut disebut entri dari matriks (Anton, 2004). Nilai eigen juga merupakan masalah yang sering dibahas dalam aljabar linear. Mempelajari nilai eigen tidak akan terlepas dari mempelajari matriks, matriks yang akan diselesaikan elemen-elemen penyusunnya berupa bilangan riil atau bilangan kompleks. Dari teori aljabar linear tersebut dapat dibentuk suatu matriks ketetanggaan dari suatu graf. Matriks ketetanggaan dari  $G$  dinotasikan oleh

$A(G)$  dan berukuran  $n \times n$ . Baris dan kolomnya diberi indeks oleh  $V(G)$ . Jika  $i \neq j$  maka entri ke- $(i, j)$  dari  $A(G)$  bernilai 0 untuk simpul  $i$  dan  $j$  yang tidak bertetangga dan bernilai 1 untuk  $i$  dan  $j$  yang bertetangga (Bapat, 2014). Selain itu, dapat juga dibentuk matriks ketetanggaan antara sisi-sisi dari graf yaitu  $A_L$ , matriks keterkaitan antara simpul dan sisi yaitu  $X$ . Jika pada graf diberikan suatu orientasi, dapat juga dibentuk matriks bersisian antara simpul dan sisi dengan orientasi yang dikatakan sebagai matriks  $D$ .

Graf Petersen dapat dibentuk kedalam matriks ketetanggaan, karena matriks ketetanggaan merupakan graf sederhana yang simetris, yaitu  $a_{ij} = a_{ji}$ , dengan 1 ketika  $v_i$  dan  $v_j$  mempunyai sisi dan 0 jika tidak ada sisi diantaranya. Selain itu graf Petersen tidak mempunyai *loop*, sehingga diagonal utamanya selalu 0 karena  $a_{ii}, i = 1, 2, 3, \dots, n$  adalah 0. Salah satu permasalahan utama dari teori graf aljabar adalah menentukan sifat sifat graf yang direfleksikan dari teknik aljabar linear menggunakan matriks-matriks.

Berdasarkan pernyataan di atas peneliti tertarik dalam membahas bagaimana representatif matriks ketetanggaan pada graf Petersen dalam hal ini peneliti memberikan judul yaitu “**Sifat-Sifat Matriks Ketetanggaan Pada Graf Petersen**”.

## **B. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas perumusan masalah pada penelitian ini adalah “bagaimana sifat-sifat matriks ketetanggaan pada graf Petersen?”.

## **C. Pertanyaan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah, pendekatan yang digunakan dalam menjawab permasalahan yang diteliti mengenai sifat-sifat matriks

ketetanggaan pada graf Petersen dengan melakukan studi kepustakaan. Adapun pertanyaan penelitian pada penelitian ini adalah

1. Bagaimana bentuk matriks ketetanggaan pada graf Petersen?
2. Bagaimana nilai eigen matriks ketetanggaan pada graf Petersen?

#### **D. Tujuan Penelitian**

Berdasarkan permasalahan yang diajukan diatas maka tujuan yang hendak dicapai dari penelitian ini sebagai adalah

1. Mendeskripsikan bentuk matriks ketetanggaan pada graf Petersen
2. Menentukan nilai eigen matriks ketetanggan pada graf petersen

#### **E. Manfaat Penelitian**

Adapun manfaat penelitian yang diajukan adalah

1. Bagi Penulis

Untuk menambah pengetahuan, wawasan dan pemahaman materi serta menerapkan ilmu dan teori yang telah diperoleh dan dipelajari dalam proses perkuliahan dalam penelitian ini terkhususnya pada sifat sifat matriks ketetanggan pada graf Petersen.

2. Bagi Pembaca

Pada hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan pembelajaran, memberikan informasi lebih, dan menambah wawasan serta masukan terkhusus bagi teori mengenai sifat-sifat matriks ketetanggaan pada graf Petersen.

### 3. Bagi Lembaga

Pada hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan kepustakaan tambahan bagi pengajar akademik dan sebagai kajian lebih lanjut untuk mahasiswa.