

**METODE BOGACKI-SHAMPINE UNTUK MENYELESAIKAN  
PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE SATU**

**SKRIPSI**

**untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar sarjana sains**



**RAHMI MULIA**

**NIM. 18351**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI PADANG**

**2014**

## PERSETUJUAN SKRIPSI

Judul : Metode Bogacki-Shampine untuk Menyelesaikan Persamaan  
Diferensial Biasa Orde Satu  
Nama : Rahmi Mulia  
NIM : 18351  
Program Studi : Matematika  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 14 Agustus 2014

Disetujui Oleh

Pembimbing I



Muhammad Subhan, S. Si, M. Si  
NIP. 19701126 199903 1 002

Pembimbing II



Dra. Dewi Murni, M. Si  
NIP. 19670828 199203 2 002

## PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Nama : Rahmi Mulia  
NIM : 18351  
Program Studi : Matematika  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan judul

**Metode Bogacki-Shampine untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa  
Orde Satu**

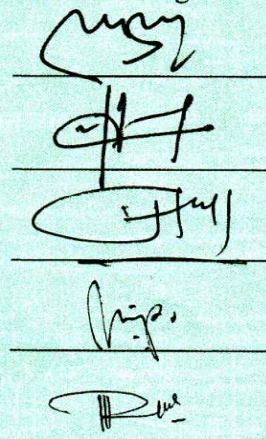
Dinyatakan Lulus Dipertahankan di Depan Tim Penguji Skripsi Program Studi  
Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Padang

Padang, 14 Agustus 2014

Tim Penguji

|            | Nama                              |
|------------|-----------------------------------|
| Ketua      | : M. Subhan, S. Si, M.Si          |
| Sekretaris | : Dra. Dewi Murni, M.Si           |
| Anggota    | : Dra. Hj. Helma , M.Si           |
| Anggota    | : Meira Parma Dewi, S.Si , M. Kom |
| Anggota    | : Riry Sriningsih, S.Si, M.Sc     |

Tanda Tangan



## SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

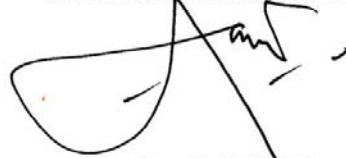
Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : RAHMI MULIA  
NIM/TM : 18351/2010  
Program Studi : MATEMATIKA  
Jurusan : MATEMATIKA  
Fakultas : MIPA UNP

Dengan ini menyatakan, bahwa skripsi saya dengan judul **“Metode Bogacki-Shampine untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu”** adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan Negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Diketahui oleh,  
Ketua Jurusan Matematika



**Dr. Armiati, M.Pd**  
**NIP.19630605 198703 2 002**

Saya yang menyatakan



**Rahmi Mulia**  
**NIM. 18351**

## ABSTRAK

### **Rahmi Mulia: Metode Bogacki-Shampine Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu**

Persamaan diferensial memegang peranan yang penting dalam kehidupan. Solusi persamaan diferensial dapat ditemukan dengan cara analitik maupun numerik. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan adalah metode Bogacki-Shampine. Metode ini termasuk metode orde rendah karena termasuk metode orde ketiga. Metode ini menggunakan formula *First Same As Last* (FSAL) yang menggunakan satu tambahan langkah untuk setiap iterasinya. Solusi yang diberikan lebih akurat dibandingkan metode orde tiga lainnya. Tujuan penelitian ini adalah menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu dengan menggunakan metode Bogacki-Shampine.

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis dengan mempelajari literatur mengenai persamaan diferensial dan metode numerik. Langkah kerja yang dilakukan adalah menelaah pembentukan formula metode Bogacki-Shampine. Selanjutnya menyusun algoritma untuk pembuatan program komputer metode Bogacki-Shampine, menerapkan algoritma yang telah dibuat ke dalam program komputer Maple, dan menyimpulkan hasil penelitian.

Berdasarkan studi kepustakaan yang dilakukan diperoleh kesimpulan bahwa untuk memperoleh hampiran solusi  $y_{r+1}$  dengan metode Bogacki-Shampine dilakukan penguraian  $k_1, k_2, \text{ dan } k_3$  dari bentuk umum Runge-Kutta orde-3 ke dalam deret Taylor di sekitar  $(x_r, y_r)$  sampai orde suku pertama. Selanjutnya, untuk memperoleh nilai dari masing-masing tetapan diasumsikan galat metodenya sama dengan 0, sehingga nilai solusi hampirannya sama dengan solusi sejati. Kemudian nilai-nilai tetapan yang diperoleh disubstitusikan ke bentuk umum Runge-Kutta orde 3. Pada tahap ini dilakukan evaluasi fungsi sehingga diperoleh solusi awal  $y_k$ . Selanjutnya dilakukan suatu pendekatan yang disebut *First Same As Last* (FSAL) yang berguna untuk mempercepat langkah. Setelah itu dilakukan kembali evaluasi fungsi sehingga menghasilkan  $yp_k$  yang merupakan solusi numerik dari persamaan diferensial biasa orde satu dengan menggunakan metode Bogacki-Shampine.

## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillah* aakhirabbil'aalamin. Segala puji hanya bagi Allah SWT., yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga peneliti dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ***“Metode Bogacki-Shampine untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu”***. Selanjutnya, sholawat dan salam semoga tetap tercurah kepada Nabi Muhammad saw. *Allaahumma Sholli 'alaa Muhammad wa 'alaa Ali Muhammad*.

Adapun tujuan peneliti menulis skripsi ini adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang. Keberhasilan peneliti dalam menyelesaikan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini dengan segala kerendahan hati peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Muhammad Subhan, M.Si., selaku Pembimbing I dan Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA UNP.
2. Ibu Dra. Dewi Murni, M.Si., selaku Pembimbing II dan Penasehat Akademik peneliti.
3. Ibu Dra. Hj. Helma, M.Si, Ibu Meira Parma Dewi, M.Kom, dan Ibu Riry Sriningsih, S.Si, M.Sc sebagai dosen penguji.
4. Ibu Dr. Armianti, M.Pd., Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNP.
5. Semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga semua bimbingan, bantuan, dan doa yang diberikan menjadi amal ibadah yang diridhoi Allah SWT. Peneliti sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak untuk perbaikan skripsi ini. Selanjutnya, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi peneliti dan Jurusan Matematika FMIPA UNP serta pembaca pada umumnya.

Padang, Agustus 2014

Peneliti

## DAFTAR ISI

|                                                           | Halaman |
|-----------------------------------------------------------|---------|
| <b>ABSTRAK</b> .....                                      | i       |
| <b>KATA PENGANTAR</b> .....                               | ii      |
| <b>DAFTAR ISI</b> .....                                   | iv      |
| <b>DAFTAR TABEL</b> .....                                 | v       |
| <b>DAFTAR GAMBAR</b> .....                                | vi      |
| <b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....                              | vii     |
| <b>BAB I. PENDAHULUAN</b>                                 |         |
| A. Latar Belakang .....                                   | 1       |
| B. Perumusan Masalah .....                                | 4       |
| C. Pendekatan Masalah dan Pertanyaan Penelitian .....     | 4       |
| D. Tujuan Penelitian .....                                | 5       |
| E. Manfaat Penelitian .....                               | 5       |
| F. Metodologi Penelitian .....                            | 6       |
| <b>BAB II. KAJIAN TEORI</b>                               |         |
| A. Persamaan Diferensial Biasa .....                      | 7       |
| B. Metode Numerik .....                                   | 11      |
| C. Metode Numerik untuk Persamaan Diferensial Biasa ..... | 13      |
| <b>BAB III. PEMBAHASAN</b>                                |         |
| A. Metode Bogacki-Shampine .....                          | 18      |
| B. Algoritma Metode Bogacki-Shampine .....                | 23      |
| <b>BAB IV. PENUTUP</b>                                    |         |
| A. Kesimpulan .....                                       | 30      |
| B. Saran .....                                            | 31      |
| <b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....                               | 33      |
| <b>LAMPIRAN</b> .....                                     | 34      |

## DAFTAR TABEL

|                                                                                                                                                             | Halaman |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Tabel 1 Hasil Perhitungan dan Perbandingan Galat untuk Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} = y - x$ , $y(0) = 2$ , $h = 0.05$ .....                        | 25      |
| Tabel 2 Solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu $\frac{dy}{dx} = xy + \sin(y)$ , $y(0) = 1$ , $h = 0.1$ , dengan Metode Bogacki-Shampine ..... | 28      |

## DAFTAR GAMBAR

|                                                                                                                                                                     | Halaman |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Gambar 1 Grafik Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} = y - x$ , $y(0) = 2$ , $h = 0.05$ .....                                    | 26      |
| Gambar 2 Grafik Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Diferensial $\frac{dy}{dx} = y - x$ , $y(0) = 2$ , $h = 0.05$ .....                       | 27      |
| Gambar 3 Grafik Solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu $\frac{dy}{dx} = xy + \sin(y)$ , $y(0) = 1$ , $h = 0.1$ , dengan Metode Bogacki-Shampine ..... | 29      |

## DAFTAR LAMPIRAN

|                                                                                                                  | <b>Halaman</b> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Lampiran 1 Program Maple Metode Bogacki-Shampine .....                                                           | 34             |
| Lampiran 2 Program Maple Metode Runge-Kutta Orde 3 .....                                                         | 35             |
| Lampiran 3 Program Maple Metode Runge-Kutta Orde 4 .....                                                         | 36             |
| Lampiran 4 Pembuktian Teorema Keujudan dan Ketunggalan<br>Solusi untuk Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu.... | 37             |

## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

#### **A. Latar Belakang**

Persamaan diferensial memegang peranan yang penting dalam berbagai aspek kehidupan. Hal tersebut disebabkan kebanyakan fenomena alam dirumuskan dalam bentuk persamaan diferensial. Hal ini sejalan dengan pendapat Shampine, Allen, dan Pruess (1997:221) yang menyatakan bahwa “Menurut sejarah, persamaan diferensial awalnya digunakan dalam bidang kimia, fisika, dan keahlian teknik. Namun belakangan ini, persamaan diferensial juga digunakan dalam bidang kedokteran, biologi, antropologi, dan sejenisnya”. Persamaan diferensial sering digunakan sebagai model matematika yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Secara garis besar persamaan diferensial dapat menggambarkan situasi fisik yang berhubungan dengan kecepatan perubahan suatu variabel terhadap variabel lainnya.

Salah satu contoh persamaan diferensial adalah persamaan laju reaksi peluruhan zat radioaktif, yaitu  $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ . Persamaan tersebut menunjukkan bahwa laju perubahan jumlah zat radioaktif pada waktu tertentu sebanding dengan jumlah zat yang ada pada waktu tersebut.

Solusi persamaan diferensial dapat ditemukan dengan cara analitik maupun numerik. Metode analitik disebut juga metode sejati karena ia memberikan solusi sejati (*exact solution*) atau solusi yang sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki galat (*error*) sama dengan nol. Sayangnya, metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri

sederhana. Padahal persoalan yang muncul dalam dunia nyata seringkali tidak linear serta melibatkan bentuk dan proses yang rumit. Akibatnya, nilai praktis penyelesaian metode analitik menjadi terbatas. Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan sebenarnya masih dapat dicari dengan menggunakan metode numerik.

Menurut Munir (2008:5)

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Bandingkan dengan metode analitik yang biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Kedua, dengan metode numerik, kita hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan, namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang kita inginkan. Solusi hampiran jelas tidak sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*).

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik, ada beberapa metode yang dapat digunakan. Metode-metode tersebut diantaranya metode Euler, metode Deret Taylor, metode Runge-Kutta, dan metode Bogacki-Shampine. Metode-metode ini merupakan metode satu langkah dan hanya digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu.

Metode Euler merupakan metode deret Taylor orde-1. Artinya, metode Euler merupakan metode yang menggunakan deret Taylor dan dipotong sampai suku orde pertama. Sedang metode deret Taylor sendiri adalah suatu metode pendekatan yang menggunakan deret Taylor sebagai bentuk perbaikan nilai untuk nilai fungsi secara keseluruhan pada penyelesaian persamaan diferensial. Namun, penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan deret Taylor kurang

praktis karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan  $f(x,y)$ . Lagi pula, tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit.

Metode Runge-Kutta adalah metode yang tidak membutuhkan perhitungan turunan fungsi  $f(x,y)$  sehingga metode ini menjadi metode yang sering digunakan. Sebagai ganti dari turunan-turunan tersebut maka dilakukan evaluasi fungsi  $f(x,y)$  pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Pada metode Runge-Kutta, semakin tinggi orde metodenya, maka ketelitian solusi yang diperoleh akan semakin baik.

Munir (2008:389) menyatakan bahwa “Metode Runge-Kutta yang terkenal dan banyak dipakai dalam praktek adalah metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Runge-Kutta orde empat. Kedua metode tersebut terkenal karena tingkat ketelitian solusinya tinggi”. Sejalan dengan hal tersebut, menurut Munir (2008:391) “Metode Runge-Kutta orde yang lebih tinggi akan memberikan solusi yang lebih teliti. Namun hal tersebut menjadikan jumlah komputasi juga semakin banyak”. Artinya, dari kedua metode tersebut, Runge-Kutta orde empat mempunyai solusi yang lebih teliti daripada Runge-Kutta orde tiga. Namun, hal tersebut menyebabkan komputasi Runge-Kutta orde empat lebih banyak dibandingkan Runge-Kutta orde tiga. Oleh karena itu, terdapat suatu metode modifikasi dari Runge-Kutta orde tiga yang dapat memberikan solusi yang lebih teliti dibandingkan dengan metode standar Runge-Kutta orde tiga. Solusi yang diperoleh akan mendekati ketelitian solusi Runge-Kutta orde empat, namun

dengan komputasi yang lebih sedikit dibandingkan Runge-Kutta orde empat. Metode tersebut adalah metode Bogacki-Shampine.

Dalam metode Bogacki-Shampine ini, Przemyslaw Bogacki dan Lawrence F. Shampine menawarkan suatu hal yang menarik dari metode Runge-Kutta. Metode ini termasuk metode orde rendah karena termasuk metode Runge-Kutta orde tiga. Metode ini menggunakan sebuah formula yang disebut *First Same As Last* (FSAL), yaitu sebuah formula yang berguna untuk mempercepat langkah. Akibatnya, metode ini memberikan solusi numerik yang lebih akurat dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde tiga (Bogacki dan Shampine, 1989: 321-325). Hal ini berarti metode Bogacki-Shampine dapat memberikan solusi numerik yang akurat dengan komputasi yang tidak terlalu banyak.

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti tertarik untuk menelaah penggunaan metode Bogacki-Shampine untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu. Untuk itu penelitian ini diberi judul “**Metode Bogacki-Shampine untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu**”.

## **B. Perumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah “Bagaimana penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu dengan metode Bogacki-Shampine?”

## **C. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian**

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kepustakaan dengan berpedoman pada berbagai buku dan sumber-sumber yang relevan

terhadap permasalahan solusi numerik untuk persamaan diferensial biasa, khususnya untuk solusi numerik dengan metode Bogacki-Shampine.

Sesuai dengan rumusan masalah, maka pertanyaan penelitian yang diajukan pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana proses pembentukan formula metode Bogacki-Shampine untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu?
2. Bagaimana algoritma dari metode Bogacki-Shampine untuk solusi numerik persamaan diferensial biasa orde satu?

#### **D. Tujuan Penelitian**

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menelaah proses pembentukan formula metode Bogacki-Shampine untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu.
2. Membuat algoritma dari metode Bogacki-Shampine untuk solusi numerik persamaan diferensial orde satu.

#### **E. Manfaat Penelitian**

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan tambahan wawasan dan ilmu pengetahuan bagi peneliti dan pembaca mengenai analisis numerik, khususnya metode yang digunakan untuk menemukan solusi numerik persamaan diferensial biasa.
2. Sebagai bahan acuan bagi mahasiswa di bidang analisis numerik terutama tentang metode yang digunakan untuk mencari solusi numerik persamaan diferensial biasa.

3. Sebagai bahan masukan bagi peneliti selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian.

#### **F. Metodologi Penelitian**

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dengan berlandaskan pada kajian kepustakaan. Dalam meninjau permasalahan yang akan dihadapi, langkah kerja yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari literatur mengenai persamaan diferensial dan metode numerik.
2. Menelaah pembentukan formula metode Bogacki-Shampine untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu.
3. Mengkaji prinsip penggunaan metode Bogacki-Shampine untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu.
4. Menyusun algoritma untuk pembuatan program komputer metode Bogacki-Shampine untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu.
5. Menerapkan algoritma yang telah dibuat ke dalam program komputer "Maple".
6. Menyimpulkan hasil penelitian.