PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL) DENGAN DEKOMPOSISI QR

SKRIPSI

Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Memperoleh Gelar Sarjana Sains

SHELVIA MANDASARI
NIM. 17445

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2014

PERSETUJUAN SKRIPSI

Judul	:	Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) Dengan Dekomposisi QR
Nama	:	Shelvia Mandasari
NIM	:	17445
Program Studi	:	Matematika
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 27 Januari 2014

Disetujui oleh,

Pembimbing I	Pembimbing II
Muhammad Subhan, S.Si, M. Si	Meira Parma Dewi, S.Si, M.Kom
NIP. 19701126 199903 1 002	NIP. 19820511 200604 2 001

PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Nama	:	Shelvia Mandasari
NIM	:	17445
Program Studi	:	Matematika
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

dengan judul

Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) Dengan Dekomposisi QR

Dinyatakan Lulus Setelah Dipertahankan di Depan Tim Penguji Skripsi
Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 27 Januari 2014

Tim Penguji,

		Nama	Tanda Tangan
Ketua	:	Muhammad Subhan, S.Si, M.Si	
Sekretaris	:	Meira Parma Dewi, S.Si, M.Kom	
Anggota	:	Dra. Dewi Murni, M.Si	
Anggota	:	Drs. Yusmet Rizal, M.Si	
Anggota	:	Suherman, S.Pd, M.Si	

ABSTRAK

Shelvia Mandasari: Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) Dengan Dekomposisi QR

Banyak cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan SPL dengan metode numerik, salah satunya adalah dekomposisi matriks. Dari beberapa dekomposisi matriks yang diketahui, dekomposisi QR merupakan salah satu dekomposisi yang cukup efektif karena dalam penyelesaiannya hanya melibatkan proses Gram Schmidt dan ruang hasil kali dalam sehingga kemungkinan kesalahan yang terjadi akan lebih sedikit. Disamping itu, dalam Aljabar Linear dekomposisi ini dapat diterapkan secara luas. Dekomposisi ini sering diterapkan pada SPL AX=B dimana matriks koefisiennya berukuran *n*x*n* yang mempunyai rank penuh.

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis dengan mengkaji teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan yang dibahas. Selanjutnya, pendekatan masalah yang dilakukan dengan studi kepustakaan yang berkaitan dengan matriks, SPL, vektor, ruang hasil kali dalam, proses Gram Schmidt, algoritma, dan metode numerik.

Berdasarkan studi kepustakaan yang dilakukan diperoleh kesimpulan untuk memperoleh solusi hampiran dari suatu SPL AX=B dimana A adalah matriks *n*x*n* yang mempunyai rank penuh dapat didekomposisi menjadi perkalian matriks Q dan R, Q adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah basis ortonormal dan R adalah matriks segitiga atas sehingga SPL AX=B menjadi QRX=B. Langkah-langkah untuk mencari solusinya adalah sebagai berikut: bentuk matriks koefisien A menjadi vektor-vektor kolom $[u_1 \vdots u_2 \vdots \cdots \vdots u_n]$, lakukan proses ortogonalisasi terhadap vektor-vektor tersebut sehingga diperoleh $v_1, v_2, \dots, v_n$. Selanjutnya lakukan proses normalisasi sehingga terbentuk $q_1, q_2, \dots, q_n$. Dari vektor-vektor yang telah dinormalisasi diperoleh matriks Q yang kolom-kolomnya adalah $q_1, q_2, \dots, q_n$. Selanjutnya bentuk matriks R dengan $R=Q^TA$ sehingga diperoleh A=QR. Selanjutnya SPL diselesaikan dengan cara QY=B dan RX=Y sehingga akan diperoleh $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang merupakan solusi hampiran dari SPL tersebut.

KATA PENGANTAR

Puji syukur peneliti ucapkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karuniaNya sehingga peneliti dapat menyelesaikan Skripsi ini yang berjudul "Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) Dengan Dekomposisi QR". Selanjutnya, salawat beserta salam untuk nabi besar Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi umat seluruh alam.

Adapun tujuan peneliti menulis Skripsi ini adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang. Keberhasilan peneliti dalam menyelesaikan Skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan kali ini dengan segala kerendahan hati peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Muhammad Subhan, M.Si sebagai Penasehat Akademik, Pembimbing I, dan Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA UNP.
2. Ibu Meira Parma Dewi, M. Kom sebagai Pembimbing II.
3. Ibu Dra. Dewi Murni, M.Si, Drs. Yusmet Rizal, M.Si dan Suherman, S. Pd, M.Si sebagai Penguji.
4. Ibu Dr. Armiati, M.Pd sebagai Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNP.
5. Bapak dan Ibu Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA UNP.
6. Seluruh Staf Labor Komputer Jurusan Matematika FMIPA UNP.
7. Karyawan dan segenap civitas Akademi Matematika FMIPA UNP.

8. Rekan-rekan seperjuangan, khususnya rekan Mahasiswa Program Studi Matematika FMIPA UNP angkatan 2010.

Semoga bimbingan dan dukungan yang telah diberikan menjadi amal ibadah disisiNya. Peneliti menyadari bahwa Skripsi ini masih terdapat kekurangan. Untuk itu, peneliti mengharapkan adanya kritikan dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Skripsi ini. Harapan peneliti, semoga Skripsi ini memberikan manfaat bagi peneliti dan Jurusan Matematika FMIPA UNP serta seluruh pembaca pada umumnya. Amin.

Padang, Januari 2014

Peneliti

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Salah satu topik dalam Aljabar Linear yang sering dibicarakan adalah SPL. Banyak sekali permasalahan dapat diselesaikan dengan cara mengubah permasalahan tersebut menjadi suatu SPL. SPL adalah sejumlah tertentu persamaan linear dalam variabel $x_1, x_2, \ldots x_n$ yang secara umum berbentuk:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau AX=B, dengan A adalah matriks berukuran *m*x*n*, X adalah matriks berukuran *n*x1, dan B adalah matriks berukuran *m*x1.

Permasalahan yang melibatkan SPL muncul dalam berbagai disiplin ilmu seperti ilmu Matematika, Ekonomi, Kimia, Fisika, dan sebagainya. Misalnya suatu perusahaan meminjam Rp. 2.250.000.000,00 dari tiga bank yang berbeda untuk memperluas jangkauan bisnisnya. Misalkan besar pinjaman pada bank pertama adalah x_1, pinjaman pada bank kedua adalah x_2, dan pinjaman pada bank ketiga adalah x_3. Suku bunga dari ketiga bank tersebut adalah 5%, 6%, dan 7%. Tentukan berapa pinjaman perusahaan tersebut terhadap masing-masing bank jika bunga tahunan yang harus dibayar perusahaan adalah Rp. 130.000.000,00 dan banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%. Untuk menyelesaiakan permasalahan ini dapat dituliskan dalam SPL dengan 3 persamaan dan 3 variabel. Permasalahan tersebut akan bermakna jika solusinya ada dan dapat dicari, dimana solusi yang dimaksud adalah nilai x_1, x_2, x_3 yang memenuhi SPL tersebut.

Menurut Anton-Rorres (2004:4) "Terdapat tiga kemungkinan solusi dari suatu Sistem Persamaan Linear yaitu memiliki tepat satu solusi, tidak memiliki solusi dan memiliki takterhingga banyaknya solusi". Dalam berbagai penerapan di kehidupan sehari-hari lebih banyak ditemui SPL yang memiliki tepat satu solusi. Ini berarti hanya ada satu solusi yang diperoleh pada SPL tersebut. Hal ini tentu saja banyak diterapkan dalam kehidupan misalnya pada kasus di atas. SPL yang memiliki tepat satu solusi ditandai dengan matriks koefisien dari SPL tersebut mempunyai rank penuh.

Jika suatu SPL hanya terdiri dari 3 persamaan dan 3 variabel seperti permasalahan di atas maka secara analitik dapat diselesaikan dengan mudah, namun dapat dibayangkan jika yang melakukan pinjaman adalah perusahan besar sehingga perusahaan tersebut melakukan pinjaman kepada banyak bank dengan permasalahan yang lebih kompleks. Hal ini akan mengakibatkan SPL yang terbentuk adalah SPL dengan *n* persamaan dan *n* variabel sehingga matriks koefisiennya berukuran semakin besar yakni berukuran *n*x*n*.

Seiring semakin besarnya ukuran matriks koefisien maka penyelesaian secara analitik tidak efektif karena memerlukan waktu yang lama ataupun langkah penyelesaian yang banyak untuk mendapatkan solusinya. Sehingga SPL tersebut diselesaikan secara numerik. Disamping itu, permasalahan-permasalahan SPL sulit diselesaiakan secara analitik disebabkan adanya keterbatasan ilmu, kemampuan manusia dan tingkat kesulitan persamaan yang diberikan. Penyelesaian SPL secara analitik akan efektif jika ukuran matriks koefisien dari SPL tersebut berukuran kecil $(n \leq 3)$ dan jika SPL yang diselesaikan memiliki matriks koefisien berukuran besar $(n > 3)$, penyelesaian secara numerik akan lebih efektif daripada analitik.

Hal ini sependapat dengan I Nyoman Susila (1992:2) yang menyatakan bahwa:

> Penyelesaian suatu masalah Matematika secara umum dapat diklasifikasikan atas penyelesaian analitik dan numerik. Penyelesaian analitik adalah penyelesaian yang dapat dilakukan secara sederhana dan tanpa menggunakan alat bantu hitung yang memberikan solusi eksak (sebenarnya) yaitu solusi yang memiliki galat (*error*) nol sedangkan penyelesaian secara numerik adalah penyelesaian yang membutuhkan alat bantu hitung yang memberikan solusi hampiran yang biasanya digunakan untuk persamaan yang rumit.

Banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan SPL secara numerik diantaranya cara Cramer, Invers Matriks, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss Jordan dan Dekomposisi Matriks. Metode-metode ini dikenal dengan hitungan langsung yaitu hitungan yang selesaiannya langsung didapat melalui serangkaian operasi hitung (tambah, kurang, kali, bagi dan sebagainya) sedangkan iterasi Jacobi dan Gauss Seidel merupakan penyelesaian yang dikenal dengan iterasi atau hitungan tak langsung yaitu hitungan yang penyelesaiannya diperoleh dengan melakukan pengulangan pada suatu hitungan langsung yang dimulai dengan tebakan awal terhadap selesaian, kemudian diperbaiki atau diperhalus sampai diperoleh hampiran terhadap selesaian yang diinginkan.

Metode Cramer adalah metode yang memanfaatkan determinan matriks koefisien dan determinan matriks konstanta yang disandingkan dengan matriks koefisien untuk mencari solusinya. Metode ini kurang efektif seiring bertambah besarnya ukuran matriks koefisien. Hal ini menyebabkan sulitnya mencari determinan dari matriks tersebut. Metode eliminasi Gauss dan Gauss Jordan adalah metode penyelesaian dengan mengubah matriks koefisien yang digandeng dengan matriks konstanta menjadi matriks eselon baris dan matriks eselon baris tereduksi. Metode ini cukup rumit karena untuk menghasilkan matriks eselon baris dan eselon baris tereduksi memerlukan langkah yang banyak dan rumit. Cara yang dinilai cukup efektif dalam menyelesaikan SPL dengan hitungan langsung adalah dekomposisi matriks. Dekomposisi matriks adalah faktorisasi sebuah matriks menjadi perkalian dua buah matriks yang banyak diterapkan pada matriks berukuran besar. Beberapa dekompisisi matriks mengenai penyelesaian SPL adalah dekomposisi Cholesky, Schur, dekomposisi LU, QR dan sebagainya.

Dekomposisi LU adalah dekomposisi yang memfaktorisasi sebuah matriks L (Lower Triangular) dan U (Upper Triangular). Faktorisasi ini dapat diperoleh dengan pemfaktoran Doolittle dan Crout. Dekomposisi ini sangatlah rumit dan kompleks karena untuk menghasilkan matriks L dan U dibutuhkan proses Operasi Baris Elementer yang panjang. Dekomposisi Cholesky adalah dekomposisi yang penerapannya hanya terbatas pada matriks hermitian definit positif yang menggunakan banyak langkah menuju penyelesaiannya sedangkan dekomposisi Schur digunakan pada matriks persegi sebagai perkalian matriks-matriks uniter dengan matriks segitiga atas. Dekomposisi di atas dirasa tidak efektif dan efisien. Salah satu dekomposisi matriks yang cukup efektif adalah dekomposisi QR. Dekomposisi QR adalah faktorisasi sebuah matriks menjadi matriks Q dan R, dimana Q adalah matriks yang kolom-kolomya basis ortonormal yang diperoleh dari proses Gram-Schmidt, sedangkan matriks R adalah matriks segitiga atas yang berukuran *n*x*n*. Dekomposisi ini cukup efektif karena hanya melibatkan proses Gram-Schmidt dalam penyelesaiannya sehingga kemungkinan kesalahan yang terjadi akan lebih sedikit. Disamping itu, dalam perhitungan Aljabar Linear dekomposisi ini dapat diterapkan secara luas dan metode ini menjamin stabilitas numerik dengan meminimalkan kesalahan.

Melihat permasalahan di atas penulis sangat tertarik membahas penyelesaian SPL dengan dekomposisi QR. Oleh karena itu, penelitian ini diberi judul **"Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) Dengan Dekomposisi QR".**

B. Batasan Masalah

Pada penelitian ini SPL yang diselesaikan hanya untuk SPL dengan matriks koefisien berukuran *n*x*n* yang mempunyai rank penuh.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan batasan masalah di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah “Bagaimana menyelesaikan SPL dengan matriks koefisiennya berukuran *n*x*n* yang mempunyai rank penuh dengan dekomposisi QR ?”

D. Pertanyaan Penelitian

Adapun pertanyaan penelitian yang diajukan adalah:

1. Bagaimana algoritma dekomposisi QR dalam menyelesaikan SPL dengan matriks koefisiennya berukuran *n*x*n* yang mempunyai rank penuh?
2. Bagaimana program dekomposisi QR dalam menyelesaikan SPL dengan matriks koefisiennya berukuran *n*x*n* yang mempunyai rank penuh?

E. Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang diajukan di atas maka tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Untuk membuat algoritma dekomposisi QR dalam menyelesaikan solusi numerik dari suatu SPL dengan matriks koefisiennya berukuran *n*x*n* yang mempunyai rank penuh.
2. Untuk membuat program dekomposisi QR dalam menyelesaikan solusi numerik dari suatu SPL dengan matriks koefisiennya berukuran *n*x*n* yang mempunyai rank penuh.

F. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian ini adalah:

1. Memberikan alternatif menentukan solusi numerik SPL yang berukuran besar dengan matriks koefisiennya berukuran *nxn* yang mempunyai rank penuh dengan dekomposisi QR.
2. Sebagai bahan acuan belajar bagi mahasiswa di bidang analisis numerik terutama tentang penyelesaian solusi numerik SPL dengan dekomposisi QR.
3. Sebagai bahan masukan untuk peneliti selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan pada penelitian ini.

G. Metodologi Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan analisa teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas serta berlandaskan pada studi kepustakaan.

Dalam melaksanakan penelitian ini, peneliti mulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan bahan rujukan, mengaitkan teori-teori yang didapat dengan permasalahan sehingga dapat menjawab permasalahan, dan terakhir menarik kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas.

Adapun langkah-langkah kerja dari penelitian ini adalah :

1. Mempelajari studi literatur yang mengkaji tentang matriks, SPL, vektor, hasil kali dalam, proses Gram Schmidt, algoritma dan metode numerik.
2. Menelaah proses Gram Schmidt untuk mendapatkan sebuah algoritma untuk proses Gram Schmidt.

3. Mengembangkan algoritma Gram Schmidt untuk mendapatkan sebuah dekomposisi matriks.
4. Menuangkan algoritma yang telah dibuat menjadi sebuah program penyelesain SPL dengan dekomposisi QR.
5. Menyimpulkan hasil dari penelitian.