

**BILANGAN KROMATIK PERMAINAN DARI
GRAF HASIL KALI KARTESIUS**

TUGAS AKHIR

*Diajukan Kepada Tim Penguji Tugas Akhir Jurusan Matematika
sebagai Salah Satu Persyaratan Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains*



Oleh

RINI OKTAFIA

NIM. 64330

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2011**

PERSETUJUAN TUGAS AKHIR
BILANGAN KROMATIK PERMAINAN DARI
GRAF HASIL KALI KARTESIUS

Nama : Rini Oktafia
NIM : 64330
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 30 November 2011

Disetujui oleh

Pembimbing I,

Drs. H. Yarman, M.Pd
NIP. 19611020 198602 1 001

Pembimbing II,

Drs. H. Mukhni, M.Pd
NIP. 19591029 198503 1 001

PENGESAHAN

**Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Tugas Akhir
Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang**

Judul : Bilangan Kromatik Permainan Dari Graf Hasil Kali Kartesius
Nama : Rini Oktafia
NIM : 64330
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 21 Januari 2011

Tim Penguji

Nama

Tanda Tangan

1. Ketua	: Drs. H. Yarman, M.Pd	1. _____
2. Sekretaris	: Drs. H. Mukhni, M.Pd	2. _____
3. Anggota	: Prof. Dr. A. Fauzan, M.Pd, M.Sc	3. _____
4. Anggota	: Drs. Edwin Musdi, M.Pd	4. _____
5. Anggota	: Dra. Nonong Amalita, M.Si	5. _____

SURAT PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa tugas akhir ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang lazim.

Padang, Januari 2011

Yang menyatakan

Rini Oktafia

ABSTRAK

Rini Oktafia : Bilangan Kromatik Permainan dari Graf Hasil Kali Kartesius

Permainan bilangan kromatik disebut juga permainan mewarnai, yang diperkenalkan oleh Bartnicki *et al.* (2008). Permainan ini dimainkan oleh 2 orang pemain, misalnya A pemain pertama dan B pemain kedua dengan menggunakan graf G dan k warna $(1, 2, \dots, k)$. Tujuan dari permainan ini adalah kedua pemain memberikan warna pada setiap titik pada graf G secara bergantian dengan ketentuan setiap titik yang bertetangga tidak boleh mempunyai warna yang sama. A berusaha agar semua titik di G terwarnai, sedangkan B melawan agar terdapat titik yang tidak terwarnai di G . Jika semua titik di G terwarnai A yang menang, sebaliknya apabila ada titik di G yang tidak terwarnai maka B yang menang. Bilangan k terkecil sehingga pemain pertama mempunyai strategi menang di G dengan menggunakan k warna disebut dengan *bilangan kromatik permainan dari G* , dinotasikan dengan $\chi_g(G)$. Apabila dilakukan permainan maka didapatkan bilangan kromatik permainan dari graf G , sehingga timbul pertanyaan berapakah bilangan kromatik permainan dari graf G dan bagaimana cara mendapatkannya. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan rumusan umum bilangan kromatik permainan dari graf hasil kali kartesius yaitu graf buku dan graf grid.

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan menganalisis teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan pada studi kepustakaan. Pendekatan yang dilakukan adalah studi kepustakaan tentang graf, bilangan kromatik, bilangan kromatik permainan dan graf hasil kali kartesius.

Berdasarkan studi kepustakaan, maka didapatkan bilangan kromatik permainan graf hasil kali kartesius pada graf buku $P_2 \times K_{1,n}$ dan graf grid $P_m \times P_n$ agar pemain pertama mempunyai strategi menang. Pertama ditentukan dulu banyak warna yang tersedia untuk kedua graf, dengan menggunakan teorema batas bawah dan batas atas yaitu $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta + 1$. Setelah itu melakukan permainan dengan mewarnai semua titik pada graf dengan ketentuan pewarnaan graf, dimana titik yang bertetangga tidak boleh mempunyai warna yang sama. Dari prosedur tersebut diperoleh rumusan umum bilangan kromatik permainan dari graf hasil kali kartesius yaitu graf buku

$$\chi_g(P_2 \times K_{1,n}) = 3 \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \dots$$

dan graf grid.

$$\chi_g(P_m \times P_n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } m = n = 1 \\ 2, & \text{untuk } (m = 2, n = 1) \text{ dan } (m = 3, n = 1) \\ 3, & \text{untuk } (m = 2, n = 2), (m = 3, n = 2) \text{ dan } (m \geq 4, n = 1) \\ 4, & \text{untuk } (m = 3, n = 3) \text{ dan } (m \geq 4, n \geq 3) \end{cases}$$

KATA PENGANTAR



Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis ucapkan kehadiran Allah SWT atas segala karunia dan limpahan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini yang diberi judul **“Bilangan Kromatik Permainan dari Graf Hasil Kali Kartesius”**. Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada jurusan Matematika FMIPA UNP.

Dalam pelaksanaan dan penulisan tugas akhir ini penulis banyak mendapat bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. H. Yarman, M. Pd, pembimbing I yang telah memberikan arahan dan saran-saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak Drs. H. Mukhni, M. Pd, pembimbing II yang telah memberikan dorongan dan saran-saran demi kesempurnaan tugas akhir ini.
3. Bapak Prof. Dr. A. Fauzan, M.Pd, M.Sc, Bapak Drs. Edwin Musdi, M.Pd, Tim penguji yang telah memberikan masukan yang berarti demi kesempurnaan tugas akhir ini.
4. Ibu Dra. Nonong Amalita, M.Si Tim Penguji Tugas Akhir dan Penasehat Akademik.
5. Bapak Drs. Lutfian Almash, M. Si, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang

6. Bapak/Ibu Dosen Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Padang
7. Seluruh staf labor Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri
Padang
8. Sahabat-sahabat angkatan 2005 Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Padang

Semoga segala bimbingan, bantuan dan dorongan yang telah diberikan menjadi amal ibadah dan mendapat balasan yang berlipat ganda disisi-Nya, Amin.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penelitian ini masih banyak terdapat kekurangan dan kelemahan. Untuk itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhirat ini. Mudah-mudahan tugas akhir ini bermanfaat bagi yang membacanya.

Padang, Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
ABSTRAK	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR.....	vi
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang	1
B. Batasan Masalah.....	5
C. Perumusan Masalah.....	5
D. Pendekatan Masalah.....	5
E. Pertanyaan Penelitian.....	6
E. Tujuan Penelitian	6
F. Manfaat Penelitian	6
G. Metode Penelitian	7
BAB II TINJAUAN KEPUSTAKAAN.....	8
A. Graf	8
1. Pengertian Graf.....	8
2. Istilah Dalam Graf	9
3. Jenis-jenis Graf.....	11
4. Beberapa Graf Sederhana Khusus.....	14
5. Graf Hasil Kali Kartesius	15

B. Hasil Kali Himpunan.....	22
1. Pasangan terurut.....	22
2. Hasil Kali Himpunan.....	22
C. Pewarnaan Graf	23
1. Pewarnaan Titik pada Graf.....	24
2. Bilangan Kromatik pada Graf.....	25
D. Permainan Bilangan Kromatik.....	25
BAB III PEMBAHASAN.....	35
A. Bilangan Kromatik Permainan dari Graf Buku $(P_2 \times K_{1,n})$	35
B. Bilangan Kromatik Permainan dari Graf Grid $(P_m \times P_n)$	43
BAB IV PENUTUP	60
A. Kesimpulan	60
B. Saran	60
DAFTAR PUSTAKA.....	61

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1. Graf Isomorfik.....	11
2. Graf sederhana dan graf tak sederhana	12
3. Graf berarah dan graf tak berarah	13
4. Graf terhubung	13
5. Graf Lingkaran (C_n)	14
6. Graf Bipartit (K_n)	14
7. Graf Bipartit Lengkap	15
8. Graf Lintasan P_2 dan Graf Bintang $K_{1,6}$	17
9. Graf Buku ($P_2 \times K_{1,6}$)	19
10. Dua Buah Graf Lintasan P_3	20
11. Graf grid ($P_3 \times P_3$).....	22
12. Graf G dengan 3 buah warna	24

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Graf merupakan salah satu bahasan dalam matematika diskrit yang menarik dan dapat digunakan untuk menyelesaikan banyak permasalahan. Rinaldi Munir (2005:353) mengemukakan bahwa “Pada umumnya graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antar objek-objek tersebut dan juga dapat digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan sehingga menjadi lebih mudah”. Contoh permasalahan yang dapat dimodelkan dengan menggunakan graf yaitu pada penggambaran rangkaian listrik, senyawa kimia, jaringan komunikasi, analisis algoritma, peta, struktur hierarki sosial dan lain – lain.

Menurut Rinaldi Munir (2005:356), “Secara umum graf merupakan pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan tak kosong dari titik-titik (*vertex* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan dua buah titik pada suatu graf”. Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa bagian. Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau gelang, graf dibedakan atas graf sederhana dan graf tidak sederhana, berdasarkan orientasi arah pada sisi graf dibedakan atas graf berarah (*directed graph*) dan graf tidak berarah (*undirected graph*), berdasarkan keterhubungannya graf dibedakan atas graf terhubung (*connected graph*) dan graf tak terhubung (*disconnected graph*).

Kemudian terdapat beberapa graf sederhana khusus lainnya yaitu graf siklus (*cycle*), graf bipartit, graf bipartit lengkap dan graf hasil kali kartesius.

Graf hasil kali kartesius merupakan perkalian dua buah graf, misalnya hasil kali kartesius dari graf G_1 dengan G_2 yang dinotasikan dengan $G_1 \times G_2$ adalah graf dengan himpunan titik

$$V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2 = \{(u_i, v_j) | u_i \in V(G_1), v_j \in (G_2)\}$$

dan himpunan sisi

$$E(G_1 \times G_2) = \left\{ (u_i, v_j)(u_k, v_l) | u_i = u_k \text{ dan } v_j v_l \in EG_2 \right. \\ \left. \text{atau } v_j = v_l \text{ dan } u_i u_k \in E(G_1) \right\}$$

(<http://mipa.itb.co.id/>)

Beberapa Graf hasil kali kartesius diantaranya graf tangga, graf prisma, graf buku, graf grid.

Dalam graf terdapat beberapa topik misalnya pewanaan graf (*graph colouring*), pelabelan graf (*graph labeling*), penjodohan (*matching*). Namun yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah tentang pewarnaan graf (*graph colouring*). Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada beberapa subjek graf. Masalah pewarnaan graf diyakini pertama kali muncul sebagai masalah pewarnaan peta, dimana warna setiap daerah pada peta yang berbatasan dibuat berlainan sehingga mudah untuk dibedakan. Rinaldi Munir (2005:425) mengemukakan bahwa “ terdapat tiga macam pewarnaan graf yaitu pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*) dan pewarnaan

wilayah (*face colouring*)". Disini peneliti hanya membahas tentang pewarnaan titik, karena yang akan diwarnai adalah semua titik pada graf G tersebut.

Masalah utama dalam pewarnaan titik adalah bagaimana mewarnai semua titik pada graf sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Dua titik dikatakan bertetangga jika mereka dihubungkan oleh sebuah sisi. Hal ini kemudian dikaitkan dengan penggunaan warna yang seminimum mungkin. Banyaknya warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai semua titik disebut dengan *bilangan kromatik* dari graf G , dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Masalah pewarnaan graf ini memiliki banyak aplikasi di berbagai bidang misalnya, membuat jadwal, penentuan frekuensi untuk radio, pencocokan pola. Masalah ini bahkan telah berkembang luas menjadi sebuah permainan, salah satu di antaranya adalah *Permainan Bilangan Kromatik*.

Permainan Bilangan Kromatik disebut juga permainan mewarnai, yang diperkenalkan oleh Bartnicki *et al.* (2008). Permainan ini dimainkan oleh 2 orang pemain, misalnya A pemain pertama dan B pemain kedua dengan menggunakan graf G dan k warna $(1, 2, \dots, k)$. Kemudian kedua pemain secara bergantian mewarnai setiap titik yang ada pada graf G dengan ketentuan setiap titik yang bertetangga tidak boleh mempunyai warna yang sama. A berusaha agar semua titik di G terwarnai, sedangkan B melawan agar terdapat titik yang tidak terwarnai di G . Jika semua titik di G terwarnai A yang menang, sebaliknya apabila ada titik di G yang tidak terwarnai maka B yang menang. Bilangan k terkecil sehingga pemain pertama mempunyai strategi menang di G

dengan menggunakan k warna disebut dengan bilangan kromatik permainan, dinotasikan dengan $\chi_g(G)$. Apabila permainan ini dilakukan akan menghasilkan rumusan umum bilangan kromatik permainan dari graf G , sehingga pemain pertama mempunyai strategi menang. Dimana warna yang digunakan untuk mewarnai graf G dalam permainan ini adalah sebanyak batas bawah dan batas atas yang telah dikemukakan oleh Bartnicki *et al*, yang menjadi permasalahan bagaimana cara mendapatkan bilangan kromatik permainan dari graf G dan berapa bilangan kromatiknya, sehingga diperoleh rumusan umum dari graf G .

Pada makalah yang berjudul “*Game Chromatic number of Cartesian Product Graphs*” Barnicki *et al*, mendapatkan rumusan umum untuk permainan bilangan kromatik graf hasil kali kartesius pada graf tangga dan graf prisma. Kemudian Norma Hayati seorang mahasiswa Institut Teknologi Bandung (ITB) mendapatkan rumusan umum permainan bilangan kromatik graf hasil kali kartesius lainnya pada graf buku dan graf grid, tetapi dia tidak menjelaskan mengapa rumusan itu dapat dibentuk. Dari hal tersebut peneliti tertarik untuk melakukan penelitian kembali dan menjelaskan lebih lanjut, bagaimana rumusan itu dapat dibentuk. Oleh karena itu tugas akhir ini diberi judul “Bilangan Kromatik Permainan dari Graf Hasil Kali Kartesius”.

B. Batasan Masalah

Agar penelitian ini lebih terarah dan sesuai dengan kemampuan penulis maka penulis membatasi masalah yang akan diteliti yaitu sebagai berikut:

1. Mencari bilangan kromatik permainan graf hasil kali kartesius dari graf buku $P_2 \times K_{l,n}$, agar pemain pertama mempunyai strategi menang, dimana $n = 1, 2, 3, \dots$
2. Mencari bilangan kromatik permainan graf hasil kali kartesius dari graf grid $P_m \times P_n$, agar pemain pertama mempunyai strategi menang, dimana $m = 1, 2, 3, \dots$ dan $n = 1, 2, 3, \dots$

C. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: “Berapakah bilangan kromatik permainan graf hasil kali kartesius dari graf buku $P_2 \times K_{l,n}$ dan graf grid $P_m \times P_n$ agar pemain pertama mempunyai strategi menang”, sehingga didapatkan rumusan umumnya.

D. Pendekatan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, pendekatan yang dilakukan adalah studi kepustakaan terhadap buku-buku referensi dan bahan-bahan yang diperoleh dari internet yang relevan dengan permasalahan yang dibahas.

E. Pertanyaan Penelitian

Adapun pertanyaan penelitian yang akan dijawab adalah berapakah bilangan kromatik permainan graf hasil kali kartesius dari graf buku $P_2 \times K_{l,n}$ dan graf grid $P_m \times P_n$ agar pemain pertama mempunyai strategi menang, sehingga didapatkan rumusan umumnya?

F. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang hendak dicapai dari penelitian ini yaitu memperoleh rumusan umum bilangan kromatik permainan graf hasil kali kartesius dari graf buku $P_2 \times K_{l,n}$ dan graf grid $P_m \times P_n$ agar pemain pertama mempunyai strategi menang.

G. Manfaat Penelitian

Melalui penelitian ini diharapkan bermanfaat sebagai berikut:

1. Memberi tambahan wawasan dan ilmu pengetahuan bagi penulis dan pembaca tentang teori graf, khususnya tentang pewarnaan graf.
2. Sebagai bahan masukan untuk peneliti selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian.
3. Sebagai bahan acuan belajar bagi mahasiswa di bidang teori graf terutama tentang pewarnaan graf.

H. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan menganalisis teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan pada studi kepustakaan.

Dalam melakukan penelitian ini penulis memulai meninjau permasalahan, mengumpulkan dan mengaitkan teori-teori yang didapat dengan permasalahan yang dihadapi sebagai penunjang untuk menjawab permasalahan.

Adapun langkah-langkah yang penulis lakukan untuk menjawab permasalahan adalah sebagai berikut:

1. Menentukan graf yang ingin dimainkan, yaitu :
 - a. Graf hasil kali kartesius pada graf buku $P_2 \times K_{l,n}$, dimana $n = 1, 2, 3, 4, \dots$
 - b. Graf hasil kali kartesius pada graf grid $P_m \times P_n$, dimana $m = 1, 2, 3, \dots$ dan $n = 1, 2, 3, \dots$
2. Menentukan batas bawah dan batas atas dari graf buku $P_2 \times K_{l,n}$ dan graf grid $P_m \times P_n$
3. Melakukan permainan dengan cara mewarnai setiap titik pada graf yang dimainkan oleh dua orang pemain dengan ketentuan pewarnaan graf.
4. Menentukan bilangan kromatik permainan.
5. Menarik kesimpulan