

**METODE STÖRMER-VERLET UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA**

SKRIPSI

Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Memperoleh Gelar Sarjana Sains



AULIA PUTRI RAHMADHANI

NIM. 15984

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG**

2014

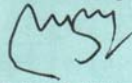
PERSETUJUAN SKRIPSI

Judul : Metode Störmer-Verlet untuk Menyelesaikan Persamaan
Diferensial Orde Dua
Nama : Aulia Putri Rahmadhani
NIM/BP : 15984/2010
Program studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 22 Juli 2014

Disetujui oleh :

Pembimbing I



Muhammad Subhan, M.Si
NIP. 19701126 199903 1 002

Pembimbing II



Meira Parma Dewi, M.Kom
NIP. 19820511 200604 2 001

PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Nama : Aulia Putri Rahmadhani
NIM : 15984
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

dengan judul

METODE STÖRMER-VERLET UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi
Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 22 Juli 2014

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
1. Ketua	Muhammad Subhan, M.Si	1. 
2. Sekretaris	Meira Parma Dewi, M.Kom	2. 
3. Anggota	Dra. Minora Longgom Nst, M.Pd	3. 
4. Anggota	Dra. Media Rosha, M.Si	4. 
5. Anggota	Devni Prima Sari, S.Si, M.Sc	5. 

SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

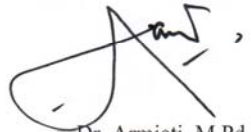
Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : AULIA PUTRI RAHMADHANI
NIM/TM : 15984/2010
Progran Studi : MATEMATIKA
Jurusan : MATEMATIKA
Fakultas : MIPA UNP

Dengan ini menyatakan, bahwa Skripsi saya dengan judul "**Metode Störmer-Verlet untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua**" adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan Negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Diketahui oleh,
Ketua Jurusan Matematika,



Dr. Armiati, M.Pd
NIP.19630605 198703 2 002

Saya yang menyatakan,



Aulia Putri Rahmadhani
NIM. 15984

ABSTRAK

Aulia Putri Rahmadhani : Metode Störmer-Verlet untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua.

Metode Störmer-Verlet merupakan salah satu metode numerik untuk mencari solusi masalah nilai awal dari persamaan diferensial biasa orde dua dengan bentuk khusus $y'' = F(y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Salah satu aplikasi persamaan yang diselesaikan dengan metode Störmer-Verlet dibidang ilmu fisika adalah sistem gerak bebas tak teredam pada pegas. Untuk mencari solusinya, metode ini tidak diperlukan perhitungan komputasi seperti metode Runge-Kutta yang umum biasa digunakan dalam perhitungan persamaan diferensial, namun dengan metode ini solusi yang dihasilkan tetap akurat. Untuk itu permasalahan yang akan diselesaikan dalam skripsi ini adalah bagaimana penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua dengan metode Störmer-Verlet.

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis dengan mengkaji teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan yang dibahas. Selanjutnya, pendekatan masalah yang dilakukan adalah studi kepustakaan yang berkaitan dengan persamaan diferensial biasa orde dua dan metode Störmer-Verlet.

Berdasarkan studi kepustakaan yang dilakukan, persamaan yang diberikan agar dapat diselesaikan dengan metode Störmer-Verlet dibentuk kembali menjadi sistem persamaan diferensial orde satu dengan memisalkan turunan pertamanya menjadi variabel baru. Dalam hal ini diperoleh kesimpulan bahwa, untuk mencari nilai hampiran solusi dengan metode Störmer-Verlet dilakukan ekspansi diferensial maju, diferensial mundur dan diferensial terpusat orde dua deret Taylor. Dengan menerapkan algoritma metode Störmer-Verlet tersebut dan dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde-3 dan Runge-Kutta orde-4 maka solusi hampiran dengan metode Störmer-Verlet memberikan solusi yang akurat dalam perhitungannya.

KATA PENGANTAR

Puji syukur peneliti ucapkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga peneliti dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “*Metode Störmer-Verlet untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua*”. Selanjutnya, salawat beserta salam untuk Nabi besar Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi umat seluruh alam.

Adapun tujuan peneliti menulis skripsi ini adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains di jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang. Keberhasilan peneliti dalam menyelesaikan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan kali ini dengan segala kerendahan hati peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Muhammad Subhan, M.Si, Pembimbing I dan Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA UNP.
2. Ibu Meira Parma Dewi, S.Si, M.Kom, Pembimbing II.
3. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si, Ibu Dra. Minora Longgom Nasution, M.Pd, dan Ibu Devni Prima Sari, S.Si, M.Sc sebagai Penguji.
4. Ibu Dr. Armianti, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNP.
5. Ibu Dra. Dewi Murni, M.Si, Ketua Prodi Studi Matematika.
6. Bapak dan Ibu Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA UNP.
7. Seluruh Staf Labor Komputer Jurusan Matematika FMIPA UNP.
8. Karyawan dan segenap Civitas Akademi Matematika FMIPA UNP.

9. Rekan-rekan seperjuangan, khususnya rekan Mahasiswa Prodi Matematika FMIPA UNP angkatan 2010.

Semoga bimbingan dan dukungan yang telah diberikan, menjadi amal ibadah di sisi-Nya. Peneliti juga menyadari, bahwa skripsi ini masih terdapat kekurangan, untuk itu peneliti mengharapkan adanya kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan skripsi. Harapan peneliti, semoga skripsi ini memberikan manfaat bagi peneliti dan Jurusan Matematika FMIPA UNP serta pembaca. Amin.

Padang, Juli 2014

Peneliti

DAFTAR ISI

	Halaman
ABSTRAK	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR TABEL	v
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR LAMPIRAN	vii
 BAB I. PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang	1
B. Batasan Masalah	4
C. Perumusan Masalah	4
D. Pendekatan Masalah dan Pertanyaan Penelitian	5
E. Tujuan Penelitian	5
F. Manfaat Penelitian	5
G. Metodologi Penelitian	6
 BAB II. TINJAUAN KEPUSTAKAAN	
A. Persamaan Diferensial Biasa	7
B. Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua	9
C. Metode Numerik	11
D. Metode Numerik untuk Persamaan Diferensial Biasa	13
E. Persamaan Diferensial Orde Lanjut	18
F. Sistem Persamaan Diferensial.....	19
 BAB III PEMBAHASAN	
A. Metode Störmer-Verlet	20
B. Algoritma Metode Störmer-Verlet.....	23
 BAB IV PENUTUP	
A. Kesimpulan	33
B. Saran	35
DAFTAR PUSTAKA	36
LAMPIRAN	37

DAFTAR TABEL

Tabel		Halaman
1.	Hasil perhitungan untuk solusi y pada persamaan $y'' - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ $h = 0,05$ dengan metode RK-3, Störmer-Verlet dan RK-4.....	25
2.	Hasil perhitungan untuk solusi v pada persamaan $y'' - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $h = 0,05$ dengan metode RK-3, Störmer-Verlet dan RK-4.....	26
3.	Solusi numerik persamaan diferensial biasa orde dua $y'' - y^2 + e^y = 0$ dengan kondisi awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 2$ dengan metode Störmer-Verlet	31

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1. Grafik solusi analitik (y) dan solusi numerik dengan metode RK-3, Störmer-Verlet, dan RK-4.....	27
2. Grafik solusi masing-masing perbandingan antara metode analitik (y) dengan Metode RK-3, SV, dan RK-4.....	28
3. Grafik solusi analitik (v) dan solusi numerik dengan metode RK-3, Störmer-Verlet, dan RK-4.....	29
4. Grafik solusi masing-masing perbandingan antara metode analitik (y) dengan Metode RK-3, SV, dan RK-4.....	30
5. Grafik solusi numerik y dengan metode Störmer-Verlet.....	32
6. Grafik solusi numerik v dengan metode Störmer-Verlet.....	32

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. Program maple metode Runge-Kutta orde-3	37
2. Program maple metode Störmer-Verlet	38
3. Program maple metode Runge-Kutta orde-4	39
4. Pembuktian teorema keujudan dan ketunggalan untuk persamaan diferensial biasa orde dua.....	40

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Permasalahan dalam kehidupan dapat melibatkan ilmu matematika. Salah satu cabang matematika yang digunakan adalah persamaan diferensial. Aplikasi dalam kehidupan yang dapat dibentuk dalam persamaan diferensial adalah model gerak harmonik pada pegas yaitu $m \frac{d^2y}{dt^2} + d \frac{dy}{dt} + ky = F(t)$ dimana m adalah massa benda, k adalah konstanta pegas, d adalah redaman, F adalah gaya yang bekerja dan t adalah waktu.

Dalam mencari solusi persamaan diferensial terdapat berbagai cara untuk menyelesaikannya baik secara analitik maupun secara numerik. Namun, tidak semua bentuk persamaan diferensial dapat diselesaikan secara analitik. Contohnya persamaan diferensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = x$$

(Billingham & Otto, 2003:28)

Persamaan tersebut secara analitik dapat diselesaikan solusinya, tapi sulit diselesaikan dengan cara analitik biasa karena dalam persamaan mengandung variabel bebas atau persamaan tersebut merupakan persamaan non linear. Karena sulitnya itu, maka digunakan metode numerik agar dapat mempermudah menyelesaikan persamaan tersebut.

Metode analitik disebut juga metode sejati karena ia memberikan solusi sejati (*exact solution*) atau solusi yang sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki galat (*error*) sama dengan nol.

Menurut Munir (2008:5)

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Kedua, dengan metode numerik, kita hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan, namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang kita inginkan. Solusi hampiran jelas tidak sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*).

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik, ada beberapa metode yang dapat digunakan. Metode tersebut diantaranya metode Deret Taylor dan metode Runge-Kutta.

Metode deret Taylor didapat dari deret Taylor dengan memasukkan nilai $x = x_1$, dimana $x_1 - x_0 = h$, sehingga persamaan deret Taylor menjadi $y(x_1) = y_0 + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \dots$. Semakin banyak suku dari persamaan tersebut yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial maka semakin tinggi ketelitian solusinya, karena galatnya kecil. Namun terkadang metode ini menjadi tidak praktis apabila ada fungsi yang sulit dihitung turunannya.

Metode lainnya adalah metode Runge-Kutta dimana metode ini menjadi metode yang sering digunakan. Menurut Munir (2008:389) “Metode Runge-Kutta yang terkenal dan banyak dipakai dalam praktek adalah metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Runge-Kutta orde empat. Kedua metode tersebut terkenal karena tingkat ketelitian solusinya tinggi”. Sejalan dengan hal tersebut, menurut Munir

(2008:391) “Metode Runge-Kutta orde yang lebih tinggi akan memberikan solusi yang lebih teliti. Namun hal tersebut menjadikan jumlah komputasi juga semakin banyak”.

Pada permasalahan kali ini, akan membahas persamaan orde lanjut khususnya adalah persamaan diferensial orde dua. Munir (2008:406) menyatakan bahwa, “Persamaan orde lanjut adalah persamaan diferensial dengan orde yang lebih dari satu. Persamaan diferensial orde ini dapat di tulis kembali sebagai sistem persamaan orde satu”. Salah satu metode lain yang akan dibahas untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde dua adalah Metode Störmer-Verlet.

Menurut Crivelli (2008:1)

Metode Störmer-Verlet ditemukan oleh Carl Stormer dalam perhitungan gerak partikel terionisasi dalam medan magnet bumi (aurora borealis) pada tahun 1907 dan juga digunakan oleh Loup Verlet pada tahun 1967 dalam dinamika molekul dan ternyata mereka menemukan bahwa Newton juga menggunakan metode ini dalam bukunya *Principia Mathematica* tahun 1687.

Metode Störmer-Verlet merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menemukan solusi masalah nilai awal dengan bentuk $y'' = F(y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Dalam hal ini, persamaan tersebut tidak bergantung pada turunan pertamanya dan juga persamaan tersebut tidak bergantung pada variabel secara eksplisit atau dengan kata lain persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial autonomous.

Berdasarkan persamaan yang diberikan salah satu contoh aplikasi dalam ilmu fisika yaitu model sistem gerak harmonik pada pegas dimana jika tidak ada redaman pegas (d) dan juga tidak ada gaya (F) yang bekerja pada waktu (t)

tertentu sehingga menjadi sistem gerak harmonik tak teredam dimana bentuk persamaan menjadi $m \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$.

Untuk mencari solusi dengan metode Störmer-Verlet, tidak diperlukan perhitungan komputasi seperti metode Runge-Kutta yang umum biasa digunakan dalam perhitungan persamaan diferensial, namun dengan metode ini solusi yang dihasilkan tetap akurat. Dalam hal inilah Crivelli (2008:7) mengatakan bahwa “Metode Störmer-Verlet akan membantu menemukan solusi dan hasil yang diperoleh sangat ekonomis juga stabil dalam perhitungan numerik yang dicari”.

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti tertarik untuk membahas penggunaan metode Störmer-Verlet dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua tersebut. Untuk itu penelitian ini diberi judul **“Metode Störmer-Verlet untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua”**.

B. Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diberikan maka pada penelitian ini persamaan diferensial orde dua yang digunakan adalah persamaan diferensial orde dua khusus dengan bentuk $y'' = F(y)$ dengan masalah nilai awal $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

C. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah “Bagaimana penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua dengan metode Störmer-Verlet?”

D. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah, maka pendekatan masalah yang dilakukan adalah studi kepustakaan.

Pertanyaan penelitian yang diajukan pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana proses pembentukan formula metode Störmer-Verlet untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua ?
2. Bagaimana algoritma dari metode Störmer-Verlet untuk solusi numerik persamaan diferensial biasa orde dua ?

E. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk menelaah proses pembentukan formula metode Störmer-Verlet untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua.
2. Untuk membuat algoritma dari metode Störmer-Verlet untuk solusi numerik persamaan diferensial orde dua.

F. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan tambahan wawasan dan ilmu pengetahuan bagi peneliti dan pembaca mengenai analisis numerik, khususnya metode yang digunakan untuk menemukan solusi numerik persamaan diferensial biasa orde dua.
2. Sebagai bahan acuan bagi mahasiswa di bidang analisis numerik terutama tentang metode yang digunakan untuk mencari solusi numerik persamaan diferensial biasa orde dua.

3. Sebagai bahan masukan bagi peneliti selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian.

G. Metodologi Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dengan berlandaskan pada kajian kepustakaan. Dalam meninjau permasalahan yang akan dihadapi, langkah kerja yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari literatur mengenai persamaan diferensial dan metode numerik.
2. Mengkaji prinsip penggunaan metode Störmer-Verlet untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua.
3. Menyusun algoritma untuk metode Störmer-Verlet menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua.
4. Menerapkan algoritma yang telah dibuat ke dalam program komputer yaitu “Maple”.
5. Menyimpulkan hasil penelitian.