HUKUM ITERASI LOGARITMA

TUGAS AKHIR

untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar sarjana sains

SORTA PURNAWANTI
NIM. 00290

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2013

HALAMAN PERSETUJUAN UJIAN TUGAS AKHIR

HUKUM ITERASI LOGARITMA

Nama	: Sorta Purnawanti
NIM	: 00290
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 27 Desember 2012

Disetujui Oleh

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Hj. Helma, M.Si	Dodi Vionanda, M.Si
NIP. 19680324 199603 2 001	NIP. 19790611 200501 1 002

PENGESAHAN LULUS UJIAN TUGAS AKHIR

Nama : Sorta Purnawanti
Nim : 00290
Program Studi : Matematika
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan Judul

Hukum Iterasi Logaritma

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Tugas Akhir
Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 10 Januari 2013

Tim Penguji

	Nama	Tanda tangan
1. Ketua	: Dra. Hj. Helma, M.Si	1.
2. Sekretaris	: Dodi Vionanda, S.Si, M.Si	2.
3. Anggota	: Drs. Atus Amadi Putra , M.Si	3.
4. Anggota	: Drs. Lutfian Almash, M.S	4.
5. Anggota	: Dra. Nonong Amalita, M.Si	5.

SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: SORTA PURNAWANTI
NIM/TM	: 00290/2008
Progran Studi	: MATEMATIKA
Jurusan	: MATEMATIKA
Fakultas	: MIPA UNP

Dengan ini menyatakan, bahwa Skripsi saya dengan judul "***Hukum Iterasi Logaritma***" adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hukum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan Negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Diketahui oleh,
Ketua Jurusan Matematika,

Dr. Armiati, M.Pd
NIP.19630605 198703 2 002

Saya yang menyatakan,

Sorta Purnawanti
NIM. 00290

ABSTRAK

SORTA PURNAWANTI: Hukum Iterasi Logaritma

Hukum iterasi logaritma merupakan teori yang sangat penting dalam perkembangan teori peluang. Hukum iterasi logaritma ini mengkaji tentang kekonvergenan dari deret variabel acak ($S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$) yang berdistribusi identik dan saling bebas. Berdasarkan hal itu, penelitian ini bertujuan untuk menentukan kondisi yang harus dipenuhi oleh deret variabel acak yang berdistribusi identik dan saling bebas, agar $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1\right) = 1$, sehingga pernyataan ini dikenal dengan hukum iterasi logaritma.

Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan analisis teori yang relevan dengan permasalahan yang akan dibahas dan berlandaskan pada studi kepustakaan.

Berdasarkan hasil dari studi kepustakaan didapatkan bahwa misalkan (X_n) merupakan barisan variabel acak berdistribusi identik yang saling bebas dengan $E(X_n) = 0$ dan $var(X_n) < \infty$ untuk setiap $n \geq 1$, sedangkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k)$ untuk $n = 1,2,3, \ldots.$, dan K_n adalah barisan konstan yang positif sehingga $K_n \to 0$ untuk $n \to \infty$, jika memenuhi kondisi berikut:

(i). $s_n^2 \to \infty$

(ii). $|X_n| \leq \frac{K_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}}$ a.s untuk setiap $n \geq 1$,

maka $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1\right) = 1.$

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan petunjuk, rahmat, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **”Hukum Iterasi Logaritma”**. Adapun tujuan penulisan Tugas Akhir ini adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang.

Pada penulisan Tugas Akhir ini penulis banyak mendapatkan bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Untuk itu, dalam kesempatan ini dengan segala kerendahan hati perkenankanlah penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Hj. Helma, M.Si, Pembimbing I, sekaligus Penasehat Akademis yang telah memberikan bimbingan dan dorongan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dodi Vionanda, S.Si, M.Si Pembimbing II
3. Bapak Drs. Atus Amadi Putra, M.Si, Bapak Drs. Lutfian Almash, M.S, Ibu Dra. Nonong Amalita, M.Si sebagai dosen Penguji.
4. Ibu Dr. Armiati, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNP.
5. Bapak Muhammad Subhan, S.Si., M.Si, Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA UNP.
6. Ibu Dra. Dewi Murni, M.Si, Ketua Jurusan Program Studi Matematika FMIPA UNP

7. Bapak-bapak dan Ibu-ibu staf pengajar Jurusan Matematika FMIPA UNP.
8. Seluruh Staf Administrasi dan Staf Labor Komputer Matematika FMIPA UNP.
9. Ayah dan Ibu tercinta, adik tersayang beserta keluarga besar yang telah memberikan dorongan dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
10. Rekan-rekan mahasiswa dan semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini yang tidak mungkin disebutkan satu persatu.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan pada penulis dapat menjadi amal ibadah dan memperoleh balasan yang lebih baik dari Allah SWT.

Penulis juga menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih banyak kekurangan. Penulis mengharapkan adanya kritikan dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Tugas Akhir ini dan untuk perbaikan di masa yang akan datang. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan arti dan manfaat bagi penulis sendiri dan pembaca.

Padang, Desember 2012

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran

GLOSARIUM

A_n	= Konstanta Bilangan Riil
$a.s$ (*almost sure*)	= Hampir Pasti
B	= Himpunan Semua Kejadian pada Ruang Sampel
B_n	= Konstanta Bilangan Riil
E	= Kejadian
$i.o$ (*infinitely often*)	= Sering tidak Berhingga
K_n	= Barisan Konstan yang Positif
med	= Median
n	= Sampel
P	= Ukuran Peluang
S_n	= Deret Variabel Acak
s_n^2	= Deret Variansi
X	= Variabel Acak
Ω	= Ruang Sampel
ω	= Titik atau Anggota-Anggota pada Ruang Sampel
$\in$ (*elemen*)	= Bagian

BAB 1
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Teorema limit dalam teori peluang terbagi atas 2 bentuk yaitu teorema limit lemah dan teorema limit kuat. Teorema limit lemah berkaitan dengan kekonvergenan dalam peluang dari sebuah barisan variabel acak. Laha & Rohatgi (1979: 45) menyatakan bahwa, sebuah barisan dari variabel acak konvergen dalam peluang ke variabel acak X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ $P(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) \to 0$ untuk $n \to \infty$ atau ditulis $X_n \xrightarrow{p} X$, dimana barisan variabel acak X_n terdefinisi pada ruang peluang (Ω, B, P). Sedangkan teorema limit kuat berkaitan dengan kekonvergenan hampir pasti dari sebuah barisan variabel acak. Menurut Laha & Rohatgi (1979: 42), barisan dari variabel acak (X_n) dikatakan konvergen hampir pasti ke variabel acak X jika dan hanya jika terdapat himpunan $E \in B$, dengan $P(E) = 0$, sedemikian sehingga untuk setiap $\omega \in E^c$, $|X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0$ untuk $n \to \infty$ atau ditulis $X_n \xrightarrow{a.s} X$.

Hukum bilangan besar adalah hukum yang berkaitan dengan kekonvergenan dari sebuah barisan variabel acak. Apabila barisan variabel acak konvergen dalam peluang, maka dikenal dengan hukum bilangan besar lemah. Hukum bilangan besar lemah menyatakan bahwa misalkan (X_n) barisan variabel acak yang berdistribusi identik dan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, jika terdapat barisan konstanta real (A_n),(B_n), $B_n > 0$ dan $B_n \to \infty$, maka $\frac{(S_n - A_n)}{B_n} \xrightarrow{p} 0$ untuk $n \to \infty$ (Laha & Rohatgi, 1976: 67). Sedangkan apabila barisan variabel acak konvergen hampir pasti, maka dikenal dengan hukum bilangan besar kuat, yaitu jika $\frac{(S_n - A_n)}{B_n} \xrightarrow{a.s} 0$ untuk $n \to \infty$. Jika $B_n = n$, maka hukum bilangan besar kuat berubah menjadi $\frac{(S_n - A_n)}{n} \xrightarrow{a.s} 0$ untuk $n \to \infty$. Sedangkan menurut hukum bilangan besar Kolmogorov hal ini dapat diubah menjadi $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s} \mu$ jika dan hanya jika $E(X) = \mu$ dan $E|X| < \infty$ (Laha & Rohatgi, 1979: 90).

Hal di atas dapat diilustrasikan sebagai berikut. Misalkan pada percobaan pelemparan satu buah dadu sebanyak n kali, jika r adalah frekuensi munculnya mata dadu dan p adalah konstanta peluang munculnya mata dadu dari n kali percobaan, maka p adalah $\frac{r}{n}$, untuk n yang kecil maka $\frac{r}{n} \xrightarrow{p} p$, yang dikenal dengan hukum bilangan besar lemah dan untuk $n \to \infty$ maka $\frac{r}{n} \xrightarrow{a.s} p$, yang dikenal dengan hukum bilangan kuat. hukum Iterasi Logaritma berkaitan dengan tingkat pertambahan r untuk $n \to \infty$.

Hukum Iterasi Logaritma ini menyelidiki kekonvergenan dari S_n dimana $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Jika X_n diasumsikan berdistribusi identik dengan $E(X) = 0$, hukum bilangan besar kuat menyatakan bahwa $|S_n| = o(n)$ hampir pasti, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka tingkat pertambahan S_n lebih kecil dari n. Jika $Var\ (X_n)$ diasumsikan terbatas dan sama dengan 1, maka teorema pusat Levy menunjukkan bahwa tingkat pertambahan S_n lebih besar dari $\sqrt{n}$. Sehingga tingkat pertambahan S_n lebih besar dari $\sqrt{n}$ dan lebih kecil dari n.

Berdasarkan teorema limit pusat Levy, $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ (Rohatgi, 1976: 280), maka $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) =$

$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right)$. Menurut Laha & Rohatgi (1976: 93) $n = 2s_n^2 \ln\ln s_n^2$ maka hal di atas berubah menjadi $\lim\ \sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}}$. Berdasarkan hukum Kolmogorov 0-1 $\lim\ \sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = c$ a.s, dimana c adalah konstan. Sedangkan menurut hukum Iterasi Logaritma dinyatakan bahwa $c = 1$, sehingga $\lim\ \sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1$ (Laha & Rohatgi,1979: 93).

Berdasarkan hal di atas , kondisi apa yang harus dipenuhi agar nilai dari $\lim\ \sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1$ dimana $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, dan $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k)$ untuk $n \to \infty$.. Oleh karena itu judul dari tugas akhir ini adalah “Hukum Iterasi Logaritma".

B. Perumusan Masalah

Misalkan (X_n), $n \geq 1$ merupakan barisan variabel acak yang saling bebas dengan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k)$, dan (K_n) merupakan barisan konstan yang positif sehingga $K_n \to 0$ untuk $n \to \infty$, kondisi apa yang harus dipenuhi agar $\lim\ \sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1$?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan di atas maka tujuan dari kajian ini adalah: untuk mengetahui kondisi yang harus dipenuhi oleh barisan variabel acak saling bebas (X_n) agar $\lim\sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1$, dimana $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k)$ untuk $n \to \infty$.

D. Manfaat Penelitian

Melalui kajian teori ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi:

1. Peneliti, untuk menambah wawasan dan ilmu pengetahuan tentang teori peluang khususnya teori tentang variabel acak, distribusi peluang, hukum bilangan besar, hukum bilangan besar Kolmogorov dan hukum Iterasi Logaritma.
2. Pembaca, untuk mendapatkan informasi tentang teori peluang khususnya pada hukum Iterasi Logaritma.
3. Peneliti, selanjutnya dapat menggunakannya sebagai salah satu referensi.

E. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan analisis teori yang relevan dengan permasalahan yang akan dibahas dan berlandaskan pada studi kepustakaan. Penelitian ini diawali dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan dan menghubungkan teori-teori yang didapat dengan permasalahan yang dihadapi sebagai penunjang untuk menyelesaikan permasalahan.

Langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan adalah sebagai berikut:

1. Mencari $P(S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}) = 0$ kemudian

$P(S_n \geq (1-\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}) = 1.$

2. Menghubungkan akibat ke-2 dari Ketaksamaan Levy dengan syarat-syarat yang ada pada hukum Iterasi Logaritma.
3. Menggunakan dalil dari Kolmogorov.
4. Menggunakan Lemma Cantelli-Borel untuk membuktikan $P(E) = 0$ dan $P(E) = 1$.
5. Menghubungkan dalil dari Kolmogorov dengan Lemma Cantelli-Borel.
6. Mendapatkan kondisi untuk lim $\sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1.$

BAB II
KAJIAN TEORI

Adapun teori-teori yang diperlukan untuk pembahasan penelitian ini adalah:

A. Ruang Sampel dan Variabel Acak

Definisi 1

Himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan disebut ruang contoh atau ruang sampel dan dilambangkan dengan Ω.

(Walpole, 1982: 70)

Definisi 2

Kejadian adalah suatu himpunan bagian dari ruang contoh atau ruang sampel dan dilambangkan dengan E.

(Walpole, 1982: 72)

Definisi 3

Misalkan Ω adalah ruang sampel dari suatu percobaan. P merupakan fungsi bernilai riil yang terdefinisi pada B dengan daerah asal $(0,1)$, maka P disebut fungsi peluang atau ukuran peluang dan $\mathrm{P(E)}$ peluang terjadinya kejadian E, jika memenuhi :

(i). $\mathrm{P(E)} \geq 0$ untuk setiap $\mathrm{E} \in \mathrm{B}$

(ii). $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

(iii). Jika E_1 , E_2 , E_3 .... adalah sebarang kejadian yang saling lepas

$\left(E_i \cap E_j = \emptyset, \text{untuk } i \neq j\right)$ dengan $E_i \in B$ dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in B$, maka $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.

(Galambos, 1995: 5)

Berdasarkan definisi di atas, himpunan semua kemungkinan yang mungkin terjadi pada suatu percobaan disebut dengan ruang sampel yang dilambangkan dengan Ω dan himpunan bagian dari ruang sampel disebut dengan kejadian yang biasanya dilambangkan dengan E, sedangkan himpunan semua kejadian dalam ruang sampel dilambangkan dengan B.

Defenisi 4

Jika Ω adalah sebuah ruang sampel yang memiliki ukuran peluang dan x adalah fungsi bernilai real yang terdefinisi pada anggota-anggota di Ω, maka X disebut dengan variabel acak.

(Freund & Walpole, 1987: 75)

B. Fungsi Peluang dan Fungsi Distribusi

Variabel acak dalam statistika terdiri atas dua macam, yaitu variabel acak diskrit yang fungsi peluangnya dikenal dengan fungsi massa peluang, dan variabel acak kontinu yang fungsi peluangnya dikenal dengan fungsi padat peluang.

Definisi 5

Jika X suatu variabel acak diskrit, maka $f(x) = P(X = x)$ dinamakan fungsi peluang bagi variabel acak X.

(Walpole, 1987: 79)

Definisi 6

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi peluang dari variabel acak diskrit X jika dan hanya jika memenuhi kondisi sebagai berikut:

(i). $f(x) \geq 0$, untuk setiap $x \epsilon \Re$

(ii). $\sum_x f(x) = 1$

(Walpole, 1987: 79)

Definisi 7

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi peluang dari variabel acak kontinu X jika dan hanya jika $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ untuk setiap $x \epsilon \Re$, dan $a \leq b$.

(Walpole, 1987: 92)

Definisi 8

Suatu fungsi dikatakan fungsi padat peluang dari variabel acak kontinu X jika memenuhi kondisi sebagai berikut:

(i). $f(x) \geq 0$, untuk setiap $x \epsilon \Re$.

(ii). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(Walpole, 1987: 93)

Fungsi distribusi terbagi atas 2 macam yaitu fungsi distribusi yang berasal dari variabel acak diskrit dan fungsi distribusi yang berasal dari variabel acak kontinu. Di samping itu pada variabel acak juga terdapat variabel acak berdistribusi identik.

Definisi 9

Misalkan X adalah sebuah variabel acak diskrit,

fungsi $F(x) = P(X = x) = \sum_{t \leq x} f(t)$ untuk $-\infty < x < \infty$ dimana $f(t)$ adalah nilai dari distribusi peluang dari x ke t disebut fungsi distribusi.

(Freund & Walpole, 1987: 82)

Definisi 10

Misalkan X adalah sebuah variabel acak kontinu,

fungsi $\mathrm{F(x) = P(X = x)} = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f(t)dt}$ untuk $-\infty < \mathrm{x} < \infty$ dimana $\mathrm{f(t)}$ adalah nilai dari distribusi peluang dari x ke t disebut fungsi distribusi.

(Freund & Walpole, 1987: 94)

Fungsi distribusi disebut juga dengan distribusi kumulatif yang dapat dinotasikan dengan $\mathrm{F(x)}$. Berdasarkan definisi berikut distribusi identik itu adalah:

Definisi 11

Dua buah variabel acak X dan Y dikatakan berdistribusi identik jika X dan Y mempunyai distribusi peluang yang sama yaitu $\mathrm{F_X(x) = F_Y(y)}$ untuk setiap $x \in \mathfrak{R}$. Dimana $\mathrm{F_X}$ dan $\mathrm{F_Y}$ adalah fungsi distribusi dari X dan Y.

(Rohatgi, 1976: 123)

C. Nilai Ekspektasi

Nilai ekspektasi juga dikenal dengan rataan peubah acak X atau rataan distribusi peluang X, yang dinyatakan dengan $E(X)$. Hal ini dapat di lihat dari definisi ataupun teorema berikut ini:

Definisi 12

Jika X adalah variabel acak diskrit, f(x) adalah fungsi massa peluang pada x, nilai ekspektasi dari X adalah $E[X] = \sum_{\mathrm{x}} \mathrm{x.\,f(x)}$

Jika X adalah variabel acak kontinu, f(x) adalah fungsi padat peluang pada x, nilai ekspektasi dari X adalah $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$

(Freund & Walpole, 1987: 135)

Teorema 1

Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak saling bebas. Jika $E[X] < \infty$ dan $E[Y] < \infty$, maka $E[XY] < \infty$ dan $E[XY] = E[X]E[Y]$

(Laha & Rohatgi, 1979: 55)

Bukti pada lampiran 1.

D. Suprimum dan Infimum

Definisi 13

Misalkan S disebut subset tak kosong dari $\mathfrak{R}$

(i). Himpunan S disebut terbatas di atas jika terdapat $u \in \mathfrak{R}$ sedemikian sehingga $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$. Bilangan-bilangan u disebut batas atas dari S.

(ii). Himpunan S disebut terbatas di bawah jika terdapat $w \in \mathfrak{R}$ sedemikian sehingga $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Bilangan-bilangan w disebut batas bawah dari S.

(iii). Himpunan S disebut terbatas jika S terbatas di atas dan di bawah. Himpunan S dikatakan tidak terbatas jika S tidak terbatas di atas atau di bawah.

(Bartle & Sherbert, 2000: 35)

Definisi 14

Misalkan *S* disebut subset tak kosong dari $\Re$

(i). Jika S terbatas di atas, maka sebuah bilangan u dikatakan suprimum (batas atas terkecil) dari S jika u memenuhi kondisi berikut:

a. u adalah batas atas dari S, dan

b. jika v adalah sebarabg batas atas dari S, maka $u \leq v$

(ii). Jika S terbatas di bawah, maka sebuah bilangan w dikatakan infimum (batas bawah terbesar) dari S jika w memenuhi kondisi berikut:

a. w adalah batas atas dari S, dan

b. jika t adalah sebarang batas atas dari S, maka $t \leq w$

(Bartle & Sherbert, 2000: 35)

Lemma Suprimum

u merupakan batas atas dari himpunan tak kosong S dari $\Re$, u merupakan supremum dari S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah $s_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$

(Bartle & Sherbert, 2000: 36)

E. Kekonvergenan

Kekonvergenan dalam teori peluang terdiri atas beberapa macam diantaranya yaitu konvergen lemah, konvergen hampir pasti dan konvergen dalam peluang, seperti definisi berikut ini:

Definisi 15

Misalkan (F_n) adalah sebuah barisan fungsi distribusi. F_n dikatakan konvergen lemah untuk sebuah fungsi distribusi F jika $F_n(x) \rightarrow F(x)$ untuk $n \rightarrow \infty$, untuk semua titik x kontiniu di F atau ditulis $F_n \xrightarrow{w} F$

(Galambos, 1995: 131)

Definisi 16

Barisan dari variabel-variabel acak (X_n) dikatakan konvergen hampir pasti untuk variabel acak X jika dan hanya jika terdapat himpunan $E \in B$ dengan $P(E) = 0$, sedemikian sehingga untuk setiap $\omega \in E^c$, $|X_n(\omega) - X(\omega)| \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$ atau ditulis $X_n \xrightarrow{a.s} X$

(Laha & Rohatgi, 1979: 42)

Definisi 17

Misalkan $(X_n, n \geq 1)$ sebuah barisan dari variabel acak yang didefinisikan pada ruang peluang (Ω,B,P), (X_n) dikatakan konvergen dalam peluang untuk variabel acak X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ $P(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$ atau ditulis $X_n \xrightarrow{p} X$

(Laha & Rohatgi, 1979: 45)

F. Lemma Canteli-Borel

Disamping digunakan untuk membuktikan hukum bilangan besar Kolmogorov, Lemma Cantelli-Borel juga digunakan untuk membuktikan hukum Iterasi Logaritma.

(i). Misalkan (A_n) adalah sebuah barisan dari kejadian sedemikian sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ maka P(A)=0 dimana $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

(ii). Jika (A_n) adalah sebuah barisan saling bebas dari kejadian sedemikian sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ maka P(A)=1 dimana $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

(Rohatgi, 1976: 264)

Bukti pada lampiran 2.

G. Lemma Toeplitz dan Lemma Ekivalen

Lemma Toeplitz

Misalkan a_n adalah barisan bilangan real sedemikian sehingga $a_n \to a$ untuk $n \to \infty$, maka $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to a$ untuk $n \to \infty$.

(Laha & Rohatgi, 1979: 89)

Bukti pada lampiran 3.

Lemma Ekivalen

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq X_n') < \infty$, barisan X_n dan X_n' adalah ekivalen ujung, dan S_n', S_n adalah konvergen ekivalen maka barisan $\frac{S_n}{B_n}$ dan $\frac{S_n'}{B_n}$ untuk $B_n \to \infty$ konvergen pada himpunan yang sama dan limit yang sama kecuali himpunan kosong.

(Rohatgi, 1976: 266)

Bukti pada lampiran 4.

H. Hukum Kolmogorov 0-1 dan Hukum Bilangan Besar Kolmogorov

Hukum Kolmogorov 0-1

Misalkan (X_n) adalah barisan variabel acak yang saling bebas. Maka peluang kejadian ekornya adalah 0 atau 1. Selain itu, setiap fungsi ekornya adalah hampir pasti konstan, yaitu jika Y adalah variabel acak sehingga $\sigma(Y) \subset \mathcal{F}$, maka $Y = c$, dimana c adalah konstan.

(Laha & Rohatgi, 1979: 77)

Bukti pada lampiran 5.

Hukum Bilangan Besar Kolmogorov

Untuk membuktikan $\frac{S_n}{n}$ konvergen ke-μ, digunakan hukum bilangan besar kolmogorov. Berikut ini teorema hukum bilangan besar kolmogorov: Misalkan (X_n) adalah variabel acak berdistribusi identik dengan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n = 1,2,....$ maka terdapat $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s} \mu$ jika dan hanya jika $E|X| < \infty$ maka $E(X) = \mu$ dengan peluang 1.

(Laha & Rohatgi, 1979: 101)

I. Batas eksponensial

Misalkan (X_n) adalah barisan variabel acak yang saling bebas dengan $E(X) = 0$ dan $var(X) < \infty$ untuk $n \to \infty$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dan $S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} var(X_k)$ untuk $n = 1,2,3,....$ Berikut ini proposisi dari batas eksponensial:

Miisalkan $|X_k| \leq cS_n$ a.s, dimana $c > 0$ adalah konstan, untuk setiap k, $1 \leq k \leq n$ dan andaikan $\epsilon > 0$

(i). Jika $\varepsilon c \leq 1$ maka untuk $n \geq 1$ didapatkan

$$P(S_n > \varepsilon S_n) < exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon c}{2}\right)\right)$$

Jika $\epsilon c \geq 1$ maka untuk $n \geq 1$ didapatkan

$$P(S_n > \varepsilon S_n) < exp\left(-\frac{\varepsilon}{4c}\right)$$

(ii). Diberikan $\gamma > 0$ mak terdapat $\varepsilon(\gamma)$ konstan (yang cukup besar) dan $\pi\gamma$ (yang cukup kecil) sedemikian sehingga untuk $\varepsilon \geq \varepsilon\gamma$ dan $\varepsilon c \leq \pi\gamma$

$$P(S_n > \varepsilon S_n) < exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}(1+\gamma)\right)$$

(Laha & Rohatgi, 1976: 93)

J. Ketaksamaan Levy

Ketaksamaan Levy berguna sebagai langkah awal dari pembuktian hukum Iterasi Logaritma. Berikut ini Lemma Ketaksamaan Levy:

Misalkan $X_1, X_{2,} \ldots . X_n$ adalah variabel acak independen, dan $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$, $k = 1,2, \ldots . n$ maka $P\{\max_{1\leq k\leq n}[s_k - \text{med}(S_k - S_n)] \geq \varepsilon\} \leq 2P\{S_n \geq \varepsilon\}$ dan $P\{\max_{1\leq k\leq n}|s_k - \text{med}(S_k - S_n)| \geq \varepsilon\} \leq 2P\{|S_n| \geq \varepsilon\}$.

(Laha & Rohatgi, 1976:98)

Bukti pada lampiran 6.

Adapun Akibat dari Ketaksamaan Levy di atas adalah sebagai berikut:

Akibat 1

Jika X_i adalah independen dan variabel acak simetrik. Maka $P(S_n \geq \varepsilon) \geq \frac{1}{2}P(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon) \geq \varepsilon$ dan $P(|S_n| \geq \varepsilon) \geq \frac{1}{2}P(\max_{1\leq k\leq n}|S_k| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon$.

(Laha & Rohatgi, 1976:99)

Akibat 2

Misalkan $X_1, X_2, \dots X_n$ adalah variabel acak yang saling bebas dengan $E(X) = 0$ dan $\text{var}(X) < \infty$ untuk $1 \leq i \leq n$. Maka $P(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon) \leq 2P\left(S_n \geq \varepsilon - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} \text{var}(X)}\right)$.

(Laha & Rohatgi, 1976:99)

Bukti pada lampiran 6.

Untuk menentukan kenaikkan barisan bilangan real yang positif, di gunakan teorema berikut ini:

Teorema 2

Misalkan (B_n) adalah barisan naik bilangan real positif yang memenuhi $B_n \to \infty$ dan $\frac{B_n}{B_{n+1}} \to 1$ untuk $n \to \infty$. Maka untuk setiap $\tau > 0$ terdapat barisan bilangan bulat positif (n_k) sedemikian sehingga $B_{n_k} \sim (1 + \tau)^k$ untuk $k \to \infty$

(Laha & Rohatgi, 1976: 100)

BAB III
PEMBAHASAN

A. Beberapa Hukum Iterasi Logaritma

Berikut ini adalah beberapa hukum iterasi logaritma yang dikutip dari beberapa sumber yang berbeda.

1. Menurut Laha & Rohatgi (1976: 101)

   Misalkan $(\mathrm{X_n})$ merupakan barisan variabel acak yang saling bebas dengan $E(X_n) = 0$ dan $\mathrm{var}(\mathrm{X_n}) < \infty$ untuk setiap $\mathrm{n} \geq 1$, sedangkan $\mathrm{S_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_k}$, $\mathrm{s_n^2} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{var}(\mathrm{X_k})$ untuk $\mathrm{n} = 1,2,3, \ldots.$, dan $(\mathrm{K_n})$ adalah barisan konstan yang positif sehingga $\mathrm{K_n} \to 0$ untuk $\mathrm{n} \to \infty$. Jika memenuhi kondisi berikut:

   (i). $\mathrm{s_n^2} \to \infty$

   (ii). $|\mathrm{X_n}| \leq \frac{\mathrm{K_n s_n}}{\sqrt{\ln \ln \mathrm{s_n^2}}}$ a.s untuk setiap $\mathrm{n} \geq 1$

   maka $\mathrm{P}\left(\limsup\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{S_n}}{\sqrt{2\mathrm{s_n^2} \ln \ln \mathrm{s_n^2}}} = 1\right) = 1.$

2. Menurut Billingsley (1994:154)

   Misalkan $\mathrm{S_n} = \mathrm{X_1} + \mathrm{X_2} + \cdots \mathrm{X_n}$, dimana adalah variabel acak berdistribusi identik yang saling bebas dengan rata-rata=0 dan variansi=1, maka

   $$\mathrm{P}\left(\limsup_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{S_n}}{\sqrt{2\mathrm{n} \log \log \mathrm{n}}} = 1\right) = 1$$

   Ekivalen untuk ε yang positif

   $$\mathrm{P}\left(\mathrm{S_n} \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2\,\mathrm{n} \log \log \mathrm{n}} \ \mathrm{i.o}\right) = 0$$

   $$\mathrm{P}\left(\mathrm{S_n} \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\,\mathrm{n} \log \log \mathrm{n}} \ \mathrm{i.o}\right) = 1$$

3. Menurut Galambos (1995: 277)

   Misalkan X_1, X_2, ... tak terbatas dan berdistribusi identik, dengan $E(X_j) = 0$ dan $V = V(X_j) > 0$. Maka

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\,Vn\log\log n}} = 1\right) = 1$$

Berdasarkan pendapat-pendapat diatas, dapat dilihat bahwa:

1. Laha & Rohatgi (1976: 101) menyatakan bahwa $E(X_n) = 0$, $\mathrm{var}(X_n) < \infty$ dan kondisi yang harus dipenuhi adalah

   (i). $s_n^2 \to \infty$

   (ii). $|X_n| \leq \frac{K_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}}$

2. Billingsley (1994:154) menyatakan bahwa rata-rata=0, variansi=1 dan $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\right) = 1$ ekivalen untuk setiap ε yang positif dengan bentuk berikut:

$$P\left(S_n \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2\,n\log\log n}\ \text{ i.o}\right) = 0$$

$$P\left(S_n \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\,n\log\log n}\ \text{ i.o}\right) = 1$$

   Sedangkan kondisi yang harus dipenuhi tidak dinyatakannya.

3. Galambos (1995: 277) menyatakan bahwa $E(X_j) = 0$ dan $V = V(X_j) > 0$ saja, sedangkan kondisi yang harus dipenuhi juga tidak dinyatakan.

Berdasarkan hal yang demikian, teorema pada pendapat pertama lebih lengkap dan lebih rinci menjelaskan teoremanya. Sehingga teorema yang akan di buktikan adalah teorema pada pendapat pertama.

B. Teorema Hukum Iterasi Logaritma

Adapun teorema yang akan dibuktikan tersebut adalah sebagai berikut misalkan (X_n) merupakan barisan variabel acak yang saling bebas dengan $E(X_n) = 0$ dan $\text{var}(X_n) < \infty$ untuk setiap $n \geq 1$, sedangkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \text{var}(X_k)$ untuk $n = 1,2,3,\ldots.,$ dan (K_n) adalah barisan konstan yang positif sehingga $K_n \to 0$ untuk $n \to \infty$. Jika memenuhi kondisi berikut:

(i). $s_n^2 \to \infty$

(ii). $|X_n| \leq \frac{K_n s_n}{\sqrt{\ln \ln s_n^2}}$ a.s untuk setiap $n \geq 1$

maka $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln \ln s_n^2}} = 1\right) = 1.$

Bukti:

Misalkan $t_n = \sqrt{2 \ln \ln s_n^2}$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$,

$$P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} = 0 \tag{1}$$

$$P\{S_n \geq (1-\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} = 1 \tag{2}$$

a. Pandang

   $P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} = 0$

   Misalkan $M_{n_k} = \max_{1\leq n\leq n_k} S_n$ dan berdasarkan lemma cantelli-borel (i) yaitu

$\sum_{k=1}^{\infty} P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k}\} < \infty$, untuk setiap $\delta > 0$ (3)

Langkah selanjutnya adalah menggunakan akibat ke-2 dari Ketaksamaan Levy dimana $\varepsilon = (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k}$, sehingga di dapatkan

$$P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k}\} \leq 2P\left\{S_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k} - \sqrt{2s_{n_k}^2}\right\} \quad (4)$$

Karena $t_{n_k} \to \infty$, maka ruas kanan persamaan diatas menjadi sebagai berikut:

$$(1+\delta)t_{n_k}s_{n_k} - \sqrt{2s_{n_k}^2} = t_{n_k}s_{n_k}\left(1+\delta - \frac{\sqrt{2}}{t_{n_k}}\right) > t_{n_k}s_{n_k}(1+\delta_1)$$

untuk setiap $\delta_1 < \delta$ dan k yang cukup besar (5)

Oleh karena $\delta_1 < \delta$ dan k yang cukup besar, maka

$$P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k}\} \leq 2P\{S_{n_k} \geq (1+\delta_1)t_{n_k}s_{n_k}\} \quad (6)$$

Selanjutnya dari kondisi (ii), maka $\frac{|X_i|}{s_{n_k}} \leq \frac{2k_i s_i}{t_i s_{n_k}}$ a.s untuk setiap $i \leq n_k$

Misalkan $c_k = \max_{1 \leq i \leq n_k} \frac{X_i}{s_{n_k}}$

Maka $c_k \leq \max_{1 \leq i \leq n_k} \frac{2k_i s_i}{t_i s_{n_k}}$ a.s

Sehingga $c_k(1+\delta_1)t_{n_k} \leq \max_{1 \leq i \leq n_k} \frac{2(1+\delta_1)k_i s_i t_{n_k}}{t_i s_{n_k}} \to 0$

Untuk $k \to \infty$, subsitusikan dalil Kolmogorov (Batas Eksponensial) ke persamaan (6) sehingga didapatkan

$$P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k}\} \leq \exp\{-(1+\delta_1)^2 \ln\ln s_{n_k}^2 (1-\gamma)\},$$

$$= \left(\ln s_{n_k}^2\right)^{-(1-\gamma)(1+\delta_1)^2}$$

untuk $0 < \gamma < 1$ dan k yang cukup besar (7)

Pilih $0 < \gamma < 1$, sedemikian sehingga $(1-\gamma)(1+\delta_1)^2 > 1$

Selanjutnya karena $s_n^2 \to \infty$, sehingga dari kondisi (ii). Didapatkan bahwa

$$1 \le \frac{s_{n+1}^2}{s_n} = 1 + \frac{E[Var\ (X_{n+1})]}{s_n^2} \le 1 + \frac{s_{n+1}^2}{s_n} \frac{K_{n+1}^2}{\ln \ln s_{n+1}^2} \tag{8}$$

Jadi

$$\left(\frac{s_{n+1}^2}{s_n} - \frac{s_{n+1}^2}{s_n} \frac{K_{n+1}^2}{\ln \ln s_{n+1}^2}\right) \le 1 \tag{9}$$

$$\left\{\frac{s_{n+1}^2}{s_n}\left(1 - \frac{K_{n+1}^2}{\ln \ln s_{n+1}^2}\right)\right\} \le 1 \tag{10}$$

Karena $K_n \to 0$ dan $\ln \ln s_{n+1}^2 \to \infty$ untuk $n \to \infty$, hal ini berarti $\frac{s_{n+1}^2}{s_n} \to 1$ untuk $n \to \infty$.

Dari lemma 5 didapatkan untuk setiap $\tau > 0$ maka ada barisan naik (n_k), $n_k(\tau) > 0$,

sedemikian sehingga $s_{n_k}^2 \sim (1+\tau)^k$ untuk $k \to \infty$ (11)

Dan

$$\begin{aligned} s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2 &= s_{n_k}^2 \left(1 - \frac{s_{n_{k-1}}^2}{s_{n_k}^2}\right) \\ &= s_{n_k}^2 \left(\frac{s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2}{s_{n_k}^2}\right) \\ &\sim s_{n_k}^2 \frac{\tau}{1+\tau} \end{aligned} \tag{12}$$

Jadi karena $s_{n_k}^2 \sim (1+\tau)^k$ dan $\tau > 0$ didapatkan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln s_{n_k}^2\right)^{-(1-\gamma)(1+\delta_1)^2} < \infty \tag{13}$$

Sehingga berlaku persamaan (3).

Selanjutnya untuk setiap $\varepsilon > 0$ didapatkan:

$$P\{S_n \ge (1+\varepsilon) t_n s_n \text{ i.o}\} = 0 \le P\left\{\max_{1 \le n \le n_k} S_n \ge (1+\varepsilon) t_{n_{k-1}} s_{n_{k-1}} \text{i.o}\right\}$$

$$\leq P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_{k-1}}s_{n_{k-1}} \text{i.o}\} \qquad (14)$$

Berdasarkan persamaan (11) maka $t_{n_k}s_{n_k} < \sqrt{1+2\tau}\, t_{n_{k-1}}s_{n_{k-1}}$ untuk k yang cukup besar (15)

Sehingga

$$P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} \leq P\left(M_{n_k} \geq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+2\tau}} t_{n_k}s_{n_k} \text{i.o}\right) \qquad (16)$$

Misalkan $\varepsilon > 0$, pilih $0 < \delta < \varepsilon$ dan andaikan bahwa τ memenuhi

$$\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+2\tau}} > 1+\delta \qquad (17)$$

Maka

$$P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} \leq P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k} \text{ i.o}\} \qquad (18)$$

Jadi $\sum_{k=1}^{\infty} P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k}\} < \infty$, maka $P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} = 0.$

b. Pandang

$P\{S_n \geq (1-\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} = 1.$

$P\{S_n \geq (1-\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} = 1$ berlaku untuk setiap $0 < \varepsilon < 1$ dan barisan (n_k)

Pilih (n_k) dan τ, misalkan $u_k^2 = s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2 \sim s_{n_k}^2\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)$, (19)

dan $v_k^2 = \left(2\ln\ln u_k^2\right) \sim 2\ln\left(\ln u_k^2 + \ln\frac{\tau}{1+\tau}\right)$

$$\sim 2\ln\ln s_k^2 = t_{n_k} \qquad (20)$$

Selanjutnya $A_k = \{s_{n_k} - s_{n_{k-1}} \geq (1-\varepsilon)\}$, (21)

sehingga dapat ditujukkan bahwa $P(A_k \text{ i.o}) = 1$

Karena $s_{n_k} - s_{n_{k-1}}$ adalah variabel acak yang saling bebas. Maka dapat ditunjukkan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$.

Dengan catatan: $(1-\varepsilon)v_k \sim (1-\varepsilon)t_{n_k} \to \infty$ untuk $k \to \infty$,

dan $\max_{n_{k-1}<n\le n_k} \frac{|X_n|}{u_k} \le \max_{n_{k-1}<n\le n_k} \frac{k_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}} \sqrt{\frac{1+\tau}{\tau}} . \frac{1}{s_{n_k}} \to 0$

untuk $k \to \infty$ (22)

Oleh karena $P(S_n > \varepsilon S_n) > exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}(1+\gamma)\right)$ dapat diaplikasikan

dengan memilih γ sedemikian sehingga $(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2 < 1$.

Sehingga didapatkan

$$P(A_k) > exp\left\{-\frac{1}{2}(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2 v_k^2\right\}$$

$$= \exp\left\{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2 \ln\ln s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2\right\}$$

$$= \left\{\ln\left(s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2\right)\right\}^{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2}$$

$$\sim \left\{\ln\left((1+\tau)^k \frac{\tau}{1+\tau}\right)\right\}^{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2}$$

$$ck^{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2} \quad (23)$$

Dimana $c > 0$ adalah konstanta yang saling bebas dari k

Karena $(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2 < 1$. Sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) > c\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2} = \infty \quad (24)$$

Jadi $P(A_k \text{ i.o}) = 1$

Selanjutnya misalkan $B_k = \left(\left|S_{n_{k-1}}\right| < 2s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}}\right)$ (25)

Bukti $P\{S_n \ge (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} = 0$ tetap berlaku jika X_k diganti dengan $(-X_k)$. Hal itu juga berarti bahwa, untuk $\left|S_{n_{k-1}}\right|$ bukti tersebut juga berlaku dengan $\varepsilon = 1$

Sehingga didapatkan:

$P\left(\left|S_{n_{k-1}}\right| \geq 2s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}}\ \mathrm{i.o}\right) = 0$, dimana $P(B_k\ \mathrm{i.o}) = 0$ (26)

Oleh karena itu peluang dari $P(B_k^c) = 1$. Maka $\left(\left|S_{n_{k-1}}(\omega)\right| < 2s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}}\right)$ untuk $n > n_0(\omega)$ dan untuk setiap $\omega \epsilon s$ kecuali untuk himpunan kosong.

Selanjutnya jika $P(A_kB_k\ \mathrm{i.o}) = 1$ maka berlaku $P\{S_n \geq (1-\varepsilon)t_n s_n\ \mathrm{i.o}\} = 1$. Selanjutnya didapatkan

$$A_k \cap B_k = \left\{s_{n_k} - s_{n_{k-1}} \geq (1-\varepsilon)u_k v_k\right\} \cap \left\{\left|s_{n_{k-1}}\right| < 2t_{n_k}s_{n_{k-1}}\right\}$$

$$\subset \left\{S_{n_k} \geq (1-\varepsilon)u_k v_k + s_{n_{k-1}}\right\} \cap \left\{S_{n_{k-1}} > -2t_{n_k}s_{n_{k-1}}\right\}$$

$$\subset \left\{S_{n_k} \geq (1-\varepsilon)u_k v_k - 2t_{n_{k-1}}s_{n_{k-1}}\right\} \tag{27}$$

Dimana

$$(1-\varepsilon)u_k v_k - 2t_{n_{k-1}}s_{n_{k-1}} = t_{n_k}s_{n_k}\left\{(1-\varepsilon)\frac{u_k v_k}{t_{n_k}s_{n_k}} - 2\frac{t_{n_{k-1}}s_{n_{k-1}}}{t_{n_k}s_{n_k}}\right\}$$

$$\sim t_{n_k}s_{n_k}\left\{(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}} - \frac{2}{\sqrt{1+\tau}}\right\} \tag{28}$$

Jika dipilih $\varepsilon' > \varepsilon$ dan τ yang cukup besar, sehingga

$$(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}} - \frac{2}{\sqrt{1+\tau}} > 1-\varepsilon' \tag{29}$$

Maka

$$(A_k \cap B_k\ \mathrm{i.o}) \subset \left\{S_{n_k} \geq (1-\varepsilon')t_{n_k}s_{n_k}\ \mathrm{i.o}\right\} \tag{30}$$

Dan untuk setiap $\varepsilon' > 0$ maka berlaku

$$P\left\{S_{n_k} \geq (1-\varepsilon')t_{n_k}s_{n_k}\ \mathrm{i.o}\right\} = 1 \tag{31}$$

Sehingga dari penyelesaian di atas terbukti bahwa $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1\right) = 1$, jika memenuhi kondisi:

(i). $s_n^2 \to \infty$

(ii). $|X_n| \leq \frac{K_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}}$ a.s untuk setiap $n \geq 1$

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan penyelesaian dari permasalahan maka dapat disimpulkan bahwa: misalkan $(\mathrm{X_n})$ merupakan barisan variabel acak berdistribusi identik yang saling bebas dengan $E(X_n) = 0$ dan $var(X_n) < \infty$ untuk setiap $\mathrm{n} \geq 1$, sedangkan $\mathrm{S_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_k}$, $\mathrm{s_n^2} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{var(X_k)}$ untuk $\mathrm{n} = 1,2,3, \ldots.$, dan $\mathrm{K_n}$ adalah barisan konstan yang positif sehingga $\mathrm{K_n} \to 0$ untuk $\mathrm{n} \to \infty$, dan jika memenuhi kondisi berikut:

(i). $\mathrm{s_n^2} \to \infty$

(ii). $|\mathrm{X_n}| \leq \frac{\mathrm{K_n s_n}}{\sqrt{\ln \ln \mathrm{s_n^2}}}$ a.s untuk setiap $\mathrm{n} \geq 1$,

maka $\mathrm{P}\left(\limsup_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{S_n}}{\sqrt{2\mathrm{s_n^2} \ln \ln \mathrm{s_n^2}}} = 1\right) = 1.$

B. Saran

Pembahasan pada tugas akhir ini hanya memperkenalkan Hukum Iterasi Logaritma dan pembuktiannya saja. Oleh karena itu penulis menyarankan kepada peneliti selanjutnya untuk membahas aplikasi Hukum Iterasi Logaritma pada proses Gauss dan pada gerak Brown.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G dan Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. 3^{rd} edition. New York: John Willey & Sons.

Billingsley, Patrick. 1995. *Probability and Measure*. New York: John Wiley & Sons.

Freund, John E, & Ronald E. Walpole. 1987. *Mathematical Statistics*. 4^{th}. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Galambos, Janos. 1995. *Advanced Probabilty Theory*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Laha, R. G. & V. K. Rohatgi. 1979. *Probability Theory*. New York: John Wiley & Sons.

Rohatgi, V.K. 1976. An Introduction to *Probability Theory and Mhatematical Statistics*. New York: John Wiley & Sons.

Teicher, Henry. 1974. *On The Law Of The Iterated Logaritma*. The Annals Of Probability. 2 4 714-728.

Walpole, Ronald E. 1995. *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Lampiran 1. Bukti Teorema 1

1. Misalkan X dan Y adalah 2 variabel acak non negatif

   $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ dan $Y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$

   Sedangkan $x_i = \{\omega \in \Omega: X(\omega) = \alpha_i\}$, $\quad i = 1,2,3, \dots n$

   $y_j = \{\omega \in \Omega: X(\omega) = \beta_j\} \quad j = 1,2,3, \dots m$

   Karena X dan Y saling bebas, maka kelas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan

   $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ juga saling bebas,

   sehingga $P(x_i \cap y_j)$ untuk $i = 1,2,3, \dots n$ dan $j = 1,2,3, \dots m$

2. XY juga variabel acak

   $$XY = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i \cap y_j)$$

   Oleh karena itu, $E(XY) = \int_{\Omega} XY \, dp$

   $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \, P(x_i \cap y_j)$

   $= \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, P(x_i)\}\{\sum_{j=1}^{m} \beta_j \, P(y_j)\}$

   $= E(X)E(Y)$

   Terbukti $E(XY) = E(X)E(Y)$

Lampiran 2. Bukti Lemma Cantelli-Borel

a. Pandang $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Misalkan $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, sehingga $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

Untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$ untuk $n \to \infty$.

Selain itu, $B_n \downarrow A$ untuk $n \to \infty$ sehingga $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$.

b. Pandang $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ dan $A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c$

Sehingga $P(A^c) = P(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c)$

Untuk $n_0 > n$ dipenuhi $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \subset \bigcap_{k=n}^{n_0} A_k^c$ supaya

$P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) \leq \lim_{n_0\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{n_0} A_k^c\right) = \lim_{n_0} \prod_{k=n}^{n_0}\left(1 - P(A_k)\right)$, karena (A_n) adalah barisan saling bebas dari kejadian. Dengan menggunakan ketaksamaan berikut:

$1 - \exp\left(-\sum_{j=n}^{n_0} \alpha_j\right) \leq 1 - \prod_{j=n}^{n_0}\left(1 - \alpha_j\right) \leq \sum_{j=n}^{n_0} \alpha_j$, $n_0 > 0{,}1 \geq \alpha_j \geq 0$

Sehingga disimpulkan bahwa

$P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) \leq \lim_{n_0\to\infty} \exp\left(-\sum_{j=n}^{n_0} P(A_k)\right)$

Karena $\sum_{j=n}^{n_0} P(A_n) = \infty$ adalah divergen maka $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = 0$ untuk setiap n. Hal ini mengakibatkan $P(A^c) = 0$ dan $P(A^c) = 1$.

Lampiran 3. Bukti Lemma Toeplitz

Pandang $a_n \to a$, artinya untuk $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0(\varepsilon) = n_0$ sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya pilih bilangan bulat $n_1 > n_0$ sedemikian sehingga $\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_0}|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga untuk $n > n_1$ berlaku

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a| \leq \frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_0}|a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|a_k - a|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Karena $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a| < \varepsilon$, menurut definisi limit barisan maka $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to a$

Lampiran 4. Bukti Lemma Keekivalenan

Perhatikan $\sum_{n=1}^{\infty} P\,(X_n \neq X_n') < \infty$, berdasarkan lemma cantelli-borel $P(\lim_{n\to\infty} X_n \neq X_n') = 0$. Hal ini berarti $P(X_n \neq X_n' \text{ i.o}) < 0$, dengan kata lain bahwa X_n dan X_n' adalah tail-ekivalen. Dengan mengggunakan definisi tail-ekivalen yaitu untuk hampir semua $\omega \epsilon \Omega$ terdapat $n(\omega)$ sedemikian sehingga untuk $n \geq n(\omega)$ barisan $X_n(\omega)$ dan $X_n'(\omega)$ adalah sama. Berdasarkan hal di atas $P\left(\omega: X_n(\omega) \neq X_n'(\omega)\right) = 1$ hanya untuk nilai n batas.

Berdasarkan sifat kekonvergenan hampir pasti $X_n(\omega) \neq X_n'(\omega) \to 0$.

Selanjutnya, $\frac{S_n(\omega)}{B_n} \to 0$ untuk $n \to \infty$ hanya untuk $X_n(\omega) \neq X_n'(\omega)$ yang jumlahnya terbatas. Karena $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dan $S_n' = \sum_{k=1}^{n} X_k$ terbatas dan merupakan konvergen ekivalen maka $\frac{S_n'(\omega)}{B_n} \to 0$ atau sebaliknya. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\frac{S_n}{B_n}$ dan $\frac{S_n'}{B_n}$ konvergen pada himpunan yang sama dan limit yang sama.

Lampiran 5. Bukti Lemma kolmogorov 0-1

Misalkan $\mathcal{F}$ adalah σ-ekor dari barisan X_n, dan misalkan $A \in \mathcal{F}$. Maka $A \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}, \dots)$, $n = 1,2,3, \dots$

Berdasarkan proposisi berikut: " misalkan (X_n) adalah barisan variabel acak yang saling bebas. Maka, untuk setiap $n \geq 1, \sigma(X_1, X_2, \dots X_n)$ dan $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}, \dots)$ adalah kelas kejadian yang saling bebas". Didapatkan bahwa $P(A \cap E_n) = P(A)P(E_n)$ untuk setiap $E_n \in \sigma(X_1, X_2, \dots X_n)$ dan untuk setiap n. Karena $P(A \cap E) = P(A)P(E)$ untuk setiap $E \in \sigma(X_1, X_2, \dots X_n)$.

Karena $E \in \mathcal{F}$, $E \in \sigma(X_1, X_2, \dots X_n)$, dan ambil $E = A$, dapat dillihat bahwa $P(A) = \{P(A)\}^2$, yaitu $P(A) = 0$ atau $P(A) = 1$.

Lampiran 6. Bukti Lemma Ketaksamaan Levy

Pandang: $P\{\max_{1\leq k\leq n}[s_k - \text{med}(S_k - S_n)] \geq \epsilon\} \leq 2P\{S_n \geq \epsilon\}$ (1)

Misalkan: $S_0 = 0$ dan $M_k = \max_{1\leq j\leq k}\{S_j - \text{med}(S_j - S_n)\}$ untuk

$k = 1,2,3,\dots,n$

$A_k = M_{k-1} < \varepsilon S_k - \text{med}(S_k - S_n) \geq \varepsilon$

$B_k = S_n - S_k - \text{med}(S_n - S_k) \leq 0$ untuk $k = 1,2,3,\dots,n$

Dimana $\text{med}(S_k - S_n) = -\text{med}(S_n - S_k)$, sedangkan A_k beririsan dengan $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{M_n \geq \varepsilon\}$. A_k dan B_k adalah saling bebas dan $P(B_k) \geq \frac{1}{2}$ untuk $k = 1,2,3,\dots,n$

Hal itu berarti bahwa

$$P(S_n \geq \varepsilon) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B_k)$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

$$= \frac{1}{2}P(M_n \geq \varepsilon)$$

Pandang $P\{\max_{1\leq k\leq n}|s_k - \text{med}(S_k - S_n)| \geq \epsilon\} \leq 2P\{|S_n| \geq \epsilon\}$. (2)

Misalkan $X_i = -X_i, 1 \leq i \leq n$ maka didapatkan

$$P(S_n \leq -\varepsilon) \geq \frac{1}{2}P\{\min_{1\leq k\leq n}(S_k - \text{med}(S_k - S_n)) \leq -\varepsilon\}$$

Dengan menggabungkan persamaan 1 dengan persamaan diatas didapatkan:

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) = P(S_n \geq \varepsilon) + P(S_n \leq -\varepsilon)$$

$$\geq \frac{1}{2} P\{\{\max_{1\leq k\leq n} |s_k - \mathrm{med}(S_k - S_n)| \geq \epsilon\}\}$$

Lampiran 7. Bukti Akibat 2 dari Lemma Ketaksamaan Levy

Untuk setiap variabel acak X dengan variansi terbatas σ^2

$$P\left\{|X - E(X)| \geq \sqrt{2\sigma^2}\right\} \leq \frac{1}{2}$$

Sehingga berikut ini definisi median

$$E(X) - \sqrt{2\sigma^2} \leq med(X) \leq E(X) + \sqrt{2\sigma^2} \qquad (2)$$

Selanjutnya mengaplikasikan persamaan (2) ke $(S_k - S_n)$, dengan catatan bahwa $E(S_k - S_n) = 0$. Maka didapatkan

$$|med\ (S_k - S_n)| \leq \sqrt{2\sum_{j=k+1}^{n} var(X_k)} \leq \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}$$

Sehingga

$$-med\ (S_k - S_n) \geq -\sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}$$

Dari persamaan ketaksamaan levy (1)

$$P\left\{max_{1\leq k\leq n}\left(S_k - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}\right) \geq \varepsilon\right\} \leq P\left\{\max_{1\leq k\leq n}\left(S_k - \mathrm{med}\ (S_k - S_n)\right) \geq \varepsilon\right\} \leq 2P(S_n \geq \varepsilon).$$

$$P\left\{\max_{1\leq k\leq n}\left(S_k - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k)}\right) \geq \varepsilon - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k)}\right\} \leq$$

$$P\left\{\max_{1\leq k\leq n}\left(S_k - \mathrm{med}\ (S_k - S_n)\right) \geq \varepsilon\right\} \geq \varepsilon - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k)}.$$

$$P\left\{\max_{1\le k\le n}(S_k \ge \varepsilon)\right\} \le 2P\left\{S_n \ge \varepsilon - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}\right\} \quad (1)$$

Sehingga terbukti Akibat 2 Lemma Ketaksamaan Levy

Lampiran 8. Bukti Teorema 2

Karena $\frac{B_{n+1}}{B_n} \to 1$ untuk $n \to \infty$ maka ada bilangan bulat k_0, sedemikian sehingga untuk $k > k_0$ setiap interval dari $\{(1+\tau)^k, ((1+\tau)^{k+1})\}$, memuat paling kurang B_n. Sebaliknya lim sup $_n \frac{B_{n+1}}{B_n} \ge (1+\tau) > 1$

$n_1 = n_2 = \cdots = n_{k_0}$ untuk $k > k_0$

Misalkan n_k adalah bilangan bulat paling kecil sedemikian sehingga $B_{n_k}(1+\tau)^k$ maka $n_k < n_{k+1}$ untuk semua $k > k_0$

dan $\frac{B_{n_{k-1}}}{B_{n_k}} < \frac{(1+\tau)^k}{B_{n_k}} \le 1$,

karena $\frac{B_{n_{k-1}}}{B_{n_k}} \to 1$, sehingga $B_{n_k} \sim (1+\tau)^k$