KEBEBASAN LINEAR SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR KOEFISIEN KONSTANTA ORDE-n

SKRIPSI

untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh

DEO PUTRA PRATAMA
14030004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2019

HALAMAN PERSETUJUAN SKRIPSI

Judul	:	Kebebasan Linear Solusi Persamaan Diferensial Linear Koefisien Konstanta Orde-n
Nama	:	Deo Putra Pratama
NIM	:	14030004
Program Studi	:	Matematika (S1)
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Padang, 13 Februari 2019

Disetujui oleh,

Pembimbing

Dra. Media Rosha, M. Si

NIP.19620815 198703 2 004

HALAMAN PENGESAHAN LULUS UJIAN SKRIPSI

Dengan ini dinyatakan bahwa:

Nama	:	Deo Putra Pratama
NIM / TM	:	14030004 / 2014
Program Studi	:	Matematika (S1)
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	MIPA

Dengan Judul Skripsi:

Kebebasan Linear Solusi Persamaan Diferensial Linear Koefisien Konstanta Orde-n

Dinyatakan lulus setelah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi
Program Studi Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Padang

Padang, 13 Februari 2019

Tim Penguji

	Nama	Tanda Tangan
Ketua	: Dra. Media Rosha, M.Si	
Anggota	: Drs. H. Yarman, M.Pd	
Anggota	: Riry Sriningsih, S.Si., M.Si	

SURAT PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Deo Putra Pratama
NIM	: 14030004
Program Studi	: Matematika (S1)
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi saya dengan judul **"Kebebasan Linear Solusi Persamaan Diferensial Linear Koefisien Konstanta Orde-n"** adalah benar merupakan hasil karya saya dan bukan merupakan plagiat dari karya orang lain atau pengutipan dengan cara yang tidak sesuai dengan etika yang berlaku dalam tradisi keilmuan. Apabila suatu saat terbukti saya melakukan plagiat maka saya bersedia diproses dan menerima sanksi akademis maupun hokum sesuai dengan hukum dan ketentuan yang berlaku, baik di institusi UNP maupun di masyarakat dan Negara.

Demikianlah pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan rasa tanggung jawab sebagai anggota masyarakat ilmiah.

Padang, 13 Februari 2019

Diketahui oleh,

Ketua Jurusan Matematika

Saya yang menyatakan,

METERAI TEMPEL
TGL. 20
A8B32AFF531951629
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Muhammad Subhan, M.Si
NIP. 19701126 199903 1 002

Deo Putra Pratama
NIM. 14030004

ABSTRAK

Deo Putra Pratama: Kebebasan Linear Solusi Persamaan Diferensial Linear Koefisien Konstanta Orde-n

Fungsi yang tidak diketahui yang termuat dalam suatu PD dinamakan solusi dari PD. Karena solusi umum PD merupakan keluarga kurva-kurva, maka PD mempunyai banyak solusi. Solusi umum dari PD linear merupakan kombinasi linear dari solusi-solusi PD linear, yang mempersyaratkan solusi pembangunnya masing-masing bebas linear. Pemeriksaan kebebasan linear antar solusi pembangun PD, merupakan hal yang penting karena tanpa mengetahui kelineearannya solusi umum tak dapat dibuat.

Persamaan diferensial koefisien konstanta homogen orde-n, solusinya dicari dengan menentukan persamaan karakteristik dari PD linear homogen. Solusi dibangun berdasarkan akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut. Persamaan diferensial linear koefisien konstanta nonhomogen, solusi nonhomogen dicari menggunakan metode koefisien tak tentu atau metode variasi parameter.

Pemeriksaan kebebasan linear solusi pada PD linear homogen dapat dilakukan dengan memeriksa wronskian dari solusi-solusi tersebut. Sedangkan untuk pemeriksaan kebebasan linear solusi pada PD linear nonhomogen, dilakukan dengan pemeriksaaan masing-masing solusi (apakah suatu solusi merupakan kelipatan dari solusi lainnya). PD linear homogen

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

mempunyai solusi dalam bentuk $y(x)$ dengan solusi homogen

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_{n-1} y_{n-1}(x) + c_n y_n(x)$$

dimana

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

solusi bebas linear apabila $W \neq 0$.

Pada PD linear nonhomogen, apabila solusi dicari dengan menggunakan metode koefisien tak tentu, solusinya bebas linear karena dalam pembentukan solusi nonhomogen apabila dalam pemisalan solusi nonhomogen (y_k) menyerupai solusi homogen (y_h) maka pemisalan harus dikali $x, x^2, \ldots$ dan seterusnya yang mengakibatkan masing-masing solusi bukan kelipatan dari solusi lain. Sedangkan pada metode variasi parameter pembentukan solusi nonhomogen dibentuk berdasarkan solusi homogen dengan merubah parameter yang ada pada solusi homogen menjadi variabel. Sehingga tidak ada solusi yang merupakan kelipatan dari solusi lain. Dengan demikian solusi menjadi bebas linear.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Linear, Kebebasan Linear, Solusi Umum

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahi rabbil ‘alamin segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini yang berjudul **“Kebebasan Linear Solusi Persamaan Diferensial Linear Koefisien Konstanta Orde-n”.** Selanjutnya, shalawat beserta salam untuk nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi seluruh umat.

Penulisan skripsi ini dimaksud untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam rangka penyelesaian kuliah tingkat sarjana di Program Studi Matamatika Universitas Negeri Padang. Dalam penelitian ini banyak tantangan yang penulis hadapi, walaupun demikian akhirnya skripsi ini dapat diselesaikan. Berkat bimbingan, motivasi, do’a, saran, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak, skripsi ini dapat diselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan kali ini dengan segala kerendahan hati peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Media Rosha, M.Si., Pembimbing dan Penasehat Akademik sekaligus Ketua Program Studi Matematika Universitas Negeri Padang.
2. Bapak Drs. H. Yarman, M.Pd dan Ibu Riry Sriningsih, S.Si, M.Sc, Penguji.
3. Bapak Muhammad Subhan, S.Si, M.Si. Ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang.
4. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNP.
5. Semua pihak yang turut membantu dan mendukung penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan pada penulis dapat menjadi amal ibadah di sisi-Nya. Penulis telah berusaha dengan sungguh-sungguh untuk menyelesaikan penelitian ini, namun tak ada gading yang tak retak begitu juga dengan karya ini yang belum mencapai kata sempurna dalam penulisannya. Dengan demikian penulis berharap karya ini dapat bermanfaat bagi penulis dan menambah khasanah ilmu pengetahuan kita semua.

Padang, Januari 2019

Peneliti

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika merupakan suatu bidang ilmu yang manfaatnya kita butuhkan dalam kehidupan sehari-hari. Matematika tidak hanya dibahas dalam lingkaran kajian bidang ilmu tersebut saja, tetapi juga ditemui dalam bidang ilmu lain. Matematika digunakan dalam bidang: Fisika, Kimia, Biologi, Ekonomi, Akuntansi, Geografi dan bidang ilmu lainnya. Karena itu matematika merupakan pelayan dari semua bidang ilmu tersebut.

Ilmu Matematika dapat membantu kita dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dapat di modelkan kedalam masalah matematika yang berupa rumus atau persamaan matematika. Sehingga permasalahan dapat diselesaikan dengan cara menyelesaikan persamaan matematika dari permasalahannya dan selanjutnya menginterpretasi solusi matematika kedalam solusi permasalahan semula.

Salah satu bidang kajian ilmu Matematika yang dapat membantu menyelesaikan permasalahan adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial (PD) merupakan persamaan yang mengandung turunan suatu atau beberapa fungsi yang belum diketahui, contoh:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Menurut Nuraeni (2017) aplikasi persamaan diferensial digunakan dalam mengkonstruksi model matematika fenomena perubahan dalam kehidupan sehari-hari yang meliputi laju perubahan. Sehingga persamaan diferensial digunakan untuk pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Contohnya pertumbuhan dan penyusutan populasi, pemanasan dan pendinginan, penguapan, perilaku arus listrik dalam suatu rangkaian listrik, gerak dalam medan gravitasi, pertumbuhan keuangan dan dinamika harga saham, pengaturan dosis obat, pembelahan sel dan sebagainya.

Berdasarkan hal di atas terlihat bahwa persamaan diferensial sangat dibutuhkan. Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial linear jika: variabel tak bebas dan turunan tertingginya berpangkat satu. Persamaan diferensial linear tidak memiliki perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya. Selain itu persamaan diferensial linear tidak memiliki fungsi transenden (selain fungsi polinom atau aljabar) pada variabel tak bebasnya. Persamaan diferensial yang tidak memenuhi syarat tersebut disebut persamaan diferensial nonlinear. Selain itu persamaan diferensial terbagi juga atas PD homogen dan PD nonhomogen.

Contoh :

PD nonhomogen : $y" + 4y = e^{-x} Sinx$

PD homogen : $(1 - x^2)y" - 2xy' + 6y = 0$

Suatu persamaan diferensial juga memiliki tingkat atau orde. Orde (tingkat) persamaan diferensial ditunjukkan oleh turunan tertinggi yang muncul pada persamaan diferensial tersebut.

Suatu persamaan diferensial akan memuat suatu fungsi yang tidak diketahui yang diikuti juga oleh turunan-turunan fungsi tersebut. Fungsi yang tidak diketahui tersebut merupakan hal yang menarik dari persamaan diferensial, selanjutnya fungsi tersebut disebut solusi dari persamaan diferensial. Semakin tinggi orde dari persamaan diferensial semakin sulit diperoleh solusi yang akan ditemukan dari persamaan tersebut.

Menurut Harini (2005: 3) solusi persamaan diferensial merupakan fungsi yang memenuhi persamaan diferensial. Apabila fungsi dan turunan-turunannya disubstitusikan ke persamaan diferensial maka, akan diperoleh suatu pernyataan yang benar. Suatu solusi dikatakan solusi umum apabila fungsi yang merupakan solusi masih memuat konstanta sebarang. Suatu solusi dikatakan solusi khusus apabila nilai-nilai awal dan syarat batas yang diketahui disubstitusikan ke dalam solusi umum yang didapatkan sehingga tidak terdapat lagi konstanta sebarang.

Pencarian solusi dari suatu persamaan diferensial, merupakan suatu proses pengintegralan. Persamaan diferensial dengan orde-n, logikanya solusi diperoleh dengan cara pengintegralan sebanyak n kali.

Solusi PD Linier Homogen orde-n dengan koefisien konstanta pada dasarnya solusi dicari dengan menentukan persamaan karakteristiknya. Pada PD linier homogen orde-n akar dari persamaan karakteristik dicari dengan teknik faktorisasi.

Persamaan Diferensial linear mempunyai banyak solusi, dan kombinasi linear dari solusi-solusi tersebut juga merupakan solusi dari PD linear. Solusi yang merupakan kombinasi linear dari solusi-solusi, mempersyaratkan solusi-solusi pembangunnya masing-masingnya bebas linear.

Solusi persamaan diferensial dikatakan bebas linear apabila masing-masing dari solusi tersebut tidak dapat ditulis sebagai suatu kelipatan dari solusi lain.

Kebebasan linear bermakna, apabila terdapat sejumlah kelompok vektor yang dimana kombinasi linear dari vektor-vektor tersebut akan menghasilkan suatu nilai nol jika mempunyai solusi satu-satunya dari persamaan kombinasi linear tersebut, hanya dipenuhi untuk semua konstanta yang bernilai nol (Anton,2004: 249).

Contoh:

Diberikan vektor-vektor $\mathrm{i} = (1,0,0),\ \mathrm{j} = (0,1,0),\ \mathrm{k} = (0,0,1)$ pada R^3. Persamaan vektor dalam bentuk komponen-komponennya

$$c_1\mathrm{i} + c_2\mathrm{j} + c_3\mathrm{k} = 0$$

menjadi

$$c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

Hanya dipenuhi untuk $(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$

Sehingga dikatakan vektor $\{\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$ saling bebas linear.

Kebebasan linear untuk solusi PD dijelaskan dengan contoh sebagai berikut, diberikan suatu persamaan diferensial orde-2:

$$y" - 3y' + 2y = 0$$

persamaan diferensial ini mempunyai solusi

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

Solusi $y_1 = e^x$ dan $y_2 = e^{2x}$ merupakan solusi-solusi persamaan diferensial, yang satu sama lain saling bebas linear.

Persamaan diferensial linear orde-n:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

mempunyai solusi

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

dimana semua r_i berbeda, sehingga Fungsi $y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}, \cdots, y_n = e^{r_n x}$ saling bebas linear. Pemeriksaan kebebasan linear antar solusi-solusi merupakan hal penting, agar kita dapat membangun solusi umum sebagai kombinasi linear dari solusi-solusi yang ada.

Berdasarkan latar belakang maka akan dilakukan analisis tentang kebebasan linear persamaan diferensial linear dengan judul **"Kebebasan Linear Solusi Persamaan Diferensial Linear Koefisien Konstanta Orde-n"**.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah "Bagaimanakah kebebasan linear solusi-solusi dari persamaan diferensial linear koefisien konstanta Orde-n?".

C. Pendekatan dan Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas, maka pendekatan penelitian yang digunakan untuk menjawab permasalahan yang dikaji adalah studi kepustakaan dengan berpedoman pada buku yang relevan, serta bahan yang diperoleh dari internet terhadap permasalahan yang dibahas.

Pertanyaan penelitian yang diajukan adalah:

1. Bagaimanakah menentukan kebebasan linear antar solusi PD linear koefisien konstanta orde-n homogen?

2. Bagaimanakah menentukan kebebasan linear antar solusi PD linear koefisien konstanta orde-n nonhomogen?

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diajukan maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan kebebasan linear antar solusi persamaan diferensial linear koefisien konstanta orde-n homogen.
2. Menentukan kebebasan linear antar solusi persamaan diferensial linear koefisien konstanta orde-n nonhomogen.

E. Metode Penelitian

Adapun langkah kerja yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menelaah makna kebebasan linear.
2. Menentukan solusi-solusi pada persamaan diferensial linear.
3. Menelaah kebebasan linear dari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstanta homogen.
4. Menelaah kebebasan linear dari solusi persamaan diferensial linear koefisien konstanta nonhomogen.

F. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu :

1. Memberikan gambaran dan pengetahuan bagi peneliti dan pembaca untuk mengetahui cara pemecahan masalah pada persamaan diferensial linear.

2. Dari hasil analisis yang diberikan dapat menjadi referensi bagi pihak-pihak terkait dalam menyelesaikan permasalahan pada persamaan diferensial.
3. Sebagai bahan masukan bagi peneliti selanjutnya dalam mengembangkan dan memperluas cakupan penelitian.