ISSN 1410 - 8070

SAINSTEK

Jurnal Ilmiah Ilmu Pengetahuan dan Teknologi

Vol. IV, Nomor 2, Maret 2002

Diterbitkan Oleh
LEMBAGA PENELITIAN
UNIVERSITAS NEGERI PADANG

Dipindai dengan CamScanner

SAINSTEK
Jurnal Ilmiah Ilmu Pengetahuan dan Teknologi
ISSN 1410-8070
SK REKTOR IKIP PADANG NO. 142/K12/PT/1998

Penasehat
Rektor UNP Padang
(A. Muri Yusuf)

Pengarah
Pembantu Rektor I
(*Z. Mawardi Effendi*)

Pemimpin Umum
Ketua Lembaga Penelitian UNP Padang
(Agus Irianto)

Pemimpin Redaksi/Ketua Penyunting
Sumantri

Sekretaris Redaksi/Waka Penyunting
Waskito

Anggota Redaksi /Penyunting Ahli
B. Suprapto. B (FI. ITB)
Ign. Pulung Nurprasetio (ITB)
Ali Amran (UNP)
Hasanuddin (UNP)
Festiyet (UNP)
Anizam Zein (UNP)
Rusli HAR (UNP)

Sekretariat
Yonrafdi
Siti Khadijah
Edaliani
Zahardi

Alamat Redaksi:
Lembaga Penelitian UNP Padang, Lantai III Rektorat UNP Padang
Telp. (0751) 443450, fax.(0751) 55628

Jurnal ini diterbitkan oleh Lembaga Penelitian UNP Padang 2 kali setahun (Maret dan September). Bagi yang berminat dapat menghubungi sekretariat dengan memberi kontribusi sebesar Rp. 8.000,- per eksemplar. Peminat dari luar daerah dapat menyertakan prangko untuk keperluan pengiriman.

Dipindai dengan CamScanner

ISI NOMOR INI

Dipindai dengan CamScanner

DARI REDAKSI

Pembaca,

Pada penerbitan Vol. IV No. 2, Maret 2002 ini kami terus mencoba untuk menghilangkan kesan *bunga rampai* terhadap jurnal SAINSTEK ini. Itu pula sebabnya pada edisi kali ini kami hanya menyajikan tulisan-tulisan bidang ilmu sains dan rekayasa saja. Dari artikel-artikel yang masuk ke meja redaksi, hanya 10 artikel yang menurut kami layak dipublikasikan. Bidang ilmu Matematika ada 3 artikel, Kimia 1 artikel, Fisika 1 artikel, Biologi 2 artikel, dan Teknologi 3 artikel..

Selain itu, perubahan lain dari edisi kali ini adalah terdapatnya nama-nama yang bertindak sebagai redaksi ahli (mitra bestari). Tentu saja nama-nama itu merupakan pakar yang kami anggap mampu memberi penilaian tentang layak-tidaknya sebuah artikel untuk dipublikasikan.

Akhirnya kami berharap, artikel-artikel yang disajikan ini dapat bermanfaat hendaknya

Redaksi

CS Dipindai dengan CamScanner

INTEGRAL *HENSTOCK* DARI FUNGSI BERNILAI *BANACH* DALAM RUANG *EUCLIDE* BERDIMENSI-N

Arnellis dan Yusmet Rizal*)

ABSTRACT

This article we construct the definition of the Henstock integral for Banach valued functions using δ-fine partition on Euclidean space, we shall study also some of simple properties on the Henstock integral for banach valued functions on Euclidean space, especially how far properties of Henstock integral for real valued functions can be developed in Henstock integral for Banach valued functions.

Key Words **:** henstock integral, banach valued functions, δ-fine partition, euclidean space.

PENDAHULUAN

Dari hasil studi yang mendalam tentang integral Henstock banyak sifat-sifat maupun karakteristik-karakteristik yang telah diungkapkan, baik dalam ruang berdimensi satu maupun dalam ruang *Euclide* berdimensi-n. Menurut pengamatan, masalah mengenai sifat-sifat sederhana pada integral *Henstock* kemungkinan dapat dikembangkan menjadi masalah yang lebih luas dalam integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* dan digeneralisasikan dalam ruang *Euclide* berdimensi-n. Khususnya sejauhmana sifat-sifat yang terkandung di dalam integral *Henstock* dari fungsi bernilai real dapat dikembangkan ke dalam integral *Henstock* fungsi bernilai *Banach.*

Terdapat dua cara yang dilakukan dalam hal penyusunan teori integral yaitu cara deskriptif dan cara konstruktif. Teori integral yang disusun oleh Denjoy (Kubota, 1980, dan Lee, 1989) maupun Perron (Lee, 1989) disusun dengan cara deskriptif merupakan pengitlakan dari integral Lebesque. Kemudian Henstock dan Kurzweil yang bekerja secara terpisah (Henstock, 1988, dan Lee, 1989) mengatakan integral

*) *Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang*

Dipindai dengan CamScanner

Riemann yang disusun secara konstruktif dengan melakukan pengembangan konstanta positif δ menjadi fungsi positif δ.

Di dalam perkembangan teori integral, Lee (1989) telah mendefinisikan integral Henstock dari fungsi bernilai real pada R, sifat-sifat sederhananya. Kemudian Cao (l992) telah mengembangkan integral Henstock dari fungsi bernilai Banach pada ruang berdimensi satu Indrati (1998) dalam penelitiannya, integral Henstock-Kurzweil dari fungsi bernilai real dalam ruang *Euclide* berdimensi-n. Hasil-hasil penelitian di atas memberikan ide untuk mengembangkan sifat-sifat sederhana pada integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* dalam ruang *Euclide* berdimensi-n.

Sebelum membahas konsep integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* dalam ruang *Euclide* berdimensi-n, terlebih dahulu dibicarakan pengertian-pengertian dasar dan teorema-teorema yang digunakan sebagai titik awal pembahasan tentang hasil penelitian.

Selang dan Sel pada Ruang Berdimensi-n.

Himpunan $A = \prod_{i=1}^{n}[a_1, b_1] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] x \ldots x[a_n, b_n] \subset R^n$ disebut selang jika $[a_i,b_i]$ merupakan selang di dalam R untuk setiap $1 < i < n$. Jika selang $[a_i,b_i]$ merupakan sel di R untuk setiap $1 \leq i \leq n$, maka A adalah sel di R^n. Jika $a_i < b_i$ untuk i = 1, 2, 3,... , n maka A disebut sel tertutup non degenerate. Jika tidak demikian disebut sel A yang *degenerate*. Dua sel dikatakan tidak tumpang tindih, jika irisan antara dua interior masing-masing sel kosong, jika tidak demikian dikatakan saling tumpang tindih (Pfeffer, 1993). Dalam pembahasan, A dimaksudkan sel tertutup non degenerate dalam R^n kecuali ada keterangan tambahan.

Partisi

Pengertian partisi sangat erat kaitannya dengan mendefinisikan integral *Henstock* dari fungsi bernilai Banach dalam ruang *Euclide* berdimensi-n. Partisi yang dimaksud dalam mendefinisikan integral tersebut adalah partisi δ-fine pada $A \subset R^n$. Adapun pengertian partisi disajikan pada definisi berikut ini:

Definisi

Diberikan $I_1, I_2,\ldots,I_p$ sel-sel yang tidak tumpang tindih di dalam sel $A\subset R^n$, dan $\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_p$ di dalam sel $A \subset R^n$. Partisi $P = \{(I, \xi)\}$ pada A adalah koleksi berhingga pasangan titik sel dengan $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_p = A$. Koleksi titik sel $P\{(I,\xi)\} = P\ \{(I_1, \xi_1),(I_2, \xi_2),\ldots (I_p, \xi_p)\}$ disebut partisi δ-

Dipindai dengan CamScanner

fine pada A jika $\bigcup_{i=1}^{p} I_i = A$ $\xi_i \in I_i$ dan $I_i \subset B(\xi, \delta(\xi))$ dengan $I_i^0 \cap I_j^0 = \emptyset$ untuk $i \neq j$ (Lee, TY, Chew T.S, Lee PY. 1999).

Teorema

Untuk setiap fungsi positif δ: $A \rightarrow R$ terdapat partisi δ-fine pada A. Sifat dari partisi-δ seperti dalam Lemma. Berikut sering digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

Lemma

Misalkan δ_1, δ_2, δ masing-masing merupakan fungsi bernilai real positif pada A dengan $\delta(\xi) = \min\{\delta_1(\xi), \delta_2(\xi)\}, \xi \in A$. Jika P partisi δ-fine pada A maka P juga merupakan partisi-δ_1 fine dan partisi-δ_2 fine pada A.

Ruang Banach

Diketahui X merupakan ruang linier

a. Norma merupakan suatu fungsi dari X ke himpunan bilangan real yang nilai fungsinya dinotasikan $\|.\|$ dan mempunyai sifat-sifat:
   (N_1) $\| x \| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
   $\| x \| = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$ (vektor nol)
   (N_2) $\| \alpha x\| = |\alpha| \| x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$
   (N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$
b. Ruang linier yang diperlengkapi dengan suatu norma disebut ruang bernorma, dan dituliskan dengan $(X, \|.\|)$.**(Royden, 1989).**

Definisi:

Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap dan apabila f: $A \rightarrow B$ dengan $A \subseteq R^n$ maka fungsi f dikatakan bernilai Banach jika B merupakan ruang Banach (Royden, 1989).

Jumlah Riemann

Integral Henstock disusun secara konstruktif berdasarkan pengertian penjumlahan Riemann atas suatu partisi yang dibentuk oleh fungsi positif δ pada selang terkait. Jika diambil f: $A \rightarrow B$ dengan $A \subset R^n$ dan B ruang Banach, dengan partisi pada A adalah $P = \{(I_1, \xi_1), (I_2,\xi_2),\ldots (I_p, \xi_p)\}$ maka jumlah Riemann yang dimaksud adalah $\sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)|I_i|$. (Gordon, 1994).

Dipindai dengan CamScanner

Berdasarkan uraian di atas, maka masalah utama dalam penelitian ini adalah mempelajari lebih dalam mengenai integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* dalam ruang *Euclide* berdimensi-n dan menurunkan beberapa sifat sederhana integral *Henstock* dari fungsi *Banach* dalam ruang *Euclide* berdimensi-n.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dimulai dari hasil studi pustaka dengan mempelajari beberapa karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk jurnal, bulletin ataupun buku. Hasilnya disajikan dalam bentuk karya tulis berupa teori integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* dalam ruang *Euclide* berdimensi-n. Teori tersebut disajikan dalam bentuk definisi-definisi serta teorema-teorema yang dilengkapi bukti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dikonstruksikan integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* pada ruang *Euclide* berdimensi-n dan beberapa sifat sederhananya. Secara formal pembahasannya sama dengan integral *Henstock* fungsi bernilai *Banach* pada R, yang berarti bahwa integral *Henstock* fungsi bernilai *Banach* pada ruang *Euclide* berdimensi-n merupakan generalisasi dari ruang berdimensi satu, R.

1. Integral *Henstock* Fungsi Bernilai *Banach*

Sebelum pembahasan integral *Henstock* fungsi bernilai *Banach* pada ruang *Euclide* berdimensi-n terlebih dahulu didefinisikan integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* pada R. seperti definisi berikut:

Definisi

Fungsi $f:[a,b]\to X$ dengan X ruang *Banach* dikatakan terintegral *Henstock* pada [a,b], jika ada $A\in X$ dengan sifat bahwa untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif $\delta>0$ pada [a,b] sehingga untuk setiap partisi δ-fine P = {(u, ξ)} berlaku

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)(x_i \dot{-} x_{i-1}) - A \right\| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Definisi

Fungsi $f: A\to B$ dengan $A\subseteq R^n$ dan B ruang *Banach* dikatakan terintegral *Henstock* pada A ditulis singkat dengan $f\in R^{*}[A]$, jika ada

Dipindai dengan CamScanner

$\gamma \in B$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada fungsi positif δ sehingga untuk setiap partisi δ-fine $P = \{(I_1, \xi_1), (I_2, \xi_2), \ldots (I_p, \xi_p)\}$ pada A berlaku

$$\| P \Sigma f(\xi) | I | - \gamma \| = \left\| \sum_{i=1}^{p} f(\xi_{ii}) | I_i | - \gamma \right\| < \varepsilon \qquad (2)$$

Himpunan semua fungsi yang terintegral *Henstock* pada A dinotasikan dengan $R^*[A]$. Elemen $\gamma \in B$ yang dimaksud dalam Definisi tunggal. Di bawah ini diberikan Teorema yang menyatakan ketunggalan nilai integral.

Teorema

Jika $f \in R^*[A]$ dan $A \subset R^n$ maka $\int_A f$ bernilai tunggal

Bukti

Misalkan ada dua nilai integral γ dan η dengan $\int_A f = \gamma$ dan $\int_A f = \eta$ memenuhi Definisi. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Menurut definisi terdapat fungsi positif δ_1 dan δ_2 pada A sehingga untuk setiap partisi δ_1 - fine P_1 dan partisi δ_2 - fine P_2 pada A berlaku,

$$\left\| P_1 \sum f(\xi) | I | - \gamma \right\| < \varepsilon / 2 \text{ dan}$$

$$\left\| P_2 \sum f(\xi) |I| - \eta \right\| < \varepsilon / 2 \qquad (3)$$

Diambil fungsi positif pada A dengan rumus $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ untuk setiap $x \in A$. Menurut Lemma . diperoleh untuk setiap partisi δ-fine P pada A merupakan partisi δ_1-fine dan δ_2-fine pada A sehingga diperoleh

$$\|\gamma - \eta\| \leq \left\| P \sum f(\xi) |I| - \gamma \right\| + \left\| P \sum f(\xi) |I| - \eta \right\| \qquad (4)$$

$$\langle \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

Oleh karena itu $\gamma = \eta$. Dengan kata lain $\int_A f$ bernilai tunggal.

Jika $f \in R^*[A]$ maka elemen $\gamma \in B$ yang terkait dalam Definisi. disebut nilai integral *Henstock* fungsi f dan ditulis dengan $\gamma = (R^*) \int_A f$.

Dipindai dengan CamScanner

2. Sifat-sifat Sederhana Integral *Henstock* dari Fungsi Bernilai *Banach*

Di dalam hal ini dibahas beberapa sifat sederhana integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* dalam ruang *Euclide* berdimensi-n. Integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* sebagaimana didefinisikan di atas memenuhi sifat-sifat dasar integral yang tertuang dalam teorema-teorema berikut.

Teorema A

Jika f, g $\in R^*[A]$ dan c suatu skalar, maka f+g $\in R^*[A]$ dan c $f \in R^*[A]$ dan berlaku

i. $(R^*) \int_A (f+g) = (R^*) \int_A f + (R^*) \int_A g$

ii. $(R^*) \int_A (cf) = (R^*) c \int_A f$

Bukti:

a. Ambil sebarang f, g $\in R^*[A]$. Misalkan $\int_A f = \gamma$ dan $\int_A g = \eta$

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $\int_A f = \gamma$ dan $\int_A g = \eta$ maka terdapat fungsi positif δ_1 dan δ_2 pada A sehingga untuk setiap partisi- δ_1 P_1 dan partisi δ_2 P_2 berlaku $\| P_1 \Sigma f(\xi) | I | - \gamma \| < \varepsilon / 2$ dan $\| P_2 \Sigma f(\xi) | I | - \eta \| < \varepsilon / 2$. Misalkan δ fungsi bernilai positif pada A dengan $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ untuk setiap $x \in A$, maka untuk setiap partisi – δ fine P, P juga merupakan partisi δ_1 dan partisi δ_2 sehingga

$$\|P\Sigma(f+g)(\xi)\,|\,I\,|-(\gamma+\eta)\| \le \|P_1\Sigma(\xi)\,|\,I\,|-\gamma\| + \|p_2 \sum g(\xi)|I|-\eta\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{.......................................} \quad (5)$$

Jadi $f + g \in R^*[A]$ dan juga berlaku

$$(R^*) \int_A (f+g) = (R^*) \int_A f + (R^*) \int_A g \quad \text{.......................................} \quad (6)$$

b. Selanjutnya jika c skalar nol maka cf merupakan fungsi nol. Misalkan merupakan unsur nol pada ruang Banach β. Selanjutnya diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan fungsi positif δ pada A. Untuk

Dipindai dengan CamScanner

setiap partisi-δ fine P berlaku $\|P\Sigma\,(cf)\,(\xi)|I|-\varphi\| < \varepsilon$. Oleh karena itu $(R^{*})\int_A cf = \varnothing = (R^{*})\ c\int_A f$. Jika c bukan skalar nol maka $|c|>0$. Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena $\int_A f = \gamma$, maka ada fungsi positif δ pada A sehingga untuk setiap partisi–δ fine P berlaku $\|P\Sigma f(\xi)\,|\,I\,|-\gamma\| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Oleh karena itu

$$\|P\Sigma(cf)(\xi)\,|\,I\,|-c\gamma\| = \|\,c\,\{P\Sigma f(\xi)\,|\,I\,|-\gamma\}\| =$$

$$|c|\,\|p\sum f\,(\xi)|I|-\gamma\| < \frac{\varepsilon}{|c|}|c| = \varepsilon \qquad (7)$$

Jadi $cf \in R^{*}[A]$ dan juga berlaku $(R^{*})\int_A cf = c(R^{*})\int_A f$

Himpunan semua fungsi-fungsi yang terintegral *Henstock* pada A sebagaimana yang diuraikan dalam Teorema A di atas merupakan ruang *linear*.

Teorema B

Misalkan E dan F dua sel tertutup dalam R^n dengan $E^0 \cap F^0 = \varnothing$. Jika $f \in R^{*}[E]$ dan $f \in R^{*}[F]$, maka $f \in R^{*}[E \cup F]$.

Bukti:

Ambil sebarang $f \in R^{*}[E]$ dan $f \in R^{*}(F)$

Misalkan $\int_E f = \gamma$ dan $\int_F f = \eta$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $\int_E f = \gamma$ dan $\int_F f = \eta$, maka ada fungsi positif δ_1 pada E dan δ_2 pada F sehingga untuk setiap partisi δ_1–fine P_1 dan untuk setiap partisi δ_2–fine P_2 berlaku $\|P_1\,\Sigma\, f(\xi)\,|\,I\,|-\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\|P_2\,\Sigma\, f(\xi)\,|\,I\,|-\eta\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Misalkan δ fungsi bernilai positif pada $E \cup F$ dengan

$$\delta(x) \begin{cases} \min\{\delta_1(x), \inf\{\|x-y\| : y \in F\}\}, & x \in E \\ \min\{\delta_1(x), \inf\{\|x-y\| : y \in E\}\}, & x \in F \\ \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}, & x \in E \cap F \end{cases}$$

Dipindai dengan CamScanner

Selanjutnya diambil sebarang partisi–δ fine P. Dari pendefinisian fungsi, diperoleh bahwa ada partisi- δ_1 fine P_1 dan partisi- δ_2 fine P_2 sehingga $P = P_1 \cup P_2$. Oleh karena itu

$$\left\| P\Sigma f(\xi)\,|\,\mathrm{I}\,|-(\gamma+\eta)\right\| \leq \left\| P_1\Sigma f(\xi)\,|\,\mathrm{I}\,|-\gamma\right\| +$$

$$\left\| p_2 \sum f(\xi)|\mathrm{I}|-\eta\right\| \langle \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad\text{...}\quad (8)$$

Jadi $f \in R^{*}[E \cup F]$

Teorema C

Jika f=θ (fungsi nol) hampir dimana-mana pada A maka $f \in R^{*}[A]$ dan $(R^{*})\int_A f = \theta$.

Bukti

Ambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $f = \theta$ hampir dimana-mana pada A maka terdapat himpunan $X \subset A$ dengan $\mu(X) = 0$ sehingga

$f(\xi) \begin{cases} = 0 & jika\ \xi \notin X \\ \neq 0 & jika\ \xi \in X \end{cases}$ dibentuk himpunan-himpunan bagian di dalam X dengan $X_i = \{\xi \in X : i-1 < \| f(\xi) \| \leq i\}$, $i = 1,2,\ldots$

Jadi $X = \cup X_i$ dan $\mu(X_i) = 0$

Karena $\mu(X_i) = 0$ maka terdapat himpunan terbuka I_{ij} sehingga

$$X_i \subset \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{ij}\right] \text{dan } \mu\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{ij}\right] \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(I_{ij}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \quad\text{......................}\quad (9)$$

Selanjutnya dibentuk fungsi positif δ: A→R dengan rumus sebagai berikut:

$$\delta(\xi) \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{i2^{i+1}} & \text{, untuk } \xi \in Xi = 1, 2, \ldots \\ \varepsilon & \text{, untuk } \xi \notin Xi \text{ dengan } c > 0 \end{cases}$$

Jika $P = \{(I, \xi)\}$ sebarang partisi δ-fine pada A maka diperoleh

Dipindai dengan CamScanner

$$\|P\,\Sigma\, f(\xi)|I|\,\theta\| = \left\|\sum\nolimits_1 f(\xi)|I| + \sum\nolimits_2 f(\xi)|I|\right\|$$

$$< \left\|0 + \sum\nolimits_2 i \cdot \frac{2\varepsilon}{i2^{i+1}}\right\|$$

$$< \left\|\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{2\varepsilon}{i2^{i+1}}\right\| < \varepsilon \quad \text{.......................................} \quad (10)$$

dengan Σ_1 = jumlah bagian P Σ dengan $\xi \notin X$

Σ_2 = jumlah bagian P Σ dengan $\xi \in X$

Hal ini menunjukkan bahwa $f \in R^*$ [A] dan $(R^*)\int_A f = \theta$

Selanjutnya berdasarkan Teorema C. di atas diperoleh akibat berikut

Akibat D

Jika $f \in R^*$ [A] dan g = f hampir dimana-mana pada A maka $g \in R^*$ [A] dan $(R^*)\int_A g = (R^*)\int_A f$

Bukti:

Ambil fungsi h = g - f diperoleh h = 0 hampir dimana-mana pada A. menurut Teorema C di atas $h \in R^*$ [A] dan $(R^*)\int_A h = 0$

Karena $h \in R^*$ [A], $f \in R^*$ [A], dan g = h + f, berdasarkan Teorema A diperoleh $g \in R^*$ [A] dan

$$(R^*)\int_A g = (R^*)\int_A h + (R^*)\int_A f$$

$$= 0 + (R^*)\int_A f$$

$$= (R^*)\int_A f$$

Sehingga diperoleh $(R^*)\int_A h = (R^*)\int_A f$

Dalam pembahasan selanjutnya, diperlihatkan bahwa setiap fungsi f yang terintegral *Henstock* pada A, terintegral pula pada setiap sel $B \subset$ A. Namun dalam menentukan $(R^*)\int_A f$ akan mendapat kesulitan, karena

Dipindai dengan CamScanner

tidak dapat menggunakan definisi sebelumnya. Oleh karena itu diperlukan alat bantu untuk menentukan nilai integral tersebut yang dikenal dengan Kriteria Cauchy, seperti Teorema E berikut:

Teorema E (Kriteria Cauchy)

$f \in R^{*}[A]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada fungsi positif δ pada A sehingga untuk setiap partisi-δ fine P_1 dan P_2 berlaku

$\|P_1\Sigma\, f(\xi)|I|-P_2\Sigma\, f(\xi)|I|\,\| < \varepsilon$ .... (12)

Bukti

Syarat perlu

Misalkan $f \in R^{*}$ [A] dan misalkan $\int_F f = \gamma$. Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $\int_A f = \gamma$ maka terdapat fungsi positif δ pada A sehingga untuk setiap partisi- δ fine P_1 dan P_2 berlaku $\|P_1\Sigma\, f(\xi)|I|-\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\|P_2\Sigma\, f(\xi)|I| - \gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu

$\|P_1\Sigma\, f(\xi)|I|-P_2\Sigma\, f(\xi)|I|\,\| \leq \|P_1\Sigma\, f(\xi)|I|-\gamma\| +$

$\|P_2\Sigma\, f(\xi)|I|-\gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .... (13)

Syarat cukup

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif δ pada A sehingga untuk setiap partisi- δ fine P_1 dan P_2 berlaku $\|P_1\Sigma\, f(\xi)|I|- P_2\Sigma\, f(\xi)|I|\,\| < \varepsilon$.

Dari hipotesis diperoleh bahwa untuk setiap $n \in N$, ada fungsi positif δ_n pada A sehingga untuk setiap partisi- δ_n P_{n1} dan P_{n2} berlaku $\|P_{n1}\Sigma\, f(\xi)|I|-P_{n2}\Sigma\, f(\xi)|I|\,\| < 1/n$. Menurut sifat Archimedes diperoleh bahwa ada $n_0 \in N$, sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Misalkan untuk setiap $n \in N$, $s_n = P_n\,\Sigma\, f(\xi)|I|$, dengan P_n partisi - δ_n pada A. Barisan $\{s_n\}$ merupakan barisan dalam ruang *Banach* β. Diambil sebarang n, m $\geq n_0$. Didefinisikan fungsi positif δ_r dengan $\delta_r\,(x) = \min\,\{\delta_n\,(x),\, \delta_m\,(x)\}$,

Dipindai dengan CamScanner

untuk setiap $x \in A$. Diambil sebarang partisi - δ_r P, maka P juga merupakan partisi – δ_n dan partisi- δ_m sehingga

$$\|s_n - s_m\| = \|P_n \Sigma f(\xi)|I| - P_m \Sigma f(\xi)|I|\,\|$$

$$\leq |P_n \Sigma f(\xi)|I| - P \Sigma f(\xi)|I|\,\| + \|\, P \Sigma f(\xi)|I| - P_m \Sigma$$

$$f(\xi)|I|\,\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon \quad \text{.......} \quad (14)$$

Dengan demikian barisan $\{s_n\}$ merupakan barisan Cauchy, akibatnya itu $\{s_n\}$ konvergen, katakan konvergen ke γ. Karena $\{s_n\}$ konvergen ke γ dan dengan menggunakan sifat Archimedes, maka ada $n_1 \in N$ sehingga $\frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan untuk setiap $n > n_1$ berlaku $\|s_n - \gamma\| = \|P_n \Sigma f(\xi)|I| - \gamma\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya didefinisikan fungsi positif δ pada A dengan $\delta(x) = \min\{\delta_{n1}(x), \delta_n(x)\}$, untuk setiap $x \in A$ dan $n_1 \in N$ dengan $n > n_1$. Diambil sembarang partisi – δ P, maka P juga merupakan partisi-δ_n dan partisi-δ_{n1} sehingga diperoleh

$$\|P\Sigma f(\xi)|I| - \gamma\| \leq \|P\Sigma f(\xi)|I| - P_n\Sigma f(\xi)|I|\| + \|P_n\Sigma f(\xi)|I| - \gamma\|$$

$$< \frac{1}{n_1} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{.......} \quad (15)$$

Jadi $f \in R^*[A]$.

Selanjutnya dibahas, untuk setiap fungsi f yang terintegral Henstock pada $A \subset R^n$, terintegral *Henstock* juga pada setiap $B \subset A$ yang disajikan pada teorema berikut ini.

Teorema F

Misalkan A dan B_0 merupakan sel tertutup dalam R^n dengan $B_0 \subset A$. Jika $f \in R^*[A]$ maka $f \in R^*[B_0]$

Bukti

Karena A dan B_0 merupakan sel tertutup dalam R^n dengan $B_0 \subset A$, maka terdapat sel tertutup B_i dengan $i = 1, 2, \ldots k$, sehingga $B_i \subset A$,

Dipindai dengan CamScanner

untuk setiap i, j $\in$ {0,1…k} dengan $i \neq j$ $(B_i)^0 \cap (B_j)^0 = \emptyset$ dan $A = \bigcup_{i=0}^{k} B_i$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $f \in R^*[A]$ maka menurut kriteria Cauchy diperoleh bahwa terdapat fungsi positif δ pada A sehingga untuk setiap partisi-δ fine P_1 dan P_2 berlaku $\left\| P_1 \Sigma f(\xi)|I| - P_2 \Sigma f(\xi)|I| \right\| < \varepsilon$. Selanjutnya untuk setiap i = 0, 1, …k didefinisikan fungsi positif δ_i pada B_i dengan $\delta_i(x) = \delta(x)$ untuk setiap $x \in B_i$. Kemudian ambil sebarang partisi-δ_1 fine P_{01} dan P_{02}, dan misalkan i = 1, 2, … k. P_i merupakan partisi – δ_i fine. Dari definisi fungsi positif δ diperoleh bahwa $P_{oj} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i \right), j = 1,2$ merupakan partisi-δ fine sehingga berlaku

$$\left\| P_{01} \Sigma f(\xi)|I| - P_{02} \Sigma f(\xi)|I| \right\| =$$

$$= \left\| \left\{ P_{01} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i \right) \right\} \sum f(\xi)|I| - \left\{ P_{01} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i \right) \right\} \sum f(\xi)|I| \right\| < \varepsilon \text{ ....} \quad (16)$$

Menurut kriteria Cauchy diperoleh $f \in R^*[B_0]$.

SIMPULAN

Melalui fungsi positif yang didefinisikan pada sel tertutup A dapat dibuat partisi dari A dan kemudian dikonstruksikan integral *Henstock* dari fungsi $f{:}A \rightarrow \beta$ dengan $A \subset R^n$ dan β suatu ruang *Banach*. Himpunan semua fungsi yang terintegral *Henstock* pada A dinotasikan dengan $R^*[A]$. Integral *Henstock* dari fungsi bernilai *Banach* dalam ruang Euclide berdimensi–n memiliki sifat-sifat sederhana sebagai berikut:

1. Jika f, g $\in R^*[A]$ dan c suatu skalar maka $f + g \in R^*[A]$ dan cf $\in R^*[A]$
2. Jika $f \in R^*[E]$ dan $f \in R^*[F]$ dengan E dan F dua sel tertutup dalam R^n, $E^0 \cap F^0 = \phi$ maka $f \in R^*[E \cup F]$.
3. Jika $f = \theta$ (fungsi nol) hampir dimana-mana pada A maka $f \in R^*[A]$ dan $(R^*)\int_A f = \theta$.

Dipindai dengan CamScanner

4. Jika $f \in R^*[A]$ dan $g = f$ hampir dimana-mana pada A maka $g \in R^*[A]$ dan $(R^*)\int_A g = (R^*)\int_A f$.
5. $f \in R^*[A]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada fungsi positif δ pada A sehingga untuk setiap partisi δ - fine P_1 dan partisi δ - fine P_2 berlaku $\left\| P_1 \sum f(\xi)|I| - P_2 \sum f(\xi)|I| \right\| < \varepsilon$.
6. Misal A dan B_o merupakan sel tertutup dalam R^n dengan $B_o \subset A$. Jika $f \in R^*[A]$ maka $f \in R^*[B_0]$.

DAFTAR PUSTAKA

Cao, Sergio S., (1992), *The Henstock Integral for Banach Valued Function Southeast* **Asian Bulletin of Mathematics**, Volume 16, Number 1.

Gordon, R. A., (1994), **The Integrals of Lebesque, Denjoy, Perron and Henstock**, American Mathmatical Society, USA.

Henstock. R., (1988), **Lectures on The Theory of Integration**. World Scientific, Singapore.

Indrati, R. (1998), *Syarat Cukup Fungsi Terintegral Henstock – Kurzweil Mutlak dalam Ruang Euclide Berdimensi – N.* **BIMIPA**, vol. 8. N0. 1.

Kubota, Y, (1980), *An Elementary Theory of The Special Denjoy Integral*, **Math**. Japonica 24, No. 5, 507-520.

Lee, T. Y., Chew TS (1996–1997), *On Henstock Integrability in the Euclidean Space.* **Real Analysis Exchange** Vol. 22, No 1: 382–389.

Lee, P. Y., (1989), **Lanzhou Lectures on Henstock Integration**, World Scientific, Singapore.

Pfeffer, W. F,(1993), **The Riemann Approach to Integration**. Cambridge University Press, New York USA.

Royden, HL (1989), **Real Analysis**, Macmillan Publishing Company, New York.

Dipindai dengan CamScanner