ISSN 1411 - 3724

EKSAKTA

Berkala Ilmiah Bidang MIPA

Vol. 1 Th. III-Februari 2002

ISI i

PENGANTAR REDAKSI

THE ACTIVITIES FOR DEVELOPING SPATIAL ABILITY
Ahmad Fauzan 1

INTEGRAL HENSTOCK KURZWEIL STIEL TJES
Arnellis 12

SERAPAN ION KADMIUM OLEH MIKROALGA
(Skeletonema Costatum)
Bahrizal 22

PENGGUNAAN TEKNIK ADSORPTIVE STRIPPING VOLTAMMETRY (AdSV) UNTUK PENENTUAN SENYAWA PARA-NITROFENOL
Budhi Oktavia 33

UPAYA MEMAHAMI MATERI TEORI LISTRIK MAGNET SECARA KOHEREN
Dedi Setiabudidaya 48

PEMBAWA MUATAN PADA LOGAM
Syufrawardi 56

PENGARUH PENYUNTIKAN VINBLASTIN SULFAT PADA MENCIT SWISS WEBSTER BUNTING TERHADAP JUMLAH EMBRIO PRAIMPLANTASI
Whardy Murad 66

STATISTIK DEMOGRAFI Nezara viridula L. (HEMIPTERA; PENTATOMIDAE) PADA BEBERAPA JENIS MAKANAN
Zulyusri 73

Diterbitkan oleh
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
UNIVERSITAS NEGERI PADANG

Dipindai dengan CamScanner

ISSN 1411-3724

EKSAKTA

Berkala Ilmiah Bidang MIPA

Vol. 1 Th. III – Februari 2002

SK. Dekan FMIPA UNP
No. 1528/K12.1.5/KP/1999

Penasehat
Dekan FMIPA
Universitas Negeri Padang
Drs. Idrus Ramli

Pemimpin Redaksi
Dr. Aleks Maryunis

Wakil Pemimpin Redaksi
Drs. Syukri S, M.Pd.

Sekretaris Redaksi
Rahadian Z., S.Pd., M.Si.

Dewan Redaksi
Prof. Dr. M. Dachnel Kamars, M.A.
Drs. Ali Amran, M.Pd., M.A., Ph.D.
Drs. Asrizal, M.Si.
Dra. Minda Azhar, M.Si.
Drs. Syafriandi, M.Si.
Dra. Helendra, M.S.

Sekretariat
Drs. Johni Azmi, M.S.
Drs. Hendra Syarifuddin, M.Si.
Ahmad Rizal Abidin, A.Md.
Yulia Roza

Penerbit
FMIPA Universitas Negeri Padang

Alamat Redaksi/Penerbit
Kampus FMIPA
Universitas Negeri Padang
Telp.(0751) 57420
Jl. Prof. Dr. Hamka 25131
E-mail : eksata_fmipaunp@eudoramail.com

Dipindai dengan CamScanner

ISSN 1411-3724

Terbit dua kali setahun
Terbit pertama kali : Februari 2000

EKSAKTA

Berkala Ilmiah Bidang MIPA

Vol. 1 Th. III - Februari 2002

DAFTAR ISI

ISI

PENGANTAR REDAKSI

THE ACTIVITIES FOR DEVELOPING SPATIAL ABILITY
Ahmad Fauzan 1

INTEGRAL HENSTOCK KURZWEIL STIELTJES
Arnellis 12

SERAPAN ION KADMIUM OLEH MIKROALGA (*Skeletonema costatum*)
Bahrizal 22

PENGGUNAAN TEKNIK ADSORPTIVE STRIPPING VOLTAMMETRY (AdSV) UNTUK PENENTUAN SENYAWA PARA-NITROFENOL
Budhi Oktavia 33

UPAYA MEMAHAMI MATERI TEORI LISTRIK MAGNET SECARA KOHEREN
Dedi Setiabudidaya 48

PEMBAWA MUATAN PADA LOGAM
Syufrawardi 56

PENGARUH PENYUNTIKAN VINBLASTIN SULFAT PADA MENCIT SWISS WEBSTER BUNTING TERHADAP JUMLAH EMBRIO PRAIMPLANTASI
Whardy Murad 66

STATISTIK DEMOGRAFI *Nezara viridula L.* (HEMIPTERA; PENTATOMIDAE) PADA BEBERAPA JENIS MAKANAN
Zulyusri 73

CS Dipindai dengan CamScanner

ISSN 1411-3724

KATA SAMBUTAN

Tanpa terasa jurnal EKSAKTA Berkala Bidang MIPA telah terbit untuk kelima kalinya. Pada usia yang masih muda tersebut masih ada kelemahan dan kekurangan yang perlu disempurnakan. Beberapa hal yang perlu kami sampaikan untuk kontinuitas jurnal ini adalah sebagai berikut :

1. Waktu penerbitan diharapkan sesuai dengan rencana semula yaitu Februari dan Juli setiap tahun.
2. Kualitas tulisan dapat ditingkatkan dengan kehadiran tulisan sebanyak mungkin dari staf pengajar, agar dapat berkompetisi untuk meningkatkan mutu jurnal ini di masa mendatang.
3. Redaksi dapat mengundang para pakar dalam bidang ilmu terkait untuk memasukkan tulisan pada jurnal ini.

Diharapkan jurnal ini dapat menjadi wadah untuk meningkatkan kualitas pendidikan dan mendorong kemajuan IPTEK di tanah air ini.

Dekan FMIPA
Universitas Negeri Padang

Dipindai dengan CamScanner

ISSN 1411-3724

PENGANTAR REDAKSI

Puji syukur dihaturkan kepada Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya. Jurnal *Berkala Ilmiah Bidang MIPA* EKSAKTA telah terbit lagi, untuk edisi kelima. Berkala ini merupakan jurnal ilmiah pertama yang dikelola FMIPA Universitas Negeri Padang. Penerbitannya dilakukan dua kali setahun, yakni pada bulan Februari dan bulan Juli.

EKSAKTA merupakan wadah bagi staf pengajar MIPA dan para peneliti (bidang MIPA) untuk meningkatkan kemampuan dalam menulis artikel-artikel ilmiah. Berkala ini juga memuat tulisan tentang MIPA dan pendidikan MIPA, baik berupa hasil penelitian maupun kajian pustaka.

Pada edisi ini dimuat delapan artikel. Para penulisnya adalah sebagai berikut. Dalam bidang Matematika : Ahmad Fauzan, Arnellis, Yusmet Rizal; bidang Biologi : Whardy Murad, Helendra, Ramadhan S., Zulyusri; bidang Kimia : Bahrizal, Budhi Oktavia; dan bidang Fisika : Syufrawardi dan Dedi Setiabudidaya.

Dari edisi pertama sampai edisi keempat, artikel yang masuk masih didominir oleh penulis kalangan sendiri (FMIPA UNP). Namun, pada edisi kelima, artikel yang masuk sudah mulai dari luar (Universitas Sriwijaya). Sehubungan dengan itu, kami mengundang para penulis/peneliti dari luar, agar EKSAKTA dapat tampil secara rutin dan sekaligus untuk meningkatkan kualitas jurnal kita.

Semoga jurnal EKSAKTA ini dapat memberikan wacana baru dalam meningkatkan mutu pendidikan dan penelitian MIPA serta IPTEK di Indonesia.

Salam Redaksi
Februari 2002

Dipindai dengan CamScanner

ISSN 1411-3724

INTEGRAL HENSTOCK KURZWEIL STIELTJES

Arnellis dan Yusmet Rizal
Jurusan Matematika FMIPA UNP Padang

ABSTRACT

This article we construct the definition of the Henstock Kurzweil Stieltjes integral using δ-fine Perron Partition. We shall study also some of simple properties on the Henstock Kurzweil Stieltjes integral, especially how far properties of Henstock integral can be developed in Henstock-Kurzweil Stieltjes. Cauchy Criterion and Henstock Lemma are proved in the Henstock Kurweil stieljes.

Key Words : Henstock-Kurzweil Stieljes integral, δ-fine Perron Partition, Cauchy Criterion, Henstock Lemma

PENDAHULUAN

Penyusunan teori integral telah dikenal dalam dua bentuk definisi, yaitu definisi dalam bentuk deskriptif, dan definisi bentuk konstruktif. Teori integral yang disusun Denjoy dan Perron (Lee Peng Yee, 1989) merupakan hasil pengitlakan integral Lebesque dalam bentuk deskriptif tetapi dalam arah yang berbeda. Denjoy menyusun integralnya dengan pengembangan kontinu mutlak menjadi kontinu mutlak teritlak, sementara Perron dengan pengertian fungsi mayor dan fungsi minor. Kemudian Henstock dan Kurzweil yang bekerja secara terpisah (Henstock, 1988) dan (Lee Peng Yee ,1989) mengitlakan integral Riemann yang disusun dalam bentuk konstruktif. Henstock dan Kurzweil telah melakukan pengembangan kostanta positif δ dan menjadi fungsi positif.

Pada tulisan ini disajikan pengertian dasar integral Henstock Kurzweil-Stieltjes dengan pengembangannya, yaitu integral Henstock Kurzweil- Stieljes yang masih tetap ekivalen dengan pengertian integral Henstock.

Integral yang dibahas oleh Henstock menggunakan pengertian fungsi $\delta(x) > 0$ untuk setiap x dalam suatu selang tertutup yang bergantung pada pengambilan bilangan $\varepsilon > 0$ terlebih dahulu (Lee Peng Yee, 1989), dan jumlah partisi yang digunakan adalah jumlah Riemann (Gordon, 1994).

Berdasarkan fungsi positif δ, partisi yang digunakan, partisi Perron δ-fine, dan dengan jumlah Stieltjes akan dikonstruksikan suatu integral yang disebut nantinya dengan integral Henstock Kurzweil-Stieltjes (HK – S). Untuk hal ini diperlukan beberapa definisi, lemma dan teorema yang dapat dijadikan dasar untuk menyusun teori integral Henstock Kurzweil – Stieltjes.

Integral Henstock Kurzweil- Stieltjes didasarkan atas adanya partisi pada daerah pengintegralannya. Partisi tersebut dapat dilihat pada definisi dan teorema berikut.

Dipindai dengan CamScanner

Definisi

(a) Koleksi pasangan selang titik
$D = \{(I_1, x_1), (I_2, x_2), \ldots (I_n, x_n) x_i \in I_i\}$
dengan $I_i \cap I_j = \phi$, $i \neq j$

Dan $[a, b] = \bigcup_{i=n}^{n} I_i$ dikatakan partisi Perron pada [a, b]

Untuk menyingkat penyajian di atas partisi D biasa ditulis sebagai $\{[u,v];\xi\}$

(b) Diberikan fungsi positif $\delta : [a,b] \to R$
Kemudian untuk setiap $x \in [a,b]$ menentukan selang terbuka
$U_{(X)} = (x - \delta_{(X)}, x + \delta_{(X)})$
Jika $D = \{(I,\xi)\}$ partisi Perron pada [a,b] Dan $I_i \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$ untuk setiap I_i maka $D = \{(I, \xi)\}$ dinamakan partisi Perron δ- fine pada [a,b] (Pfeffer, 1993)

Teorema

(a). Untuk setiap fungsi positif $\delta : [a,b] \to \Re$ terdapat suatu partisi $-\delta$ fine pada [a,b].

(b). Misalkan δ_1, δ_2, δ masing-masing merupakan fungsi bernilai real positif pada [a,b] dengan $\delta(\xi) = \min\{\delta_1(\xi), \delta_2(\xi)\}$ $\xi \in [a,b]$
Jika D partisi Perron δ- fine pada [a,b] maka D juga merupakan partisi Perron δ_1-fine dan δ_2-fine pada [a,b] (Gordon, 1994)

Definisi

Diketahui h fungsi naik monoton pada [a,b]

$D = \{(I, \xi)\}$ partisi pada [a,b] Maka $S(f,D,h) = D\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, h(I_i)$

disebut jumlah h- Stieltjes fungsi f terhadap partisi D. (Pfeffer, 1993)

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dimulai dengan studi pustaka dengan mempelajari beberapa karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk jurnal, bulletin ataupun buku. Hasilnya disajikan dalam bentuk karya tulis berupa teori integral Henstock Kurzweil Stielties. Teori tersebut disajikan dalam bentuk definisi-definisi serta teorema-teorema yang dilengkapi bukti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan menggunakan partisi $-\delta$ seperti didefinisikan di atas dan jumlah Stieltjes, didefinisikan integral Henstock Kurzweil Stieltjes sebagai berikut :

Dipindai dengan CamScanner

Definisi (Integral Henstock Kurzweil- Stieltjes)

a. Diketahui h fungsi naik monoton pada [a,b]

b. Fungsi $f : [a,b] \to \overline{\Re}$ dikatakan terintegral Henstock Kurzweil-Stieltjes, ditulis singkat dengan $f \in HKS(h)$ [a,b]

Jika ada bilangan real $\ell = (HKS)\int_a^b fdh$ pada [a,b] sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada [a,b] sehingga jika D= {[u,v] ; ξ} Partisi Perron δ- fine pada [a,b] berlaku

$$| \ell - D \sum f(\xi)(h(v) - h(u)) | < \varepsilon$$

ℓ disebut nilai integral HK- S(h) fungsi f pada [a,b]

Bilangan real ℓ yang dimaksud dalam definisi di atas tunggal, ketunggalan tersebut disajikan dalam Teorema berikut

Teorema 1

Jika $f \in HKS(h)$ [a,b] maka nilai integralnya tunggal

Bukti

Andaikan ada dua bilangan real ℓ dan m yang berbeda memenuhi defenisi integral HKS (h) maka dapat diambil untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$

i. Terdapat fungsi positif δ_ℓ pada [a,b] sehingga jika D_1 = {[u,v];ξ} partisi Perron δ_ℓ -fine pada [a,b] berlaku

$$|\ell - D_1 \sum f(\xi)(h(v) - h(u))| < \varepsilon/2$$

ii. Terdapat fungsi positif δ_m pada [a,b] sehingga jika D_2 = {[u,v],ξ} partisi Perron δ_m –fine pada [a,b] berlaku

$$| m - D_2 \sum f(\xi)(h(v) - h(u))| < \varepsilon/2$$

Didefinisikan fungsi positif $\delta : [a,b] \to \Re$ dengan $\delta(\xi) = \min\{\delta_\ell(\xi), \delta_m(\xi); \xi \in [a,b]\}$

Menurut teorema sebelumnya, jika D = {[u,v] ; ξ)} Partisi Peror δ-fine pada [a,b] maka D juga merupakan Partisi Perron δ_ℓ –fine pada [a,b] dan Partisi Peron δ_m – fine pada [a,b], sehingga diperoleh

$$| \ell - D \sum f(\xi)(h(v)-h(u))| < \varepsilon/2 \text{ dan}$$

$$| m - D\sum f(\xi)(h(v)-h(u))| < \varepsilon/2$$

maka

$$\begin{aligned} | \ell - m | &= | \ell - D\sum f(\xi)(h(v)-h(u)) + D \sum f(\xi)(h(v)-h(u)) - m | \\ &\le | \ell - D \sum f(\xi)(h(v)-h(u)) | + | D \sum f(\xi)(h(v)-h(u)) - m | \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang maka terbukti $\ell = m$

Dengan kata lain terbukti bahwa jika $f \in HKS(h)$ [a,b], maka nilai integralnya tunggal.

Dipindai dengan CamScanner

Seperti halnya H[a,b], HKS[a,b] juga merupakan ruang linier. Hal ini ditunjukkan dengan teorema-teorema berikut :

Teorema 2

HKS(h) [a,b] merupakan ruang linier, yaitu jika f,g $\in$ HKS(h)[a,b] dan α sebarang bilangan real maka

i. $\alpha f \in$ HKS(h) [a,b] dan $(HKS)\int_a^b \alpha f dh = \alpha (HKS)\int_a^b f dh$

ii. $f + g \in$ HKS(h) [a,b] dan

$$(HKS)\int_a^b (f+g)dh = (HKS)\int_a^b f\,dh + (HKS)\int_a^b g dh$$

Bukti : Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang.

Diketahui f, g $\in$HKS(h)[a,b] dan α bilangan real.

Misalkan bilangan real $\ell = (HKS)\int_a^b f dh$ dan $m = (HKS)\int_a^b g\, dh$.

i. Jika $\alpha = 0$ maka jelas α f terintegral Henstock Kurzweil Stieltjes ke 0

Jika $\alpha \neq 0$

Pilih fungsi positif δ_1 pada [a,b] sehingga untuk setiap partisi δ_1-fine, $D_1 = \{[u,v],\xi\}$ pada [a,b] berlaku

$$|(D_1) \sum f(\xi)(h(v)-h(u)) - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

jika $D = \{[u,v] : \xi\}$ sebarang partisi - δ_1 fine pada [a,b] maka

$$|\alpha \ell - D\sum \alpha f(\xi)(h(v)-h(u))| = |\alpha|\,|\ell - D\sum f(\xi)h(v)-h(u)|$$

$$< |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

Berarti $\alpha f \in$HKS (h) [a,b] sehingga diperoleh

$$(HKS)\int_a^b \alpha f dh = D\sum \alpha f(\xi)(h(v)-h(u))$$

$$= \alpha \,.\, D\sum f(\xi)(h(v)-h(u))$$

$$(HKS)\int_a^b \alpha f dh = \alpha (HKS)\int_a^b f dh$$

ii. Ambil sembarang f,g$\in$ HKS(h) [a,b], maka terdapat fungsi positif δ_2 pada [a,b] sehingga untuk setiap partisi -δ_2, $D_2 = \{[u,v] ; \xi\}$ partisi Perron δ_2 – fine pada [a,b] berlaku

$$|\ \ell - D_2 \sum f(\xi)(h(v)-h(u))| < \varepsilon/2$$

Dipindai dengan CamScanner

dan juga terdapat fungsi positif δ_3 pada [a,b] sehingga untuk setiap partisi - δ_3. $D_3 = \{[u,v] : \xi\}$ partisi Perron δ_3 –fine pada [a,b] berlaku

$$| m - D_3 \sum g(\xi)(h(v)-h(u))| < \varepsilon/2$$

Diambil $\delta(\xi) = \min\{\delta_2(\xi), \delta_3(\xi)\}$ untuk setiap $\xi \in [a,b]$

Berdasarkan teorema sebelumnya, jika D = {[u,v], ξ} partisi - δ pada [a,b] maka D juga merupakan partisi δ_2 dan partisi δ_3 pada [a,b]. Karena itu untuk setiap Partisi Perron δ - fine pada [a,b] berlaku

$$\begin{aligned}
&| (\ell + m) - D\sum(f + g)(\xi)(h(v)-h(u)) | \\
&= | \ell + m - D\sum(\xi)(h(v)-h(u)) - D\sum g(\xi)(h(v)-h(u)) | \\
&= | \ell - D\sum f(\xi)(h(v)-h(u)) + m - D\sum g(\xi)(h(v)-h(u)) | \\
&\leq | \ell - D\sum f(\xi)(h(v)-h(u)) | + | m - D\sum g(\xi)(h(v)-h(u)) | \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ini berarti $f + g \in HKS(h)[a,b]$ dan

$$\begin{aligned}
(HKS)\int_a^b (f+g)\, dh &= D\sum (f+g)(\xi)(h(v)-h(u)) \\
&= D\sum f(\xi)(h(v)-h(u)) + g(\xi)(h(v)-h(u)) \\
&= D\sum (f(\xi)(h(v)-h(u)) + g(\xi)(h(v)-h(u))) \\
&= D\sum f(\xi)(h(v)-h(u)) + D\sum g(\xi)(h(v)-h(u))
\end{aligned}$$

$$(HKS)\int_a^b (f+g)\, dh = (HKS)\int_a^b f dh + (HKS)\int_a^b g dh$$

Menurut i dan ii terbukti HKS(h) [a,b] ruang linier.

Seperti halnya integral Henstock, teorema berikut juga berlaku untuk integral Henstock Kurzweil Stieltjes.

Teorema 3.

Jika $f \in HKS(h_1)$ pada [a,b] dan $f \in HKS(h_2)[a,b]$ maka

i. $f \in HKS(\alpha h_1)$ [a,b] dengan $(HKS)\int_a^b f\, d\,\alpha h_1 = \alpha (HKS)\int_a^b f dh_1$

ii. $f \in HKS(h_1+h_2)$ [a,b] dengan

$$(HKS)\int_a^b f\, d(h_1+h_2) = (HKS)\int_a^b f dh_1 + (HKS)\int_a^b f dh_2$$

Bukti : Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang

i. $f \in HKS(h_1)$ [a,b] berarti terdapat bilangan real $\ell = (HKS)\int_a^b f dh_1$

dan terdapat fungsi positif δ_ℓ pada [a,b] sehingga jika $D_1 = \{[u,v];\xi\}$ partisi Perron δ_ℓ fine pada [a,b] berlaku :

Dipindai dengan CamScanner

$$| \ell - D_1 \sum f(\xi)(h_1(v) - h_1(u)) | < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Jika D sebarang partisi δ_1-fine pada [a,b] maka

$$| \alpha \ell + D\sum f(\xi)(\alpha(h_1(v) - h_1(u)) |$$
$$= |\alpha| \; | \ell - D\sum f(\xi) (h_1(v) - h_1(u)) |$$
$$< |\alpha| . \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

Jadi $f \in (HKS)(\alpha h_1)$ [a,b] dan selanjutnya

$$(HKS)\int_a^b f\, d(\alpha h_1) = D\sum f(\xi)(\alpha(h_1(v) - \alpha\, h_1(u))$$
$$= \alpha D\sum f(\xi)\,(h_1(v) - h_1(u))$$
$$(HKS)\int_a^b f\, d(\alpha h_1) = \alpha(HKS)\int_a^b f\, dh_1$$

ii. $f \in HKS(h_1)$ [a,b] $\Leftrightarrow$ terdapat bilangan real ℓ, dan terdapat fungsi positif δ_1 pada [a,b] sehingga jika $P_1 = \{[u,v];\xi\}$ partisi Perron δ_1-fine pada [a,b] berlaku

$$| \ell - D_1\sum f(\xi)(h_1(v) - h_1(u)) | < \varepsilon/2$$

$f \in HKS(h_2)$ [a,b] $\Leftrightarrow$ terdapat bilangan real m, dan terdapat fungsi positif δ_2 pada [a,b] sehingga jika $D_2 = \{[u,v];\xi\}$ partisi Perron δ_2-fine pada [a,b] berlaku

$$| m - D_2\sum f(\xi)(h_2(v) - h_2(u)) | < \varepsilon/2$$

Ambil $\delta(\xi) = \min\{\delta_1(\xi), \delta_2(\xi)\}$, untuk setiap $\xi \in [a,b]$

Menurut teorema sebelumnya, maka untuk setiap partisi Perron δ-fine pada [a,b] berlaku.

$$| \ell + m - D\sum f(\xi)(h_1 + h_2(v) - (h_1 + h_2(u))) |$$
$$= | \ell - D\sum f(\xi)(h_1(v) - (h_1(u)) + m - D\sum f(\xi)(h_2(v) - h_2(u)) |$$
$$\leq | l - D\sum f(\xi)(h_1(v) - (h_1(u)) | + |m - D\sum f(\xi)(h_2(v) - h_2(u)) |$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Jadi terbukti $f \in HKS(h_1 + h_2)$ [a,b]

Selanjutnya

$$(HKS)\int_a^b fd(h_1 + h_2) = D\sum f(\xi)(h_1 + h_2)(u,v)$$
$$= D\sum f(\xi)h_1(u,v) + D\sum f(\xi)h_2(u,v)$$
$$(HKS)\int_a^b fd(h_1 + h_2) = (HKS)\int_a^b fdh_1 + (HKS)\int_a^b fdh_2$$

Dipindai dengan CamScanner

Teorema 4

Jika $f \in HKS(h)\ [a,b]$ dan $f \in HKS(h)\ [b,c]$ maka $f \in HKS(h)\ [a,c]$ dan $(HKS)\int_a^c f dh = (HKS)\int_a^b f dh + (HKS)\int_b^c f dh$.

Bukti : Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang misalkan ℓ menyatakan integral HKS fungsi f terhadap h pada [a,b] dan k menyatakan integral HKS fungsi f terhadap h pada [b,c] maka terdapat fungsi positif:

i. δ_1 pada [a,b] sehingga untuk setiap partisi $D_1 = \{[u,v],\xi\}$ partisi Perron δ_1-fine pada [a,b] berlaku

$$|\ \ell - D_1\sum f(\xi)(h(v) - (h(u)\ | < \varepsilon/2$$

ii. δ_2 pada [b,c] sehingga untuk setiap partisi $D_2 = \{[u,v] ; \xi\}$ partisi Perron δ_2 – fine pada [a,b] berlaku

$$|\ k - D_2\sum f(\xi)\ (h(v)-h(u))\ | < \varepsilon/2$$

Fungsi positif δ pada [a,c] didefenisikan dengan aturan sebagai berikut

$$\delta(\xi) = \begin{cases} \min\{\delta_1(\xi),\ b-\xi\},\ \xi \in [a,b] \\ \min\{\delta_2(\xi), \xi - b\},\ \xi \in [b,c] \\ \min\{\delta_1(b),\ \delta_2(b)\},\ \xi = b \end{cases}$$

Selanjutnya pilih partisi Perron δ-fine $D = \{[u,v],\xi\}$ pada [a,c], titik b selalu merupakan titik didalam partisi D. Karena $D\sum f(\xi)(h(v)-h(u)) = D_1\sum f(\xi)(h(v) - h(u)) + D_2\sum f(\xi)(h(v)-h(u))$ maka berlaku

$|\ \ell + k - D\sum f(\xi)(h(v) - h(u)\ |$
$= |\ \ell + k - D_1\sum f(\xi)(h(v)-h(u) - D_2\sum f(\xi)(h(v)-h(u)|$
$\leq |\ \ell - D_1\sum f(\xi)(h(v) - h(u)| + |k - D_2\sum f(\xi)(h(v)-h(u)\ |$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Jadi terbukti $f \in HKS\ (h)\ [a,c]$

Selanjutnya

$$(HKS)\int_a^c f dh = D\sum f(\xi)(h(a,c))$$
$$= D\sum f(\xi)(h(a,b)+h(b,c))$$
$$= D\sum f(\xi)(h(a,b)+D\sum f(\xi)(h(b,c))$$
$$(HKS)\int_a^c f dh = (HKS)\int_a^b f dh + (HKS)\int_b^c f dh$$

Berikut ini dikemukakan teorema yang menunjukkan kriteria Cauchy juga dipenuhi untuk integral HKS [a,b]

Dipindai dengan CamScanner

Teorema 5 (Kriteria Cauchy untuk integral)

$f \in$ HKS (h) [a,b] $\Leftrightarrow$ untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada [a,b] sehingga jika D_1 dan D_2 partisi peron δ - fine pada [a,b] berlaku $|D_1\sum f(\xi)(h(v)-h(u)) - D_2\sum f(\xi)(h(v)-h(u))| < \varepsilon$

Bukti : Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang

(syarat perlu)

Karena $f \in$HKS (h) [a,b] maka terdapat bilangan real ℓ pada [a,b] sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat fungsi positif δ pada [a,b], dan untuk setiap partisi Perron δ-fine $D = \{[u,v]: \xi\}$ pada [a,b] berlaku $|\ell - D\sum f(\xi)(h(v)-h(u))| < \varepsilon/2$

Jika $D_1 = \{[u,v]: \xi\}$ dan D_2 $\{[u,v]: \xi\}$ masing-masing partisi Perron ξ-fine pada [a,b] maka berlaku

$|\ell - D_1\sum f(\xi)(h(v)-h(u))| < \in/2$ dan $|\ell - D_2\sum f(\xi)(h(v)-h(u))| < \in/2$

Sehingga diperoleh

$|D_1\sum f(\xi)(h(v)-h(u)-D_2\sum f(\xi)(h(v)-h(u))|$

$=|\ell - \ell + D_1\sum f(\xi)(h(v)-h(u)) - D_2\sum f(\xi)(h(v)-h(u))|$

$\leq |\ell - D_2 \sum f(\xi)(h(v)-h(u))| + |D_1\sum f(\xi)(h(v)-h(u)) - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Jadi terbukti bahwa

$|D_1\sum f(\xi)(h(v)-h(u))-D_2\sum f(\xi)(h(v)-h(u))| < \varepsilon$

(Syarat cukup)

Pilih fungsi positif δ_n (n=1,2,3,...) pada [a,b] sehingga hipotesisnya dipenuhi untuk $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Jika D_n dan P_n partisi Perron δ_n-fine pada [a,b] berlaku

$|D_n\sum f(\xi)((h(v)-h(u))-P_n\sum f(\xi)(h(v)-h(u)))| < \frac{1}{n}$

Dipilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n\}$ dengan $\delta_1(\xi) \geq \delta_2(\xi) \geq \ldots\ldots$ untuk setiap $\xi \in [a,b]$

Jika D_m partisi Perron δ_n –fine pada [a,b] dengan $m \geq r$ maka berlaku $|D_n\sum f(\xi)(h(v)-h(u)-D_m\sum f(\xi)(h(v)-h(u)| < \frac{1}{n}$

Ini berarti bahwa$\{D_n\sum f(\xi))h(v)-h(u))\}$ merupakan barisan Cauchy di R yang lengkap, dan karenanya konvergen. Jadi ada bilangan $\ell \in R$ sehingga $\ell = \lim_{n \to \infty} D_n\sum f(\xi)(h(v)-h(u))$

Pilih bilangan $\varepsilon > 0$, maka terdapat suatu bilangan asli k sehingga

$k > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$

dengan D_k adalah partisi Perron δ_k –fine pada [a,b]. Ambil $\delta = \delta_k$

Jika D partisi Perron δ-fine pada [a,b] maka berlaku

$|\ell - D\sum f(\xi)(h(v)-h(u))|$

CS Dipindai dengan CamScanner

$\leq |D\ \Sigma f(\xi)(h(v)\text{-}h(u)\ \text{-}D_k\Sigma f(\xi)(h(f(\text{-}h(u))|$

$+ |\ \ell\ \text{-}D_k\ \Sigma f(\xi)(h(v)\text{-}h(u)|$

$< \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Jadi terbukti $f \in$HKS (h) [a,b]

Teorema 6 (Lemma Henstock untuk integral HKS (h))

Jika $f \in$ HKS (h) [a,b], yaitu terdapat fungsi primitif F-HKS (h) fungsi f pada [a,b] sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada [a,b] sehingga jika D={[u,v]; ξ} partisi Perron δ-fine pada [a,b] berlaku

$$|\ D\ \Sigma\{f(\xi)(h(v)\text{-}h(u) - F[u,v]\}\ | < \varepsilon$$

Jika $D_1\ \Sigma$ sebarang jumlah bagian dari $D\Sigma$ maka

$$|D_1 \in \{F[u,v] - f(\xi)(h(v)\text{-}h(u)| < 2\ \varepsilon$$

Bukti Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang

Misalkan D={[u,v], ξ} partisi Perron δ-fine pada [a,b] yang terkait dengan bilangan $\varepsilon > 0$ yang diberikan.

Namakan selang tertutup yang terkait dengan $D_1\Sigma$ adalah J_1, J_2,….J_p. Selang tertutup yang terkait dengan $D\Sigma$ selain J_i tersebut dinamakan I_1,I_2 … I_q jadi p+q = n banyaknya selang tertutup pada partisi D

Karena $f \in$ HKS (h) (I_k) untuk k = 1, 2 … q maka terdapat fungsi positif δ_k pada I_k sehingga jika D_k partisi perron δ_k - fine da I_k berlaku $|\ D_k\Sigma\{f(\xi)(h)v)\text{-}h(u)) - F[u,v]\}\ | < \varepsilon/2^k$

Dalam hal ini pilih $\delta_k(\xi) \leq \delta_k(\xi)$ untuk $\xi \in I_k$. Oleh karena itu D_k juga merupakan partisi Perron δ-fine pada I_k, maka berlaku

$|D_k\Sigma\{f(\xi)(h)v)\text{-}h(u)) - F[u,v]\}\ | < \varepsilon/2$

selanjutnya dibentuk

$P = J_1 U\ J_2 U……UJ_pUP_1UP_2U……UP_q$

Jelas P merupakan partisi Perron δ-fine pada [a,b] sehingga diperoleh:

$|D_1\Sigma\{F(u,v)\text{-}f(\xi)(h(v)\text{-}h(u))\ |$

$= |\ D\Sigma\{F(u,v)\text{-}f(\xi)(h(v)\text{-}h(u))\ | - |\sum_{k=1}^{q} P_q\Sigma\{F(u,v)\text{-}f(\xi)(h(v)\text{-}h(u))\ |$

$\leq |\ D_1\Sigma\{F(u,v)\text{-}f(\xi)(h(v)\text{-}h(u)\ | + \Sigma|\ P_k\ |\sum_{k=1}^{q} \{F(u,v)\text{-}f(\xi)(h(v)\text{-}h(u)|$

$< \varepsilon + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon/2^k$

$< \varepsilon + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon/2^k < 2\ \varepsilon$

Jadi terbukti Lemma Henstock untuk integral HKS (h)

Dipindai dengan CamScanner

KESIMPULAN

Dari uraian di atas dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. HKS (h) [a,b] merupakan ruang linear
2. (HKS) $\int_a^c f dh$ = (HKS) $\int_a^b f dh$ + (HKS) $\int_b^c f dh$
3. Integral HKS (h) [a,b] memenuhi Kriteria Cauchy
4. Integral HKS (h) [a,b] memenuhi Lemma Henstock

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Gordon A. Russel (1994) *The Integrals of Labesque, Denjoy, Perron, and Henstock* American Mathematica Society.

Henstock, R. (1988). *Lectures on the Theory of Integration* World Scientific. Singapore.

P.Y.Lee (1989). *Lanzhou Lectures on Henstock integration*. World Scientific Singapore.

Pfeffer. W. F (1993). *The Riemann Approach to Integration*. Cambridge University Press New-York. USA.

Dipindai dengan CamScanner