ISSN 1410 - 8070

SAINSTEK

Jurnal Ilmiah Ilmu Pengetahuan dan Teknologi

Vol. VI, Nomor 1, September 2003

Diterbitkan Oleh
LEMBAGA PENELITIAN
UNIVERSITAS NEGERI PADANG

Dipindai dengan CamScanner

SAINSTEK

Jurnal Ilmiah Ilmu Pengetahuan dan Teknologi
ISSN 1410-8070
SK REKTOR IKIP PADANG NO. 142/K12/PT/1998

Penasehat
Rektor UNP Padang
(A. Muri Yusuf)

Pengarah
Pembantu Rektor I
(Z. Mawardi Effendi)

Pemimpin Umum
Ketua Lembaga Penelitian UNP Padang
(Agus Irianto)

Pemimpin Redaksi/Ketua Penyunting
Sumantri

Sekretaris Redaksi/Waka Penyunting
Waskito

Anggota Redaksi/Penyunting Ahli
B. Suprapto. B (FI. ITB)
Ign. Pulung Nurprasetio (ITB)
Ali Amran (UNP)
Hasanuddin (UNP)
Festiyed (UNP)
Anizam Zein (UNP)
Rusli HAR (UNP)

Sekretariat
Yonrafdi
Siti Khadijah
Edaliani
Zahardi

Alamat Redaksi :
Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang,
Telp. (0751) 443450, Fax. (0751) 55628

Terakreditasi
Kpts. Dirjen Dikti Depdiknas
No. 52/DIKTI/Kep/2002
Tanggal 12 November 2002

Dipindai dengan CamScanner

DARI REDAKSI

Pembaca,

Jurnal Sainstek Vol. VI, Nomor 1, September 2003 memuat 10 (sepuluh) tulisan, yang terdiri atas 4 (empat) artikel di bidang sains, masing-masing; bidang matematika 1 artikel, fisika 1 artikel dan bidang kimia 2 artikel; sementara dalam bidang teknik terdiri atas 6 (enam artikel, masing-masing bidang teknik Mesin 2 artikel, Teknik elektro 1 artikel, Teknik Sipil dan transportasi terdiri atas 3 artikel.

Tulisan-tulisan tersebut di samping menyajikan berbagai informasi aktual dalam bidang yang diteliti, juga dipandang akan berdampak positif bagi pemecahan masalah yang berkait dengan bidang yang dipaparkan.

Redaksi sangat mengharapkan saran-saran konstruktif dari pembaca untuk kesempurnaan penerbitan jurnal ini dimasa-masa mendatang.

Akhirnya kami berharap, artikel-artikel yang disajikan ini dapat bermanfaat hendaknya

Redaksi

Dipindai dengan CamScanner

ISI NOMOR INI

Dipindai dengan CamScanner

Arnellis

SAINSTEK Vol. VI, Nomor 1 September 2003

INTEGRAL RIEMANN STIELTJES DAN KAITANNYA DENGAN INTEGRAL LEBESGUE STIELTJES

Arnellis dan Helma *)

ABSTRACT

This article we construct the definition of the Riemann-Stieltjes integral and the Lebesgue-Stieltjes integral. The definition of the Riemann-Stieltjes integral proposed here can be used for integration over arbitrary elementary sets, i.e, finite unions of bounded interval. It is stated in terms of a "premeasure". The purpose of this article is to give characterizations of the class of Riemann-Stieltjes integrable functions as a subset of the class of Lebesgue-Stieltjes integrable functions.

Key Words: Riemann-Stieltjes integral, Lebesgue-Stieltjes integral, Premeasure, Integrability.

PENDAHULUAN

Pengembangan teori integral, dapat dilakukan dari berbagai arah. Riemann (1826-1866) memberikan definisi modern tentang integral tentu, dengan gagasan pertamanya adalah jumlah Riemann (Mc. Leod, 1980, h. 8). Sedangkan Stieltjes (1856-1894) menggunakan fungsi α, membentuk ukuran sub interval dari $[a,b]$, sehingga jumlah Riemann Stieltjes dibangun, yang hasilnya dinyatakan dengan $(RS)\int_a^b f\,d\alpha$, dan disebut integral Riemann Stieltjes. (Mc. Leod, 1980, h. 180).

Lebesgue (1875-1941) mengembangkan integral Riemann dengan terlebih dahulu menyusun teori ukuran yang dikenal dengan ukuran Lebesgue, dan teori integrasi (Gupta, 1986). Kemudian Radon (1913) mengkaji dan mengembangkan integral yang didasarkan pada ukuran, sering menggunakan integral Lebesgue Stieltjes, karena definisi Lebesgue dan Stieltjes termasuk sebagai kasus khusus. (Saks, 1939, h. 64).

Dari hasil studi yang mendalam tentang teori integral, banyak sifat-sifat maupun karakteristik-karakteristik yang telah diungkapkan dalam

*) *Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang*

Dipindai dengan CamScanner

integral Riemann dan integral Lebesgue. Beberapa temuan diperoleh, diantaranya setiap fungsi yang terintegral Riemann juga terintegral Lebesgue dan nilainya sama. Namun dengan adanya integral Riemann-Stieltjes dan integral Lebesgue-Stieltjes apakah temuan di atas juga berlaku. Khususnya sejauh mana definisi-definisi dan sifat-sifat yang terkandung dalam integral Riemann dan integral Lebesgue dapat dikembangkan ke dalam integral Riemann-Stieltjes dan integral Lebesgue-Stieltjes. Jadi masalah utama dalam artikel ini adalah "Apakah fungsi yang terintegral Riemann Stieltjes akan terintegral Lebesgue-Stieltjes"

Sebelum membahas keterkaitan integral Riemann-Stieltjes dengan integral Lebesgue-Stieltjes, terlebih dahulu dibahas pengertian-pengertian dasar dan teorema-teorema yang digunakan sebagai titik awal pembahasan selanjutnya. Sebagian materi yang disajikan dapat ditemui dalam literatur yang ada dalam daftar pustaka. Beberapa sifat yang disajikan dalam teorema tidak disertai dengan bukti, akan tetapi diberikan literatur asal teorema tersebut.

Definisi Baku untuk Integral Riemann-Stieltjes

Sebelum membahas konsep baku integral Riemann-Stieltjes, ditinjau dulu definisi jumlah atas dan jumlah bawah, integral bawah Riemann-Stieltjes, dan integral atas Riemann-Stieltjes.

Definisi 1

Misal fungsi $f:[a,b]\rightarrow \mathbf{R}$ terbatas, $\alpha:[a,b]\rightarrow \mathbf{R}$ monoton naik, $P=\{a=x_0,x_1,\ldots,x_q=b\}\in \mathcal{P}[a,b]$.

Didefinisikan $M_j(f)=\sup\limits_{x_{j-1}\le x\le x_j} f(x)$,

$m_j(f)=\inf\limits_{x_{j-1}\le x\le x_j} f(x)$,

$M(f)=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$,

$m(f)=\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$,

$\Delta\alpha_j=\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})$.

Jumlah atas Riemann-Stieltjes, ditulis U(P,f,α), didefinisikan sebagai

Dipindai dengan CamScanner

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{j=1}^{q} M_j(f)\Delta\alpha_j.$$

Jumlah bawah Riemann-Stieltjes, ditulis L(P,f, α), didefinisikan sebagai

$$L(P,f,\alpha)=\sum_{j=1}^{q} m_j(f)\Delta\alpha_j.$$ **(Horst, 1984, h. 552).**

Dari Definisi 1 secara langsung diperoleh teorema berikut :

Teorema 1

Misal fungsi $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ terbatas, $\alpha:[a,b]\to \mathbf{R}$ monoton naik. Jika $P^* \in \mathcal{P}[a,b]$ dan P^* perhalusan dari P, maka (1) $L(P,f,\alpha)\le L(P^*,f,\alpha)$, (2) $U(P^*,f,\alpha)\le U(P,f,\alpha)$. **(Ross, 1980, h. 661).**

Himpunan $\{L(P,f,\alpha)\mid P\in\mathcal{P}[a,b]\}\neq\varnothing$, terbatas di atas oleh $M(f)(\alpha(b)-\alpha(a))$, dan $\{U(P,f,\alpha)\mid P\in\mathcal{P}[a,b]\}\neq\varnothing$, terbatas di bawah oleh $m(f)(\alpha(b)-\alpha(a))$.

Definisi 2

Integral bawah Riemann-Stieltjes dari fungsi f pada [a,b], ditulis $(RS)\underline{\int_{a}^{b}} f\,d\alpha$, didefinisikan sebagai

$$(RS)\underline{\int_{a}^{b}} f\,d\alpha=\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\{L(P,f,\alpha)\mid P\in\mathcal{P}[a,b]\}.$$

Integral atas Riemann-Stieltjes dari fungsi f pada [a,b], ditulis $(RS)\overline{\int_{a}^{b}} f\,d\alpha$, didefinisikan sebagai

$$(RS)\overline{\int_{a}^{b}} f\,d\alpha=\inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\{U(P,f,\alpha)\mid P\in\mathcal{P}[a,b]\}.$$

Fungsi f dikatakan terintegralkan Riemann-Stieltjes terhadap α pada [a,b], ditulis

Dipindai dengan CamScanner

$f \in \Re[a,b]$, atau $f \in \Re[\alpha,a,b]$, atau $f \in \Re(\alpha)$, jika

$(RS)\underline{\int_a^b} f\, d\alpha = (RS)\overline{\int_a^b} f\, d\alpha$. **(Horst, 1984, h. 553).**

Integral Riemann-Stieltjes dari fungsi f pada [a,b] ditulis dengan lambang $(RS)\int_a^b f\, d\alpha$. Pada Definisi ini, $(RS)\int_a^b f\, d\alpha$ $(RS)\underline{\int_a^b} f\, d\alpha = (RS)\overline{\int_a^b} f\, d\alpha$.

Teorema 2

Misal fungsi $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ terbatas, $\alpha:[a,b] \to \mathbf{R}$ monoton naik, maka

$$f \in \Re(\alpha) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}[a,b] \ni U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon.$$

(Pfeffer, 1993, h. 74)

Definisi Integral Riemann-Stieltjes dengan Ukuran

Sebelum membahas konsep integral Riemann-Stieltjes dengan ukuran, dikemukakan dulu definisi ukuran.

Definisi 3

Misal fungsi $\alpha:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton naik. Fungsi μ (premeasure) pada interval terbatas, termasuk himpunan satu titik, didefinisikan sebagai :

$$\mu([a,b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-)$$

$$\mu([a,b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-)$$

$$\mu((a,b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+)$$

$$\mu((a,b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+)$$

dengan $\alpha(x+)$ dan $\alpha(x-)$ limit kiri dan limit kanan. **(Horst, 1984, h. 551).**

Dengan menggunakan definisi ukuran, didefinisikan integral Riemann-Stieltjes sebagai berikut :

Definisi 4

Misal fungsi $f:[a,b] \to \mathbf{R}$, P partisi dari [a,b], μ premeasure dan γ ring himpunan elementer. Didefinisikan

$$M_j = \sup_{x \in B_j} f(x) \qquad \text{dan} \qquad m_j = \inf_{x \in B_j} f(x).$$

Dipindai dengan CamScanner

Jumlah atas Riemann-Stieltjes, ditulis $U(P, f, \mu)$, didefinisikan sebagai

$$U(P, f, \mu) = \sum_{j=1}^{q} M_j \mu(B_j).$$

Jumlah bawah Riemann-Stieltjes, ditulis $L(P, f, \mu)$, didefinisikan sebagai

$$L(P, f, \mu) = \sum_{j=1}^{q} m_j \mu(B_j).$$

Integral atas Riemann-Stieltjes dari fungsi f pada [a,b], ditulis $(RS)\int_a^{\bar{b}} f\, d\alpha$, didefinisikan sebagai

$$(RS)\int_a^{\bar{b}} f\, d\alpha = \inf \{U(P, f, \mu) | P \in \mathcal{P}[a,b]\}.$$

Integral bawah Riemann-Stieltjes dari fungsi f pada [a,b], ditulis $(RS)\int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha$, didefinisikan sebagai

$$(RS)\int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha = \sup_{P \subset \gamma} \{L(P, f, \mu) | P \in \mathcal{P}[a,b]\}.$$

Fungsi f dikatakan terintegralkan Riemann-Stieltjes pada [a,b], ditulis $f \in \Re(\alpha)$ pada [a,b], jika $(RS)\int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha = (RS)\int_a^{\bar{b}} f\, d\alpha$. **(Horst, 1984, h. 554).**

Integral Riemann-stieltjes dari fungsi f pada [a,b], ditulis dengan lambang $(RS)\int_a^{b} f\, d\alpha$. Pada definisi ini, $(RS)\int_a^{b} f\, d\alpha = (RS)\int_a^{\bar{b}} f\, d\alpha = (RS)\int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha$.

Berdasarkan definisi baku dan definisi dengan ukuran dari integral Riemann-Stieltjes diperoleh bahwa kedua definisi tersebut ekivalen. Karena setiap interval tertutup terbatas adalah himpunan elementer, sebaliknya dalam B_j berbentuk interval tertutup terbatas identik dengan pendefinisian interval bagian pada definisi baku.

Definisi Integral Lebesgue-Stieltjes

Dipindai dengan CamScanner

H. Lebesgue (1875-1941) membangun teori integral yang dikenal dengan integral Lebesgue yang disusun berdasarkan teori ukuran. Integral Lebesgue dari fungsi f pada E ditulis dengan lambang $(\mathcal{L})\int_E f(x)\,dx$.

Pada definisi ini:

$$(\mathcal{L})\int_E f(x)\,dx = (\mathcal{L})\bar{\int_E} f(x)\,dx = (\mathcal{L})\int_{-E} f(x)\,dx.$$

Dengan menambahkan fungsi $\alpha:[a,b]\rightarrow \mathbf{R}$ monoton naik, dan dengan menggunakan definisi ukuran dan definisi integral Lebesgue maka dapat disusun definisi integral Lebesgue-Stieltjes. Notasi dx berubah menjadi dμ.

Definisi 5

Jadi fungsi $f:[a,b]\rightarrow \mathbf{R}$ terbatas dengan $\alpha:[a,b]\rightarrow \mathbf{R}$ monoton naik dikatakan terintegralkan Lebesgue-Stieltjes pada [a,b], ditulis $f\in \mathcal{L}(\mu)$, jika $(\mathcal{L}S)\int_{\underline{a}}^{b} f\,d\mu = (\mathcal{L}S)\int_{a}^{\bar{b}} f\,d\mu.$

Integral Lebesgue-Stieltjes dari fungsi $f:[a,b]\rightarrow \mathbf{R}$ ditulis dengan lambing $(\mathcal{L}S)\int_{a}^{b} f\,d\mu = (\mathcal{L}S)\int_{a}^{\bar{b}} f\,d\mu = (\mathcal{L}S)\int_{\underline{a}}^{b} f\,d\mu.$ **(Horst, 1984, h. 555).**

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoritik atau penelitian kepustakaan, dimulai dengan mempelajari beberapa karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk jurnal, buletin, ataupun buku. Hasilnya disajikan dalam bentuk teori integral yang memuat definisi-definisi dan teorema-teorema yang dilengkapi bukti. Jadi metode yang digunakan adalah metode deskriptif yang bertujuan menjelaskan secara rinci temuan yang diperoleh sehubungan dengan masalah yang ingin diselesaikan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kaitan antara Integral Riemann dengan integral Lebesgue telah ditunjukkan, bahwa setiap fungsi yang terintegralkan Riemann juga terintegralkan Lebesgue dan nilainya sama. Pada tulisan ini integral Riemann-Stieltjes yang dikontruksi berdasarkan definisi baku dan definisi

Dipindai dengan CamScanner

ukuran apakah akan terintegralkan juga dengan integral Lebesgue-stieltjes, dan apakah nilainya sama. Uraian berikut akan menjawab permasalahan di atas.

Keterkaitan Antara Integral Riemann-Stieltjes dengan Ukuran dan Lebesgue-Stieltjes

Teorema A

Jika $f \in \Re(\alpha)$ pada [a,b], maka $f \in \mathcal{L}(\mu)$ pada [a,b] dan $\mathcal{L}\int_a^b f\, d\mu = \Re\int_a^b f\, d\alpha.$

Bukti : Pembuktian dibagi atas beberapa langkah.

Langkah 1

Defiinisikan himpunan

$$D_+ = \{x \in [a,b] \mid \alpha(x+) > \alpha(x)\},\ D_- = \{x \in [\mathrm{a,b}] \mid \alpha(x-) < \alpha(x)\},$$

$$D = D_+ \cup D_-.$$

$$C = [a,b] - D. \quad \text{.......... (1)}$$

Karena fungsi f terbatas pada [a,b], maka ada barisan partisi $\{P_k\}$ dari [a,b] sehingga diperoleh

$$P_k = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_q = b\} \in \mathcal{P}[a,b], \quad \text{.......... (2)}$$

$$P_k = \{B_1, \ldots, B_q\} \subset \varsigma \quad \text{.......... (3)}$$

$\forall\ k \in \mathbf{N},\ P_{k+1}$ adalah sub partisi dari P_k .... (4)

Diameter $(B_j) < \frac{1}{k}, \quad \forall\ j = 1, \ldots, q \quad \forall\, k \in \mathbf{N}$

Diamete$(B_j) = \sup_{x,y \in B_j} |x - y|$, B_j intervalerbata .... (5)

$$x \in D \Rightarrow \{x\} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \quad \text{.......... (6)}$$

Dipindai dengan CamScanner

Langkah 2

Setiap partisi P_k merupakan koleksi himpunan Borel yang saling asing. Misalkan $P_k = \{E_1, .., E_r\} \in \mathcal{P}[a,b$ memenuhi $\bigcup_{i=1}^{r} E_i = [a,b]$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ untuk i ≠ j. Himpunan Borel $E_1, .., E_r$ berbentuk interval $B_j = [(x_{j-1}, x_j)]$, $j = 1, .., q$. Jika $j = 1, \ldots, q-1$, maka ada tiga kasus yang terjadi untuk

$$x_j \in P_k. \quad \text{(7)}$$

Kasus 1 : $x_j \in D_+^{\prime}$.

Kasus 2 : $x_j \in D_+ \cap D_-^{\prime}$.

Kasus 3 : $x_j \in D_+ \cap D_-$.

Dalam kasus 1 dan 2, $x_j \in B_j$; sedangkan dalam kasus 3, $x_j \notin B_j$. Dalam kasus 3 ini tambahkan $\{x_j$ pada tiap interval. Gabungan himpunan Borel yang saling asing tersebut diperoleh $[a,b]$. Definisikan fungsi sederhana terukur Borel L_k dan U_k pada $[a,b]$ sebagai berikut:

$$L_k(x) = m_j(f) \quad \text{(8)}$$

$$U_k(x) = M_j(f) \text{ untuk } x \in B_j \in P_k$$

Langkah 3

Harus diperlihatkan bahwa integral Lebesgue-Stieltjes dari fungsi di atas memenuhi

$$\int_a^b L_k \, d\mu = L(P_k, f, \alpha) \text{ dan } \int_a^b U_k \, d\mu = U(P_k, f, \alpha). \quad \text{(9)}$$

Misal $m_0(f) = m_{q+1}(f) = 0$. Akan ditunjukkan bahwa setiap penambahan $x_j \in P_k$, maka integral $\int_a^b L_k \, d\mu = \sum_{i=1}^{r} L_k \mu(E_i)$ mendapat tambahan sebesar $m_j(f)\alpha(x_j) - m_{j+1}(f)\alpha(x_j)$. Karena $\alpha(a-) = \alpha(a)$ dan $\alpha(b+) = \alpha(b)$ maka, Untuk j = 0 dan j = q, trivial Untuk $j = 1, \ldots, q-1$, lihat tiap kasus (langkah 2).

Dipindai dengan CamScanner

1. Kasus 1 : $x_j \in D_+^{\cdot}$. Tambahannya sebesar

$$m_j(f)\alpha(x_j +) - m_{j+1}(f)\alpha(x_j +)$$
$$= m_j(f)\alpha(x_j) - m_{j+1}(f)\alpha(x_j).$$

2. Kasus 2 : $x_j \in D_+ \cap D_-^{\cdot}$. Dengan cara yang sama, tambahannya sebesar

$$m_j(f)\alpha(x_j) - m_{j+1}(f)\alpha(x_j).$$

3. Kasus 3 : $x_j \in D_+ \cap D_-$. Tambahannya sebesar

$$m_j(f)\alpha(x_j -) - m_{j+1}(f)\alpha(x_j +) \ +$$
$$(m_j(f)\Delta_\alpha^-(x_j) + m_{j+1}(f)\Delta_\alpha^-(x_j))(\alpha(x_j +) - \alpha(x_j -)).$$

Besarnya tambahan ini sama dengan $m_j(f)\alpha(x_j) - m_{j+1}(f)\alpha(x_j)$.

Jadi, $\int_a^b L_k \, d\mu = \sum_{j=1} m_j(f)\Delta\alpha_j = L(P_k, f, \alpha)$.

Dengan cara yang sama diperoleh $\int_a^b U_k \, d\mu = \sum_{j=1}^q M_j(f)\Delta\alpha_j = U(P_k, f, \alpha)$.

Langkah 4

Definisikan $m = \inf_{a \le x \le b} f(x)$, $M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$.

Jelas bahwa

$$m \le L_k(x) \le L_{k+1}(x) \le f(x) \le U_{k+1}(x) \le U_k(x) \le M \quad \text{.............. (10)}$$

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \ \forall\, x \in [a,b]$$

Definisikan fungsi

$$L(x) = \lim_{k \to \infty} L_k(x) \quad \text{dan} \quad U(x) = \lim_{k \to \infty} U_k(x), \quad \text{.................. (11)}$$

maka

$$m \le L(x) \le f(x) \le U(x) \le M \quad \forall\, x \in [a,b] \quad \text{.............................. (12)}$$

Karena fungsi L_k, U_k, L, U terukur-μ dan terbatas, maka fungsi L dan U terintegralkan Lebesgue-Stieltjes pada $[a,b]$. Berdasarkan teorema konvergensi dominasi Lebesgue, diperoleh

Dipindai dengan CamScanner

$$\int_a^b L\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_a^b L_k\, d\mu \quad \text{dan} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\int_a^b U\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_a^b U_k\, d\mu .$$

Dari (6), (9), dan (13) diperoleh

$$\int_a^b L d\mu = \Re \underline{\int_a^b} f d\alpha \quad \text{dan} \quad \int_a^b U d\mu = \Re \overline{\int_a^b} f d\alpha . \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Jadi $f \in \Re(\alpha)$ pada [a,b] $\Leftrightarrow \int_a^b (U - L) d\mu = 0.$

Karena $U(x) \geq L(x) \forall x \in [a,b]$, maka $\int_a^b (U-L) d\mu = 0 \Leftrightarrow U(x) = L(x)$ hampir di mana-mana[μ] pada $[a,b]$. Jadi

$f \in \Re(\alpha)$ pada $[a,b] \Leftrightarrow$ .... (15)

$U(x) = L(x)$ hampir di mana-mana[μ] pada $[a,b]$.

Langkah 5

Misal fungsi $f \in \Re(\alpha)$ pada $[a,b]$. Dari (12) dan (15) diperoleh $L(x) = U(x)$ hampir di mana-mana[μ] pada $[a,b]$.

Dengan menggunakan sifat ukuran-μ keterintegralan Lebesgue-Stieltjes dari fungsi L dan U, dan (14), maka $f \in \mathcal{L}(\mu)$ pada $[a,b]$ dan

$$\mathcal{LS} \int_a^b f\, d\mu = RS \int_a^b f\, d\alpha .$$

Teorema B

Misal fungsi $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ terbatas maka $f \in \Re(\alpha)$ pada [a,b]$\Leftrightarrow$ f kontinu hampir di mana-mana[μ] pada Z_μ([a,b]).

Bukti:

Pembuktian ini menggunakan beberapa langkah yang telah dibuktikan pada bagian A. Adapun langkah pembuktiannya sebagai berikut :

Dipindai dengan CamScanner

Langkah 1

Harus ditunjukkan bahwa jika fungsi $f \in \Re(\alpha)$ pada $[a,b]$, maka fungsi f kontinu hampir di mana-mana[μ] pada $C = Z_\mu([a,b])$. Jika fungsi $f \in \Re(\alpha)$ pada $[a,b]$, maka dari (15) diperoleh $U(x) = L(x)$ hampir di mana-mana[μ] pada $[a,b]$. Kita akan menunjukkan jika $x \in C$ dipilih sehingga $U(x) = L(x)$ dan $x \in \operatorname{int}(B_j)$ $\forall P_k$, maka fungsi f kontinu di x. Andaikan tidak demikian, maka $\exists \varepsilon > 0$ dan barisan $y_m \in [a,b] \ni |y_m - x| < 1/m$ dan $|f(y_m) - f(x)| \geq \varepsilon$ $\forall m \in \mathrm{N}$. Untuk $k \in \mathrm{N}$ sebarang, $\exists j \ni x \in \operatorname{int}(B_j)$. Maka untuk m yang cukup besar, $y_m \in B_j$. Jadi $U_k(x) - L_k(x) = M_j(f) - m_j(f) \geq \sup_{y,z \in B_j} |f(y) - f(z)|$ $\geq |f(y_m) - f(x)| \geq \varepsilon$, dan $U(x) - L(x) \geq \varepsilon$. Kontradiksi dengan $U(x) = L(x)$. Jika fungsi f diskontinu di c ∈ C, maka $x \in Z_1 \cup Z_2$, di mana $Z_1 = \{x \in C | U(x) \neq L(x)\}$, $Z_2 = \{x \in C | \exists k \in \mathrm{N} \ni \forall j = 1, \ldots, q,\ x \notin \operatorname{in}(B_j)\}$. Karena $U(x) = L(x)$ hampir di mana-mana[μ] pada $[a,b]$, maka $\mu(Z_1) = 0$. Mudah diperlihatkan bahwa Z_2 adalah gabungan terhitung himpunan-himpunan satu titik yang berukuran-μ nol. Jadi $\mu(Z_2) = 0$. Jadi fungsi f kontinu hampir di mana-mana[μ] pada $C = Z_\mu([a,b])$.

Langkah 2

Tinggal membuktikan bahwa $f \in \Re(\alpha)$ pada $[a,b]$ jika fungsi f kontinu hampir di mana-mana[μ] pada $C = Z_\mu([a,b])$ dan jika fungsi f dan α tidak secara bersamaan diskontinu dari sisi yang sama di $x \in [a,b]$. Kita akan menunjukkan jika fungsi f kontinu di $x \in C$, maka $U(x) = L(x)$.

Untuk menunjukkan ini, pilih $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena fungsi f kontinu di $x \in C$, maka $\exists \mathrm{K} \in \mathrm{N} \ni |f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall y, z \in \left(x - \frac{1}{\mathrm{K}}, x + \frac{1}{\mathrm{K}}\right) \cap [a,b]$.

Untuk P_k pilih j sehingga $x \in B_j \subset \left(x - \frac{1}{\mathrm{K}}, x + \frac{1}{\mathrm{K}}\right)$.

Untuk setiap $k \geq \mathrm{K}$,

Dipindai dengan CamScanner

$$U_k(x) - L_k(x) \leq U_K(x) - L_K(x) = M_j(f) - m_j(f) \quad \text{............} \quad (16)$$

$$= \sup_{y,z \in [x_{j-1}, x_j]} |f(y) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa $U(x) - L(x) = \lim_{k \to \infty} (U_k(x) - L_k(x)) = 0$.

Jadi $U(x) = L(x)$ hampir di mana-mana[μ] pada C.

Jika kita dapat menunjukkan $U(x) = L(x) \forall x \in D$, maka $U(x) = L(x)$ hampir di mana-mana[μ] pada $[a,b]$, sehingga dari (15), maka fungsi $f \in \Re(\alpha)$ pada $[a,b]$.

Akan kita tunjukkan dengan cara berikut : dari (3) dan (5), jika $x \in D$, maka $x \in P_k$ untuk k yang cukup besar. Berdasarkan langkah 2, terdapat tiga kasus untuk x.

1. Andaikan $x \in D_+^{'} \cap D_-$, maka $f(x-) = f(x)$.

   Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang, $\exists \delta > 0 \ni |f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall y, z \in (x - \delta, x)$.

   Pilih $K \in N \ni \frac{1}{K} < \delta$ dan $x = x_j \in P_k$, maka $\forall k \geq K$ berlaku (16).

   Jadi $U(x) = L(x)$

2. Andaikan $x \in D_+ \cap D_-^{'}$, dengan cara yang sama diperoleh $U(x) = L(x)$. Dalam kasus ini $U_K(x) - L_K(x) = M_{j+1}(f) - m_{j+1}(f)$.

3. Andaikan $x \in D_+ \cap D_-$, maka $f(x-) = f(x) = f(x+)$

   Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang, $\exists \delta > 0 \ni |f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall y, z \in (x - \delta, x + \delta)$

   Pilih $K \in N \ni \frac{1}{K} < \delta$ dan $x = x_j \in P_k$, maka dengan cara yang sama berlaku $M_j(f) - m_j(f) < \varepsilon$ dan $M_{j+1}(f) - m_{j+1}(f) < \varepsilon$. Jadi $M_j(f) - m_j(f) \to 0$ dan $M_{+1j}(f) - m_{j+1}(f) \to 0$ untuk $k \to \infty$.

   Akibatnya $U_K(x) - L_K(x)$

   $= (M_j(f) - m_j(f))\Delta_\alpha^-(x) + (M_{j+1}(f) - m_{j+1}(f))\Delta_\alpha^+(x) \to 0$,

   jika $k \to \infty$. Jadi $U(x) = L(x) \forall x \in D$.

Dipindai dengan CamScanner

SIMPULAN

Berdasarkan temuan dalam penelitian ini dibuktikan bahwa :

1. Jika $f \in \Re(\alpha)$ pada [a,b] maka $f \in \mathcal{L}(\mu)$ pada [a,b] dan $(\mathcal{L}S)\int_a^b f\, d\mu = (RS)\int_a^b f\, d\alpha.$

   Berarti setiap fungsi yang terintegral Riemann-Stieltjes juga terintegralkan Lebesgue-Stieltjes dan nilai integral Riemann-Stieltjes sama dengan nilai integral Lebesgue-Stieltjes.
2. Fungsi $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ terbatas pada $[a,b]$ maka $f \in \Re(\alpha)$ pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f kontinu hampir di mana-mana[μ] pada $Z_\mu([a,b])$.

DAFTAR PUSTAKA

Gupta. VP & Jain PK (1986), **Lebesgue Measure and Integration,** Wiley Eastern Limited

Horst, H.J., (1984), **Riemann Stieltjes and Lebesgue Stieltjes Integrals,** American Mathematical Monthly 91

Mc. Leod Robert, (1980), **The Generalized Riemann Integral,** The Mathematical Association of America

Pfeffer W. F., (1993), **The Riemann Approach to Integration.** Cambridge University Press, USA

Ross, Kenneth, (1980), **Another Aproach to Riemann-Stieltjes Integral,** The American Mathematical Monthly 87

Saks, Stanislaw, (1939), **Theory of the Integal,** New York : Dover Publications, Inc.

Dipindai dengan CamScanner