TRIGONOMETRI.I

Disusun

Oleh

Dra. Murniana Ramli.
Dosen FPMIPA IKIP Padang

Diperbanyak Oleh

BADAN PENERBIT FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA
DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
(FPMIPA) - IKIP PADANG

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
(IKIP)PADANG

1988

KATA PENGANTAR

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa dan sesuai dengan kemampuan yang ada, buku dengan judul "**Trigonometri I**" telah dapat disusun sebagaimana mestinya.

Buku ini penulis susun untuk melengkapi bahan bacaan para pembaca yang berminat terhadap mata kuliah Trigonometri I khususnya dan bidang studi matematika umumnya.

Penulis menyadari bahwa buku ini mungkin ada kekurangan-kekurangan, oleh sebab itu kritik yang sehat dan membangun dari pembaca diterima dengan senang hati.

Akhirnya penulis mengucapkan terima kasih pada Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Padang yang telah bersedia membantu dalam penerbitan dan perbanyakan buku Trigonometri I ini.

Padang, Desember 1988

P e n u l i s.

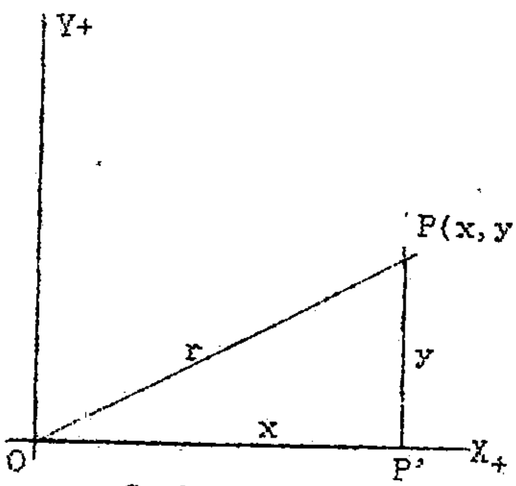
DAFTAR ISI

I. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

Dalam aljabar telah dikenal juga sistem koordinat orthogonal. Sumbu x $\perp$ sumbu y di titik O, titik P (x,y) terletak pada daerah $Y_+ \; OX_+$ (kuadran I). OP = r membentuk $\angle \alpha$ dengan sumbu X_+ .

PP' = y = ordinat titik P proyektor).

OP' = x = absis titik P (proyeksi). r = proyektum.



Gambar 1.

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{proyektor}}{\text{proyektum}}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{proyeksi}}{\text{proyektum}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{proyektor}}{\text{proyeksi}}$$

$$\text{Cotg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{proyeksi}}{\text{proyektor}}$$

$$\text{Cosec}\,\alpha = \frac{r}{y} = \frac{\text{proyektum}}{\text{proyektor}}$$

$$\text{Sec}\,\alpha = \frac{r}{x} = \frac{\text{proyektum}}{\text{proyeksi}}$$

<u>Kesimpulan</u>:

$\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{Cosec}\,\alpha} \longrightarrow$ $\text{Sin}\,\alpha \times . \; \text{Cosec}\,\alpha = 1$

$\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{Sec}\,\alpha} \longrightarrow$ $\text{Cos}\,\alpha \times \text{Sec}\,\alpha = 1$

$\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{Cotg}\,\alpha} \longrightarrow$ $\text{tg}\,\alpha \times \text{Cotg}\,\alpha = 1$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad \text{dan} \quad \boxed{Cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$, $Cotg\,\alpha$, $Sec\,\alpha$, dan $Cosec\,\alpha$ dinamakan perbandingan trigonometri suatu sudut.

1.1. Rumus-rumus Dasar Trigonometri.

Perhatikan gambar 1.

$\triangle$ OPP' siku-siku di P.

Menurut dalil Pytagoras : $(OP')^2 + (PP')^2 = OP^2$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Jika persamaan (1) di atas dibagi dengan r^2, maka didapatlah:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

Jika persamaan (1) dibagi dengan x^2, maka didapat :

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$

$$\boxed{1 + tg^2\alpha = Sec^2\alpha}$$

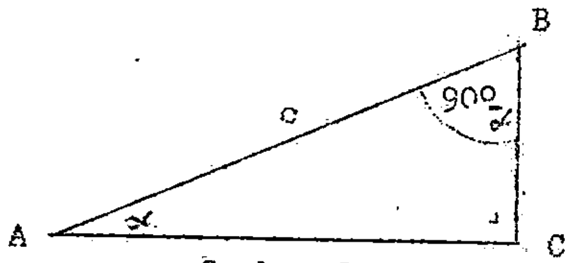
Selanjutnya jika persamaan (1) dibagi dengan y^2, maka didapat pula :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$$

$$\boxed{\text{Cotg}^2\alpha + 1 = \text{Cosec}^2\alpha}$$

1.2. Perbandingan Trigonometri Dari Sudut Yang Bercomplement.



Gambar 2.

Perhatikan gambar 2.

Segitiga ABC siku-siku

$\angle A = \alpha$, maka

$\angle B = (90^o - \alpha)$.

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin}(90^o - \alpha) &= \frac{b}{c} \\ \text{Cos}\ \alpha &= \frac{b}{c} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\text{Sin}\ (90^o - \alpha) = \text{Cos}\ \alpha}$$

Selanjutnya juga didapat :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Cos}(90^o - \alpha) &= \text{Sin}\ \alpha \\ \text{tg}\ (90^o - \alpha) &= \text{Cotg}\ \alpha \\ \text{Cotg}(90^o - \alpha) &= \text{tg}\ \alpha \\ \text{Sec}(90^o - \alpha) &= \text{Cosec}\ \alpha \\ \text{Cosec}(90^o - \alpha) &= \text{Sec}\ \alpha. \end{aligned}}$$

dari keterangan di atas, nyatalah: Sinus dan Cosinus, tangen dan Cotg serta Secan dan Cosecan bercomplement sesamanya.

1.3. Contoh-Contoh.....

1.3. Contoh-Contoh :

1. Diketahui $\text{Cotg}\,\alpha = \sqrt{3}$

   Hitunglah perbandingan trigonometri yang lain.

   Jawab : . $\text{Cotg}\,\alpha = \sqrt{3} \longrightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

$$\text{Cotg}^2\alpha + 1 = \text{Cosec}^2\alpha$$

$$3 + 1 = \text{Cosec}^2\alpha$$

$$\text{Cosec}^2\alpha = 4$$

$$\text{Cosec}\,\alpha = \sqrt{4} = 2 \longrightarrow$$

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{1}{\text{Cosec}\,\alpha}$$

$$\text{Sin} = {}^1/_2.$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha}$$

$${}^1/_3\sqrt{3} = \frac{{}^1/_2}{\text{Cos}\,\alpha}$$

$${}^1/_3\sqrt{3}\ \text{Cos}\,\alpha = {}^1/_2$$

$$\text{Cos}\,\alpha = {}^1/_2\sqrt{3} \longrightarrow \text{Sec}\,\alpha = \frac{1}{{}^1/_2\sqrt{3}} = {}^2/_3\sqrt{3}$$

2. Buktikan : $\dfrac{\text{tg}\ x}{\text{Cosec}\ x} = (1 - \text{Cos}^2 x)\text{Sec}\ x.$

   Bukti :

$$\frac{\text{tg}\ x}{\text{Cosec}\ x} = (1 - \text{Cos}^2 x)\text{Sec}\ x.$$

$$= \text{Sin}^2 x \,.\, \frac{1}{\text{Cos}\ x}$$

$$= \frac{\text{Sin}\ x}{\text{Cos}\ x} \,.\, \text{Sin}\ x$$

$$= \text{tg}\ x \,.\, \frac{1}{\text{Cosec}\ x}$$

1.4. Soal-soal....

1.4. Soal-Soal :

1. Hitunglah semua perbandingan trigonometri dari sudut-sudut : 0°, 30°, 45° dan 90°.

2. Jika diketahui $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Hitunglah perbandingan trigonometri yang lain.

3. Buktikanlah : $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha)\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha = 1$.

4. Buktikanlah : $(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x)\operatorname{Cotg}^4 x = \operatorname{Cos}^2 x$.

5. Buktikanlah : $\dfrac{\operatorname{Sin}^2 x - \operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 1$.

6. Jika diketahui $\operatorname{tg} \alpha = 1 + \sqrt{2}$. Hitunglah perbandingan trigonometri dari sudut $(90^\circ - \alpha)$.

7. Buktikanlah identitas yang berikut :
$\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos}(90^\circ - \alpha) + \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin}(90^\circ - \alpha) = 1$.

8. $\operatorname{tg}^2(90^\circ - \alpha)\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cotg}^2(90^\circ - \alpha)\operatorname{Cos}^2 \alpha = 1$.

9. $(2 \operatorname{Sin} \alpha + \operatorname{Cos} \alpha)^2 + (\operatorname{Sin} \alpha - 2 \operatorname{Cos} \alpha)^2 = 5$.

10. $(1 + \operatorname{Sec} \alpha + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{Cosec} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha) =$
$2(1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha + \operatorname{Sec} \alpha + \operatorname{Cosec} \alpha)$.

11. $(\operatorname{Cosec} \alpha - \operatorname{Sin} \alpha)(\operatorname{Sec} \alpha - \operatorname{Cos} \alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha}$

12. $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{Sec} \alpha - 1} = \dfrac{\operatorname{Sec} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha}$

13. ....

13. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{1 - \sin\alpha \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$.

14. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} =$

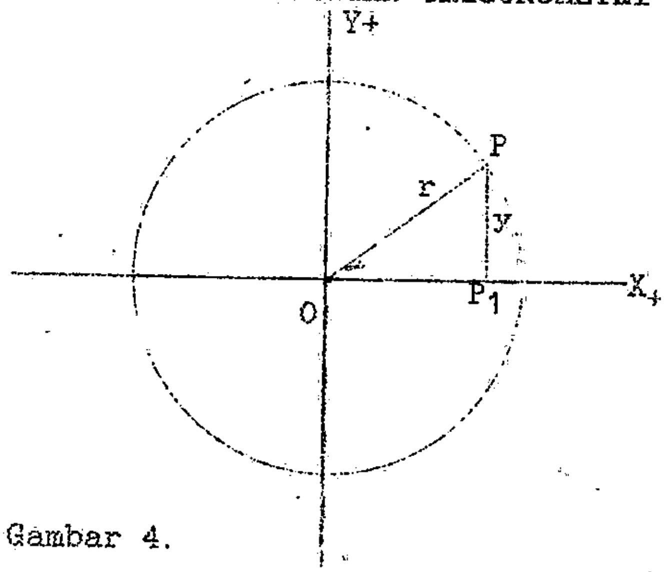
$\dfrac{2}{1 - 2\cos^2\alpha} = \dfrac{2}{2\sin^2\alpha - 1}$

15. $\dfrac{tg\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha} \times \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{tg\alpha + 1}$

16. $\sin^2\alpha - \cos^2 = \dfrac{tg^2\alpha - 1}{tg^2\alpha + 1}$

17. $\dfrac{tg^2\alpha - \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = tg^4\alpha$

II. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI PADA KWADRAND-KWADRAND

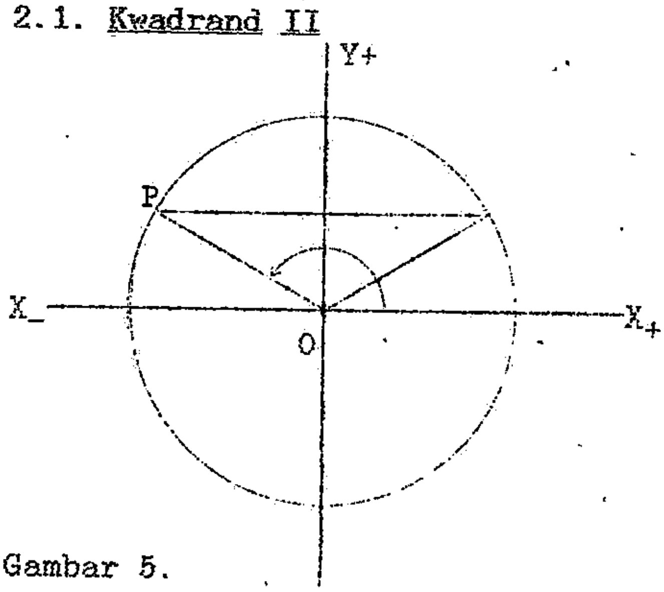


Gambar 4.

Daerah X_+OY_+ adalah kwadrand I.

Sudut-sudut yang besarnya antara 0^o dan 90^o, disebut sudut-sudut pada kwadrand I. Semua perbandingan trigonometri pada kwadrand I bertanda positif.

2.1. Kwadrand II



Gambar 5.

Daerah Y_+OX_- disebut kwadrand II (Gambar 5).

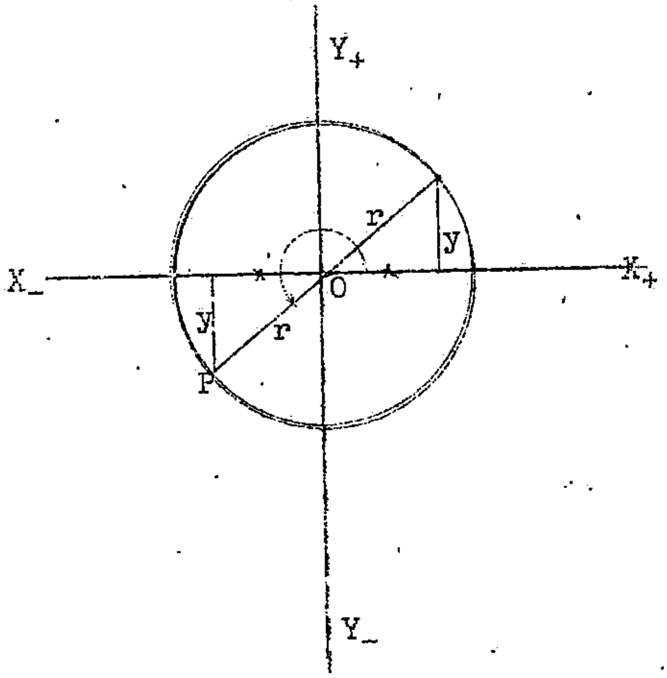
Sudut-sudut yang besarnya antara 90^o dan 180^o, dinamakan sudut-sudut pada kwadrand II. $\angle X_+OP$ adalah salah satu sudut pada kwadrand II. Perbandingan trigonometri pada kwadrand II ini, hanya Sinus dan Cosecans yang positif, yang lainnya bertanda negatif, seperti terlihat dibawah ini :

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathrm{Sin}(180^o - \alpha) &= \mathrm{Sin}\,\alpha \\
\mathrm{Cos}(180^o - \alpha) &= -\mathrm{Cos}\,\alpha \\
\mathrm{tg}\,(180^o - \alpha) &= -\mathrm{tg}\,\alpha \\
\mathrm{Cotg}(180^o - \alpha) &= -\mathrm{Cotg}\,\alpha \\
\mathrm{Sec}(180^o - \alpha) &= -\mathrm{Sec}\,\alpha \\
\mathrm{Cosec}(180^o - \alpha) &= \mathrm{Cosec}\,\alpha
\end{aligned}}$$

2.2. Kwadran III...

2.2. **Kwadrand III.**

Daerah X_-OY_- disebut kwadrand III (gambar 6).



Gambar 6.

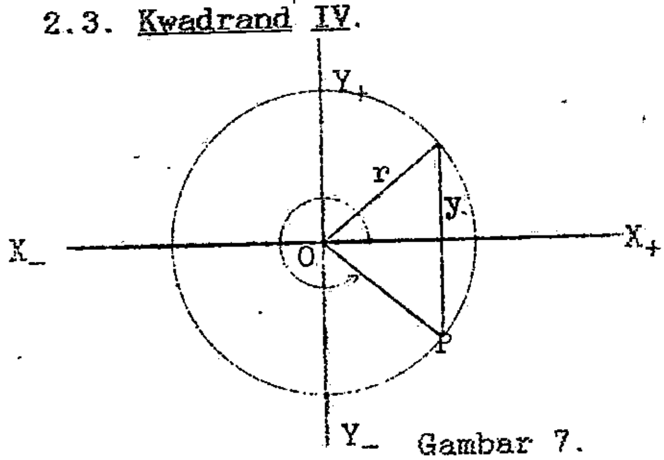
Sudut-sudut yang besarnya antara 180^o dan 270^o dinamakan sudut-sudut pada kwadrand III.

Sudut X_+OP adalah salah satu sudut pada kwadrand III.

Perbandingan trigonometri pada kwadrand III ini hanya tg dan Cotg yang bertanda positif, sedangkan yang lainnya bertanda negatif seperti terlihat dibawah ini.

$$\begin{aligned}
\sin(180^o + \alpha) &= -\sin \alpha \\
\cos(180^o + \alpha) &= -\cos \alpha \\
\text{tg}\ (180^o + \alpha) &= \text{tg}\ \alpha \\
\text{Cotg}(180^o + \alpha) &= \text{Cotg}\ \alpha \\
\text{Sec}(180^o + \alpha) &= -\text{Sec}\ \alpha \\
\text{Cosec}(180^o + \alpha) &= -\text{Cosec}\ \alpha
\end{aligned}$$

2.3. **Kwadrand IV.**



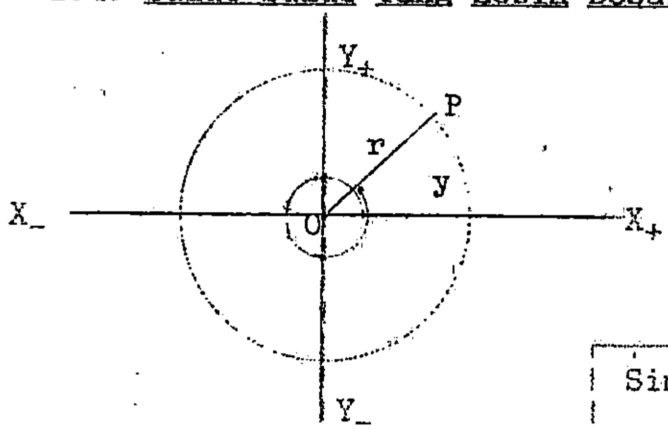
Gambar 7.

Daerah X_+OY_- disebut kwadrand IV (gambar 7).

Sudut-sudut yang besarnya antara 270^o dan 360^o dinamakan sudut-sudut pada kwadrand IV. Sudut X_+OP adalah salah satu sudut pada kwadrand IV. Perbandingan trigonometri dalam kwadran IV ini, hanya Cos dan Sec yang bertanda positif, sedangkan yang lainnya bertanda negatif, seperti terlihat dibawah ini.

$$\begin{array}{|l|}\hline \mathrm{Sin}(360^o - \alpha) = -\mathrm{Sin}\,\alpha \\ \mathrm{Cos}(360^o - \alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha \\ \mathrm{tg}\,(360^o - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha \\ \mathrm{Cotg}(360^o - \alpha) = -\mathrm{Cotg}\,\alpha \\ \mathrm{Sec}(360^o - \alpha) = \mathrm{Sec}\,\alpha \\ \mathrm{Cosec}(360^o - \alpha) = -\mathrm{Cosec}\,\alpha \\ \hline \end{array}$$

2.4. Sudut-Sudut Yang Lebih Besar Dari Pada 360^o



Gambar 8.

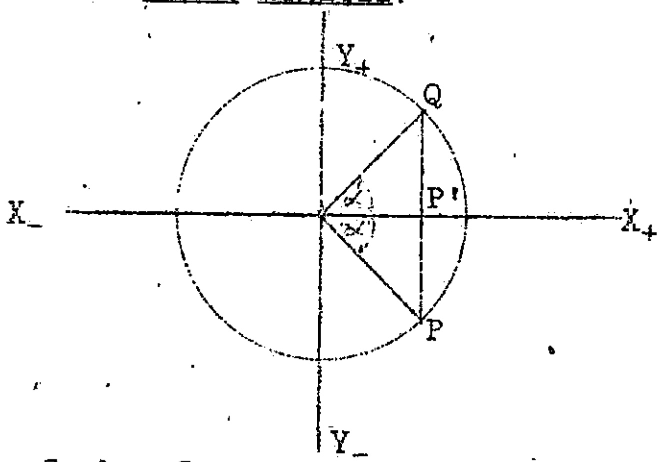
Pada gambar 8, terlihat $\angle X_+OP$ adalah $360^o + \alpha$, maka semua perbandingan trigonometrinya berlaku seperti pada kwadrand I. Jadi :

$$\begin{array}{|l|}\hline \mathrm{Sin}(\alpha + k.360^o) = \mathrm{Sin}\,\alpha \\ \mathrm{Cos}(\alpha + k.360^o) = \mathrm{Cos}\,\alpha \\ \mathrm{tg}(\alpha + k.360^o) = \mathrm{tg}\,\alpha \\ \mathrm{Cotg}(\alpha + k.360^o) = \mathrm{Cotg}\,\alpha \\ \mathrm{Sec}(\alpha + k.360^o) = \mathrm{Sec}\,\alpha \\ \mathrm{Cosec}(\alpha + k.360^o) = \mathrm{Cosec}\,\alpha \\ \hline \end{array}$$

Tetapi juga ternyata bahwa $\mathrm{tg}(\alpha + k.180^o) = \mathrm{tg}\,\alpha$ dan $\mathrm{Cotg}(\alpha + k.180^o) = \mathrm{Cotg}\,\alpha$ (k = bilangan bulat pos).

Fungsi-fungsi trigono adalah fungsi yang berulang (periodik), tidak berubah jika $\alpha + k.360^\circ$ untuk Sin dan Cos dan tidak berubah jika $\alpha + k.180^\circ$ untuk tg dan Cotg. Jadi perioda Sin dan Cos adalah 360° dan perioda tg dan Cotg adalah 180°.

2.5. Sudut Negatif.



Gambar 9.

Pada gambar 9, terlihat bahwa :

$\text{Sin}(-\alpha) = \frac{-PP'}{OP} = \frac{-y}{r} = -\text{Sin}\,\alpha$ dengan cara yang sama dapat diperiksa, bahwa umumnya berlaku :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Sin}(-\alpha) &= -\text{Sin}\,\alpha \\ \text{Cos}(-\alpha) &= \text{Cos}\,\alpha \\ \text{tg}(-\alpha) &= -\text{tg}\,\alpha \\ \text{Cotg}(-\alpha) &= -\text{Cotg}\,\alpha \\ \text{Sec}(-\alpha) &= \text{Sec}\,\alpha \\ \text{Cosec}(-\alpha) &= -\text{Cosec}\,\alpha \end{aligned}}$$

2.6. Contoh-Contoh.

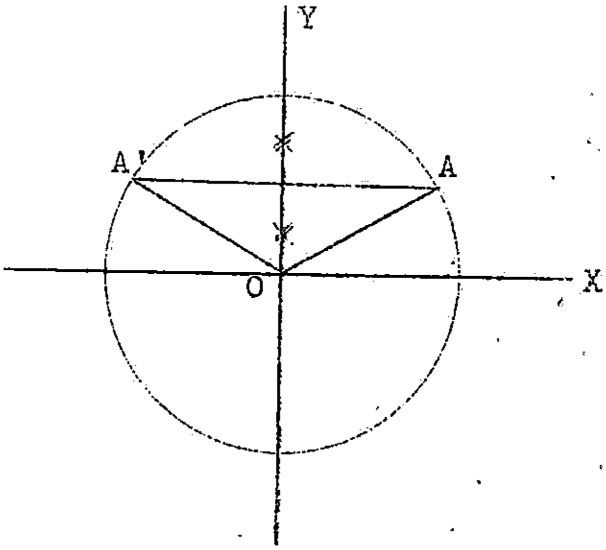
$$\text{Sin } 120^\circ = \text{Sin}(180^\circ - 60^\circ) = \text{Sin } 60^\circ = {}^1/_2\sqrt{3}$$
$$\text{Cos } 120^\circ = \text{Cos}(180^\circ - 60^\circ) = -\text{Cos } 60^\circ = -{}^1/_2$$
$$\text{Sin } 330^\circ = \text{Sin}(360^\circ - 30^\circ) = -\text{Sin } 30^\circ = -{}^1/_2$$
$$\text{Cos } 330^\circ = \text{Cos}(360^\circ - 30^\circ) = \text{Cos } 30^\circ = {}^1/_2\sqrt{3}$$

Soal-Soal :

1. Hitunglah semua perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut 0°, 90°, 180°, 270° dan 360°.

2. Hitunglah semua perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut 45°, 150°, 240° dan 315°.

III. PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI



Gambar 10.

Lingkaran (0,1) adalah lingkaran trigonometri yang berjari-jari 1. Untuk mencari harga x yang memenuhi pertidaksamaan Sin x > $^1/_2$, diambil titik B, sehingga OB=$^1/_2$r. Kemudian buat garis melalui B // sumbu x sehingga memotong lingkaran (0,1) di A dan A'. A dan A' dihubungkan dengan O.

Sudut x yang memenuhi terletak diantara A dan A' yaitu busur AA' perhitungannya dalah sebagai berikut :

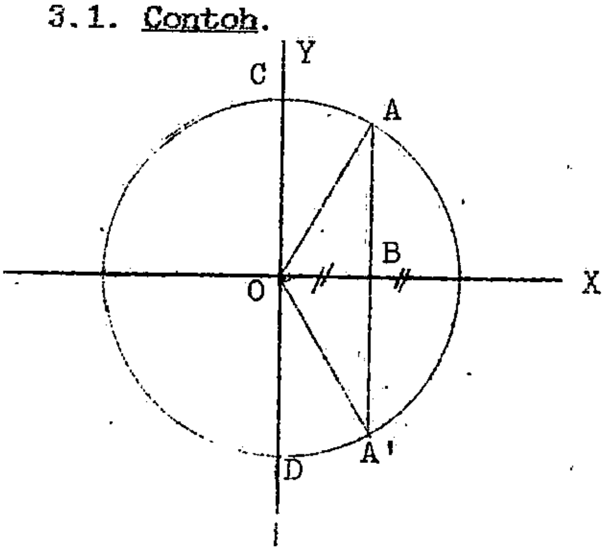
Sin x > $^1/_2$

Sin x > Sin 30^o + k.360^o dan

Sin x > Sin 150^o + k.360^o

Jadi harga yang memenuhi: $30^o < x < 150^o$.

3.1. <u>Contoh</u>.



Gambar 11.

Hitunglah harga-harga φ antara 0^o dan 360^o yang memenuhi Sec $\varphi \geq 2$

Jawab:

Ambil OB =$^1/_2$r. Melalui B buat garis yang // sumbu Y, sehingga memotong lingkaran di- A dan A', A dan A' dihubungkan dengan O.

Maka sudut yang memenuhi adalah antara A dan C dan antara A' dan D.

Perhitungannya :

$$\text{Sec } \varphi \geq 2$$

$$\frac{1}{\text{Cos } \varphi} \geq 2$$

$$1 \geq 2 \text{ Cos}$$

$$1 - 2 \text{ Cos } \varphi \geq 0$$

$$0 < \text{Cos } \varphi < {}^1/_2$$

Untuk $\text{Cos } \varphi = {}^1/_2 \longrightarrow \varphi_1 = 60^o$

$$\varphi_2 = 300^o$$

Maka harga φ yang memenuhi untuk $0^o < \text{Cos } \varphi \leq {}^1/_2$ adalah $\angle$ AOC dan $\angle$ A'OD atau harga yang memenuhi adalah :

$$60^o \leq \varphi < 90^o \text{ dan}$$

$$270^o < \varphi \leq 300^o.$$

3.2. Soal-Soal.

1. Hitunglah harga z antara 0^o dan 360^o yang memenuhi tg $z \leq 1$.

2. Hitunglah harga φ antara 0^o dan 360^o yang memenuhi Cotg $6\varphi < 1$.

3. Hitunglah harga x antara 0^o dan 360^o yang memenuhi $0 <$ Cotg $x < 1^1/_2$.

IV. PENGGUNAAN DAFTAR LOGARITMA PADA TRIGONOMETRI

Untuk menghitung harga Sin, Cos, tg, dan Cotg suatu sudut dapat digunakan daftar III pada buku daftar logaritma. Untuk menghitung harga Sec dan Cosec diperoleh dari harga Cos dan Sin saja, karena $\sin\alpha \times \mathrm{Cosec}\,\alpha = 1$ dan $\cos\alpha \times \sec\alpha = 1$.

4.1. Contoh-Contoh.

1. Hitunglah Sin 23° 15' 46".

   Untuk menghitung ini, terlebih dahulu dihitung :

   Sin 23° 15' = 0,39474. (lihat daftar logaritma lima

   Sin 23° 16' = 0,39501. desimal halaman 93).

   Selisihnya = 0,00027 = 27 e_5.

   Kemudian hitung yang 46", maka harga 46" = $\frac{46}{60} \times 27\ e_5 = 21\ e_5$ maka harga Sin 23° 15' 46" adalah : $0,39474 + 21\ e_5 = 0,39495$.

2. Hitunglah Cos 31° 47' 25".

   Terlebih dahulu dihitung :

   Cos 31° 47' = 0,85005. (lihat daftar logaritma lima

   Cos 31° 48' = 0,84989. desimal halaman 97).

   Selisihnya = 0,00016 = 16 e_5.

   Harga yang 25" = $\frac{25}{60} \times 16\ e_5 = 7\ e_5$.

   Maka harga Cos 31° 47' 25" $= 0,85005 - 7\ e_5$

   $= 0,84998$.

3. Hitunglah.......

3. Hitunglah tg $41^o\ 12'\ 53''$.

Terlebih dahulu dihitung :

tg $41^o\ 12' = 0,87543$. (menurut daftar logaritma hala-

tg $41^o\ 13' = 0,87595$. man 102).

Selisihnya = $0,00052 = 52\ e_5$

Harga $53'' = \frac{53}{60} \times 52\ e_5 = 46\ e_5$

Maka harga tg $41^o\ 12'\ 53'' = 0,87543 + 46\ e_5$

Selanjutnya dapat dilaksanakan menghitung kembali yang merupakan kebalikan dari menghitung harga suatu Sin,, Cos, tg, dan Cotg suatu sudut tertentu. Dalam hal ini yang diketahui harganya, dan akan dihitung adalah sudutnya.

4.2. Contoh-Contoh.

1. Diketahui Sin $\varphi = 0,6$.

Hitunglah harga φ yang memenuhi antara 0^o dan 360^o.

Jawab : Sin $36^o\ 52' = 0,59995$. (dalam daftar logarit-

Sin $36^o\ 53' = 0,60019$ ma halaman 99).

Jadi yang tepat 0,60000 tidak ada dalam daftar.

Selisih harga Sin $36^o\ 52'$ dengan Sin $36^o\ 53'$ adalah $24\ e_5$. Ternyata selisih harga Sin φ dengan Sin $36^o\ 52'$ adalah $5\ e_5$. Untuk menentukan detiknya diperoleh dari:

$\frac{5}{24} \times 60'' = 13''$, maka :

$x_1 = 36^o\ 52'\ 13'' + k.360^o$.

$x_2 = 143^o\ 7'\ 47'' + k.360^o$.

2. Diketahui.....

2. Diketahui Cos $\varphi = {}^1/_3 = 0,33333$.

   Hitunglah φ yang memenuhi antara 0° dan 360°.

   <u>Jawab</u> : Cos $70^\circ\ 31' = 0,33353$. (dalam daftar logarit-

   Cos $70^\circ\ 32' = 0,33326$. ma halaman 90).

   Selisih harga Cos $70^\circ\ 31'$ dengan harga Cos $70^\circ\ 32'$ adalah 27 e_5.

   Selisih harga Cos φ dengan Cos $70^\circ\ 31'$ adalah 20 e_5.

   Untuk menentukan detiknya adalah :

   $$\frac{20}{27} \times 60'' = 44'', \text{ maka :}$$

   $${}_1 = 70^\circ\ 31'\ 44'' + k.360^\circ.$$

   $${}_2 = 289^\circ\ 28'\ 16'' + k.360^\circ.$$

3. Diketahui Cotg $\varphi = \sqrt{6}$

   Hitunglah harga φ yang memenuhi.

   <u>Jawab</u> : Cotg $x = \sqrt{6} = 2,44949$

   Cotg $22^\circ\ 12' = 2,45043$. (dalam daftar logarit-

   Cotg $22^\circ\ 13' = 2,44839$. ma halaman 92).

   Selisih harga Cotg $22^\circ\ 12'$ dengan Cotg $22^\circ\ 13'$ adalah 204 e_5. Selisih harga Cotg φ dengan Cotg $22^\circ\ 12'$ adalah 94 e_5. Untuk menentukan detiknya :

   $$\frac{94}{204} \times 60'' = 28'', \text{ maka harga } \varphi = 22^\circ\ 12'\ 28'' + k.180^\circ.$$

4.3. <u>Soal-Soal</u>.

Hitunglah dengan mempergunakan daftar Sin pada daftar logaritma lima desimal.

1. Sin $52^\circ\ 17'\ 38''$
2. Sin $119^\circ\ 40'\ 23''$

3. Cos......

3. Cos 69° 44' 21"
4. Cos 215° 53'
5. Sec 332° 15' 47"
6. tg 73° 25' 7"

Hitunglah harga x yang memenuhi antara 0° dan 360° dari:

7. Cosec $x = 18^1/_2$
8. Sec $x = 2^1/_4$
9. Sin $3x = 0,6$
10. tg $4x = 2,3$.

V. MENGHITUNG LOGARITMA DARI Sin, Cos, tg dan Cotg SUATU SUDUT

Untuk menghitung harga logaritma dari Sin, Cos, tg dan Cotg suatu sudut dapat digunakan daftar II pada buku daftar logaritma. Untuk menghitung logaritma dari Sec dan Cosec, diperoleh dari kebalikannya.

$$\log \text{Sec}\,\alpha = \log \frac{1}{\text{Cos}\,\alpha} = \log 1 - \log \text{Cos}\,\alpha$$

$$\log \text{Cosec}\,\alpha = \log \frac{1}{\text{Sin}\,\alpha} = \log 1 - \log \text{Sin}\,\alpha\ .$$

5.1. <u>Contoh-Contoh</u>.

1. Hitunglah log Sin $55^\circ\ 47'\ 19''$.

<u>Jawab</u> : Untuk menghitung ini, terlebih dahulu dihitung : log Sin $55^\circ\ 47' = 9{,}91746 - 10$. (lihat daftar
log Sin $55^\circ\ 48' = 9{,}91755 - 10$. logaritma).
Selisih log Sin di atas = 9 e_5.

kemudian hitung 19", maka harga 19" = — x 9 e_5 = 3 e_5

Maka harga log Sin $55^\circ\ 47'\ 19'' = 9{,}91746 - 10 + 3\ e_5$
$= 9{,}91649 - 10$.

2. Hitunglah log Cos $55^\circ\ 36'\ 41''$.

<u>Jawab</u> : Untuk menghitung ini, terlebih dahulu dihitung : log Cos $55^\circ\ 36' = 9{,}75202 - 10$. (lihat daftar
log Cos $55^\circ\ 37' = 9{,}75184 - 10$. II logaritma)..
Selisih harga log Cos di atas = 18 e_5.

Harga yang 41" = $\frac{41}{60}$ x 18 e_5 = 12 e_5

Maka harga log Cos $55^\circ\ 36'\ 41'' = 9{,}75202 - 10 - 12\ e_5$
$= 9{,}75190 - 10$.

3.Hitunglah.......

3. Hitunglah log tg 55° 41' 9".

<u>Jawab</u> : Terlebih dahulu dihitung :

log tg 53° 41' = 10,16666 - 10. (dengan melihat daftar II

log tg 53° 45' = 10,16693 - 10. halaman 67).

Selisih log tg 55° 44' dengan log tg 55° 43' adalah : 27 e_5.

Harga yang 9" = $\frac{9}{\cancel{60}_{20}} \times \cancel{27}^{9} e_5 = 4\ e_5$.

Jadi harga log tg 55° 44' 9" adalah :

= 10,16666 - 10 + 4 e_5

= 10,16670 - 10 atau = 0,16670.

Selanjutnya dapat dilaksanakan menghitung kembali; yang merupakan kebalikan dari menghitung harga logaritma Sin, Cos, tg dan Ctg suatu sudut tertentu.

Dalam hal ini diketahui harganya, dan akan dihitung adalah sudutnya.

5.2. Contoh-Contoh.

1. Diketahui log Sin x = 9,74968 - 10.

Hitunglah harga x yang memenuhi antara 0° dan 360°.

<u>Jawab</u> : Lihat daftar logaritma halaman 67, maka terlihat : log Sin 34° 11' = 9,74961 - 10.

log Sin 34° 12' = 9,74980 - 10.

Selisih harga log Sin 34° 11' dan log Sin 34° 12' adalah 19 e_5.

Selisih harga log Sin x dengan log Sin 34° 11' adalah 7 e_5.

Untuk.........

Untuk menentukan detiknya diperoleh dari :

$\frac{7'}{19}$ x 60" = 22", maka : $x_1 = 34^o\ 11'\ 22" + k.360^o$.

$x_2 = 145^o\ 48'\ 38" + k.360^o$.

2. Diketahui log tg φ = 0,16930.

Hitunglah harga φ yang memenuhi antara 0^o dan 360^o.

<u>Jawab</u> : Menurut daftar logaritma didapat :

log tg 55^o 53' = 10,16911 - 10.

log tg 55^o 54' = 10,16938 - 10.

Selisih harga log tg 55^o 53' dengan log tg 55^o 54' adalah 27 e_5.

Selisih harga log tg φ dengan log tg 55^o 53' adalah: 19 e_5.

Detiknya didapat : $\frac{19}{27}$ x 60" = 42".

Jadi harga φ yang memenuhi adalah :

55^o 53' 42" + k.180^o (k = bilangan bulat).

5.3. <u>Soal-Soal</u>.

Hitunglah soal-soal dibawah ini dengan mempergunakan daftar logaritma.

1. log Sin 35^o 42' 7"
2. log Cosec 29^o 5' 33"
3. log Sec 343^o 18' 25"
4. log tg 44^o 19' 42"

Hitunglah harga φ yang memenuhi antara 0^o dan 360^o, dengan mempergunakan daftar logaritma.

5. log Cotg.....

5. log Cotg φ = 0,24221

6. log Sec φ = 0,08632

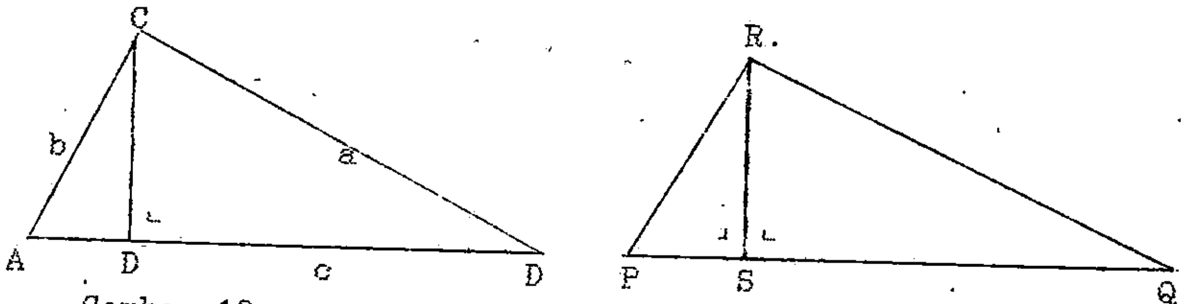
7. log tg φ = 9,82201 - 10

8. log Cos φ = 9,98105 - 10

9. log Cosec φ = 0,21629

10. log Sin φ = 9,26094 - 10.

VI. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI DARI JUMLAH DAN SELISIH 2 BUAH SUDUT



Gambar 12.

Gambar 13.

Dari gambar 12 didapat CD = b $\sin\alpha$, maka luas segitiga ABC = $\frac{1}{2}$ bc $\sin\alpha$. Dengan cara yang sama juga didapat luas segitiga ABC = $\frac{1}{2}$ ac $\sin\beta$ dan $= \frac{1}{2}$ ab $\sin\gamma$.

Dari gambar 13 didapat :

$$RS = p \cos\alpha$$

$$RS = q \cos\beta$$

Luas $\triangle$ PQR = luas $\triangle$ PRS + luas $\triangle$ QRS

Luas $\triangle$ PQR = $\frac{1}{2}$ p.q $\sin(\alpha + \beta)$

Luas $\triangle$ PRS = $\frac{1}{2}$ p.q $\cos\alpha \sin\beta$

Luas $\triangle$ QRS = $\frac{1}{2}$ p.q $\sin\alpha \cos\beta$

$$\tfrac{1}{2}\, p.q \sin(\alpha + \beta) = \tfrac{1}{2}\, p.q \cos\alpha \sin\beta + \tfrac{1}{2}\, p.q \sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$$

Jika $\alpha > \beta$, didapat :

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}$$

Untuk mendapatkan :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \sin\{90^\circ - (\alpha + \beta)\} \\ &= \sin\{(90^\circ - \alpha) - \beta\} \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cos\beta - \cos(90^\circ - \alpha) \sin\beta\end{aligned}$$

Cos. . . . .

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

Untuk mendapatkan :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \sin\{90^\circ - (\alpha - \beta)\} \\ &= \sin\{(90^\circ - \alpha) + \beta\} \\ &= \sin(90^\circ - \alpha)\cos\beta + \cos(90^\circ - \alpha)\sin\beta\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}$$

Karena rumus Sin dan Cos dari jumlah/selisih dua buah sudut maka didapat pulalah :

$$\boxed{\begin{gathered} tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta} \\ \text{dan} \\ tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\; tg\,\beta} \end{gathered}}$$

6.1. <u>Contoh-Contoh</u>:

1. Hitunglah Sin 15°.

<u>Jawab</u> : $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= {}^1/_2\sqrt{2}.\ {}^1/_2\sqrt{3} - {}^1/_2\sqrt{2}.\ {}^1/_2 \\ &= {}^1/_4\sqrt{6} - {}^1/_4\sqrt{2} \\ &= {}^1/_4\ (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

2. Buktikanlah: $tg\,\alpha + tg\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\quad \cos}$

<u>Bukti</u>: $tg\,\alpha + tg\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$= \ldots\ldots\ldots$

$$= \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} \quad \text{......terbukti.}$$

6.2. <u>Soal-Soal</u>:

Buktikanlah :

1. $\sin(45^o + \alpha) + \cos(45^o + \alpha) = 2 \cos\alpha \cos 45^o$.

2. $\operatorname{Cotg}\alpha - \operatorname{Cotg}\beta = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$

3. $\dfrac{\sin(45^o + \alpha)}{\sin(45^o - \alpha)} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$

4. $\cos(135^o + \alpha) + \sin(135^o - \alpha) = 0$.

5. Hitunglah tanpa daftar: a. $\sin 75^o$
   b. $\cos 15^o$
   c. $\operatorname{tg} 15^o$
   d. $\operatorname{tg} 75^o$
   e. $\sin 15^o$
   f $\sin\dfrac{3}{\pi} + \cos\dfrac{3}{8}\pi$

Buktikanlah :

6. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg} 2\varphi + \operatorname{tg} 3\varphi + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} 3\varphi \operatorname{tg} 4\varphi = \dfrac{\sin 6\varphi}{\cos 2\varphi \cos 4\varphi}$

7. $\operatorname{tg}(45^o + \alpha) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{Cotg}(45^o - \alpha)$

VII. RUMUS-RUMUS SUDUT RANGKAP

Pada rumus-rumus $\text{Sin}(\alpha+\beta)$, $\text{Cos}(\alpha+\beta)$ dan rumus $\text{tg}(\alpha+\beta)$, disubstitusikan $\alpha=\beta$, maka didapatkan :

$$\boxed{\text{Sin } 2\alpha = 2 \text{ Sin}\alpha \text{ Cos}\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Cos } 2\alpha &= \text{Cos}^2\alpha - \text{Sin}^2\alpha \\ &= 2\text{ Cos}^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\text{ Sin}^2\alpha \\ \text{tg}^2\alpha &= \frac{2\text{ tg }\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}\end{aligned}}$$

umumnya berlaku :

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Sin } n\alpha &= 2\text{ Sin }\frac{n\alpha}{2}\text{ Cos }\frac{n\alpha}{2} \\ \text{Cos } n\alpha &= \text{Cos}^2\frac{n\alpha}{2} - \text{Sin}^2\frac{n\alpha}{2} = \\ 1 - 2\text{ Sin}^2\frac{n\alpha}{2} &= 2\text{ Cos}^2\frac{n\alpha}{2} - 1 \\ \text{tg } n\alpha &= \frac{2\text{ tg }\frac{n\alpha}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{n\alpha}{2}}\end{aligned}}$$

(n = bilangan sembarang)

7.1. Contoh-Contoh:

1. $\text{Cos }\alpha = 2\text{ Cos}^2\,{}^1/_2\alpha - 1$

$$2\text{ Cos}^2\,{}^1/_2\alpha = 1 + \text{Cos }\alpha$$

$$\text{Cos}^2\,{}^1/_2\alpha = \frac{1+\text{Cos }\alpha}{2}$$

$$\boxed{\text{Cos }{}^1/_2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos }\alpha}{2}}}$$

2. Cos =........

2. $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\alpha$

$$\boxed{\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}}$$

7.2. Soal-Soal:

Buktikanlah :

1. $\mathrm{Sec}^2\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

2. $\mathrm{Cotg}\ 2\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{2\ \mathrm{Cotg}\,\alpha}$

3. $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{Cotg}\,\alpha - 2\ \mathrm{Cotg}\ 2\alpha$.

4. $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{Cotg}\ 2\alpha = \mathrm{Cosec}\ 2\alpha$.

5. $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$

6. $\sin 8\alpha = 8 \cos 4\alpha \cos 2\alpha \cos\alpha \sin\alpha$.

7. $2\ \mathrm{Cosec}\ 2\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{Cotg}\,\alpha$.

8. $\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$.

9. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha$.

10. Nyatakanlah tg 3   dalam tg   .

7.3. Rumus Jumlah dan Selisih Dari Sinus dan Cosinus.

$$\begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta \end{array} +$$

Jika......

Jika

$$\begin{array}{r} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \\ \hline 2\alpha = p + q \\ \alpha = \dfrac{p+q}{2} \end{array} + \qquad\qquad \begin{array}{r} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \\ \hline 2\beta = p - q \\ \beta = \dfrac{p-q}{2} \end{array} -$$

maka persamaan: $\mathrm{Sin}(\alpha+\beta) + \mathrm{Sin}(\alpha-\beta) = 2\ \mathrm{Sin}\alpha\ \mathrm{Cos}\beta$

menjadi:

$$\boxed{\mathrm{Sin}\ p + \mathrm{Sin}\ q = 2\ \mathrm{Sin}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{Cos}\ \frac{p-q}{2}}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{Sin}(\alpha+\beta) = \mathrm{Sin}\alpha\ \mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Cos}\alpha\ \mathrm{Sin}\beta \\ \mathrm{Sin}(\alpha-\beta) = \mathrm{Sin}\alpha\ \mathrm{Cos}\beta - \mathrm{Cos}\alpha\ \mathrm{Sin}\beta \\ \hline \mathrm{Sin}(\alpha+\beta) - \mathrm{Sin}(\alpha-\beta) = 2\ \mathrm{Cos}\alpha\ \mathrm{Sin}\beta \end{array} -$$

atau

$$\boxed{\mathrm{Sin}\ p - \mathrm{Sin}\ q = 2\ \mathrm{Cos}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{Sin}\ \frac{p-q}{2}}$$

Dengan cara yang sama didapat pula :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Cos}\ p + \mathrm{Cos}\ q = 2\ \mathrm{Cos}\ \dfrac{p+q}{2}\ \mathrm{Cos}\ \dfrac{p-q}{2} \\ \mathrm{Cos}\ p - \mathrm{Cos}\ q = -2\ \mathrm{Sin}\ \dfrac{p+q}{2}\ \mathrm{Sin}\ \dfrac{p-q}{2} \end{array}}$$

7.4. Contoh-Contoh:

1. $\mathrm{Sin}\ 54^o - \mathrm{Sin}\ 18^o = 2\ \mathrm{Cos}\ \dfrac{54+18}{2}\ \mathrm{Sin}\ \dfrac{54-18}{2}$

$$= 2\ \mathrm{Cos}\ 36\ \mathrm{Sin}\ 18$$

$$= \frac{2\ \mathrm{Sin}\ 18\ \mathrm{Cos}\ 18\ \mathrm{Cos}\ 36}{\mathrm{Cos}\ 18}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\ 36\ \mathrm{Cos}\ 36}{\mathrm{Cos}\ 18}$$

=..........

$$= \frac{2 \text{ Sin } 36 \text{ Cos } 36}{2 \text{ Cos } 18}$$

$$= \frac{\text{Sin } 72^o}{2 \text{ Cos } 18^o}$$

$$= \frac{\text{Sin } 72^o}{2 \text{ Cos } 72^o}$$

$$= {}^1/_2 .$$

2. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$, buktikanlah :

$\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta + \text{Sin}\,\gamma = 4 \text{ Cos } {}^1/_2\,\alpha \text{ Cos } {}^1/_2\,\beta \text{ Cos } {}^1/_2\,\gamma$

<u>Bukti</u>:

$$\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta + \text{Sin}\,\gamma = 4 \text{ Cos } {}^1/_2\,\alpha \text{ Cos } {}^1/_2\,\beta \text{ Cos } {}^1/_2\,\gamma$$

$$2 \text{ Sin } \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ Cos } \frac{\alpha - \beta}{2} + \text{Sin}(\alpha + \beta) =$$

$$2 \text{ Sin} \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ Cos} \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \text{ Sin} \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ Cos} \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$2 \text{ Sin } \frac{\alpha + \beta}{2} [\text{Cos } \frac{\alpha - \beta}{2} + \text{Cos} \frac{\alpha + \beta}{2}] =$$

$$2 \text{ Sin} \frac{\alpha + \beta}{2} [2 \text{ Cos } \frac{\alpha - \beta + \alpha + \beta}{4} + \text{Cos} \frac{\alpha - \beta + \alpha - \beta}{4}] =$$

$$2 \text{ Sin } \frac{\alpha + \beta}{2} (2 \text{ Cos } {}^1/_2\,\alpha \text{ Cos } {}^1/_2\,\beta) =$$

$$2 \text{ Cos } {}^1/_2\,\gamma \,.\, \text{Cos } {}^1/_2\,\alpha \text{ Cos } {}^1/_2\,\beta =$$

$$4 \text{ Cos } {}^1/_2\alpha . \text{Cos } {}^1/_2\beta \text{ Cos } {}^1/_2\gamma = 4 \text{ Cos } {}^1/_2\alpha . \text{Cos } {}^1/_2\beta \text{ Cos } {}^1/_2\gamma$$

terbukti.

7.5. Soal-Soal..........

7.5. Soal-Soal:

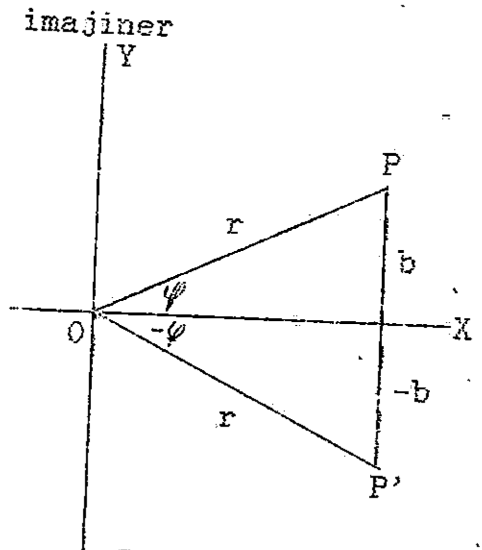
Buktikanlah :

1. $\text{Sin } 2\alpha + \text{Sin } 4\alpha + \text{Sin } 6\alpha = 4 \text{ Sin } 3\alpha \text{ Cos } 2\alpha \text{ Cos}\alpha$.
2. $\text{Sin } 2\alpha - \text{Sin } 6\alpha + \text{Sin } 8\alpha = 4 \text{ Sin}\alpha \text{ Cos } 3\alpha \text{ Cos } 4\alpha$.
3. $\text{Sin}(\alpha + 45^o) + \text{Sin}(\alpha - 45^o) = (\text{Sin}\alpha)\sqrt{2}$.
4. $\text{Sin}(\alpha + 60^o) - \text{Sin}(\alpha - 60^o) = (\text{Cos}\alpha)\sqrt{3}$.
5. $\text{tg}(\alpha + 45^o) + \text{tg}(\alpha - 45^o) = 2 \text{ tg } 2\alpha$.

Jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$, buktikanlah :

6. $\text{Cos}\alpha + \text{Cos}\beta + \text{Cos}\gamma = 1 + 4 \text{ Sin}^1/_2\alpha \text{ Sin}^1/_2\beta \text{ Sin}^1/_2\gamma$
7. $\text{Gotg}\alpha + \text{Cotg}\beta + \text{Cotg}\gamma = \text{Cotg}\alpha . \text{Cotg}\beta . \text{Cotg}\gamma$.
8. $\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta + \text{tg}\gamma = \text{tg}\alpha . \text{tg}\beta . \text{tg}\gamma$.
9. $\text{Sin}(\alpha + \beta) \text{ Sin}(\alpha - \beta) = \text{Sin}^2\alpha - \text{Sin}^2\beta = \text{Cos}^2\beta - \text{Cos}^2\alpha$
10. $4 \text{ Sin}\varphi \text{ Sin}(60^o + \varphi) \text{ Sin}(60^o - \varphi) = \text{Sin } 3\varphi$.

VIII. DALIL DE MOIVRE



Gambar 14.

Dalam aljabar telah dipelajari mengenai bilangan kompleks $a + bi$, dimana a dan b bilangan riil, sedangkan i = imajiner.

r = modulus, dimana $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Menurut gambar 14.

$\text{Sin}\,\varphi = \dfrac{b}{r} \longrightarrow b = r\ \text{Sin}\,\varphi.$

$\text{Cos}\,\varphi = \dfrac{a}{r} \longrightarrow a = r\ \text{Cos}\,\varphi$

sehingga bilangan kompleks $a + bi = r\ \text{Cos}\,\varphi + (r.\ \text{Sin}\,\varphi) = r\ (\text{Cos}\,\varphi + i\ \text{Sin}\,\varphi)$, dimana φ= orgument $(-180^o < \varphi \leq 180^o)$.

Untuk bilangan kompleks $\text{Cos}\,\varphi + i\ \text{Sin}\,\varphi$, yang modulusnya = 1 dinamakan Uni modulair.

Sifat-sifat bilangan kompleks yang dipakai untuk mencari soal selanjutnya, diantaranya adalah :

1). $a + bi = c + di$, jika dan hanya jika

$a = c$ dan $b = d$

2). $i^2 = -1$.

Bilangan kompleks $\text{Cos}\,\varphi + i\ \text{Sin}\,\varphi$, dapat dipendekkan menulisnya dengan $\text{Cis}\,\varphi$, dimana :

c = kependekkan Cosinus

i = imajiner

s = kependekkan Sinus

φ = argument

$\text{Cis}\,\varphi = \text{Cos}\,\varphi + i\,\text{Sin}\,\varphi$

$\text{Cis}(-\varphi) = \text{Cos}(-\varphi) + i\,\text{Sin}(-\varphi)$

$= \text{Cos}\,\varphi - i\,\text{Sin}\,\varphi$

$\text{Cis}\,\varphi\,.\,\text{Cis}(-\varphi) = (\text{Cos}\,\varphi + i\,\text{Sin}\,\varphi)(\text{Cos}\,\varphi - i\,\text{Sin}\,\varphi)$

$= \text{Cos}^2\varphi - i^2\,\text{Sin}^2\varphi$

$= \text{Cos}^2\varphi + \text{Sin}^2\varphi$

$$\boxed{\text{Cis}\,\varphi\,,\,\text{Cis}(-\varphi) = 1}$$

atau

$$\boxed{\text{Cis}\,\varphi = \frac{1}{\text{Cis}(-\varphi)}}$$

Perkalian $\text{Cis}\,\alpha$ dan $\text{Cis}\,\beta$.

$\text{Cis}\,\alpha = \text{Cos}\,\alpha + i\,\text{Sin}\,\alpha$

$\text{Cis}\,\beta = \text{Cos}\,\beta + i\,\text{Sin}\,\beta$

$\text{Cis}\,\alpha\,.\,\text{Cis}\,\beta = (\text{Cos}\,\alpha + i\,\text{Sin}\,\alpha)(\text{Cos}\,\beta + i\,\text{Sin}\,\beta)$

$= \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + i\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + i\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta +$
$i^2\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta$.

$= \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta + i(\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta) +$
$(\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta)$.

$= \text{Cos}(\alpha + \beta) + i\,\text{Sin}(\alpha + \beta)$.

$$\boxed{\text{Cis}\,\alpha\,.\,\text{Cis}\,\beta = \text{Cis}(\alpha + \beta)}$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$\boxed{\text{Cis}\,\alpha\,.\,\text{Cis}\,\beta\,.\,\text{Cis}\,\gamma = \text{Cis}(\alpha + \beta + \gamma)}$$

Umumnya berlaku :

$\text{Cis}\,\alpha_1,\ \text{Cis}\,\alpha_2,\ \text{Cis}\,\alpha_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,\text{Cis}\,\alpha_n =$
$\text{Cis}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n)$.

Jika.........

Jika $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots = \alpha_n$, maka didapat : $\underbrace{\text{Cis}\,\alpha \,,\ \text{Cis}\,\alpha \,,\ \ldots\ldots \text{Cis}\,\alpha}_{n\ \text{faktor}} = \text{Cis}\underbrace{(\alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha)}_{n\ \text{suku}}$

atau $\boxed{\text{Cis}^n \alpha = \text{Cis}\ n\alpha.}$

8.1. <u>Contoh-Contoh</u> :

1. Hitunglah $\text{Cis}^{15}\ 30^\circ$

   <u>Jawab</u> : $\text{Cis}^{15}\ 30^\circ = \text{Cis}\ 450^\circ = \text{Cis}\ 90^\circ$
   $= \text{Cos}\ 90 + i\ \text{Sin}\ 90$
   $= i.$

2. Hitunglah $\text{Cis}^{-12}\ 15^\circ$

   <u>Jawab</u> : $\text{Cis}^{-12}\ 15^\circ = \text{Cis}(-180^\circ)$
   $= \text{Cis}\ 180^\circ - i\ \text{Sin}\ 180^\circ$
   $= -1$

3. $\text{Cis}\ n\alpha = \text{Cis}^n\alpha$

   untuk n = 3, maka $\text{Cis}\ 3\alpha = \text{Cis}^3\alpha$

   $$\begin{aligned}\text{Cis}\ 3\alpha &= (\text{Cis}\,\alpha)^3 \\ &= (\text{Cos}\,\alpha + i\ \text{Sin}\,\alpha)^3 \\ &= \text{Cos}^3\alpha + 3\ \text{Cos}^2\alpha\ i\ \text{Sin}\,\alpha + 3\ \text{Cos}\,\alpha\ i^2\text{Sin}^2\alpha + i^3\text{Sin}^3\alpha\ .\end{aligned}$$

   $$\text{Cos}\ 3\alpha + i\ \text{Sin}\ 3\alpha = \text{Cos}^3\alpha - 3\ \text{Cos}\,\alpha\ \text{Sin}^2\alpha + i(3\ \text{Cos}^2\alpha\ \text{Sin}\,\alpha - \text{Sin}^3\alpha).$$

   $$\begin{aligned}\text{Cos}\ 3\alpha &= \text{Cos}^3\alpha - 3\ \text{Cos}\,\alpha\ \text{Sin}^2 \\ &= \text{Cos}^3\alpha - 3\ \text{Cos}\,\alpha\,(1 - \text{Cos}^2\alpha) \\ &= \text{Cos}^3\alpha - 3\ \text{Cos}\,\alpha + 3\ \text{Cos}^3\alpha\ .\end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{Cos}\ 3\alpha = 4\ \text{Cos}^3\alpha - 3\ \text{Cos}\,\alpha}$$

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha \\ &= 3(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha \\ &= 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

4. $\cos\alpha + i\sin\alpha = p$

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \frac{1}{p}$$

$\pm$

$$2\cos\alpha = p + \frac{1}{p} \quad \text{dan}$$

$$2i\sin\alpha = p - \frac{1}{p}$$

$$\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = p^2$$

$$\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha = \frac{1}{p^2}$$

$\pm$

$$2\cos 2\alpha = p^2 + \frac{1}{p^2} \quad \text{dan}$$

$$2i\sin 2\alpha = p^2 - \frac{1}{p^2}.$$

umumnya berlaku : $2\cos n\alpha = p^n + \dfrac{1}{p^n}$ dan

$$2i\sin n\alpha = p^n - \frac{1}{p^n}.$$

8.2. Soal-Soal.

1. Jika $\alpha + \beta = \pi/2$, hitunglah : $(\sin\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)$.

2. Buktikanlah : $(1 + \text{Cis } 2\quad)^n = 2^n\cos^n \quad \text{Cis } n$.

3. Hitunglah x dari peis $\dfrac{1 - x}{1 + x} = \cos 2$.

4. Sederhanakanlah....

4. Sederhanakanlah :

$$\frac{\text{Cis } 3\varphi\{\text{Cis}(-\varphi)\}^5}{\text{Cis}(-2\varphi)^3} - \frac{\{\text{Cis}(-4\varphi)\}\ \text{Cis}^3\ 3\varphi}{\text{Cis}}$$

5. Nyatakanlah $\sin 7\alpha$ dalam $\sin\alpha$.

6. Hitunglah $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ dan $\sin(\alpha+\beta)$ dengan memakaikan rumus Cis.

7. Robahlah menjadi bentuk lain :

a). $8\cos^4\alpha$ dan $8\sin^4\alpha$.

b). $16\cos^4\alpha$ dan $16\sin^4\alpha$.

8. Buktikanlah :

$$2^{10}\cos^7\varphi\,\sin^4\varphi = \cos 11\varphi + 3\cos 9\varphi - \cos 7\varphi - 11\cos 5\varphi - 6\cos 3\varphi + 14\cos\varphi .$$

9. Hitunglah x dari :

$$x^2 + 2x(1 - i)\,\text{Cotg } 2\varphi - i(\text{tg}^2\varphi + \text{Cotg}^2\varphi) = 0.$$

IX. DERET TRIGONOMETRI

Jika semua suku-suku dari suatu deret merupakan fungsi dari trigonometri, maka deret itu dinamakan deret trigonometri. Misalnya : $\text{Sin } a + \text{Sin}(a + b) + \text{Sin}(a + 2b) + \ldots$

$\text{Cos}^3 a + \text{Cos}^3(a + b) + \text{Cos}^3(a + 2b) + \ldots$

$\text{Sin } a \text{ Sin } 3a + \text{Sin } 2a \text{ Sin } 6a + \text{Sin } 4a \text{ Sin } 12 + \ldots$
dan seterusnya.

Suku-suku disimbulkan dengan t_1, t_2 ; ..... t_n dan jumlah dari semua suku-suku disimbulkan dengan S_n.

Jadi $S_n = t_1 + t_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + t_n$.

Untuk mencari rumus S_n dari deret $\text{Sin } a + \text{Sin}(a + b) + \text{Sin}(a + 2b) + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Sin}\{a + (n - 1)b\}$.

$S_n = \text{Sin } a + \text{Sin}(a + b) + \text{Sin}(a + 2b) + \ldots + \text{Sin}\{a + (\overline{n-1})b\}$.

Kemudian ruas kiri (S_n) dan ruas kanan sama-sama dikali dengan $2 \text{ Sin } {}^1/{}_2 b$, sehingga didapat :

$$2 \text{ Sin}^1/{}_2 b . t_1 = 2 \text{ Sin}^1/{}_2 b \text{ Sin } a = \text{Cos}(a - {}^1/{}_2 b) - \text{Cos}(a + {}^1/{}_2 b).$$

$$2 \text{ Sin}^1/{}_2 b . t_2 = 2 \text{ Sin}^1/{}_2 b \text{ Sin}(a^1/{}_2 b) = \text{Cos}(a + {}^1/{}_2 b) - \text{Cos}(a + 1^1/{}_2 b).$$

$$2 \text{ Sin}^1/{}_2 b . t_3 = 2 \text{ Sin}^1/{}_2 b \text{ Sin}(a + 2b) = \text{Cos}(a + 1^1/{}_2 b) - \text{Cos}(a + 2^1/{}_2 b).$$

$$\vdots$$

$$2 \text{ Sin } {}^1/{}_2 b . t_n = 2 \text{ Sin}^1/{}_2 b(a + \overline{n-1}b) = \text{Cos}\{a + (n - 1^1/{}_2 b)b\} - \text{Cos}\{a + (n - {}^1/{}_2)b\}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} +$$

$$2 \text{ Sin}^1/{}_2 b \; S_n = \text{Cos}(a - {}^1/{}_2 b) - \text{Cos}\{a + (n - {}^1/{}_2)b\}$$

$$2 \text{ Sin}^1/{}_2 b \; S_n = 2 \text{ Sin}^1/{}_2 b . \text{Sin}\{(a + (\frac{n-1}{2})b\}$$

$$\boxed{S_n = \frac{\text{Sin}^1/{}_2 nb . \text{Sin}\{a + (\frac{n-1}{2})b\}}{\text{Sin}^1/{}_2 b}}$$

Rumus jumlah dari deret Sinus

Untuk mendapatkan rumus jumlah dari deret Cosinus, dimana :

S_n = Cos a + Cos(a + b) + Cos(a + 2b) + ...

Cos{a + (n-1)b} , caranya sama dengan cara deret Sinus yaitu ruas kiri dan ruas kanan dari persamaan di atas sama-sama dikalikan dengan 2 Sin$^1/_2$b, sehingga didapat pula rumus jumlah untuk deret Cosinus, yaitu :

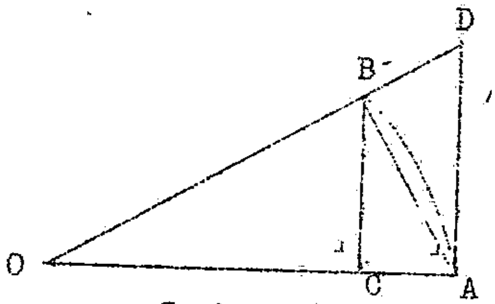
$$\boxed{S_n, = \frac{\mathrm{Sin}\,^1/_2 nb \cdot \mathrm{Cos}\{a + (\frac{n-1}{2})b\}}{\mathrm{Sin}\,^1/_2 b}}$$

9.1. <u>Soal-Soal</u>:

Hitunglah jumlah n suku dari deret-deret dibawah ini :

1. Sin a + Sin 5a + Sin 9a + ...
2. Cos a + Cos 4a + Cos 7a + ...
3. Sin^{2}a + Sin 2a + Sin^{2}3a + ...
4. Sinα Sin 2α + Sin 2α Sin 3α + Sin 3α Sin 4α + ...
5. Cosα - Cos(α + p) + Cos(α + 2p) - Cos(α +3p) +...
6. Cos^{3}a + Cos^{3}2a + Cos^{3}3a + Cos^{3}4a + ...
7. $\mathrm{Sin}^3 \frac{a}{b} + 3\ \mathrm{Sin}^3 \frac{a}{3^2} + 3^2\ \mathrm{Sin} \frac{a}{3^3} + 3^3\ \mathrm{Sin}^3 \frac{a}{3^4}$
8. Sin a - Sin 2a + Sin 3a - Sin 4a + ...
9. Cosec a + Cosec 2a + Cosec 4a + ...
10. tg a - 1$^1/_2$ tg $^1/_2$a + $^1/_4$ tg $^1/_4$a + ...

X. L I M I T



Gambar 15.

OAB adalah sektor lingkaran dengan jari-jari 1 kesatuan dan sudut pusat x radial. (Gambar 15)

$BC \perp OA$

Garis singgung dari A memotong perpanjangan OB di D.

$$\sin x = \frac{BC}{r} = \frac{BC}{1} \longrightarrow BC = \sin x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{AD}{r} = \frac{AD}{1} \longrightarrow AD = \operatorname{tg} x$$

Perhatikan gambar 15.

Luas $\triangle$ OAB < luas sektor OAB < luas $\triangle$ AOD

$$\tfrac{1}{2} \sin x < \tfrac{1}{2} x < \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}\pi)$$

Jika $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ sama-sama dibagi dengan $\sin x$, maka didapat : $1 < \frac{x}{\sin x} \cos x$

untuk $x \longrightarrow 0$, maka harga $\cos x \longrightarrow 1$ dan harga $\frac{1}{\sin x}$ akan mendekati 1: dalam hal ini dikatakanlah :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} = 1}$$

Jika $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ sama-sama dibagi dengan $\operatorname{tg} x$ di dapat :

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{tg} x} < 1$$

Untuk $x \longrightarrow 0$, maka harga $\cos x \longrightarrow 1$ dan $\frac{x}{\operatorname{tg} x} \longrightarrow 1$ dalam hal ini dikatakanlah :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1}$$

Juga dapat dibuktikan :

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ &\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \end{aligned}}$$

umumnya berlaku :

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{nx}{\sin nx} = 1 \\ &\lim_{x \to 0} \frac{nx}{\operatorname{tg} nx} = 1 \\ &\lim_{x \to 0} \frac{\sin nx}{nx} = 1 \\ &\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} nx}{nx} = 1 \end{aligned}}$$

Untuk menghitung $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, terlebih dulu dimisalkan : $x = c - y$ untuk $y \to 0$, sehingga :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(c - y)$$

Untuk menyelesaikan $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, dimisalkan pula $x = \dfrac{1}{y}$ dimana $y \to 0$, sehingga :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to 0} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Setelah itu baru dikerjakan seperti soal $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Sifat-sifat limit yang penting adalah sebagai berikut :

1. $\lim cf(x) = c \lim f(x)$
2. $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
3. $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
4. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

5. Lim.........

5. $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

10.1. Contoh-Contoh:

1. Hitunglah $\lim\limits_{x \to 0} tg\ 2x\ \text{Cosec}\ 3x$

   Jawab :

$$\lim_{x \to 0} tg\ 2x\ \text{Cosec}\ 3x = \lim \frac{tg\ 2x}{\text{Sin}\ 2x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\text{Sin}\ 2x} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot {}^2/_3 = {}^2/_3.$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\ \text{Sin}\ x}{1 - \text{Cos}\ x} = \ldots$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x\ \text{Sin}^1/2\ x\ \text{Cos}^1/2\ x}{2\ \text{Sin}^2\ {}^1/_2\ x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\ \text{Sin}\ x}{\text{Sin}\ {}^1/_2\ x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{{}^1/2\ x}{\text{Sin}\ {}^1/_2\ x} \cdot 2\ \text{Cos}\ {}^1/_2\ x = 1 \cdot 2 = 2.$$

3. Hitunglah $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\text{Sec}^2 x - \text{Sec}\ x\ tg\ x)$

$$\lim_{x \to \pi/2} (\text{Sec}^2 x - \text{Sec}\ x\ tg\ x) =$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \text{Sin}\ x}{\text{Cos}^2\ x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \text{Sin}(\pi/2 - y)}{\text{Cos}^2(\pi/_2 - y)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \text{Cos} - y}{\text{Sin}^2\ y} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\ \text{Sin}^2\ {}^1/2\ y}{\text{Sin}^2\ y} =$$

lim...........

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 {}^1/_2\, y}{4 \sin^2 {}^1/_2\, y \cos^2 {}^1/_2\, y} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2 \cos^2 {}^1/_2\, y} = {}^1/_2.$$

10.2. <u>Soal-Soal</u> :

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\text{tg } 5x} = \ldots$

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos nx}{\sin^2 nx} = \ldots$

3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x(1 + \cos x)}{\text{tg } x(1 + 3 \sec x)} = \ldots$

4. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sec(x + h) - \sec x}{h} = \ldots$

5. $\lim_{x \to 5} (x - 5)\text{Cotg } \pi x = \ldots$

6. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \ldots$

7. $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{\sin x - \sin \alpha}{\cos x - \cos \alpha} = \ldots$

8. $\lim_{x \to 7} (x - 7)\text{Cotg } \pi x = \ldots$

9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos nx}{\sin^2 nx} = \ldots$

10. $\lim_{x \to} \dfrac{3 \sin 2x - 2 \sin 3x}{x^3} = \ldots$

11. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x + \sin^2 x + \sin 3x + \ldots}{\sin x} = \ldots$

XI. ELIMINASI

Eliminasi adalah menghilangkan satu bilangan anu dari 2 persamaan; menghilangkan 2 bilangan anu dari 3 persamaan, sehingga didapat persamaan resultan.

Umumnya eliminasi dapat dilakukan dengan menghilangkan $(n - 1)$ bilangan anu dari n persamaan, sehingga didapat persamaan resultan.

11.1. Contoh-Contoh :

1. Eliminirlah x dari persamaan :

$$\begin{cases} \text{Sin } x = a \\ \text{Cos } x = b \end{cases}$$

<u>Jawab</u> :
$$\begin{cases} \text{Sin } x = a \longrightarrow \text{Sin}^2 x = a^2 \\ \text{Cos } x = b \longrightarrow \text{Cos}^2 x = b^2 \end{cases}$$

Karena $\text{Sin}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1$, maka persamaan resultannya adalah : $a^2 + b^2 = 1$.

2. Eliminirlah x dari persamaan :

$$\begin{cases} a \text{ Sin } x + b \text{ Cos } x = c \\ p \text{ Sin } x + q \text{ Cos } x = r \end{cases}$$

<u>Jawab</u> :
$$\begin{array}{ll|c|c|} & & \text{I} & \text{II} \\ & a \text{ Sin } x + b \text{ Cos } x = c & p & q \\ \text{I} & p \text{ Sin } x + q \text{ Cos } x = r & a & b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ap \text{ Sin } x + bp \text{ Cos } x = cp \\ ap \text{ Sin } x + aq \text{ Cos } x = ar \\ \hline (bp - aq)\text{Cos } x = (cp - ar) \end{array}$$

$$\text{Cos } x = \frac{(cp - ar)}{(bp - aq)}$$

$$\text{II} \qquad \begin{array}{r} aq\ \text{Sin}\ x + bq\ \text{Cos}\ x = cq \\ bp\ \text{Sin}\ x + bq\ \text{Cos}\ x = br \\ \hline (aq - bp)\ \text{Sin}\ x = (cq - br) \end{array} -$$

$$\text{Sin}\ x = \frac{(cq - br)}{(bp - aq)}$$

Jadi persamaan relsultan :

$$\left(\frac{cq - br}{aq - bp} \right)^2 + \left(\frac{cp - ar}{bp - aq} \right)^2 = 1.$$

11.2. Soal-Soal :

Eliminirlah x dari persamaan dibawah ini :

1. $\begin{cases} a\ \text{Sin}\ x + 5\ \text{Cos}\ x = 2a - 3 \\ 7\ \text{Sin}\ x - 4\ \text{Cos}\ x = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2\ \text{Sin}\ x + a\ \text{Cos}\ x = a - 1 \\ a\ \text{Sin}\ x + 3\ \text{Cos}\ x = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \text{Sin}\ x + \text{Cos}\ x = a\ \text{Cos}\ x \\ \text{Sec}\ x = b \end{cases}$

4. $\begin{cases} \text{Sin}\ x + \text{Cos}\ x = a \\ \text{Cos}\ 2x = b \end{cases}$

Eliminirlah x dan y dari persamaan dibawah ini :

5. $\begin{cases} \text{Sin}\ x + \text{Cos}\ y = a \\ \text{Cos}\ x + \text{Sin}\ y = b \\ \text{Sin}(x + y) = c \end{cases}$

6. $\begin{cases} \text{Sin}\ x + \text{Cos}\ y = a \\ \text{Cos}\ x + \text{Sin}\ y = b \\ \text{Sin}\ 2x + \text{Sin}\ 2y = c \end{cases}$

7. $$\begin{cases} \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} y = a \\ \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} y = b \\ \operatorname{Cos}(x + y) = c \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y + \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} x = a \\ \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y - \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} x = b \\ \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y = c \end{cases}$$

XII. PERSAMAAN TRIGONOMETRI SEDERHANA

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang suku-sukunya terdiri dari fungsi trigonometri.

Contoh dari bentuk persamaan trigonometri adalah :

a. $\sin 3x = \sin(60^\circ - 5x)$

b. $5 \cos^2 x - 4 \cos x - 1 = 0$

c. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = 3/4$

d. $\sqrt{1 - \sin x} = \cos 2x$

Persamaan trigonometri ini terdiri dari beberapa bentuk diantaranya :

1. $\sin x = a$ dimana $|a| \leq 1$

   Jika $a = 0$, maka $x = k.180^\circ$/k bilangan bulat

   Jika $a = 1$, maka $x = 90^\circ + k.360^\circ$

   Jika $a = -1$, maka $x = -90^\circ + k.360^\circ$

   Jika $0 < a < 1$, maka didapat $\sin \varphi = a$ dan harga yang memenuhi adalah : $x_1 = \varphi + k.360^\circ$ (Kwadrand I)

   $x_2 = (180^\circ - \varphi) + k.360^\circ$ (Kwadrand II)

Untuk $\cos x = b$, dimana $|b| \leq 1$.

Penyelesaiannya adalah :

Jika $b = 0$, maka $x = (2k + 1).\ 90^\circ$ (k bilangan bulat)

Jika $b = 0$, maka $x = k.360^\circ$

Jika $b = -1$, maka $x = (2k + 1).180^\circ$

Untuk $0 < b < 1$, didapat harga α , sehingga $\cos \alpha = b$, maka harga x yang memenuhi adalah :

$x = \pm \alpha + k.360^\circ$

dengan cara yang sama begitu pula untuk tg x = c.

2. $\text{Sin}(ax + b) = \text{Sin}(px + q)$

Penyelesaiannya :

Untuk kwadrand I : $ax + b = px + q + k.360^o$

$$(a-p)x = q - b + k.360^o$$

$$x = \frac{q - b + k.360^o}{a - p}$$

Untuk kwadrand II : $ax + b = 180^o - (px + q) + k.360^o$

$$(a+p)x = 180^o - (b + q) + k.360^o$$

$$= \frac{(2k + 1)180^o - (b + q)}{a + p}$$

degan cara yang sama, penyelesaian untuk bentuk :

$\text{Cos}(ax + b) = \text{Cos}(px + q)$

$\text{tg}(ax + b) = \text{tg}(px + q)$

3. $\text{Sin}(ax + b) = \text{Cos}(px + q)$

Penyelesaiannya adalah : $\text{Sin}(ax + b) = \text{Sin}\{90^o - (px + q)\}$

Untuk kwadran I : $ax + b = 90^o - (px + q) + k.360^o$

$$(a+p)x = 90^o - (b + q) + k.360^o$$

$$x = \frac{90^o - (b + q) + k.360^o}{a + p}$$

Untuk kwadrand II :

$$ax + b = 180^o - \{90^o - (px - q)\} + k.360^o$$

$$180^o - 90^o + px + q + k.360^o$$

$$(a-p)x = 90^o - (b - q) + k.360^o$$

$$x = \frac{90^o - (b - q) + k.360^o}{a - p}$$

dengan cara yang sama penyelesaian untuk bentuk :

$\text{Cos}(ax + b) = \text{Sin}(px + q)$

$\text{tg}(ax + b) = \text{Cotg}(px + q)$

4. $\sin(x + a)\cos(x + b) = c$.

Penyelesaiannya : $\sin(x + a)\cos(x + b) = c$

$$2\sin(x + a)\cos(x + b) = 2c$$

$$\sin(2x + a + b) + \sin(a - b) = 2c$$

Jika a, b dan c diketahui, maka x dapat dicari.

Dengan cara yang sama, penyelesaian untuk bentuk :

$$\begin{cases} \cos(x + a)\sin(x + b) = c \\ \cos(x + a)\cos(x + b) = c \\ \sin(x + a)\sin(x + b) = c \end{cases}$$

5. $a\cos x + b\sin x = c$

$$a\left(\cos x + \frac{b}{a}\sin x\right) = c$$

umpama $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, sehingga menjadi :

$$a(\cos x + \operatorname{tg}\varphi\sin x) = c$$

$$a\left(\cos x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin x\right) = c$$

$$\frac{a(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi)}{\operatorname{Coc}\varphi} = c$$

$$a\cos(x - \varphi) = c\cos\varphi$$

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c\cos\varphi}{a}$$

6. Dua persamaan dengan dua variabel.

Bentuk-bentuknya adalah sebagai berikut :

a). $\begin{cases} x \pm y = \\ \sin x \pm \sin y = k \end{cases}$ atau $\begin{cases} x \pm y = \\ \cos x \pm \cos y = k \end{cases}$

b). $\begin{cases} x \pm y = \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = k \end{cases}$ atau $\begin{cases} x \pm y = \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = k \end{cases}$

x dan y adalah variabel

α = besarnya sudut

k = bilangan konstanta

Umumnya 2 persamaan dengan 2 variabel dapat diselesaikan berdasarkan rumus-rumus aljabar sebelumnya. Untuk jelasnya dikemukakan pada contoh-contoh selanjutnya :

12.1. <u>Contoh-Contoh</u> :

Hitunglah x dari :

1. Sin 9x = Sin x

$9x = x + k.360^o$ (pada kwadrand I)

$8x = k.360^o$

$x_1 = \frac{k.360^o}{8}$

$9x = 180^o - x + k.360^o$ (pada kwadrand II)

$10x = 180^o + k.360^o$

$x_2 = 18^o + k.36^o$

2. Sin 3x = Cos 2x

$\text{Sin } 3x = \text{Sin}(90^o - 2x)$

$3x = 90^o - 2x + k.360^o$ (pada kwadrand I)

$5x = 90^o + k.360^o$

$x_1 = 18^o + k.72^o$

$3x = 180^o - (90^o - 2x) + k.360^o$ (pada kwadrand II)

$= 90^o + 2x + k.360^o$

$x_2 = 90^o + k.360^o$

3. Hitunglah x :

$2 \text{ Cos } x \text{ Cos } 3x + 1 = 0$

$\text{Cos } 4x + \text{Cos } 2x + 1 = 0$

$2 \text{ Cos}^2 2x - 1 + \text{Cos } 2x + 1 = 0$

$2 \text{ Cos}^2 2x + \text{Cos } 2x = 0$

Cos.....

$$\text{Cos } 2x(2 \text{ Cos } 2x + 1) = 0$$

Untuk $\text{Cos } 2x = 0$

$$2x = 90^\circ + k.360^\circ$$

$$x = 45^\circ + k.180^\circ$$

Untuk $2 \text{ Cos } 2x + 1 = 0$

$$2 \text{ Cos } 2x = -1$$

$$\text{Cos } 2x = -{}^1/_2$$

$$2x_1 = 120^\circ + k.360^\circ \quad \text{(kwadrand II)}$$

$$x_1 = 60^\circ + k.180^\circ$$

dan

$$2x_2 = 240^\circ + k.360^\circ \quad \text{(kwadrand III)}$$

$$x_2 = 120^\circ + k.180^\circ$$

4. Selesaikanlah persamaan :

$$\begin{cases} x - y = 45^\circ \\ \text{Cos } x + \text{Cos } y = 1 \end{cases}$$

Untuk x dan y dikwadrand I.

Penyelesaian : $\text{Cos } x + \text{Cos } y = 1$

$$2 \text{ Cos } \frac{x + y}{2} \text{ Cos } x \frac{x - y}{2} = 1$$

$$2 \text{ Cos } \frac{x + y}{2} \text{ Cos } 22^\circ\ 30' = 1$$

$$2 \text{ Cos } \frac{x + y}{2} = \frac{1}{\text{Cos } 22^\circ\ 30'}$$

$$\text{Cos } \frac{x + y}{2} = 0,541$$

$$\frac{x + y}{2} = 57^\circ\ 14' + k.360^\circ$$

$$x + y = 114^\circ\ 28' + k.720^\circ$$

$$x - y = 45^\circ$$

$$x_1 = 79^\circ\ 44' + k.360^\circ \quad \text{(kwadrand I)}$$

$$y_1 = 34^\circ\ 44' + k.360^\circ$$

5. Selesaikanlah persamaan :

$$\begin{cases} x - y = 60^\circ \\ \dfrac{\text{Cos } x}{\text{Cos } y} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Penyelesaian : $\dfrac{\text{Cos } x}{\text{Cos } y} = \dfrac{5}{2}$

$$\frac{\text{Cos } x + \text{Cos } y}{\text{Cos } x - \text{Cos } y} = \frac{5+2}{5-2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2 \text{ Cos } \frac{x+y}{2} \text{ Cos } \frac{x-y}{2}}{-2 \text{ Sin} \frac{x+y}{2} \text{ Sin } \frac{x-y}{2}} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{\text{tg } \frac{x+y}{2} \text{ tg } \frac{x-y}{2}} = -\frac{7}{3}$$

$$\text{tg } \frac{x+y}{2} \text{ tg } \frac{x-y}{2} = -\frac{3}{7}$$

$$\text{tg } \frac{x+y}{2} \text{ tg } 30^\circ = -\frac{3}{7}$$

$$\text{tg } \frac{x+y}{2} = -\frac{3}{7.1/_3\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{7}$$

$$\frac{x+y}{2} = -36^\circ\ 35' + k.180^\circ$$

$$x + y = -73^\circ\ 10' + k.360^\circ$$

$$x - y = 60^\circ$$

Harga yang memenuhi : $x = 173^\circ\ 25' + k.180^\circ$

$y = 113^\circ\ 25' + k.180^\circ$.

12.2. Soal-............

12.2. <u>Soal-Soal</u> :

Hitunglah x dari :

1. $\cos 3x = \cos(4x - {}^{1}/_{4}\,\pi)$
2. $\sin(x + 10^{o}) \cos(x + 20^{o}) = 0,2725$
3. $\cos(x + 12^{o}) \cos(r + 32^{o}) = 0,05704$
4. $2 \cos x - 3 \sin x = 1$
5. $3 \cos x - 5 \sin x = 3$
6. $2 \cos x + 2 \sin x = 3$
7. $\begin{cases} x + y = 70^{o} \\ \sin x \sin y = {}^{1}/_{2} \end{cases}$

Hitunglah x dan y dari persamaan :

8. $\begin{cases} x + y = 120^{o} \\ \sin x + \sin y = 1,5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y = 120^{o} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1,5 \\ \cos x + \cos y = 0,5 \end{cases}$

XIII. GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi trigonometri yang sederhana dapat digambarkan langsung grafiknya, dengan jalan mensubsitusikan harga-harga x, didapat harga y, kemudian buat gambarnya.

Fungsi trigonometri yang tidak sederhana, tidak dapat digambarkan langsung grafiknya. Untuk menggambarkan grafik fungsi ini ada beberapa syarat yang perlu dan cukup yaitu :

a. sederhanakan fungsi itu;

b. tentukan harga extrim;

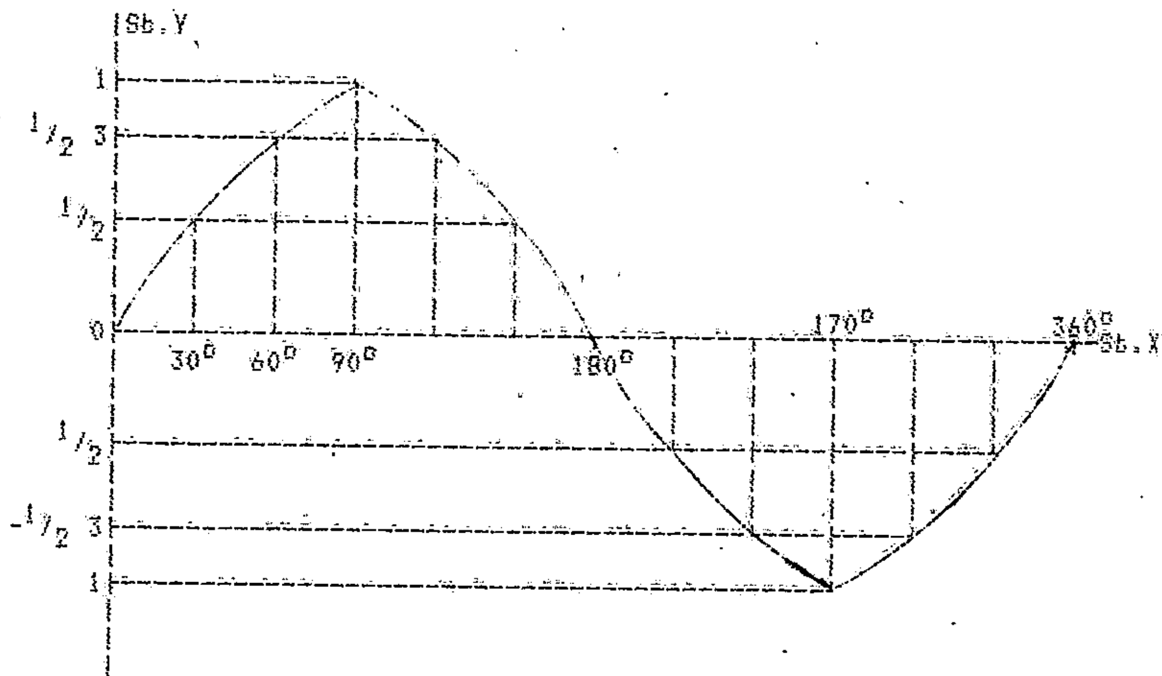
c. tentukan titik potong dengan kedua sumbu;

d. tentukan titik-titik lainnya,

kemudian baru digambarkan selengkapnya.

13.1. Contoh-Contoh :

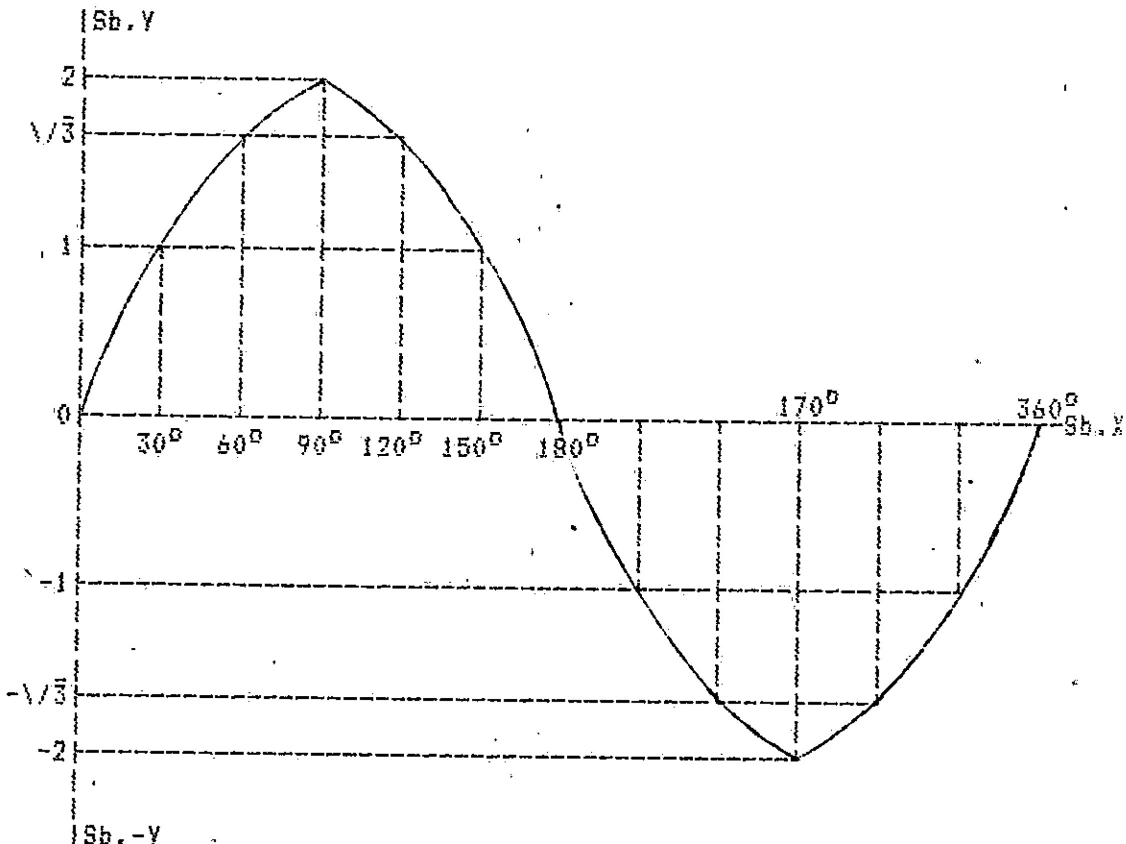
1. Gambarkan grafik y=Sin x dalam interval $0^o \leq x \leq 360^o$



Gambar 16.

2. Gambarkan........

2. Gambarkan grafik $y = 2 \text{ Sin } x$



Gambar 17.

3. Gambarkan grafik $y = 6 \text{ Sin } x - 3 \text{ Cos } 2x + {}^1/_3$ dalam interval $0^o \leq x \leq 360^o$.

<u>Jawab</u> :
$$\begin{aligned} y &= 6 \text{ Sin } x - 3 \text{ Cos } 2x + {}^1/_3 \\ &= 6 \text{ Sin } x - 3(1 - 2 \text{ Sin}^2 x) + {}^1/_3 \\ &= 6 \text{ Sin } x - 3 + 6 \text{ Sin}^2 x + {}^1/_3 \\ &= 6 \text{ Sin}^2 x + 6 \text{ Sin } x - 2^2/_3 \\ &= 6(\text{Sin}^2 x + \text{Sin } x + {}^1/_4) - 4^1/_6 \\ &= 6(\text{Sin } x + {}^1/_2)^2 - 4^1/_6 \end{aligned}$$

y max = ...52

$y \text{ max} = 6(1 - {}^1/_2)^2 - 4^1/_6$ untuk $\text{Sin } x = 1$

$x = 90^o$

$= 6({}^9/_4) - 4^1/_6 = 9^1/_3$

$y \text{ min} = 6(-{}^1/_2 + {}^1/_2) - 4^1/_6 = -4^1/_6$

Untuk Sin $x = -^1/_2$

$x_1 = 210^o$ dan $x_2 = 330^o$

y min relatif $= 6(-1 + {}^1/_2)^2 - 4^1/_6$

$= 6(-^1/_2)^2 - 4^1/_6$

$= -2^2/_3$

Untuk Sin $x = -1$

$x = 270^o$

Titik potong dengan kedua sumbu: titik potong dengan sumbu y $\longrightarrow x = 0$

$y = 6 \text{ Sin}^2 x + 6 \text{ Sin } x - 2^2/_3$

$= 0 + 0 - 2^2/_3$

$y = -2^2/_3$

Untuk $x = 360^o \longrightarrow y = -2^2/_3$

Titik potong dengan sumbu x $\longrightarrow y = 0$

$6 \text{ Sin}^2 x + 6 \text{ Sin } x - 2^2/_3 = 0$

$18 \text{ Sin}^2 x + 18 \text{ Sin } x - 8 = 0$

$9 \text{ Sin}^2 x + 9 \text{ Sin } x - 4 = 0$

$$\text{Sin } x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 144}}{18} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{18}$$

$$= \frac{-9 \pm 15}{18}$$

$\text{Sin } x_1 = \frac{-9 + 15}{18} = {}^1/_3 \longrightarrow x_1 = 19^o\ 28'\ 16"$

$x_2 = 160^o\ 31'\ 44"$

$\text{Sin } x_2 = \frac{-9 - 15}{18} = -{}^4/_3$ (tidak memenuhi syarat)

Titik lain :

Untuk $x = 30^o$ dan $x = 150^o \longrightarrow$ Sin $x = {}^1/_2$

maka $y = 6$ Sin 30 $- 3$ Cos 60 $+ {}^1/_3$

$= 3 - 1^1/_2 + {}^1/_3$

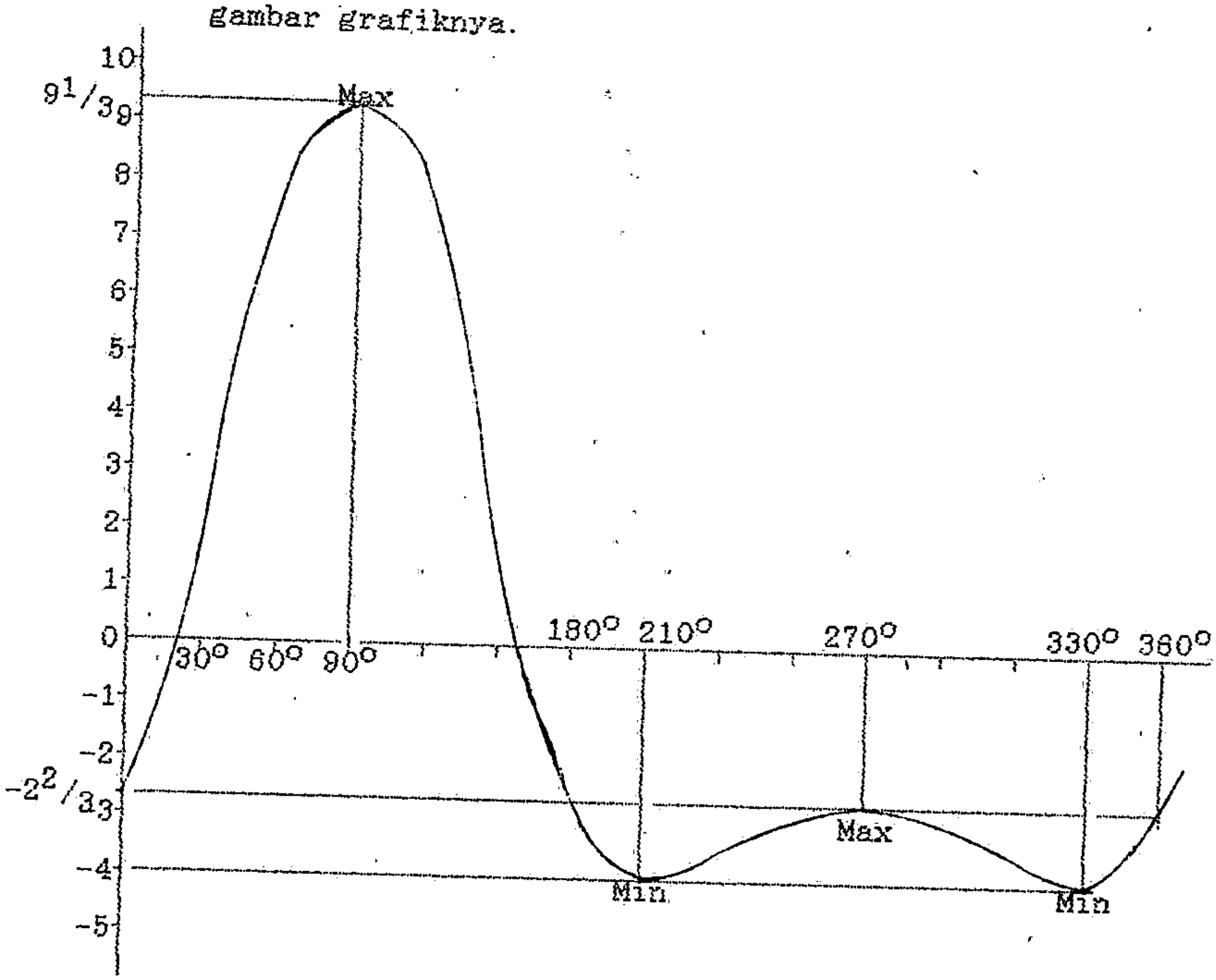
$= 1^5/_6$

Untuk $x = 60^o$ dan $x = 120^o \longrightarrow$ Sin $x = {}^1/_2 \sqrt{3}$

maka $y = 6$ Sin 60 $- 3$ Cos 120 $+ {}^1/_3$

$$= 3\sqrt{3} + 1^1/_2 + {}^1/_3$$
$$= 3\sqrt{3} + 1^5/_6$$

Bertambah banyak titik-titik yang didapat, makin bagus gambar grafiknya.



Gambar 18.

13.2. Soal-Soal :

Gambarkanlah grafik dibawah ini dalam interval $0^o \leq x \leq 360^o$.

1. $y = \text{Cos } x$.
2. $y = \text{tg } x$

3. $y = 2(\text{Cos } x + 10^{o})$
4. $y = 3(\text{Sin } x + 30^{o})$
5. $y = 4(\text{Sin } x - 15^{o})$
6. $y = 2\text{Sin}^2 x + 5 \text{ Sin } x - 3$
7. $y = -2 \text{ Cos}^2 x + 3 \text{ Sin } x - 2$
8. $y = 3 \text{ Cos } x + 7 \text{ Sin } x - 6$
9. $y = 2 \text{ Sin } 2x + 6 \text{ Cos}^2 x - 5$
10. $y = 2 \text{ Sin}^2 x + 5 \text{ Sin } x \text{ Cos } x + 10 \text{ Cos}^2 x - 7{,}92$.

XIV. FUNGSI CYCLOMETRI

Fungsi Cyclometri adalah fungsi invers dari fungsi trigonometri.

Sin $x = a$, maka fungsi cyclometrinya adalah $x = \text{arc Sin } a$

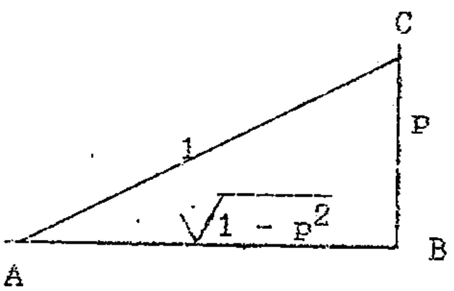
Cos $y = b \longrightarrow y = \text{arc Cos } b$

tg $Z = c \longrightarrow Z = \text{arc tg } c$

Jika Sin $x = {}^1/_2 \longrightarrow x = \text{arc Sin } {}^1/_2$

$$x_1 = 30^\circ + k.360^\circ$$

$$x_2 = 150^\circ + k.360^\circ$$



Gambar 19.

Perhatikan $\triangle$ ABC (siku-siku di B).

Jika Sin $\alpha = p (0 < p < 1)$.

maka, $\text{Cos } \alpha = \sqrt{1 - p^2}$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2}}$$

$$\text{Cotg } \alpha = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } \alpha &= \text{arc Sin } p \\ &= \text{arc Cos } \sqrt{1 - p^2} \\ &= \text{arc tg } \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} \\ &= \text{arc Cotg } \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p} \end{aligned}$$

atau $\text{arc Sin } p = \text{arc Cos } \sqrt{1 - p^2} = \text{arc tg } \dfrac{p}{\sqrt{1 - p^2}}$

$$\text{arc Cotg } = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$$

Untuk Sin $\alpha = p$. $\left| p \right| \leq 1$ dan $-{}^1/_2\,\pi < \alpha \leq {}^1/_2\,\pi$

Untuk Sin$(-\alpha) = p$. $\left| -p \right| \leq 1$ dan $-{}^1/_2\,\pi < \alpha \leq {}^1/_2\,\pi$

didapat $\text{arc Sin } p + \text{arc Sin}(-p) = 0$.

Dengan cara yang sama begitu juga $\text{arc tg } p + \text{arc tg}(-p) = 0$.

Untuk $\text{Cos}\,\alpha = p \qquad |p| \leq 1$ dan $0 \leq \alpha \leq \pi$

Untuk $\text{Cos}(\pi - \alpha) = -p \quad |-p| \leq 1$ dan $0 \leq \pi - \leq \pi$

maka didapat pula arc Cos p + arc Cos(−p) = π , dengan cara yang sama didapat pula arc Cotg p + arc Cotg(−p) = π.

Selanjutnya jika $\text{Sin}\,\alpha = p$ dimana $|p| \leq 1$ dan

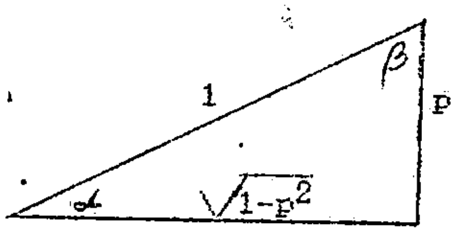
$$-{}^1/_2\,\pi \leq \alpha \leq {}^1/_2\,\pi$$

didapat $\text{Cos}({}^1/_2\,\pi - \alpha) = p$ dengan $0 \leq {}^1/_2\,\pi - \alpha \leq \pi$

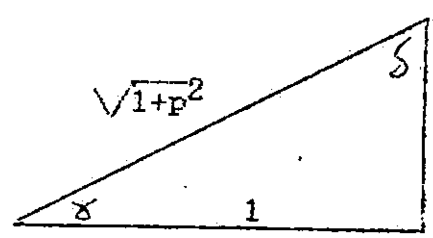
Sehingga didapat arc Sin p + arc Cos p = $^1/_2\,\pi$, dengan cara yang sama didapat pula arc tg p + arc Cotg p = $^1/_2\,\pi$

Kesimpulannya :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{arc Sin } p + \text{arc Sin}(-p) = 0 \\ \text{arc tg } p + \text{arc tg}(-p) = 0 \\ \text{arc Cos } p + \text{arc Cos}(-p) = \pi \\ \text{arc Cotg } p + \text{arc Cotg}(-p) = \pi \\ \text{arc Sin } p + \text{arc Cos } p = {}^1/_2\,\pi \\ \text{arc tg } p + \text{arc Cotg } p = {}^1/_2\,\pi \end{array}}$$



Gambar 20.



Gambar 21.

Perhatikan Gambar: $\alpha = \text{arc Sin } p = \text{arc Cos}\sqrt{1 - p^2}$

$$\beta = \text{arc Cos } p = \text{arc Sin}\sqrt{1 - p^2}$$

$$\gamma = \text{arc Sin } p = \text{arc Cotg } \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$$

$$\beta = \text{arc Cos } p = \text{arc tg } \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$$

Perhatikan gambar: $\delta = \text{arc Cotg } p = \text{arc Sin } \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$

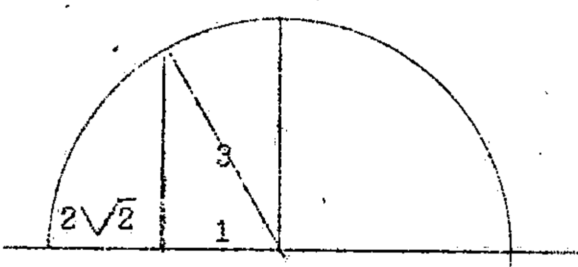
$\gamma = \text{arc tg } p = \text{arc Cos } \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$

$\gamma = \text{arc tg } p = \text{arc Cotg } {}^1/_p$

$\delta = \text{arc Cotg } p = \text{arc tg } {}^1/_p$.

14.1. Contoh-Contoh :

1. Perhatikan gambar 22. $\alpha = \text{arc Cos}(-{}^1/_3)$.



Gambar 22.

Untuk $\text{Cos}\,\alpha = -{}^1/_3$, harga yang memenuhi $0 \leq \alpha \leq \pi$.

$\text{Sin}\,\alpha = {}^2/_3\sqrt{2}$

$\text{tg } \alpha = -2\sqrt{2}$ dan

$\text{Cotg } \alpha = -{}^1/_4\sqrt{2}$

$\therefore \alpha = \text{arc Sin } {}^2/_3\sqrt{2}$

$= \text{arc tg } -2\sqrt{2}$

$= \text{arc Cotg } -{}^1/_4\sqrt{2}$.

2. Hitunglah : a. Cotg(arc Sin a)

b. Sin(arc tg b).

Jawab :

a. Umpama arc Sin a $= \alpha$ Sin $\alpha = a$

$\text{Cos} \quad = \sqrt{1-a^2}$ dalam interval $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$

$\text{Cotg} \quad = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

$\text{Cotg(arc Sin a)} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$.

b. Umpama arc tg b $= \beta$. $\text{tg } \beta = b$

$\text{Cos } \beta = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$ dan $\text{Cos } \beta \geq 0$

dalam.........

dalam interval $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$

$$\mathrm{Sin}\,\beta = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$$

$$\mathrm{Sin}(\mathrm{arc\ tg}\ b) = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$$

Rumus fungsi cyclometri yang penting diantaranya :

$$\mathrm{arc\ Sin}\ p - \mathrm{arc\ Sin}\ q = \mathrm{arc\ Sin}(p\sqrt{1 - q}^2 - 2\sqrt{1 - p}^2$$

$$\mathrm{arc\ Cos}\ p + \mathrm{arc\ Cos}\ q = \mathrm{arc\ Cos}\{pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\}$$

$$\mathrm{arc\ Sin}\ p + \mathrm{arc\ Sin}\ q = \mathrm{arc\ Sin}\{pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\} + \frac{1}{2}\pi$$

$$\mathrm{arc\ Cos}\ p - \mathrm{arc\ Cos}\ q = \mathrm{arc\ Cos}(p\sqrt{1-q}^2 - q\sqrt{1-p}^2 - \frac{1}{2}\pi$$

$$\mathrm{arc\ tg}\ p - \mathrm{arc\ tg}\ q = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{p - q}{pq + 1}$$

$$\mathrm{arc\ Cotg}\ p + \mathrm{arc\ Cotg}\ q = \mathrm{arc\ Cotg}\ \frac{pq - 1}{p + q}$$

$$\mathrm{arc\ tg}\ p + \mathrm{arc\ tg}\ q = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{pq - 1}{p + q} + 1/2\ \pi$$

$$\mathrm{arc\ Cotg}\ p - \mathrm{arc\ Cotg}\ q = \mathrm{arc\ Cotg}\frac{p - q}{1 + pq} - 1/2\ \pi$$

Jika $p = q$, maka didapat rumus-rumus sudut rangkap untuk arc:

$$2\ \mathrm{arc\ Cos}\ p = \mathrm{arc\ Cos}(2p^2 - 1)$$

$$2\ \mathrm{arc\ Sin}\ p = \mathrm{arc\ Sin}(2p^2 - 1) + 1/2\ \pi$$

$$2\ \mathrm{arc\ Cotg}\ p = \mathrm{arc\ Cotg}\ \frac{p^2 - 1}{2p}$$

$$2\ \mathrm{arc\ tg}\ p = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{p^2 - 1}{2p} + 1/2\ \pi$$

14.2. Soal-Soal :

Hitunglah :

1. $\mathrm{Sin}(\mathrm{arc\ tg}\ 1/2)$
2. $\mathrm{Cos}(\mathrm{arc\ Sin}\ 1/4)$
3. $\mathrm{tg}(\mathrm{arc\ Cotg}\ 2)$.

Buktikanlah.........

Buktikanlah :

4. $\text{Cos arc Sin } p = \sqrt{1 - p^2}$

5. $\text{Sin arc Cos } p = \sqrt{1 - p^2}$

6. $\text{tg arc Sin } p = \dfrac{p}{\sqrt{1 - p^2}}$

7. $\text{tg arc Cos } p = \dfrac{1}{p}\sqrt{1 - p^2}$

14.3 Soal-Soal Tambahan :

1. Jika $\text{Cotg}\,\alpha = {}^1/_2(-1 + \sqrt{5})$, hitunglah perbandingan trigono yang lainnya.

2. Buktikanlah :

$$\text{Sec}^2\alpha - \text{Cotg}^2\alpha - (\text{Cosec}^2\alpha - \text{tg}^2\alpha) = 2\,\frac{\text{tg}^2\alpha - 1}{\text{Sin}^2\alpha}$$

3. Buktikanlah :

$$\text{tg}^2 x + \text{Cosec}^2 x = \frac{1 - \text{Cos}^2 x\,\text{Sin}^2 x}{\text{Cos}^2 x\,\text{Sin}^2 x}$$

4. Hitunglah :

$$\text{tg}(270-x) = \frac{\text{Cotg } 360^\circ 7'25''\text{x}\text{Cosec } 108^\circ 25'17''\text{x}\text{Cotg } 185^\circ 17'28''}{\text{Cos } 157^\circ 10'36'' \text{ x Sec } 265^\circ 17'48''}$$

5. Turunkanlah rumus :

$$\text{Cos}\,{}^1/_2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{Cos}\,\alpha}{2}} \text{ dan } \text{Sin}\,{}^1/_2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{Cos}\,\alpha}{2}}$$

6. Hitunglah n suku dari :

$$\text{Cos}\,\alpha - \text{Cos}(a + \beta) + \text{Cos}(a + 2p) - \text{Cos}(a + 3p) + \ldots$$

7. Hitunglah :

$$\lim_{x \to 5} (x - 5)\text{Cotg}\,\pi x$$

8. Buktikanlah.......

8. Buktikanlah :

$$\text{Sin}^2\ 6^\circ + \text{Sin}^2\ 42^\circ + \text{Sin}\ 66^\circ + \text{Sin}^2\ 78^\circ = 2^1/_4.$$

9. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$, buktikanlah :

$$(\text{Sin}\,\alpha + \text{Cos}\,\alpha)(\text{Sin}\,\beta + \text{Cos}\,\beta)(\text{Sin}\,\gamma + \text{Cos}\,\gamma) =$$
$$2(\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma + \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,\gamma).$$

10. Hitunglah :

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \text{Sin}\ x + \text{Cos}\ x}{\text{Sin}2x - \text{Cos}\ x}$$

11. Buktikanlah :

$$\Sigma\, r_a = 3r + \Sigma\, a\ \text{tg}\ ^1/_2\,\alpha\ .$$

12. Buktikanlah : $\text{tg}\ \frac{21}{2}\,\alpha = \frac{r\ r_a}{r_b r_c}$.

13. Gambarlah grafik :

$y = 2\ \text{Sin}^2\ x + 3\ \text{Sin}\ x\ \text{Cos}\ x + 4\ \text{Cos}^2\ x$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

14. Gambarlah grafik : $y = 2\ \text{Sin}\ x - \text{Cos}\ 2x + 3$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

15. Hitunglah : $\text{tg}(\text{arc tg}\ ^1/_2 + \text{arc tg}\ ^1/_3)$

DAFTAR PUSTAKA

1. Alders, C.J. Ilmu Ukur Segi Tiga. Pradnya Paramita. Jalan Medium 8 - Jakarta 1969.

2. Christian. R Robert : A Brief Trigonometry. Waltham Massuchusetts . Toronto - London.

3. J. Pignany, Tullio and Haggard Paul, Element of Trigonometry. Harcourt, Brace & World, Inc 1968.

4. Kobus M.L, Van Thijn, A Dr. dan Rawuh Rd : Ilmu Ukur Segi Tiga. J.B, Wolters, Jakarta Groningen, 1953.

5. Marcus, Marvin and Mine Hendryk, College Trigonometry Hongliton Mifflin Company, Boston, 1971.

6. Wijdenes : Goniometri en Trigonometry. P. Noordhoff NV, Groningen, Jakarta, 1953.