PENGANTAR

MATEMATIKA

TEKNIK ELEKTRO

II

oleh

Drs. Syamsuar Ahmad

Dra. Ruzni Syuib

Fakultas Pendidikan Teknologi dan Kejuruan

Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan

PADANG

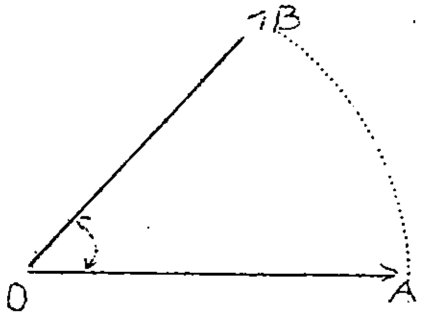
1986

DAFTAR ISI

BAB I

SUDUT DAN SATUANNYA

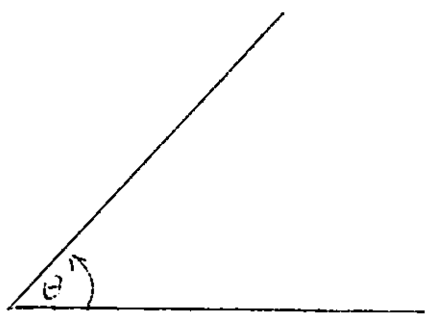
Sudut adalah bangun yang terjadi apabila sebuah segmen garis lurus diputar sekeliling salah satu titik ujungnya, mulai dari posisi semula (biasanya horizontal) keposisi kedua.



Dalam gambar di sebelah ini $\angle$ AOB terjadi dari perputaran garis $\overrightarrow{OA}$ sekeliling titik pangkalnya O, hingga mencapai kedudukan $\overrightarrow{OB}$.

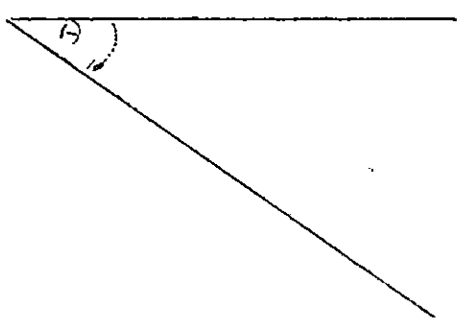
Gambar 1-1

Dalam hal ini $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OB}$ disebut sisi, $\overrightarrow{OA}$ sisi pertama dan $\overrightarrow{OB}$ sisi kedua. Sudut itu positif apabila perputaran itu berlawanan dengan arah perputaran jarun jam (↺), dan sebaliknya negatif (↻).



θ = positif

gambar 1-2



θ = negatif

gambar 1-3

Adapun satuan ukuran sudut yang kita pergunakan ada dua macam yakni:

1. derajat
2. radian

Derajat

Satu derajat (1^o) adalah sub bagian dari sudut pusat lingkaran yang busurnya sama dengan $\frac{1}{360}$ dari keliling lingkaran itu.
Setiap derajat dibagi atas 60 bagian yang sama, dan disebut menit, setiap menit dapat dibagi lagi atas 60 bagian yang sama dan disebut detik, jadi; $1^o = 60' = 3600''$.

Radian

Satu radian (1 rad) adalah sub bagian dari sudut pusat lingkaran yang busurnya sama dengan jari-jari dari lingkaran itu sendiri.

Gambar 1-4

Perlu dicatat bahwa ukuran radian tidak tergantung kepada jari-jari lingkaran, dengan perkataan lain tidak ditentukan oleh panjang-pendeknya jari-jari lingkaran.

Hubungan antara derajat dan radian

Hubungan antara kedua satuan ini dapat kita uraikan seperti berikut.
Sebagaimana diketahui bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah:

$$L = 2\pi r$$

$$\therefore \quad 1 \text{ rad} = \frac{r}{2\pi r} \times 360^{\circ}$$

$$= \frac{360^{\circ}}{2 \cdot 3,1416} = 57^{\circ}17'45'' \text{ atau } 57,3^{\circ}$$

$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$$

$$\pi \text{ rad} = 180^{\circ}$$

Sebaliknya:

$$1^{\circ} = \frac{\pi \text{ rad}}{180} = \frac{3.1416}{180} = 0,01745 \text{ rad.}$$

Perlu dicatat apabila satuan radian yang dipergunakan maka biasanya satuan itu tidak dicantumkan dibelakangnya.

$$\therefore \; 2\pi = 360^{\circ} \; ; \; \pi = 180^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^{\circ} \; ; \; \frac{\pi}{3} = 60^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{4} = 45^{\circ} \; ; \; \frac{\pi}{6} = 30^{\circ}$$

Contoh 1

Ubahlah ke dalam satuan radian.

(a) 18° (b) $10^{\circ}30'$

(a) $18^{\circ} = \frac{18}{180} \times \pi \text{ rad} = \frac{3.1416}{10} \text{ rad} = 0.31416$ rad atau:

$18^{\circ} = \frac{18}{57,3}$ rad $= 0,31416$ rad

(b) $10^{\circ}30' = \frac{10,5}{180} \times \pi \text{ rad} = \frac{10,5}{180} \times 3,1416 \text{ rad} =$ 0.1833 rad.

Contoh 2

Ubahlah sudut-sudut berikut ke dalam derajat.

(a) $\frac{\pi}{12}$ (b) 0,2

(a) $\frac{\pi}{12} = \frac{180^0}{12} = 15^0$ (b) 0,2 rad = 0,2 x $57,3^0 = 11,46^0$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Nyatakanlah sudut-sudut di bawah ini dalam suku-suku dari π.

   (a) 150^0 (b) 210^0 (c) 540^0 dan (d) 720^0

2. Ubahlah kedalam satuan derajat

   (a) $\frac{5\pi}{4}$ (b) $\frac{4\pi}{3}$ (c) $\frac{7\pi}{18}$ (d) 5π

3. Ubahlah kedalam radian

   (a) $40^0 30'$ (b) $54,6^0$ (c) $104,4^0$ (d) 252^0

4. Ubahlah kedalam derajat

   (a) 1,7 (b) 1,2 (c) 2,5 (d) 3

5. Jika diberikan $\theta = 2\pi ft$

   Hitunglah θ jika:

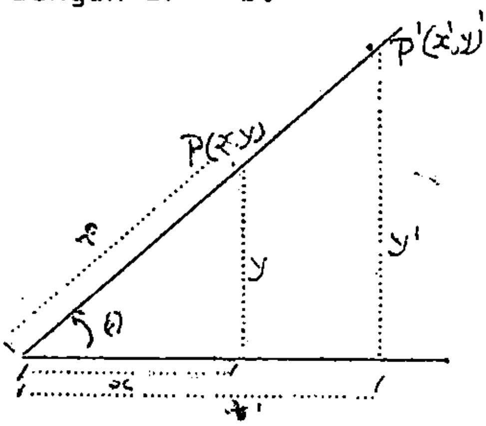
   (a) $f = 50$, $t = 0,005$

   (b) $f = 100$, $t = 3 \times 10^{-6}$

BAB II

PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

Perhatikanlah sebuah sudut lancip θ ($\theta \angle 90^o$) pada gambar di bawah ini. Pada sisi miringnya kita pilih sebuah titik P (x,y) yang tidak berimpit dengan titik pangkal O dengan OP = r.



Gambar 2-1

Perbandingan $\frac{y}{r}$ akan selalu sama kendatipun kita memilih titik P yang lain misalnya titik P'(x',y') pada perpanjangan OP.

Misalkan panjang OP' = r', maka

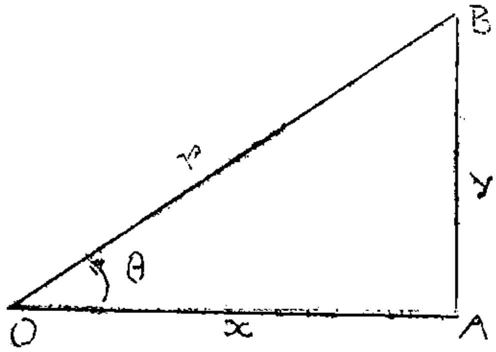
$$\frac{y'}{r'} = \frac{y}{r}$$

Perbandingan $\frac{y}{r}$ disebut sinus θ dan disingkat dengan sin θ.

$$\therefore \ \sin\theta = \frac{\text{ordinat P}}{\text{radius OP}}$$

Ada enam macam perbandingan seperti itu yang dapat dibentuk dari sisi-sisi sebuah sudut θ dari sebuah segitiga siku-siku yang dinamakan perbandingan trigonometri.

Untuk lebih jelasnya kita ambil sebuah segitiga siku-siku OAB, dimana $\angle AOB = \theta < 90^o$ adalah salah satu sudutnya (gambar 2-2).



x = OA = proyeksi

y = AB = proyektor

r = OB = sisi miring

Gambar 2-2

Adapun keenam bentuk perbandingan trigonometri itu dapat dilihat dari tabel 1, di bawah ini.

Tabel 1

Perbandingan trigonometri

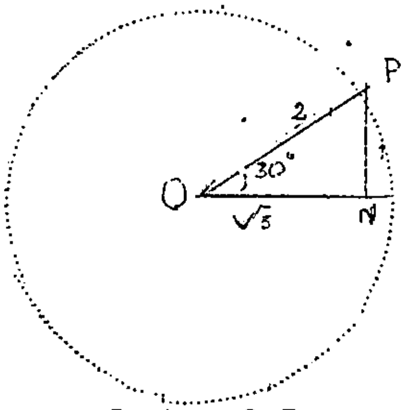
No.	N a m a	Singkatan	Nilai Perbandingan
1.	sinus θ	sin θ	$\frac{AB}{OB} = \frac{y}{r}$
2.	cosinus	cos θ	$\frac{OA}{OB} = \frac{x}{r}$
3.	tangen θ	tg θ	$\frac{AB}{OA} = \frac{y}{x}$
4.	cotangen	cotg θ	$\frac{OA}{AB} = \frac{x}{y}$
5.	secan	sec θ	$\frac{OB}{OA} = \frac{r}{x}$
6.	cosecan θ	cosec θ	$\frac{OB}{AB} = \frac{r}{y}$

II-1. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI SUDUT-SUDUT STANDARD

Yang dimaksud dengan sudut standard disini adalah sudut-sudut yang unsur-unsurnya mudah dihitung dengan mempergunakan sifat-sifat geometri bidang yaitu 30^0, 45^0 dan 60^0, dan juga termasuk sudut-sudut batas kwadran 0^0dan 90^0

$\theta = 30^0$

Kita ketahui sifat-sifat geometri bidang bahwa apabila PN = 1 satuan, maka OP = 2 satuan dan ON = $\sqrt{3}$ satuan.



Gambar 2-3

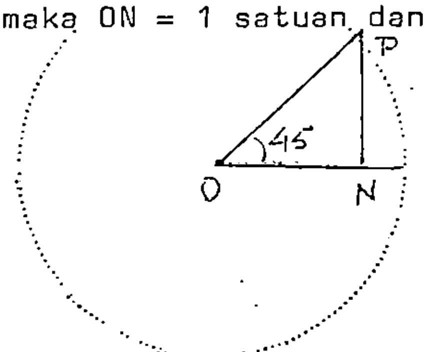
$$\sin 30^0 = \frac{PN}{OP} = \tfrac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{ON}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^0 = \frac{PN}{ON} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\theta = 45^0$

Apabila $\theta = 45^0$ dan dimisalkan PN = 1 satuan maka ON = 1 satuan dan OP = $\sqrt{2}$ satuan



Gambar 2-4

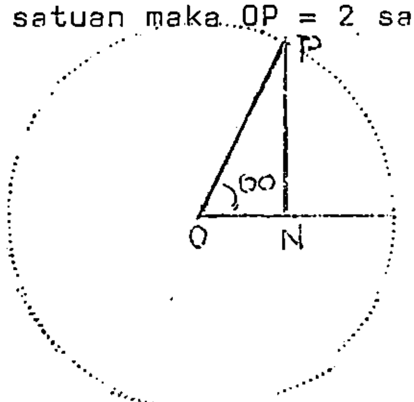
$$\sin 45^0 = \frac{PN}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^0 = \frac{ON}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^0 = \frac{PN}{ON} = 1$$

$\underline{\theta = 60^o}$

Dalam hal ini $\angle OPN = 30^o$, dan kita misalkan ON = 1 satuan maka OP = 2 satuan dan PN = $\sqrt{2}$ satuan.



Gambar 2-5

$$\sin 60^o = \frac{PN}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

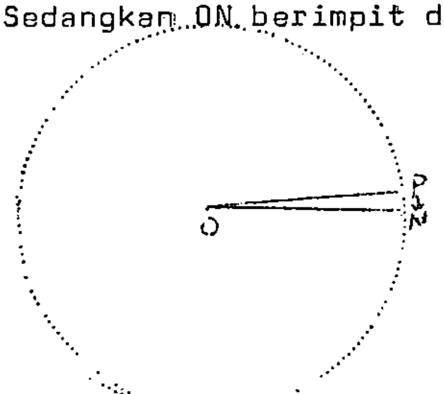
$$\cos 60^o = \frac{ON}{OP} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60^o = \frac{PN}{ON} = \sqrt{3}$$

$\underline{\theta = 0^o}$

Apabila $\theta = 0$, maka proyektor PN = 0

Sedangkan ON berimpit dengan OP, jadi ON = OP = r



Gambar 2-6

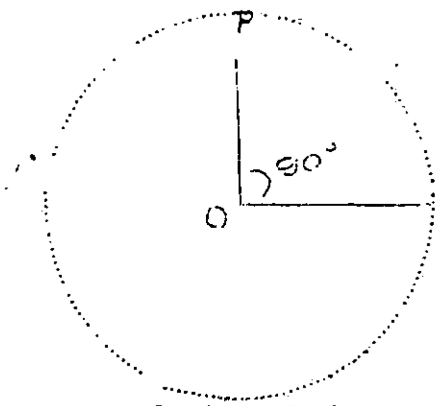
$$\sin 0^o = \frac{PN}{OP} = 0$$

$$\cos 0^o = \frac{ON}{OP} = 1$$

$$tg\ 0^o = \frac{PN}{ON} = 0$$

$\underline{\theta = 90^o}$

Apabila $\theta = 90^o$, OP $\perp$ ON dan PN akan berimpit dengan OP, jadi OP = PN = r dan ON = 0



Gambar 2-7

$\sin 90^\circ = \frac{PN}{OP} = 1$

$\cos 90^\circ = \frac{ON}{OP} = 0$

$tg\ 90^\circ = \frac{PN}{ON} = \infty$

Hasil yang kita peroleh dari uraian di atas dapat kita kumpulkan seperti terlihat dalam tabel di bawah ini.

Tabel 2

Nilai perbandingan trigonometri

sudut-sudut standard

θ / Fungsi	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\ \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

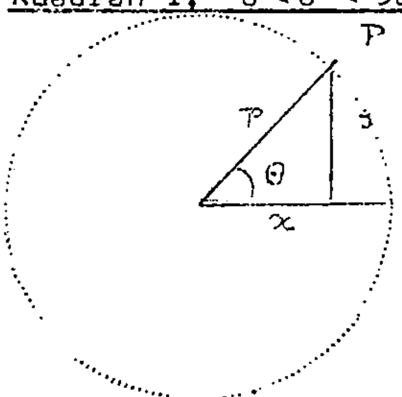
Perbandingan trigomometri untuk semua sudut $\theta < 90^\circ$ ini dapat dibaca dalam daftar tabel atau dengan mempergunakan kalkulator,

Bagi sudut $\theta > 90^\circ$ perhitungannya dapat dikembalikan kepada sudut-sudut yang lebih kecil dari 90^0 seperti uraian berikut ini.

II-2. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI SUDUT $\theta > 90^0$

Satu putaran lengkap $0^0 - 360^0$ kita bagi atas empat bagian yang sama yaitu $0^0 - 90^0$, $90^0 - 180^0$, $180^0 - 270^0$ dan $270^0 - 360^0$ dan rentangan ini berturut-turut disebut kuadran I, II, III dan IV. Nilai perbandingan trigonometri dari suatu sudut selalu ditentukan oleh koordinat dari titik P, jadi dikuadran mana P terletak, sedangkan radius OP = r yang berputar itu tetap diambil positif. Jika θ_1, θ_2, θ_3 dan θ_4 berturut-turut menggambarkan sudut yang terletak dikuadran I, II, III dan IV, maka nilai perbandingan trigonometri dari sudut-sudut tersebut dapat dilihat dari uraian berikut.

Kuadran I, $0 < \theta < 90^0$

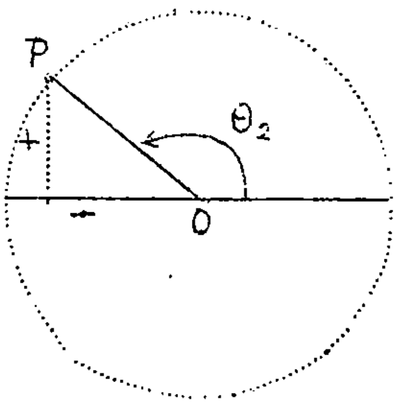


Gambar 2-8

Kita lihat apabila $\theta < 90^0$, maka koordinat P, x dan y keduanya positif, karenanya semua perbandingan trigonometri itu positif.

Besar sudut beserta nilai perbandingannya dapat dibaca dalam tabel atau dapat juga langsung dengan menggunakan kalkulator.

Kuadran II. $90^0 < \theta < 180^0$



Gb. 2-9

Dari gambar 2-9 di sebelah jelas kelihatan bahwa absis P negatif sedangkan ordinatnya positif.

$\therefore$ $\sin \theta_2 = \sin (180^0-\theta_2)$

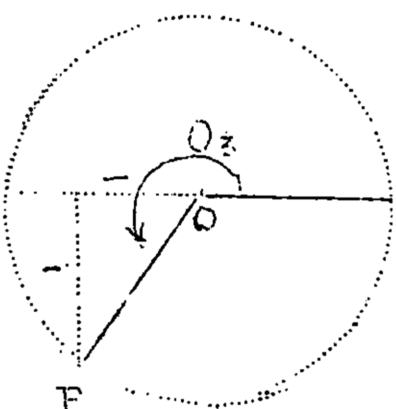
$\cos \theta_2 = - \cos (180^0-\theta_2)$

$\operatorname{tg} \theta_2 = - \operatorname{tg} (180^0-\theta_2)$

Contoh:

$\cos 130^0 = - \cos (180^0-130^0) = - \cos 50^0 = - 0,6428$

Kuadran III. $180^0 < \theta < 270^0$



Gb 2-10

Pada kuadran III ini, koordinat P keduanya negatif.

$\therefore$ $\sin \theta_3 = - \sin (\theta_3 - 180^0)$

$\cos \theta_3 = - \cos (\theta_3 - 180^0)$

$\operatorname{tg} \theta_3 = + \operatorname{tg} (\theta_3 - 180^0)$

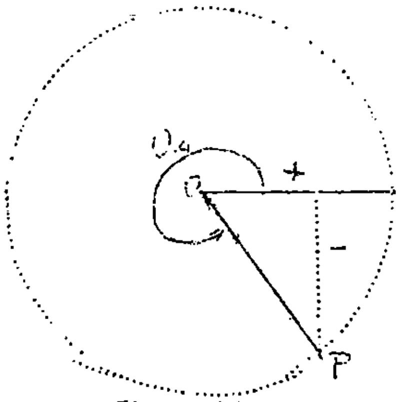
Contoh:

$\sin 210^0 = - \sin (210^0 - 180^0) = - \sin 30^0 = - 0,5000$

Kuadran IV. $270^0 < \theta < 360^0$

Dari gambar berikut ternyata absis x positif dan ordinat y negatif.

$\therefore$ $\sin \theta_4 = - \sin (360^0 - \theta_4)$



Gb 2-11

$\cos \theta_4 = \cos (360^0 - \theta_4)$

$\text{tg}\ \theta = - \text{tg}\ (360^0 - \theta_4)$

Contoh:

$\text{tg}\ 320^0 = - \text{tg}\ (360^0 - 320^0) = - \text{tg}\ 40^0 = - 0{,}8391$

Jika kita perhatikan hasil perhitungan di atas khususnya yang berkenaan dengan tanda dari perbandingan trigonometri dalam masing-masing kuadran, maka dapat kita simpulkan seperti terlihat dalam tabel di bawah ini.

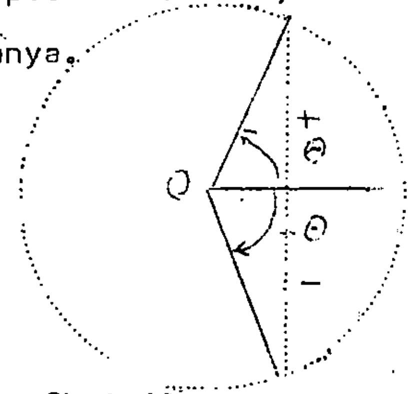
Tabel 3

Tanda perbandingan trigonometri untuk kuadran yang berbeda

Kuad. / Fungsi	I 0 - 90	II 90 - 180	III 180 - 270	IV 270 - 360
sin θ	+	+	-	-
cos θ	+	-	-	+
tg θ	+	-	+	-

II-3. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI SUDUT NEGATIF

Dalam pasal 2-1 di atas telah dikemukakan bahwa apabila perputaran OP itu searah dengan arah perputaran jarum jam maka sudut yang terbentuk adalah negatif. Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut negatif ini sama halnya dengan sudut positif; jadi juga ditentukan oleh posisi dari OP, dan bukan ditentukan oleh arah perputarannya.



Gb 2-12

$\therefore$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\text{tg}(-\theta) = -\text{tg}\,\theta$

Contoh:

$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0{,}5000$

$\cos(-130^\circ) = \cos 130^\circ = -\cos(180^\circ - 130^\circ)$

$= -\cos(50^\circ) = -0{,}6428$

$\text{tg}(-320^\circ) = -\text{tg}\,320^\circ = \text{tg}\,40^\circ = 0{,}8391$

II*4. HUBUNGAN ANTARA PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

Dari tabel 1 di atas dengan mudah dapat kita peroleh hubungan:

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta}$ atau $\sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = 1$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ atau $\cos\theta \times \sec\theta = 1$

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{1}{\text{cotg}\,\theta}$ atau $\text{tg}\,\theta \times \text{cotg}\,\theta = 1$

dan

(2) $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$; $\text{cotg}\,\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Selanjutnya dengan menggunakan dalil Phythagoras dalam gamgar 2-2mdi atas kita peroleh hubungan :

$$OA^2 + AB^2 = OB^2 \quad \text{atau} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Apabila hubungan $x^2 + y^2 = r^2$ dibagi dengan r^2 maka:

$$(\frac{x}{r})^2 + (\frac{y}{x})^2 = 1, \text{ atau :}$$

(3) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Kemudian apabila hubungan $x^2 + y^2 = r^2$ dibagi dengan x^2, maka:

$$1 + (\frac{y}{x})^2 = (\frac{r}{x})^2 \quad ; \quad \text{atau}$$

(4) $1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$

Selanjutnya apabila dibagi dengan y^2,

jadi: $(\frac{x}{y})^2 + 1 = (\frac{r}{y})^2$, atau

(5) $cotg^2\theta + 1 = cosec^2\theta$

Dengan adanya rumus-rumus 1-5 di atas kita dapat menghitung milai perbandingan trigonometri dari suatu sudut apbila salah satu dari perbandingan itu diketahui.

Contoh 1: Diketahui; $\sin\theta = \frac{3}{5}$

Ditanyakan perbandingan trigonometri yang lain.

Jawab:

$$\sin\theta = \frac{3}{5} \longrightarrow cosec\,\theta = \frac{5}{3}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \longrightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$= 1 - (\tfrac{3}{5})^2$$

$$= \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \qquad \sec\theta = \frac{5}{4}$$

$$1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$$

$$tg^2\theta = \sec^2\theta - 1 = (\tfrac{5}{4})^2 - 1 = \frac{9}{16}$$

$$tg\,\theta = \frac{3}{4} \qquad cotg\,\theta = \frac{4}{3}$$

Contoh 2:

Buktikanlah hubungan:

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\,cosec\,\theta$$

Bukti:

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta + 1}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{2 + 2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= 2\,cosec\,\theta$$

Contoh 3

Hitunglah:

$\sin^2 270^\circ - 3\cos 180^\circ - 2\cos 0^\circ$

Jawab

$\sin^2 270^\circ - 3\cos 180^\circ - 2\cos 0^\circ =$

$= (-1)^2 - 3(-1) - 2.1$

$= 1 + 3 - 2 = \underline{\underline{2}}$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Hitunglah perbandingan trigonometri yang lain jika diketahui.

   (a) $\cos \theta = \frac{5}{7}$ (b) $\operatorname{tg} \theta = \frac{12}{5}$ (c) $\sec \theta = \frac{5}{4}$

2. Hitunglah!

   (a) $\cos 150^\circ$ (b) $\sin (-315^\circ)$ (c) $\operatorname{cotg} 480^\circ$

3. Hitunglah !

   (a) $\cos \frac{3\pi}{2}$ (b) $\sin \frac{9\pi}{5}$ (c) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$

4. Tentukanlah nilai dari:

   $\cos 570^\circ . \sin 510^\circ - \sin 330^\circ \cos 390^\circ =$

Buktikanlah hubungan berikut:

5. $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$

6. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2 \sin^2\theta$

7. $\frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin \theta + \cos \theta} = 1 - \sin \theta \cos \theta$

8. $\frac{\operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cotg} \theta + \operatorname{tg} \theta} = \cos \theta$

9. $\sec^2\theta + \cos^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta . \sin^2\theta + 2$

10. $\operatorname{cotg} \theta + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \operatorname{cosec} \theta$

11. $tg\ \theta + cotg\ \theta = sec\ \theta\ cosec\ \theta$

12. $sec\ \theta - tg\ \theta = \dfrac{1}{sec\ \theta + tg\ \theta}$

13. $3\ (sin^4\theta + cos^4\theta) - 2(sin^6\theta + cos^6\theta) = 1$

14. Jika diberikan hubungan

    $i = 50\ sin\ (50\pi t + \frac{\pi}{3})$; maka tentukanlah i apabila

    $t = 0{,}02$

15. Diketahui:

    $i = 42\ sin\ 96\pi t + 10\ sin\ 45\pi t$

    Hitunglah i jika t = 0,5 detik.

BAB III

GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

Grafik fungsi trigonometri ini merupakan dasar yang harus dipahami betul, karena ia akan banyak sekali membantu dalam mempelajari bermacam-macam persoalan teknik listrik khususnya yang berhubungan dengan bentuk-bentuk gelombang dalam teori a.c.

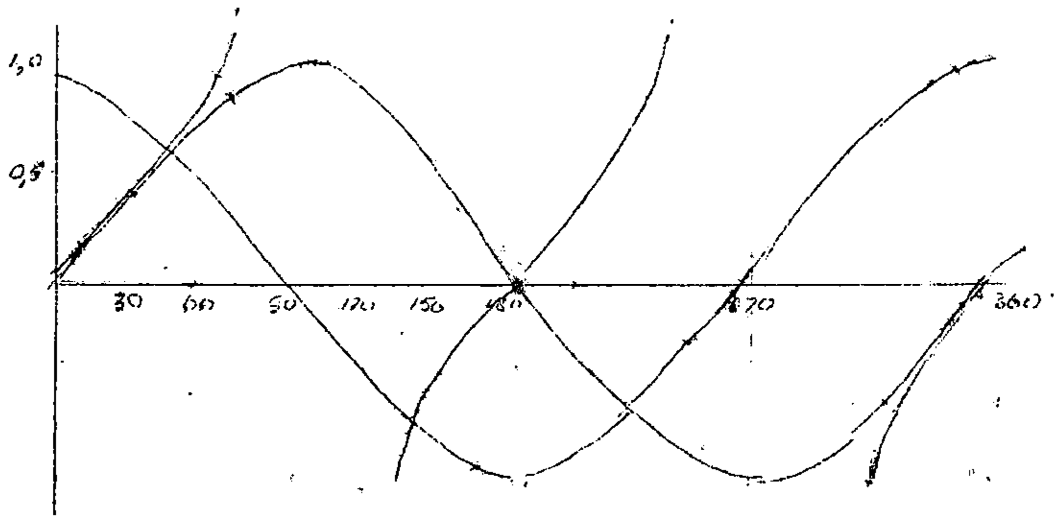
III-1. GRAFIK FUNGSI SIN θ, COS θ, TG θ

Untuk melukiskam grafik dari fungsi Trigonometri ini, pertama-tama kita tetapkan suatu interval tertentu dan biasanya dengan interval 30^o sudah memadai untuk tujuan kita. Kemuadian besar sudut beserta perbandingan trigonometrinya kita catat seperti kelihatan dalam tabel berikut:

Tabel 4

Perbandingan Trigonometri dengan interval 30^o

θ derajat	θ radian	sin θ	cos θ	tg θ
0	0	0.0000	1.0000	0.0000
30^o	$\frac{\pi}{6}$	0.5000	0.8660	0.5774
60^o	$\frac{\pi}{3}$	0.8660	0.5000	1,7321
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1.0000	0.0000	∞
120^o	$\frac{2\pi}{3}$	0.8660	- 0.5000	- 1.7321
150^o	$\frac{5\pi}{6}$	0.5000	- 0.8660	- 0,5774
180^o	π	0.0000	- 1,0000	0.0000
dst				



Gambar 3-1

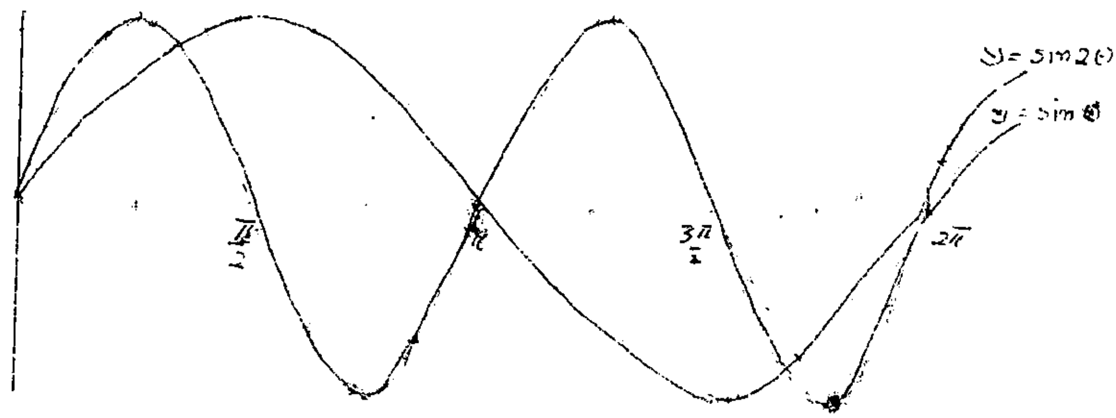
Perioda

Perioda adalah panjang rentangan atau range (dalam hal ini nilai θ) dimana satu gelombang penuh terbentuk. Dalam grafik di atas kelihatan bahwa perioda dari sin θ dan cos θ adalah 360^{0} atau 2π.

Amplitudo

Amplitudo dari suatu fungsi adalah nilai numerik tertinggi yang dicapai fungsi bervariasi di sekitar nol dan biasanya disebut nilai maksimum.
Amplitudo dari sin θ dan cos θ adalah 1.

III-2. GRAFIK SIN 2 θ DAN SIN θ

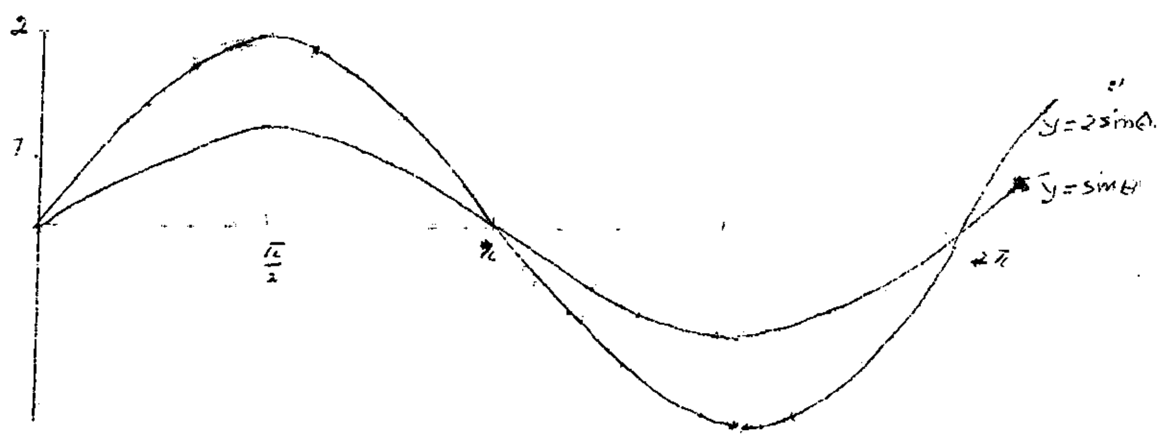


Gambar 3-2

(a) amplitudo sin 2 θ dan sin θ sama = 1

(b) perioda sin 2 θ = π, sedangkan perioda sin θ = 2 π.

III-3. GRAFIK 2 SIN θ DAN SIN θ



Gambar 3-3

(a) amplitudo 2 sin θ = 2 sedangkan amplitudo sin θ = 1

(b) periode 2 sin θ dan sin θ sama = 2π.

II.4. GRAFIK $y = \text{SIN}(\theta + \emptyset)$

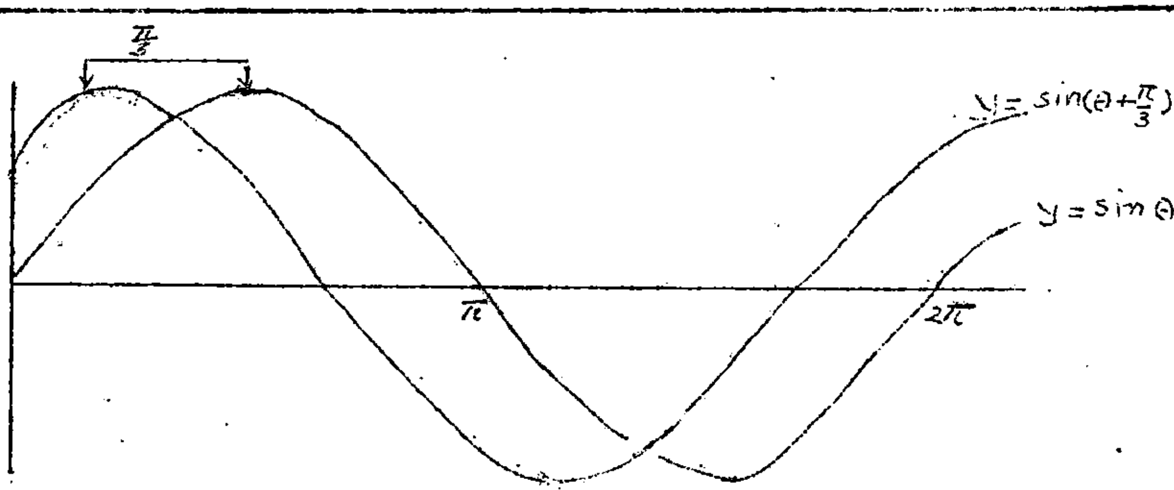
Dalam hubungan ini $\emptyset$ adalah sebuah konstanta dengan satuan derajat atau radian. Berikut ini akan kita lukiskan grafik dari sin $(\theta + \emptyset)$ dalam rentangan $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ dengan interval $\frac{\pi}{6}$, dan kemudian membandingkannya dengan grafik sin θ.

Tabel 5

Perbandingan Trigonometri sin $(\theta + \emptyset)$

untuk $\emptyset = \pi/3$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\theta + \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
$\text{SIN}(\theta + \frac{\pi}{3})$	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0	0,5	0,87



Gb. 3-4

Kesimpulan

(a) kedua grafik mempunyai bentuk yang sama

(b) kedua grafik mempunyai periode yang sama = 2π.

(c) kedua grafik mempunyai amplitudo yang sama = 1

(d) grafik $y = \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$ mencapai titik maksimum, nol dan minimum, $\frac{\pi}{3}$ rad lebih cepat dari $\sin\theta$ dan dalam peristiwa ini dikatakan "memimpin" $\sin\theta$ dengan $\frac{\pi}{3}$ rad disetiap saat.

Dengan cara yang sama grafik $y = \sin(\theta - \frac{\pi}{3})$ dikatakan "terlambat" sebesar $\frac{\pi}{3}$ rad dari y = sin disetiap titik

Umumnya dalam teknik listrik $\sin(\theta + \phi)$ dikatakan mempunyai perbedaan pashe ϕ dibandingkan dengan $\sin\theta$.

III-5. BESARAN BOLAK BALIK

Suatu besaran yang menghasilkan siklus nilai yang berulang disebut besaran bolak balik. Apabila nilai-nilai ini dilukiskan akan menghasilkan kurva sinus, maka besaran semacam itu dikatakan bervariasi secara sinusoida dan grafik itu sendiri dinamakan gelombang sinusoida. Arus tegangan dan e.m.f adalah contoh-contoh dari besaram tersebut.

Suatu arus bolak balik dapat dinyatakan oleh hubungan:

(6) $i = I_m \sin \omega t$ atau $i = I_m \sin 2\pi ft$.

dan e.m.f oleh:

(7) $e = E_m \sin \omega t$ atau $e = E_m \sin 2\pi ft$.

dimana:

I_m dan E_m adalah nilai maksimum dari arus dan e.m.f, keduanya adalah konstanta.

Huruf kecil i dan e menyatakan besaran sesaat sedangkan f adalah frekunsi dalam Hz.

Dari rumus (6) dan (7) kita peroleh:

$$w = 2\pi f \quad \text{atau} \quad f = \frac{w}{2\pi}\ \text{Hz}$$

dsn waktu periode $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{w}$ detik.

Contoh 1

Tentukanlah nilai cos $2\pi ft$, jika diketahui f = 100 Hz dan t = 0,012 detik.

$$\begin{aligned} \text{Cos } 2\pi ft &= \cos (2\pi \times 100 \times 0.012) \\ &= \cos 2,4\pi = \cos 2,4 \cdot 180^o \\ &= \cos 432^o = \cos (432^o - 360^o) \\ &= \cos 72^o = 0,3090 \end{aligned}$$

Contoh 2

Nilai arus bolak balik dalam suatu rangkaian setelat t detik diberikan oleh:

$i = 50 \sin 100\pi t$.

Hitunglah!

(a) waktu ketika arus pertama kali mencapai 25A

(b) nilai arus setelah 0.055 detik.

Jawab

(a) $i = 50 \sin 100\pi t$

$25 = 50 \sin 100\pi t$ atau:

$\sin 100\pi t = \frac{25}{50} = 0,5$

$100\pi t = \frac{\pi}{6} \longrightarrow t = \frac{1}{600} = 0,00166$ detik

(b) $i = 50 \sin 100\pi t$

$= 50 \sin (100 \times 0,055)$

$= 50 \sin 5,5\pi = 50 \sin \frac{3\pi}{2}$

$= -50$ A

Contoh 3

Suatu e.m.f yang bervariasi secara sinusoida, mempunyai nilai maksimum 100 v dan waktu periode 0,1 detik sedangkan pada waktu t = 0, e.m.f = 0.

Tuliskanlah pernyataan untuk e.m.f sesaat e pada waktu t detik.

Waktu periode T = 0,1 detik

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1} = 10$ Hz

$w = 2\pi f = 2\pi . 10 = 20\pi$ rad/detik

$\therefore e = 100 \sin 20\pi t$

Contoh 4

Suatu arus bolak balik digambarkan oleh persamaan $i = 230 \sin (100\pi t - 0,3)$, dimana t dalam detik.

(a) Nyatakanlah amplitudo, perioda dan frekuensi dari arus

(b) Tentukanlah nilai positif pertama dari t ketika i = 100 amper.

Jawab:

(a) amplitudo = 230 amper

$w = 100\pi \longrightarrow$ periode $= \frac{2\pi}{100\pi} =$ 1/50 detik

frekuensi $f = \frac{1}{T} = 50$ Hz

(b) 100 = 230 sin (sin (100πt - 0,3) atau

$\sin(100\pi t - 0{,}3) = \frac{100}{230} = 0{,}4348.$

$100\pi t - 0{,}3 = 0{,}4498 = 0{,}4498$ rad

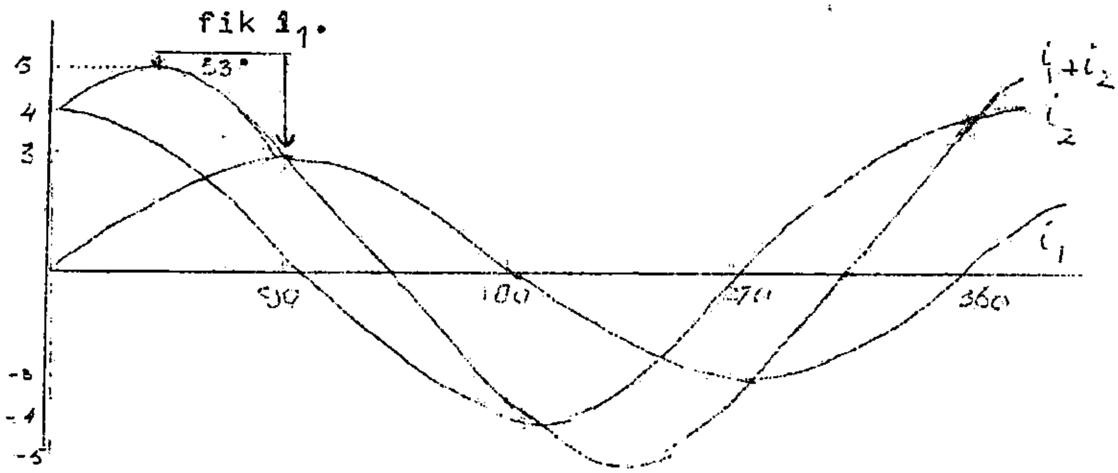
$100\pi t = 0{,}7498 \rightarrow t = 2{,}4$ detik

Contoh 5

Diketahui:

$i_1 = 3 \sin \theta$ dan $i_2 = 4 \cos \theta$

Lukiskanlah grafik dari $i_1 + i_2$, dan dari lukisan yang anda peroleh tentukanlah harga maksimum periode, dam selanjutnya bandingkanlah dengan grafik i_1.



Gb. 3-5

Grafik $i_1 + i_2$ siperoleh dengan jalan menjumlahkan ordinat dari i_1 dan i_2 untuk beberapa buah harga θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 360^\circ$). Setelah diukur akan diperoleh harga maksimumnya adalah 5 dan periodanya juga 2π.

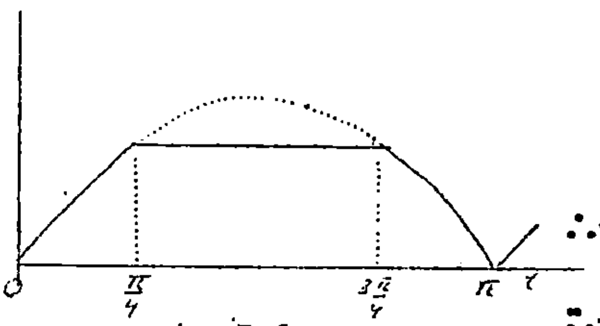
Dari gelombang gambar 3-5 di atas kelihatan bahwa bentuk gelombang $i_1 + i_2$ sama dengan bentuk gelombang i_1; dan memimpin i_1 sebesar 53°. Dari kenyataan ini dapat kita buat hubungan:

$$i_1 + i_2 = 5 \sin (\theta + 53^\circ), \text{ atau}$$

$$3 \sin \theta + 4 \sin \cos \theta = 5 \sin (\theta + 53^\circ).$$

Contoh 6

Tulislah persamaan gelombang sinusoida yang telah direktifikasi (diubah menjadi d.c) seperti terlukis di bawah ini (gb. 3-6)



gb. 3-6

$\therefore\ 0 < t < \frac{\pi}{4} \rightarrow i = I_m \sin \omega t$

untuk $\omega t = \frac{\pi}{4} \rightarrow i = I_m \sin \frac{\pi}{4}$

$= 0{,}707\ I_m$

$\therefore\ \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4} \rightarrow i = 0{,}707\ I_m$

$\therefore\ \frac{3\pi}{4} < t < \pi \rightarrow i = I_m \sin \omega t$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Lukislah grafik dari $\cos \theta$ untuk $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ dengan interval $\frac{\pi}{6}$ radian. Dari grafik tersebut tentukanlah.

   (a) nilai $\cos \theta$ apabila $\theta = \frac{7\pi}{12}$, dan

(b) nilai cos θ apabila θ = 0,65

2. Gambarkanlah grafik $y = 3 \sin 2\theta$ untuk $0 \leq \theta \leq \pi$ dengan interval $\frac{\pi}{12}$ radian. Kemudian tentukanlah periode dan amplitudonya.

3. Ubahlah waktu perioda berikut ke dalam frekuensi dan nyatakan satuan dari jawabmu. Hitunglah sampai tiga angka signifikan.

   (a) 0,04 (b) 0,002 (c) 10^{-5} (d) $\pi \times 10^{-3}$

4. Suatu angker dinamo berputar dengan kecepatan sudut dalam radian seperti di bawah ini.

   (a) 1500 (b) $2{,}4 \times 10^{2}$ (c) 10^{6} (d) $\pi \times 10^{3}$

   Ubahlah kecepatan tersebut ke dalam frekuensi dan hitunglah sampai tiga angka signifikan.

5. (a) Hitunglah $(100\pi t - 45^{0})$ apabila $t = 0{,}01$ dan berikan jawabmu dalam radian.

   (b) Jika $\mathcal{Y} = 7{,}07 \sin (100 \quad t + \frac{\pi}{4})$, maka hitunglah nilai $\mathcal{Y}$ untuk $t = 0{,}01$.

6. Jika $i = 1000 \sin (80\pi t - \frac{\pi}{4})$ amp. t dalam detik.

   (a) tentukanlah amplitudo dan perioda dari fungsi

   (b) Hitunglah nilai i apabila $t = 0$

   (c) Hitunglah nilai t positif yang terkecil apabila $i = 0$.

7. Gambar grafik $v = 4 \sin (2\pi t - \frac{\pi}{3})$ antara $t = 0$ dan $t = 1$ dengan interval 0,1 detik. Dari gambar yang kamu peroleh perkirakanlah nilai t apabila $v = 2$.

8. Suatu tegangan bolak balik diberikan oleh:

$v = 230 \sin(100\pi t - 0,3)$

(a) Nyatakanlah amplitudo, perioda dan frekuensi

(b) Hitunglah nilai positif pertama dari t pada saat $v = 100$.

9. Suatu arus i (amp) diberikan oleh:

$i = 200 \sin(300\pi t - 0,04)$, dimana t dalam detik.

(a) tentukanlah amplitudo, periode dan frekuensi dari arus.

(b) hitunglah nilai i, ketika $t = 0,01$

(c) pada sumbu yang sama, lukislah grafik:

$i = 200 \sin 300\pi t$

$i = 200 \sin(300\pi t - 0,04)$

$i = 200 \sin(300\pi t + 0,04)$

Sebutkanlah perbedaan dari ketiga arus tersebut.

10. Nilai sesaat dari arus listrik i amp, pada uaktu t detik diberikan oleh $i = 20 \cos(100\pi t + \frac{\pi}{4})$ dimana sudut diukur dalam radian.

Hitunglah!

(a) nilai i apabila $t = 0$ dan $t = 0,01$ detik.

(b) nilai t ketika $i = 0$

(c) nilai t ketuka $i = 10$ amp.

11. Suatu arus bolak balik diberikan oleh:

$i = 48,5 \sin 350\, t$;

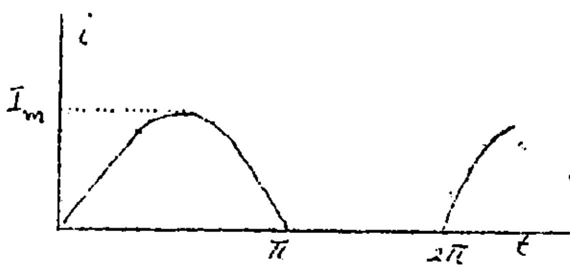
Hitunglah!

(a) frekuensi

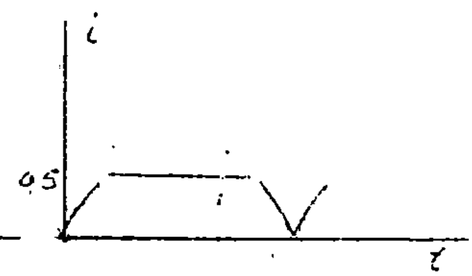
(b) waktu dalam detik apabila arus pertamakali mencapai 20 A.

12. Tentukan persamaan gelombang sinusoida yang telah diubah ke dalam d.c, seperti terlukis di bawah ini.

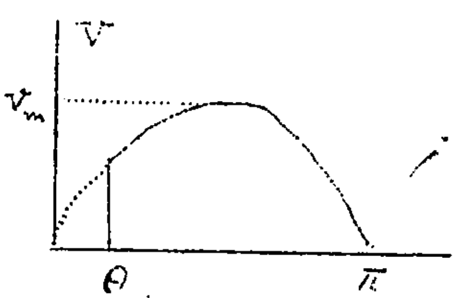
(a)



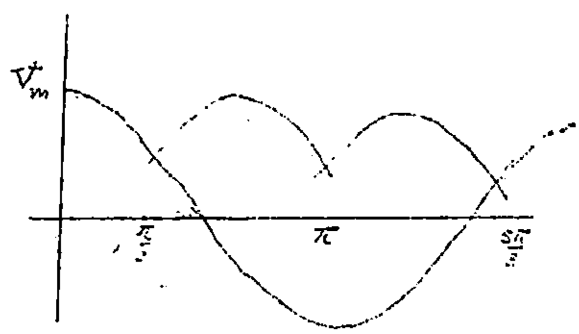
(b)



(c)



(d)

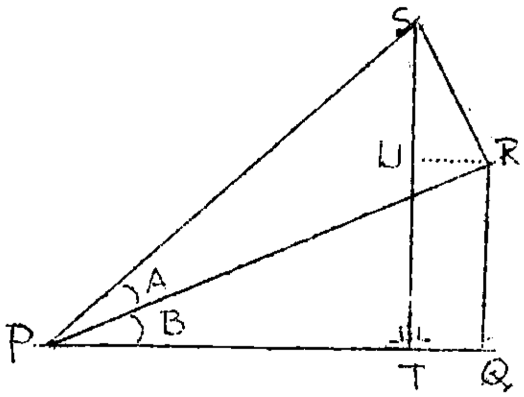


BAB IV

PERBANDINGAN TRIGONOMETRI DUA BUAH SUDUT

Kita ingin untuk mengetahui hubungan antara perbandingan trigonometri dari jumlah/selisih dua buah sudut ($A \pm B$) dengan perbandingan trigonometri bagian-bagiannya A dan B.

IV.1. JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT



Gb. 4-1

Dengan sifat-sifat geometri bidang kita lihat dari gambar di sebelah bahwa $\angle RST = \angle B$.

Dalam $\triangle$ PST:

$$\sin (A + B) = \frac{ST}{SP} = \frac{SU + UT}{SP}$$

$SU = RS \cos B$ dan $UT = QR = PR \sin B$.

$$\therefore \sin (A + B) = \frac{RS \cos B + PR \sin B}{SP}$$

$$= \frac{RS}{SP} \cos B + \frac{PR}{SP} \sin B$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

(8) $\quad \sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

Kemudian:

$$\cos (A + B) = \frac{PT}{PS} = \frac{PQ - QT}{PS}$$

$PQ = PR \cos B$ dan $QT = RU = RS \sin B$

$$\therefore \cos (A + B) = \frac{PR \cos B - RS \sin B}{PS}$$

$$= \frac{PR}{PS} \cos B - \frac{RS}{PS} \sin B$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

(9) $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

Sekarang apabila hubungan (8) dibagi dengan (9),

$$\frac{\sin (A + B)}{\cos (A + B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

(10) $\mathrm{tg}\ (A + B) = \dfrac{\mathrm{tg}\ A + \mathrm{tg}\ B}{1 - \mathrm{tg}\ A\ \mathrm{tg}\ B}$

Selanjutnya apabila dari hubungan (8) B diganti dengan -B, maka:

$$\sin (A - B) = \sin A \cos (-B) + \cos A \sin (-B)$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

(11) $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

Dengan jalan mengganti B dengan - B dari rumus-rumus (9) dan (10) kita peroleh:

(12) $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

dan

(13) $\mathrm{tg}\ (A - B) = \dfrac{\mathrm{tg}\ A - \mathrm{tg}\ B}{1 + \mathrm{tg}\ A\ \mathrm{tg} B}$

Begitu pula apabila rumus (8) $\pm$ (11) dan (9) $\pm$ (12) kita peroleh pula:

$$(14)\quad \begin{aligned} 2 \sin A \cos B &= \sin (A + B) + \sin A - B) \\ 2 \cos A \sin B &= \sin (A + B) - \sin (A - B) \\ 2 \cos A \cos B &= \cos (A + B) + \cos (A - B) \\ 2 \sin A \sin B &= \cos (A - B) - \cos (A + B) \end{aligned}$$

dan apabila dimisalkan $A + B = P$ dan $A - B = Q$, maka $A = \frac{P + Q}{2}$ dan $B = \frac{P - Q}{2}$; dan dari hubungan (14) di atas kita peroleh:

$$(15)\quad \begin{aligned} \sin P + \sin Q &= 2 \sin \frac{P + Q}{2} \cos \frac{P - Q}{2} \\ \sin P - \sin Q &= 2 \cos \frac{P + Q}{2} \sin \frac{P - Q}{2} \\ \cos P + \cos Q &= 2 \cos \frac{P + Q}{2} \cos \frac{P - Q}{2} \\ \cos P - \cos Q &= -2 \sin \frac{P + Q}{2} \sin \frac{P - Q}{2} \end{aligned}$$

IV-". SUDUT KEMBAR

Jika dalam rumus-rumus (8), (9) dan (10) di atas dimisalkan $B = A$, maka:

$$\begin{aligned} \sin (A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin (A + A) &= \sin A \cos A + \cos A \sin A \\ &= 2 \sin A \cos A \end{aligned}$$

$$(16)\quad \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\begin{aligned} \cos (A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos (A + A) &= \text{cis } A \cos A - \sin A \sin A \\ &= \cos^2 A - \sin^2 A \end{aligned}$$

$$(17)\quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

atau

(18) $$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$$

atau

(19) $$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}, \text{ dan}$$

(20) $$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

Catatan: Rumus 19 dan 20 ini sangat berguna dalam hitung integral $\sin^2 \theta$ dan $\cos^2 \theta$

Dari; $$tg(A+B) = \frac{tg\,A + tg\,B}{1 - tgA\,tgB}; \text{ dimana } B = A, \text{ maka:}$$

$$\therefore tg(A+A) = \frac{tg\,A + tg\,A}{1 - tgA\,tgA} = \frac{2\,tgA}{1 - tg^2 A}$$

(21) $$tg\,2A = \frac{2\,tg\,A}{1 - tg^2 A}$$

Selanjutnya dengan bantuan rumus-rumus (16) (17) dan (18) di atas dapat pula dikembangkan untuk sudut kembar tiga sin 3A, cos 3A dan tg 3A.

$$\begin{aligned}
\sin 3A &= \sin(2A + A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A \\
&= 2\sin A \cos^2 A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A \\
&= 2\sin A\,(1 - \sin^2 A) + (1 - 2\sin^2)\sin A \\
&= 3\sin A - 4\sin^3 A
\end{aligned}$$

(22) $$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\begin{aligned}
\cos 3A &= \cos(2A + A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A \\
&= (\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A \cos A \\
&= 2\cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A)\cos A \\
&= 4\cos^3 A - 3\cos A
\end{aligned}$$

(23) $$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$tg3A = tg\,(2A + A) = \frac{tg2A + tgA}{1 - tg2A\ tgA}$$

$$= \left\{\frac{2\ tgA}{1-tg^2A} + tgA\right\} : \left\{1 - \frac{2\ tg^2A}{1-tg^2A}\right\}$$

$$= \frac{2tgA + tgA\,(1 - tg^2A)}{(1 - tg^2A) - 2tg^2A}$$

$$= \frac{3\ tgA - tg^3A}{1 - 3\ tg^2\ A}$$

(24) $$tg\ 3A = \frac{3\ tg\ A - tg^3\ A}{1 - 3\ tg^2A}$$

IV-3. SUDUT PERDUA - PERTIGA

Dari rumus (19)

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$; ganti 2A dengan A,

(25) $$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$$

Dari rumus (20)

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$; ganti 2A dengan A,

(26) $$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$$

Dari rumus (21)

$$tg2A = \frac{2tgA}{1-tg^2A}$$; ganti 2A dengan A,

(27) $$tgA = \frac{2tg\frac{A}{2}}{1 - tg^2\ \frac{A}{2}}$$

Apabila disubstitusikan $tg\frac{A}{2} = t$ kedalam (27); kita peroleh:

(28) $$tgA = \frac{2t}{1-t^2}$$

Dari rumus (25) dan (26) berturut-turut kita peroleh pula:

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= \frac{(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2})\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$= 2tg\frac{A}{2} \times \frac{1}{\sec^2\frac{A}{2}} = \frac{2tg\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}$$

(29) $$\sin A = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$$

$$= \frac{(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2})\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(30) $$\cos A = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Catatan: Rumus (28), (29) dan (30) penting dalam menyeledaikan persamaan geneometri dan integral substitusi.

Dengan mempergunakan rumus sudut kembar tiga sin3A, cos3A, dan tg3A dalam hubungan (22), (23) dan (24) di atas, dengan, mudah dapat kita turunkan rumus-rumus untuk sudut pertiga sebagai berikut:

$$\sin A = \sin 3\left(\frac{A}{3}\right)$$

(31) $$\sin A = 3 \sin \left(\frac{A}{3}\right) - 4 \sin^3\left(\frac{A}{3}\right)$$

$$\cos A = \cos 3\left(\frac{A}{3}\right)$$

(32) $$\cos A = 4 \cos^3\left(\frac{A}{3}\right) - 3 \cos\left(\frac{A}{3}\right)$$

dan

$$\mathrm{tg}\ A = \mathrm{tg}\ 3\left(\frac{A}{3}\right)$$

(33) $$\mathrm{tg}\ A = \frac{3\mathrm{tg}\left(\frac{A}{3}\right) - \mathrm{tg}^3\left(\frac{A}{3}\right)}{1 - 3\ \mathrm{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

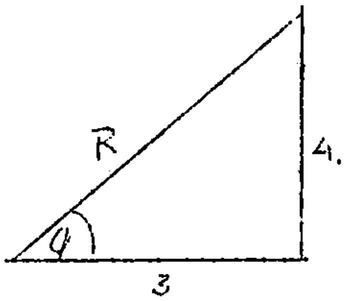
IV-4. BENTUK

$$\begin{cases} a \sin \theta \pm b \cos \theta = R \sin (\theta \pm \emptyset) \\ a \cos \theta \pm b \sin \theta = R \cos (\theta \pm \emptyset) \end{cases}$$

Bentuk-bentuk ini banyak sekali membantu kita dalam perhitungan penjumlahan arus atau tegangan secara vektor dan dalam bermacam-macam arus transient.

Dalam pasal 3-5 di atas, contoh 5 telah diuraikan bagaimana caranya menjumlahkan dua buah arus dengan metode grafik. Disana amplitudo diperoleh dengan jalan mengukur tinggi ordinat dan fasa dengan mengukur besar perbedaan sudutnya dengan sudut θ. Berikut ini kita uraikan penjumlahan arus dalam contoh tersebut secara analisis.

$i_1 + i_2 = 3\sin\theta + 4\cos\theta = R\sin(\theta + \phi)$



$\frac{3}{R}\sin\theta + \frac{4}{R}\cos\theta = \sin(\theta + \phi)$; atau

$\sin\theta.\frac{3}{R} + \cos\theta.\frac{4}{R} = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$

$\therefore \cos\phi = \frac{3}{R} \qquad \therefore \sin\phi = \frac{4}{R}$

Dengan bantuan diagram di sebelah, kita peroleh: $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, dan

$\text{tg}\,\phi = \frac{4}{3} \longrightarrow \phi = 53^o 8'$

$\therefore 3\sin\theta * 4\cos\theta = 5\sin(\theta + 53^o 8')$

Secara umum, apabila ada hubungan:

$a\sin\theta \pm b\cos\theta = R\sin(\theta \pm \phi)$, maka

$R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad$ dan $\text{tg}\,\phi = \frac{b}{a}$

Begitu juga bentuk:

$a\cos\theta \mp b\sin\theta = R\cos(\theta \pm \phi)$

dimana R dan ϕ mempunyai nilai yang sama seperti di atas.

CONTOH-CONTOH PENYELESAIAN SOAL

Contoh 1

Perlihatkanlah bahwa untuk semua nilai θ, berlaku:

$\sin\theta - \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) = 0$

Jawab

$\sin\theta - \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) =$

$$\sin\theta - (\sin\theta \cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta \sin\frac{\pi}{3}) + \sin\theta \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\theta \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin\theta \ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \tfrac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 0$$

Contoh 2

Hitunglah tanpa menggunakan tabel

(a) $\cos 75^{\circ}$ (b) $\sin 15^{\circ}$

Tulislah kesimpulan yang anda peroleh dari jawaban di atas.

Jawab

(a)
$$\begin{aligned}\cos 75^{\circ} &= \cos(45^{\circ} + 30^{\circ})\\ &= \cos 45^{\circ}\cos 30^{\circ} - \sin 45^{\circ}\sin 30^{\circ}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sin 15^{\circ} &= \sin(45^{\circ} - 30^{\circ})\\ &= \sin 45^{\circ}\cos 30^{\circ} - \cos 45^{\circ}\sin 30^{\circ}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\therefore$ sin 15^0 = cos 75^0 atau sin 15^0 = cos $(90^0 - 15^0)$

Secara umum untuk $\theta < 90^0$; sin θ = cos $(90^0 - \theta)$

3. Buktikanlah:

(a) $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ (b) $\cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta$

Bukti:

(a) $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$

$- \sin\theta.0 + \cos\theta.1$

$= \cos\theta$

(b) $\cos(180^0 - \theta) = \cos 180^0\cos\theta + \sin 180^0\sin\theta$

$= -1.\cos\theta * 0.\sin\theta$

$= -\cos\theta$

4. Buktikanlah

$$\frac{tgA + tg\,B}{tg\,A.\ tg\,B} = \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$$

Bukti:

$$\frac{tg\,A + tg\,B}{tg\,A - Tg\,B} = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}} = \frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\sin A\cos B - \cos A\sin B}$$

$$= \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$$

5. Nyatakanlah dalam bentuk fungsi tunggal

cos $2\omega t$ cos ωt - sin $2\,\omega t$ sin ωt =

cos $2\,\omega t$ cos ωt - sin $2\,\omega t$ sin ωt = cos $(2\,\omega t + \omega t)$

= cos $3\,\omega t$.

6. Jika $A + B = 45^0$, maka perlihatkanlah bahwa:

$(1 + tgA)(1 + tgB) = 2$

Jawab

$$\begin{aligned}(1 + tg\,A)(1 + tgB) &= 1+tgAtgB + tgA + tgB\\ &= 1+tgAtgB+tg(A+B)(1-tgAtgB)\\ &= 1+tgAtgB+tg45^0(1-tgAtgB)\\ &= 1+tgAtgB + 1(1-tgAtgB)\\ &= 1 + 1 + tgAtgB - tgAtgB\\ &= 2.\end{aligned}$$

7. Hitunglah!

$$\begin{aligned}\cos 70^0 + \cos 50^0 &= 2\cos\frac{70^0 + 50^0}{2}\cos\frac{70^0-50^0}{2}\\ &= 2\cos 60^0 \cos 10^0\\ &= 2.\tfrac{1}{2}\cos 10^0 = \cos 10^0.\end{aligned}$$

8. Buktikanlah!

$$\sin 10^0 \sin 50^0 \sin 70^0 = \frac{1}{8}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}&\sin 10^0 \sin 50^0 \sin 70^0\\ &= \sin 10^0.\tfrac{1}{2}(2\sin 50^0 \sin 70^0)\\ &= \tfrac{1}{2}\sin 10^0(\cos 20^0 - \cos 120^0)\\ &= \tfrac{1}{2}\sin 10^0\cos 20^0 - \tfrac{1}{2}\sin 10^0\cos 120^0\\ &= \tfrac{1}{4}.2\sin 10^0\cos 20^0 - \tfrac{1}{4}\sin 10^0\\ &= \tfrac{1}{4}(\sin 30^0 - \sin 10^0) - \tfrac{1}{4}\sin 10^0\\ &= \tfrac{1}{4}\sin 30^0 = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

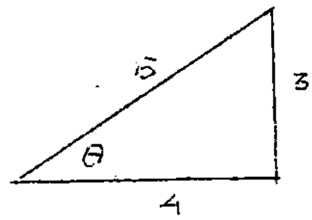
9. Jika $\sin\theta = \frac{3}{5}$, maka hitunglah!

(a) $\sin 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$ (c) $\text{tg } 2\theta$ (d) $\sin 3\theta$

(a) $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$

$= \frac{24}{25}$



(b) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$= 1 - 2 \cdot (\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{18}{25} = 7/25$

(c) $\text{tg } 2\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$

(d) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= 3 \cdot \frac{3}{5} - 4\,(\frac{3}{5})^3 = \frac{9}{5} - \frac{108}{125} = \frac{117}{125}$

10. Perlihatkanlah bahwa:

(a) $\sin(A+B) \cdot \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

(b) jika $\text{tg } \frac{A}{2} = t$, maka:

$2 \text{ cotg } (\frac{A}{2}) + \text{tg}A = \text{tg}A \cdot \text{cotg}^2 (\frac{A}{2})$

(a) $\sin(A + B) \cdot \sin(A - B) =$

$= (\sin A \cos B + \cos A \cdot \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$

$= (\sin A \cos B)^2 - (\cos A \sin B)^2$

$= \sin^2 A\,(1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A)\sin^2 B$

$= \sin^2 A - \sin^2 B$

(b) $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = t \qquad \operatorname{tg}A = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$$\therefore\ 2\operatorname{cotg}\left(\frac{A}{2}\right) + \operatorname{tg}A = \operatorname{tg}A\operatorname{cotg}^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$2.\frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2t}{1.t^2}.\frac{1}{t^2}$$

$$\frac{2}{t} + \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2t}{(1-t^2)t^2}$$

$$\frac{2}{t(1-t^2)} = \frac{2}{t(1-t^2)}$$

11. Dua tegangan bolak balik diberikan oleh:

$V_1 = 4\sin\omega t$ dan $V_2 = 8\cos\omega t$. Hitunglah!

(a) amplitudo dari $V_1 - V_2$

(b) nilai t dalam detik ketika $V_1 - V_2 = 4$, apabila ω = 100 rad/det.

<u>Jawab</u>

(a) $V_1 - V_2 = 4\sin\omega t - 8\cos\omega t = V_m\sin(\omega t - \emptyset)$

$\therefore\ R = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 8{,}944$

$\operatorname{tg}\emptyset = \frac{8}{4} \Rightarrow \emptyset = 63^o26' = 1{,}1071$ rad

$\therefore\ 4\sin\omega t - 8\cos\omega t = 8{,}944\sin(\omega t - 1{,}1071)$

amplitudo dari $V_1 - V_2$ adalah 8,944 volt.

(b) $8.044\sin(\omega t - 1{,}1071) = 4{,}472$

$\sin(\omega t - 1{,}1071) = \dfrac{4{,}472}{8{,}944} = 0{,}5$

$\omega t - 1{,}1071 = \dfrac{\pi}{6}$ atau $\dfrac{5\pi}{6}$

$\therefore\ \omega t = \dfrac{3{,}1416}{6} + 1{,}1071$ atau $\dfrac{5.3{,}1416}{6} + 1{,}1071$

$= 1{,}6308$ atau $3{,}7254$

$\therefore\ t = 0.0163$ atau $0{,}0373$

12. Dua buah arus bolak balik diberikan oleh:

$i_1 = 40 \sin 50\,t$ dan $i_2 = 30 \cos (50t + \frac{\pi}{3})$

Hitunglah amplitudo dan fase dari $i_1 + i_2$

Jawab

$$i_2 = 30 \cos (50t + \frac{\pi}{3})$$
$$= 30 (\cos 50t \cos \frac{\pi}{3} - \sin 50t \sin \frac{\pi}{3})$$
$$= 30 (\tfrac{1}{2} \cos 50t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 50t)$$
$$= 15 \cos 50t - 15\sqrt{3} \sin 50t$$

$$\therefore\ i_1 + i_2 = 40 \sin 50t + 15 \cos 50t - 15\sqrt{3} \sin 50t$$
$$= (40-15\sqrt{3}) \sin 50t + 15 \cos 50t = I_m \sin(50t + \phi)$$
$$I_m = \sqrt{[(40 - 15\sqrt{3})^2 + 15^2]} = 20{,}5$$
$$\operatorname{tg} \phi = \frac{15}{40-15\sqrt{3}} \longrightarrow \phi = 0{,}8168$$

$$\therefore\ i_1 + i_2 = 20{,}5 \sin (50t + 0{,}8168)$$

Jadi amplitudo = 20,5 A dan fase = 0,8168.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Tulislah pernyataan untuk:

(a) $\sin (\omega t + \theta)$ (b) $\sin (\omega t - \theta)$

(c) $\cos (100t + \theta)$ (d) $\sin (2\pi f t - \theta)$

Buktikanlah hubungan berikut:

2. $1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} 2\theta = \sec 2\theta$ 3. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$

4. $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$ tg θ 5. $\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} + \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} = 4 \cos 2\theta$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \sin \theta$

7. $\sin(\omega t + \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3}) = 0$

8. Hitunglah tanpa mempergunakan tabel

(a) $\cos 75^0 - \cos 15^0$ (b) $\text{tg } 15^0 + \text{cotg } 15^0$

9. Tulislah sebagai fungsi tunggal

(a) $\sin 142^0 \cos 78^0 - \cos 142^2 \sin 78^0$

(b) $\cos 3\omega t \cos 2\omega t + \sin 3\omega t \sin 2\omega t$

10. Buktikanlah!

$\sin 50^0 - \sin 70^0 + \cos 80^0 = 0$

11. Hitunglah harga dari:

$\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 80^0 =$

12. Jika $\cos \theta = 0{,}25$, maka hitunglah!

(a) $\sin 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$ (c) $\text{tg } 2\theta$

(d) $\sin 3\theta$ (e) $\cos 3\theta$ (f) $\text{tg } 3\theta$

(g) $\sin \frac{\theta}{2}$ (h) $\cos \frac{\theta}{2}$ (i) $\text{tg } \frac{\theta}{2}$

13. Jika $i = 12 \sin \omega t + 8 \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + \theta)$, maka hitunglah nilai I_m dan θ dalam radian.

14. Harmonik ke-3 dari suatu gelombang diberikan oleh $6 \cos 3\theta - 8 \sin 3\theta = K \cos(3\theta + Q)$.

Hitunglah K dan Q dalam hubungan tersebut.

15. Diberikan dua buah tegangan $V_1 = 10 \sin (\omega t - \frac{\pi}{6})$ dan $V_2 = 5 \sin \omega t$.

Ditanyakan:

(a) amplitudo dan fase dari $V_1 + V_2$

(b) waktu ketika $V_1 + V_2$ pertama kali mencapai 12 volt

(c) amplitudo dan fase dari $V_1 - V_2$

(d) waktu ketika $V_1 - V_2 = 0$.

BAB V

PERSAMAAN TRIGONOMETRI

Dalam proses penyelesaian persamaan Trigonometri, akan mengingatkan kita kembali kepada penyelesaian bentuk-bentuk persamaan aljabar, khususnya persamaan kuadrat dengan metode faktorisasi. Disamping itu biasanya harus dicantumkan suatu batasan tentang daerah berlakunya fungsi yang disebut range misalnya $0^{0} < \theta < 360^{0}$. Range ini sangat diperlukan mengingat banyak sekali nilai θ yang memenuhi persamaan tg $\theta = 1$ misalnya, yaitu $\theta = 45^{0} \pm k.180^{0}$, dimana $k = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots\ldots$

Contoh 1

Selesaikanlah $\sin\theta - 2\sin^2\theta = 0; \quad 0 < \theta < 360^{0}$

$\sin\theta - 2\sin^2\theta = 0$

$\sin\theta\,(1 - 2\sin\theta) = 0$

$\therefore \sin\theta = 0 \longrightarrow \theta = 0^{0},\ 180^{0}$ atau 360^{0}

dan $1 - 2\sin\theta = 0 \longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30^{0}$, atau 150^{0}

Jadi nilai θ yang memenuhi adalah:

30^{0}, 150^{0} atau 180^{0}.

Contoh 2

$3\sin\theta - 4\cos\theta = 0; \quad 0 < \theta < 360^{0}$

$3\sin\theta = 4\cos\theta$

$3\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 4 \longrightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{4}{3} = 1{,}3333$

$$\theta = 53^{0}.8'$$

Oleh karena tg θ positif, maka sudut θ, terletak pada kuadran I dan III.

$\therefore\ \theta = 53^{0}8'$ atau $180^{0} + 53^{0}8'$

$= 53^{0}8'$ atau $233^{0}8'$

Contoh 3

$8 - 6\sin^{2}\theta - 7\cos\theta = 0$

$8 - 6(1 - \cos^{2}\theta) - 7\cos\theta = 0$

$8 - 6 + 6\cos^{2}\theta - 7\cos\theta = 0$

$6\cos^{2}\theta - 7\cos\theta + 2 = 0$

$(2\cos\theta - 1)(3\cos\theta - 2) = 0$

$\therefore\ 2\cos\theta - 1 = 0 \longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = 0,5000$

$\theta = 60^{0}$ atau 300^{0}

$\therefore\ 3\cos\theta - 2 = 0 \longrightarrow \cos\theta = 2/3 = 0,6667$

$\theta = 48^{0}11'$ atau $360^{0} - 48^{0}11'$

$= 48^{0}11'$ atau $311^{0}49'$

Contoh 4

$2\cos\theta + 5\sin\theta + 3 = 0;\ -180^{0} < \theta < 180^{0}$

Pergunakan rumus (29) dan (30) di atas.

$$2.\frac{1 - t^{2}}{1 + t^{2}} + 5.\frac{2t}{1 + t^{2}} + 3 = 0$$

$2(1 - t^{2}) + 5.2t + 3(1 + t^{2}) = 0$

$2 - 2t^{2} + 10t + 3 + 3t^{2} = 0$

$$t^2 + 10\,t + 5 = 0$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 20}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{80}}{2}$$

$$= -5 \pm 2\sqrt{5} = -5 \pm 4{,}4721$$

$$= -0{,}5279 \text{ atau } -9{,}4721$$

$$t = \frac{\theta}{2} = -27^\circ 50' \text{ atau } -83^\circ 58'$$

$$\therefore \theta = -55^\circ 40' \text{ atau } -167^\circ 56'$$

SOAL-SOAL LATIHAN

Tentukanlah nilai θ antara 0° dan 360°, untuk soal-soal berikut:

1. $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$
2. $\cos (\theta + 10)^\circ = -0{,}6$
3. $\sin 2\theta + \cos \theta = 0$
4. $\sin \theta = 3 \cot \theta$
5. $6 \sin^2\theta - 7 \cos \theta - 8 = 0$;
6. $6 \cos^2\theta - \sin \theta - 4 = 0$
7. $13 + \sin\theta - 15\cos^2\theta = 0$
8. $2 \cos 2\theta = 4 \sin\theta + 3$
9. $6 \cos 2\theta + 8 = 11 \cos\theta$
10. $4 \sin \theta + 2 \cos\theta = 2$
11. $3 \cos \theta - 4 \sin \theta = 5$
12. $5 \cos\theta = 2 + \sin\theta$; $-180^\circ < \theta < 180^\circ$
13. $\dfrac{3}{\cot^2\theta} - \dfrac{2 \sin \theta}{\cos \theta} - 1 = 0$

Selesaikanlah pasangan persamaan simultan di bawah ini untuk A dan B antara 0° dan 360°.

14. $2 \sin A + \cos B = 2{,}4$
    $3 \sin A - 2 \cos B = 0{,}4$
15. $6 \cos A - 12 \sin B = 7$
    $2 \cos A - 3 \sin B = 2$

BAB VI

MENGHITUNG UNSUR UNSUR DAN LUAS SEGITIGA

Seperti telah diuraikan dalam bab yang lalu bahwa pada sebuah segitiga siku-siku kita dapat secara langsung menentukan perbandingan trigonometri sin, cos dan tg dari sudut-sudutnya, yaitu sebagai perbandingan antara sepasang sisi-sisi segitiga tersebut. Lain halnya dengan segitiga yang bukan segitiga siku-siku katakanlah salah satu sudutnya 35^0, walaupun nilai perbandingan trigonometrinya sama apabila ia merupakan salah satu sudut dari segitiga siku-siku, akan tetapi perbandingan itu tidaklah dapat dinyatakan secara komplit sebagai perbandingan antara dua buah sisi dari segitiga itu.
Setiap segitiga ABC terbentuk dari enam unsur yaitu tiga sisi a, b, c dan tiga buah sudut A, B dan C.
Untuk menghitung nilai dari keenam unsur ini, tiga unsur di antaranya harus diketahui kecuali ketiganya sudut. Dalam hubungan ini akan ada 4 kasus penyelesaian dari suatu segitiga yaitu apabila diberikan:

(1) 1 sisi dan 2 sudut

(2) 2 sisi dan 1 sudut di depan sisi

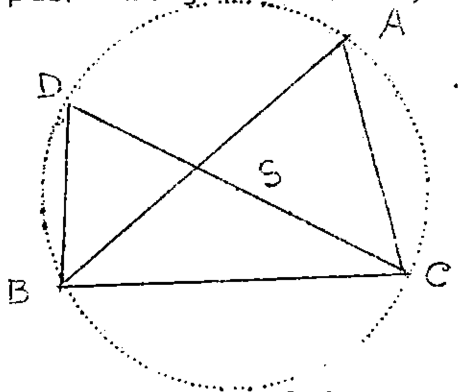
(3) 2 sisi dan 1 sudut apitnya

(4) 3 sisi

Dua kasus pertama dapat diselesaikan dengan bantuan dalil sinus dan yang lain dengan dalil cosinus.

VI-1. DALIL SINUS

Misalkan $\triangle$ ABC adalah sebuah segitiga sembarang dan S pusat lingkaran luarnya.



Gambar 6-1

Perpanjanglah CS hingga memotong lingkaran pada titik D.

$\angle BDC = \angle A$, dan

$\angle CBD = 90^0$.

$\therefore \sin A = \sin \angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{a}{2R}$

Dengah cara yang sama akan diperoleh:

$\text{Sin } B = \frac{b}{2R}$ dan $\text{Sin } C = \frac{2}{2R}$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\text{sib } B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{R}$$

Contoh 1

Dalam $\triangle ABC$, diberikan $a = 5$, $\angle A = 40^0$ dan $\angle B = 70^0$

Hitunglah unsur-unsur yang lain dari segitiga itu.

$$\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$$
$$= 180^0 - (40^0 + 70^0) = 70^0$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \longrightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{5 \sin 70^0}{\sin 40^0}$$

$$= \frac{5.\ 0,9397}{0,6428} = 7,31$$

Oleh karena $\triangle$ ABC samakeki ,maka $b = c = 7,31$.

Contoh 2

Dalam $\triangle PQR$, $p = 10$, $q = 12$ dan $\angle P = 50^0$

Hitunglah besar $\angle Q$.

$$\frac{p}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q} \longrightarrow \sin Q = \frac{q.\sin P}{p} = \frac{12 \sin 50^{\circ}}{10}$$

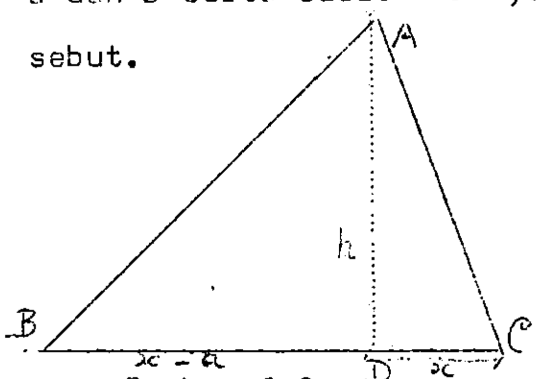
$$= \frac{12.0,7660}{10} = 0,9192$$

$$\angle Q = 66^{\circ}49' \text{ atau } 113^{\circ}12'$$

Oleh karena $\angle P = 50^{\circ}$, maka keduanya memenuhi syarat.

VI-2. DALIL COSINUS

Apabila dalam suatu $\triangle ABC$ diketahui dua buah sisinya a dan b serta sudut $\angle C$ yaitu sudut antara kedua sisi tersebut.



Gambar 6-2

Tariklah garis tinggi AD,

$\angle D = 90^{\circ}$.

Dalam $\triangle ADC \longrightarrow h^2 = b^2 - x^2$, dan

dalam $\triangle ADB \longrightarrow h^2 = AB^2 - (x-a)^2$

$\therefore AB^2 - (x-a)^2 = b^2 - x^2$

$$AB^2 = b^2 - x^2 + (x-a)^2$$
$$= b^2 - x^2 + x^2 - 2ax + a^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2ax$$

Dalam $\triangle ADC \longrightarrow \frac{x}{b} = \cos C$ atau $x = b \cos C$.

$$\therefore AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ , atau}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Dengan jalan yang sama akan diperoleh pula:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Contoh 3 Dalam $\triangle ABC$, $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm dan $\angle ABC = 40^o$

Hitunglah panjnang AC.

Dengan dalil cosinus:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC \cos ABC$$
$$= 5^2 + 7^2 - 2.5.7 \cos 40^o$$
$$= 25 + 49 - 70 \cos 40^o$$
$$= 74 - 70\ (0,7660)$$
$$= 20,38$$
$$\therefore AC = \sqrt{20,38} = 4,52 \text{ cm.}$$

Contoh 4 Dalam $\triangle DEF$, $d = 2$ cm, $e = 4$ cm dan $f = 5$ cm

Hitunglah sudut yang paling besar dari segitiga DEF.

Sudut yang terbesar akan terletak di depan sisi yang terpanjang, maka dalam soal ini adalah sudut F.

$$\therefore f^2 = d^2 + e^2 - 2\ de \cos F, \text{ atau}$$
$$2\ de \cos F = d^2 + e^2 - f^2$$
$$\cos F = \frac{d^2 + e^2 - f^2}{2\ de}$$
$$= \frac{2^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 2 \times 4}$$
$$= \frac{4 + 16 - 25}{16} = -\frac{5}{16}$$
$$= -0,3125$$

Oleh karena nilai cos C negatif, maka $90^o < C < 180^o$

$$\therefore \angle C = 180^o - 71^o 47'$$
$$= 108^o.13'$$

Contoh 5 Buktikanlah.Bahwa:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Dari $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$

$$= 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2\ bc} = \frac{(a+b-cc)(a-b+c)}{2\ bc}$$

$$= \frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{2\ bc}$$

$$= \frac{2(s-b)(s-c)}{bc} \longrightarrow 2s = a+b+c$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

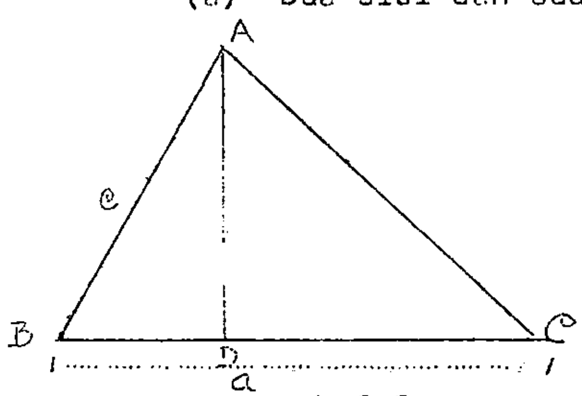
Dari sini dapat kita turunkan pula bahwa:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \text{ dan}$$

$$\text{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

VI-3. LUAS SEGITIGA

(a) Dua sisi dan sudut Apitnya diketahui:



gb 6-3

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{\text{alas x tinggi}}{2}$$

$$= \frac{ah}{2}$$

Dalam $\triangle ADB$;

$$\frac{h}{c} = \sin B \rightarrow h = c \sin B$$

$$\therefore \text{Luas } \triangle ABC = \frac{a.c \sin B}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ ac \sin B$$

Dengan jalan yang sama dapat diperlihatkan bahwa:

$$\therefore \text{ Luas } \triangle ABC = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C$$
$$= \tfrac{1}{2}\, bc \sin A$$
$$= \tfrac{1}{2}\, ac \sin B$$

(b) Ketiga sisi diketahui

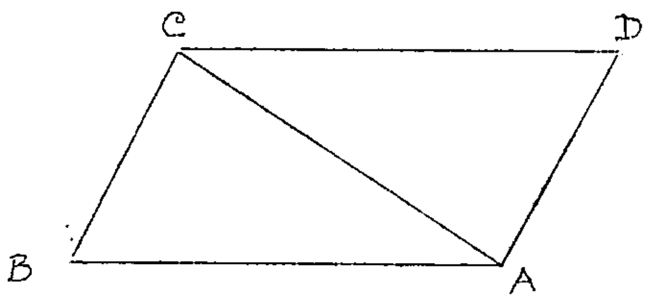
Dari bagian (a) di atas telah diperoleh bahwa:

$$\text{luas sebuah } \triangle ABC = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A$$
$$= \tfrac{1}{2}\, bc \times 2 \sin \tfrac{A}{2} \cos \tfrac{A}{2}$$
$$= bc \times \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \times \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$= \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \text{ Luas } \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

Contoh 6

Dari suatu jajaran genjang ABCD diketahui $AB = 4$ cm $BC = 2$ cm dan $\angle ABC = 50^0$. Hitunglah luas jajaran genjang tersebut.



Diagonal AC membagi jajaran genjang atas dua buah segi tiga ABC dan dan ACD dengan luas yang sama.

gb 6-4

$$\text{Luas } \triangle ABC = \tfrac{1}{2}\, ac \sin B$$
$$= \tfrac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin 50^0$$
$$= 4 \times 0{,}7660 = 3{,}064 \text{ cm}^2$$

$\therefore$ Luas AB CD $= 2\text{x}\ 3{,}064\ \text{cm}^2 = 6{,}13\ \text{cm}^2$

<u>Contoh 7</u> Dalam $\triangle ABC$ diketahui $a = 16$ cm, $b = 11$ cm dan $c = 9$ cm Hitunglah luas $\triangle ABC$.

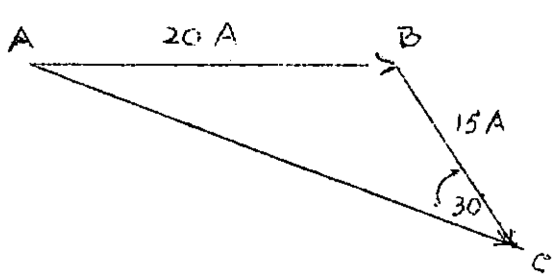
$2s = a+b+c = 16 + 11 + 9 = 36$

$s = 18$, $s-a = 18-16 = 2$, $s-b = 7$ dan $s-c = 9$

$$\therefore \text{Luas } \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{18 \times 2 \times 7 \times 9}$$
$$= 18\sqrt{7} = 18.2{,}646$$
$$= 47{,}63\ \text{cm}^2$$

VI-4. MENENTUKAN RESULTANT ARUS ATAU VOLTASE

Dalam gambar 6-4 di bawah ini dilukiskan dua buah vektor $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$ yang menggambarkan arus bolak balik dalam dua cabang dari rangkaian paralel. Garis $\overrightarrow{AC}$ merupakan resultant dari kedua arus $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$. Jika $\overrightarrow{AB}$ ekivalen dengan 20 amp dan $\overrightarrow{BC}$ = 15 amp, sedangkan $\angle BCA = 30^\circ$, maka untuk menentukan resultant dari kedua arus ini kita pergunakan dalil sinus atau cosinus.



gb 6-4

Dengan dalil sinus:

$$\frac{15}{\sin A} = \frac{20}{\sin 30} \quad \text{atau ;}$$

$$\sin A = \frac{15 \sin 30^\circ}{20} = \frac{15 \times 0{,}5}{20}$$

$$= 0{,}375$$

$$\therefore \angle A = 22^\circ 2' \text{ atau } 157^\circ 58'$$

Oleh karena $\angle C = 30^\circ$, maka $\angle A = 22^\circ 2'$

$$\angle B = 180^\circ - (30^\circ + 22^\circ 2') = 127^\circ 58'$$

Kemudian dengan mempergunakan dalil sinus lagi kita peroleh:

$$\frac{AC}{\sin 127^\circ 58'} = \frac{20}{\sin 30^\circ} \quad \text{atau:}$$

$$\therefore AC = \frac{20 \sin 127^\circ 58'}{\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{20 \sin 52^\circ 2'}{\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{20 \times 0{,}7884}{0{,}5} = 31{,}5 \text{ amp.}$$

Penyelesaian yang lain dapat juga dengan mempergunakan dalil cosinus, seperti berikut ini:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\, AB.BC \cos \angle ABC$$

$$= 20^2 + 15^2 - 2.20.15 \cos 127^\circ 58'$$

$$= 400 + 225 - 600(-0{,}60995)$$

$$= 625 + 365{,}97$$

$$= 990{,}97$$

$$\therefore AC = \sqrt{990{,}97} = 31{,}5 \text{ amp.}$$

VI-5. SOAL-SOAL LATIHAN

1. Dalam sebuah $\triangle$ ABC diketahui AB = 10 cm $\triangle ABC = 135^\circ$ dan $\triangle ACB = 15^\circ$. Hitunglah panjang sisi BC.

2. Dalam sebuah segitiga ABC, sisi AB = 10 cm $\angle CAB = 30^\circ$ dan $\angle ACB = 45^\circ$. Hitunglah:

   (a) panjang sisi BC

(b) sudut ABC

(c) panjang sisi AC

(d) luas $\triangle ABC$

3. Dalam sebuah $\triangle$ ABC diketahui sisi AB = 8 cm, $\angle$ ABC = 100^o dan $\angle$ BAC = 30^o.

   Hitunglah panjang sisi BC

4. Hitunglah sisi terpendek dari suatu segitiga apabila diketahui kelilingnya = 30 cm, sedangkan sudutnya berturut-turut 30^o, 50^o dan 100^o.

5. Dua buah arus bolak balik pada suatu cabang rangkaian paralel dinyatakan sebagai $i_1 = 20 \sin \theta$ dan $i_2 = 30 \sin (\theta + \pi/3)$.

   Hitunglah resultant dari kedua arus itu.

   Hitunglah unsur-unsur yang lain dari sebuah segitiga ABC apabila diberikan:

6. a = 42,365
   b = 25,863
   C = $115^o39'$

7. a = 0,062387
   b = 0,23475
   C = $110^o32'$

8. a = 6,342
   b = 7,295
   c = 8,4177

9. a = 412,67
   A = $50^o39'$
   B = $60^o8'$

10. Dua buah stasiun radar A dan B berjarak 50 km. Lokasi B berada sebelah timur dari stasiun A. Sebuah roket berkepala nuklir dimonitor secara serentak dari A dan B. Indikator pada stasiun A menunjukkan 50^o timur laut dan pada stasiun B kelihatan 30^o barat laut. Tentukanlah jarak roket dari stasiun B.

DAFTAR PERPUSTAKAAN

ALGER.L.PHILIP: Mathematics fos Science and Engineering (1967), Mc. Graw-Hill Book Company New York

J.L. SMITHSON, Mathematics for Electrical (1969), Mc. Graw-Hill Book Company U.K. England

JAMBULINGAM.A.P.PROF, Mathematics for Technicians (1967), Sehgal Educational Consultants & Publishers Pvt. Ltd. Faridabat.

LOUIS A. PIPES, Applied Mathematics for Engineering and Physics (1946), Mc. Graw-Hill Book Company N.Y. 1946

NUZ AND SHAW Electronics Mathematics (1967), Mc. Graw-Hill Book Company New York

ROY DUBISCH, Trigonometri (1955), The Ronald Press Company N.Y.