METODE DERET PANGKAT DAN DERET FOURIER

MILIK PERPUSTAKAAN IKIP PADANG
DITERIMA TGL. : 09 MAR 1996
SUMBER / HARGA : k /
KOLEKSI : k
NO. INVENTARIS : 32 / k / 98 - ma (2)
KLASIFIKASI : 515.243 3 Yar

Oleh :

YARMAN

MILIK UPT PERPUSTAKAAN
IKIP PADANG

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN PADANG

1994

KATA PENGANTAR

Buku ini penulis beri judul "Metode Deret Pangkat dan Deret Fourier". Metode deret pangkat digunakan dalam mencari solusi suatu persamaan diferensial. Sedangkan deret Fourier yang dimaksudkan dalam buku ini antara lain membahas tentang fungsi berkala dan integral Fourier.

Buku ini ditulis dengan maksud untuk memberi sumbangan bagi pembaca dalam rangka untuk memperluas wawasan dan meningkatkan ilmu pengetahuan di bidang matematika yang lebih lanjut. Buku ini disajikan sesederhana mungkin agar pembaca dapat dengan mudah mempelajarinya. kan ke hadirat Allah swt, karena atas izin-Nyalah buku yang berjudul "Terapan Diferensial dalam Ekonomi" dapat dirampungkan penulisannya.

Kepada teman-teman sejawat dan semua pihak yang telah membantu baik secara langsung maupun tak langsung hingga selesainya buku ini, penulis sampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Akhir kata, segala kritik dan saran-sanan untuk penyempurnaan buku ini di masa yang akan datang sangat penulis harapkan.

Padang, Juli 1994

P e n u l i s

DAFTAR ISI

MILIK UPT PERPUSTAKAAN IKIP PADANG

BAB I

PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN METODE DERET PANGKAT

Persamaan diferensial linier orde dua koefisien konstan telah dikenal metode-metode penyelesaiannya selain dengan metode deret pangkat. Hasilnya adalah fungsi-fungsi yang sederhana. Metode tersebut tidak digunakan bila koefisien dari persamaan diferensial tersebut bukan konstanta, melainkan berupa fungsi. Untuk jenis ini digunakan yang disebut dengan metode deret pangkat. Ternyata jenis-jenis tertentu persamaan diferensial ini mempunyai penyelesaian yang sangat penting peranannya dalam fisika dan teknik. Sebagai contoh diantaranya adalah fungsi-fungsi Legendre, Bessel, dan lain-lain yang disebut juga fungsi transenden tingkat tinggi.

A. Metode Derat Pangkat

Dengan metode deret pangkat ini, kita memisalkan penyelesaian persamaan diferensial tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk deret pangkat. Masalahnya ialah menentukan koefisien-koefisiennya.

Deret pangkat itu mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_m(x-a)^m + \ldots$$

Koefisien c_m ialah konstanta dan konstanta a disebut pusat, sedangkan x merupakan perubah. Dalam hal khusus $a = 0$, bentuk deret itu menjadi,

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

Contoh:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\text{Cos } x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots$$

$$\text{Sin } x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$$

Langkah-langkah dalam metode deret pangkat dapat disimpulkan sebagai berikut:

Misalkan persamaan diferensial itu berbentuk

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = r(x)$

Misalkan pula penyelesaian yang diinginkan dalam bentuk deret pangkat dengan pusat α.

Pertama-tama tuliskan $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ dan $r(x)$ dalam deret pangkat dengan pusat α. Ini dapat dilakukan dengan teorema Taylor. Misalkan selanjutnya penyelesaian persamaan diferensial itu dalam bentuk deret pangkat yang sama, yaitu:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

Misalkan pula, turunan deret itu dapat diperoleh dengan menurunkan deret tersebut suku demi suku.

Jadi:

$$y'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} mc_mx^{m-1}$$

$$y''(x) = c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_mx^{m-2}$$

Kalau semua deret ini disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial semula, kemudian disamakan koefisien pangkat-pangkat x yang sama di ruas kanan dan kiri, diperoleh sistem persamaan yang memberikan nilai c_o, c_1, c_2, c_3 dan seterusnya.

Contoh 1:

Selesaikanlah persamaan diferensial $y' - y = 0$.

Dalam hal ini koefisiennya konstanta. Jadi kita langsung memisalkan penyelesaiannya:

$y = \sum\limits_{m=o}^{\infty} c_mx^m$, Jadi $y' = \sum\limits_{m=1}^{\infty} mc_mx^{m-1}$

Substitusikan ke dalam persamaan diferensial, sehingga memberikan $(c_1 - c_o) + (2c_2 - c_1)x + (3c_3 - c_2)x^2 + \dots = 0$

Ini memberikan $c_1 - c_o = 0$, $2c_2 - c_1 = 0$, $3c_3 - c_2 = 0$

$c_1 = c_o$, $c_2 = \dfrac{c_1}{2} = \dfrac{c_o}{2!}$, $c_3 = \dfrac{c_2}{3} = \dfrac{c_o}{3!}$

Dengan demikian

$$y = c_o + c_ox + c_o\frac{x^2}{2!} + c_o\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= c_o \sum_{m=o}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = c_o e^x$$

Contoh 2:

Tentukanlah penyelesaian dari y" + y = 0.

Dengan pemisalan yang sama diperoleh

$$(2c_2 + 3.2c_3 x + 4.3c_4 x^2 + \dots) + (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = 0$$

atau

$$(2c_2 + c_o) + (3.2c_3 + c_1)x + (4.3c_4 + c_2)x^2 + \dots = 0$$

Dengan menyamakan masing-masing koefisien dengan nol, diperoleh

$$2c_2 + c_o = 0$$

$$3.2c_3 + c_1 = 0$$

$$4.3c_4 + c_2 . = 0$$

....

Yang memberikan

$$c_2 = -\frac{c_o}{2!}, \quad c_3 = -\frac{c_1}{3!}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4.3} = \frac{c_o}{4!}, \dots$$

Dalam hal ini c_o dan c_1 sembarang sehingga penyelesaian itu berbentuk:

$$y = c_o + c_1 x - c_o \frac{x^2}{2!} - c_1 \frac{x^3}{3!} + c_o \frac{x^4}{4!} + c_1 \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= c_o \sum_{m=o}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + c_1 \sum_{m=o}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$= c_o \operatorname{Cos} x + c_1 \operatorname{Sin} x$$

Latihan:

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut dengan metode deret pangkat. Dan bandingkan penyelesaiannya dengan yang diperoleh dengan cara lain. Apakah kesimpulan anda dari hasil pembandingan itu.

1. $y' = 2y$	2. $y' + 2y = 0$	3. $y' = ky$
4. $y' = 2xy$	5. $(1-x)y' = y$	6. $y' = xy$
7. $(1-x^2)y' = y$	8. $y' = y$	9. $y'' + 9y = 0$
10. $y'' = 4y$	11. $(x+1)y' = 3y$	12. $y'' = y'$

B. Sedikit Tentang Teori Deret Pangkat

Suatu deret pangkat $\sum_{m=o}^{\infty} c_m(x-a)^m$ ialah fungsi dari x, misalkan S(x), dituliskan:

$$S(x) = \sum_{m=o}^{\infty} c_m(x-a)^m$$

Perhatikan, bila yang dijumlahkan hanya sampai $(x-a)^n$ saja dan diperoleh:

$$S_n(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

yang disebut jumlah bagian deret tersebut. Jelas terlihat

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x) \text{ dengan } R_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} c_m(x-a)^m$$

disebut *suku sisa*.

Kalau diperhatikan semua jumlah bagian itu, ia merupakan *barisan fungsi*.

$$S_o(x),\ S_1(x),\ S_2(x),\ S_3(x),\ \ldots\ ,S_n(x),\ \ldots$$

Kalau pada x diberikan suatu nilai, maka diperoleh

$$S_o(x_o),\ S_1(x\ ),\ S_2(x_o),\ S_3(x_o),\ \ldots\ ,S_n(x_o),\ \ldots$$

yang merupakan barisan bilangan riel. Kalau barisan ini konvergen maka deret itu juga dikatakan konvergen untuk $x = x_o$, jadi

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x_o) = S(x_o) = \sum_{m=o}^{\infty} c_m(x_o - a)^m$$

Jika barisan itu konvergen untuk setiap x dalam suatu selang $\uparrow$, maka dikatakan bahwa barisan fungsi itu konvergen pada $\uparrow$ dan deret itu juga konvergen pada $\uparrow$. Kalau barisan itu divergen pada nilai x tertentu, maka demikian pula dikatakan untuk deret yang bersangkutan.

Apakah artinya suatu barisan $S_n(x_o)$ konvergen ke $S(x_o)$?

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu N, sehingga untuk setiap $n > N$.

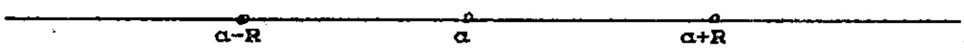
$$|S_n(x_o) - S(x_o)| = |R_n(x_o)| < \varepsilon$$

Ungkapan di atas berarti, kalau digambarkan titik yang menggambarkan $S(x_o)$ pada suatu garis riel dan gambarkan pula selang ($S(x_o)-\varepsilon$, $S(x_o)+\varepsilon$), maka mulai suatu indeks n tertentu yang cukup besar, semua $S_n(x_o)$ terletak dalam selang tersebut.

$S(x_o)-\varepsilon$ $\qquad$ $S(x_o)$ $\qquad$ $S(x_o)+\varepsilon$

Kalau ε kita ambil makin kecil, maka batas indeks n itu harus lebih besar lagi. Dalam hal $S_n(x_o)$ konvergen itu, dapat pula dikatakan bahwa jumlah bagian itu adalah hampiran dari $S(x_o)$. Karena sisa $R_n(x_o)$ dapat dibuat lebih kecil dengan membuat n lebih besar, maka berarti bahwa hampiran itu lebih baik, bila kita ambil jumlah bagian dari lebih banyak suku-sukunya.

Deret $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ konvergen pada $x = a$. Kalau ada nilai-nilai x lainnya untuk mana deret itu konvergen, akan terletak pada suatu selang dengan pusatnya $x = a$. Selang itu disebut *selang kekonvergenan* atau disingkat dengan *selang konvergen* deret tersebut. Kalau selang konvergen itu ialah (a-R,a+R), maka R disebut *jejari kekonvergenan* atau *jejari konvergen* saja.



Apakah artinya kalau $R = 0$ dan kalau $R = \infty$?

Misalkan deret $\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m$ konvergen ke S(x), dengan selang konvergen (a-R,a+R) ditentukan dengan rumus:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m}} \quad \text{atau} \quad R = \lim_{m\to\infty} \left| \frac{c_m}{c_{m+1}} \right|$$

asal saja limit itu ada.

Dalam hal di atas dikatakan bahwa deret pangkat itu menyatakan fungsi S(x) di selang konvergennya. Jadi kalau diambil hanya jumlah bagian deret itu saja, maka jumlah bagian ini merupakan hampiran S(x).

Contoh 1:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$c_m = 1 \longrightarrow \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{c_m} = 1$$

Contoh 2:

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$c_m = \frac{1}{m!} \longrightarrow \frac{c_m}{c_{m+1}} = m+1 \longrightarrow \infty$ kalau $m \longrightarrow \infty$. Ini berarti $R = \infty$. Jadi deret pangkat tersebut konvergen diseluruh sumbu x.

Contoh 3:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!\ x^m = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots$$

$c_m = m! \longrightarrow \frac{c_m}{c_{m+1}} = \frac{1}{m+1} \longrightarrow 0$, bila $m \longrightarrow \infty$. Ini berar- $R = 0$. Jadi deret pangkat tersebut konvergen pada titik pusat saja, yaitu $x = 0$.

Beberapa Sifat Deret Pangkat

1. Pendiferensialan : Jika $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m$ dalam selang konvergennya

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} mc_m(x-a)^{m-1}$$

2. Jumlah dua deret :

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-a)^m$$

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m$$

masing-masing dengan jejari konvergen positif.

Dalam irisan selang konvergen kedua deret itu.

$$f(x) + g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (\ b_m + c_m\ )(x-a)^m$$

3. Perkalian dua deret:

   $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-a)^m$ dan selang konvergen

   $g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m$ dan selang konvergen

   Jejari konvergen positif.

   untuk setiap $x \in \uparrow \cap \leftarrow$.

   $$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_{n-1} c_1 + b_n c_0)(x-a)^n$$

4. Koefisien nol : $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = 0$ dalam daerah konvergennya jika dan hanya jika semua $c_m = 0$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

5. Suatau fungsi yang dapat dinyatakan sebagai deret pangkat $\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m$ dengan jejari $R > 0$, dikatakan *analitis* pada $x = a$.

Teorema Keujudan Penyelesaian Deret Pangkat

Perhatikan persamaan diferensial: $y'' + f(x)y' + g(x) = r(x)$ f, g, dan r analitis pada $x = a$. Maka setiap penyelesaiannya analitis pada $x = a$ dan dapat dinyatakan sebagai deret pangkat dalam $(x-a)$ dengan jejari konvergen $R > 0$.

Latihan:

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 10, tentukanlah jejari konvergen dari deret berikut:

1. $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m}$

2. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{4^m}$

3. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$

4. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)}$

5. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{k^m}$

6. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{5^m} (x-5)^m$

7. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3m)!}{(m!)^3} x^m$

8. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2m}}{m!}$

9. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{5^m} (x-1)^{2m}$

10. $\sum_{m=0}^{\infty} m^{2m} x^m$

Untuk soal nomor 11 sampai dengan nomor 18, gunakan metode deret pangkat untuk menyelesaikan persamaan diferensial berikut:

11. $xy' = 3y + 3$

12. $(1-x^2)y' = 2xy$

13. $(x+1)y' - (2x+3)y = 0$

14. $xy' = (x+1)y$

15. $y'' - 3y' + 2y = 0$

16. $(x-3)y' - xy = 0$

17. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

18. $y'' + y = 2x^2 + x$

C. Penmgembangan Metode Deret Pangkat

Banyak persamaan diferensial yang penting, tidak analitis pada $x = 0$. Dalam hal ini berlaku teorema berikut ini:

Teorema:

Persamaan diferensial yang berbentuk

$$y'' + \frac{a(x)}{x} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0$$

dengan $a(x)$ dan $b(x)$ analitis pada $x = 0$, mempunyai sekurangnya satu penyelesaian yang berbentuk

$$y(x) = x^r \sum_{m=o}^{\infty} c_m x^m$$

dengan r riel atau kompleks, $c_o = 0$

Bukti dari teorema ini menggunakan teori fungsi dengan peubah kompleks. Yang akan ditinjau di sini adalah bagaimana cara memperoleh penyelesaian itu. Metoda yang akan dibahas, disebut *Metode Frobenius* (Shepley L Ross, 1984, hal.236).

Untuk menyelesaikan itu, kita tuliskan persamaan diferensial di atas dalam bentuk

$$x^2 y'' + xa(x)y' + b(x)y = 0 \quad \text{.........................(1)}$$

Karena anlitis di x = 0, dapat dituliskan

$$a(x) = \sum_{m=o}^{\infty} a_m x^m \qquad\qquad b(x) = \sum_{m=o}^{\infty} b_m x^m$$

dan misalkan

$$y(x) = x^r \sum_{m=o}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=o}^{\infty} c_m x^{m+r} \quad \text{.........................(2)}$$

Dengan demikian, misalkan

$$y' = \sum_{m=o}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=o}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

Jika bentuk-bentuk itu disubstitusikan ke dalam (1) diperoleh:

$$x^2 \sum_{m=o}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2} + x\left(\sum_{m=o}^{\infty} a_m x^m \right)\left(\sum_{m=o}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} \right)$$

$$+ \left(\sum_{m=o}^{\infty} b_m x^m \right)\left(\sum_{m=o}^{\infty} c_m x^{m+r} \right) = 0$$

atau

$$\sum_{m=o}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \left(\sum_{m=o}^{\infty} a_m x^m \right)\left(\sum_{m=o}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} \right)$$

$$+ \left(\sum_{m=o}^{\infty} b_m x^m \right)\left(\sum_{m=o}^{\infty} c_m x^{m+r} \right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dengan menggabungkan semua koefisien x berpangkat sama, dan menyamakannya dengan nol, kita peroleh sistem persamaan yang mengandung c_m. Pangkat x yang terkecil adalah r dan koefisien x^r adalah:

$r(r - 1)c_o + a_o c_o r + b_o c_o = 0$

karena $c_o = 0$ (lihat teorema)

$r(r - 1) + a_o r + b_o = 0$ atau

$$r^2 + (a_o - 1)r + b_o = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

yang disebut *persamaan indeks* (Shepley L. Ross, 1984, hal. 237).

Kita cukup menentukan dua penyelesaian bebas linier sebagai basis ruang penyelesaian. Salah satunya berbentuk (2) dengan r penyelesaian (4). Penyelesaian kedua bergantung pada penyelesaian indeks (4), yaitu:

Kasus 1 : $r_1 - r_2$ = bilangan bulat.

Kasus 2 : $r_1 = r_2$

Kasus 3 : $r_1 - r_2$ = bilangan bulat.

Kasus 1: $r_1 - r_2$ = Bilangan Bulat.

Untuk masing-masing r_1 dan r_2 kita tentukan c_m dengan menggunakan rumus rekursi yang dapat diturunkan dari (3). Kita peroleh

$$y_1 = x^{r1}\sum_{m=0}^{\infty} c_{m1}x^m \qquad \text{dan} \qquad y_2 = x^{r2}\sum_{m=0}^{\infty} c_{m2}x^m$$

yang saling bebas linier, karena y_1/y_2 = konstanta.

Contoh Soal:

Perhatikan persamaan diferensial $x^2y'' + (x^2 + \frac{5}{36})y = 0$

a. Tunjukkan bahwa persamaan indeksnya:

$$r(r-1) + \frac{5}{36} = 0$$

b. Tunjukkan pula rumus rekursinya

$$[(r+1)r + \frac{5}{36}]c_1 = 0 \qquad (m = 1)$$

$$(m+r)(m+r-1)c_m + c_{m-2} + \frac{5}{36}c_m = 0 \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

c. Tunjukkan bahwa $c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = c_{2k+1} = 0$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_{2k} = -\frac{3}{4}\,\frac{c_{2k-2}}{k(3k+1)}$$

d. Tunjukkan: $y_1 = c_o x^{5/6}(1 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{9}{896}x^4 - + \ldots)$

$$= c_o\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\tfrac{3}{4})^k\frac{2k+5}{k!\;1.4.\ldots.(3k+1)}$$

$$y_2 = c_o^* x^{1/6}(1 - \frac{3}{8}x^2 + \ldots)$$

MILIK UPT PERPUSTAKAAN IKIP PADANG

$$= c_o^* + c_o^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{x^{2k+1/6}}{k!\ 2.5\ \ldots\ (3k-1)}$$

Kasus 2: $r_1 = r_2$

Dari persamaan indeks diperoleh $r = \frac{1}{2}(1 - a_o)$.
Melalui rumus rekursi dan r di atas diperoleh

$y_1(x)) = x^r(c_o + c_1x + c_2x^2 + \ldots)$

Penyelesaian kedua kita peroleh dengan menggunakan metode variasi parameter:

Misalkan $y_2(x) = u(x)\ y_1(x)$

Jadi $y_2'(x) = u'y_1 + u'y_1$

$y_2''(x) = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$

Substitusi ke dalam persamaan diferensial (1), kita peroleh

$x^2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + xa(x)(u'y_1 + uy_1') + buy_1 = 0$

atau

$(x^2y_1u'' + 2x^2y_1'u' + xa(x)y_1u') + u(x^2y_1'' + xa(x)y_1' + by_1 = 0$

Suku dalam tanda kurung terakhir sama dengan nol, karena y_1 penyelesaian dari persamaan diferensial (1), jadi

$(x^2y_1u'' + 2x^2y_1'u' + xa(x)y_1u') = 0$

atau

$$u'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a_o}{x_1} + \ldots\right)u' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Suku-suku pada titik-titik itu adalah suku konstanta dan pangkat positif dari x. Jika dituliskan y_1 dalam bentuk deret pangkat diperoleh:

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{x^{r-1}\,[\,rc_o + (r+1)c_1 x + \ldots\,]}{x^r[\,c_o + c_1 x + \ldots]}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{rc_o + (r+1)c_1 x + \ldots}{c_o + c_1 x + \ldots} \right) = \frac{r}{x} + \ldots$$

Sehingga (5) menjadi

$$u'' + \left[\frac{2r + a_o}{x} + \ldots \right]u' = 0$$

Karena $r = \frac{1}{2}(1 - a_o)$, maka $2r + a_o = 1$, jadi

$$\frac{u''}{u} = -\frac{1}{x} + \ldots$$

$$\ln u' = -\ln x + \ldots$$

$$u' = \frac{1}{x}\, e^{(\ldots)}$$

$e^{(\ldots)}$ dapat diuraikan atas deret pangkat. Karena itu diperoleh

$u(x) = \ln x + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \ldots$

Dengan demikian $y_2(x) = y_1 \ln x + x^r \sum_{m=o}^{\infty} A_m\, x^m$

Contoh Soal:

Perhatikan $x(x-1)y'' + (3x-1)\,y' + y = 0$

a. Persamaan indeksnya

$[-r(r-1) - r]\,c_o = 0$ atau $r^2 = 0$

b. Rumus rekursinya

$m(m-1)c_m - (m+1)mc_{m+1} + 3mc_m - (m+1)c_{m+1} + c_m = 0$

c. $c_m = c_o$ untuk semua m.

d. $y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$, kalau dipilih $c_0 = 1$.

e. Kalau $y_2 = uy_1$, u memenuhi persamaan diferensial

$xu'' + u' = 0$ atau $u = \ln x$

f. Penyelesaian kedua

$$y_2 = \frac{\ln x}{1-x}$$

Coba anda tunjukkan sendiri (a) sampai dengan (f) di atas.

Kasus 3: $r_1 - r_2$ = bilangan bulat

Misalkan $\begin{cases} r_1 = r \\ r_2 = r - p, \text{ p bilangan asli} \end{cases}$

$$y_1(x) = x^r(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

Dengan diperolehnya c_m dengan menggunakan rumus rekursi, bila digunakan pula metoda variasi parameter, yaitu dengan memisalkan $y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$, diperoleh

$$\frac{u''}{u} = -\left[\frac{p+1}{x} + \dots \right]$$

$$u' = x^{-(p+1)} e^{(\dots)}$$

titik-titik dalam tanda kurung itu adalah deret dengan pangkat tak negatif, atau

32/k/98(2)

$$u'' = \frac{1}{x^{p+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{x^{p+1-m}}$$

Jadi

$$u = -\frac{1}{px^p} - \dots + k_p \ln x + x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

Contoh Soal:

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

(1). $(x^2 - 1)x^2y'' - (x^2 + 1)xy' + (x^2 + 1)y = 0$

a. Persamaan indeksnya adalah

$(r - 1)(r + 1) = 0$

$r_1 = 1$ dan $r_2 = -1$

b. Rumus rekursinya adalah

$-(r + 2)rc_1 = 0$

$(m + r - 1)^2 c_m = (m + r + 3)(m + r + 1)c_{m+2}$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$

c. Penyelesaia pertamanya adalah:

untuk $r = r_1 = 1$ diperoleh

$$c_{m+2} = \frac{m^2}{(m + 4)(m + 2)} c_m \qquad (m = 0, 1, \dots)$$

Jadi $y_1(x) = c_0 x$

d. Penyelesaian keduanya adalah:

MILIK UPT PERPUSTAKAAN ... ANG

untuk $r = r_2 = -1$ diperoleh

$$(m - 2)^2 c_m = (m + 2)mc_{m+2} \qquad (m = 0, 1, \dots)$$

Jadi $y_2(x) = kx \ln x + \frac{1}{x} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$

$= x \ln x + \frac{1}{2x}$

(2). $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

a. Persamaan indeksnya adalah

$r(r - 1) + r - \frac{1}{4} = 0$ atau $r^2 = \frac{1}{4}$

$r_1 = \frac{1}{2}$ dan $r_2 = -\frac{1}{2}$

b. Persaman rekursinya adalah

$[(r + 1)r + (r + 1) - \frac{1}{4}]c_1 = 0$ $(m = 1)$

$[(m + r)(m + r - 1) + m + r - \frac{1}{4}]c_m + c_{m-2} = 0$

$(m = 2, 3, \ldots)$

c. Penyelesaian pertamanya adalah

untuk $r = r_1 = \frac{1}{2}$ diperoleh

$(m + 1)mc_m + c_{m-2} = 0$

$c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = 0$

dan untuk yang berindeks genap, tulis $m = 2p$,

sehingga: $c_{2p} = -\frac{c_{2p-2}}{2p(2p + 1)}$ $(p = 1, 2, \ldots)$

maka

$c_2 = -\frac{c_0}{3!}$,

$c_4 = -\frac{c_2}{4.5} = \frac{c_0}{5!}$,

$c_6 = -\frac{c_0}{7!}$,

....

$$y_1(x) = c_o x^{1/2} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!} = c_o x^{-1/2} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$= c_o \frac{\text{Sin } x}{\sqrt{x}}$$

d. Penyelsaian keduanya adalah:

$$y_2(x) = k y_1(x) \ln x + x^{-1/2} \sum_{m=o}^{\infty} c_m x^m$$

$$m(m-1)c_m + c_{m-2} = 0 \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

$$\text{atau} \quad c_m = -\frac{c_{m-2}}{m(m-1)} \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

dari sini didapat:

$$c_2 = -\frac{c_o}{2!},$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4.3} = \frac{c_o}{4!},$$

$$c_6 = -\frac{c_o}{6!},$$

....

$$c_3 = -\frac{c_1}{3!},$$

$$c_5 = -\frac{c_3}{5.4} = \frac{c_1}{5!},$$

$$c_7 = -\frac{c_1}{7!},$$

....

Kita boleh mengambil $c_1 = 0$, sehingga

$$y_2(x) = c_o x^{-1/2} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

$$= c_o \frac{\text{Cos } x}{\sqrt{x}}$$

Latihan:

Gunakan metode Frobenius untuk menentukan penyelesaian deret dari persamaan diferensial berikut:

1. $x(1 - x)y'' + 2(1 - x)y' - 2y = 0$
2. $2x(x - 1)y'' - (x + 1)y' + y = 0$
3. $x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = 0$
4. $16x^2y'' + 3y = 0$
5. $xy'' + 2y' + xy = 0$
6. $x^2y'' + 6xy' + (x^2 + 6)y = 0$
7. $2x^2y'' + xy' - 3y = 0$
8. $xy'' - y = 0$
9. $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$
10. $x^2y'' + x^3y' + (x^2 - 2)y = 0$
11. $x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0$
12. $(x + 1)^2y'' + (x + 1)y' - y = 0$
13. $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$
14. $xy'' + y' - xy = 0$
15. $x(x + 1)^2y'' + (1 - x^2)y' + (x - 1)y = 0$

16. $(1 + x)x^2y'' - (1 + 2x)xy' + (1 + 2x)y = 0$

17. $2(x - 1)y'' - (4x^2 - 3x + 1)y' + (2x^2 - x + 2)y = 0$

18. $x^2(x + 1)^2y'' - (5x^2 + 8x + 3)xy' + (9x^2 + 11x + 4)y = 0$

19. $2x(1 - 2x)y'' + (12x^2 - 4x + 1)y' - 2(4x^2 + 1)y = 0$

20. $2x^2(1 - 2x)y'' + (4x^2 - 8x + 5)xy' + (2x^2 - x + 1)y = 0$

BAB II
DERET FOURIER

Masalah dalam teknik sering sekali muncul dalam bentuk *fungsi berkala*. Josph Fourier (1768-1830) mencoba menyatakan fungsi berkala ini dalam bentuk fungsi berkala yang sederhana, yaitu fungsi sinus dan fungsi cosinus. Diperolehnya ungkapan fungsi berkala tersebut dalam bentuk deret sinus dan cosinus, yang disebut *Deret Fourier* (Erwin Kreyszig, 1983, hal 462).

Ungkapan fungsi atau hampiran fungsi dengan deret sinus dan cosinus ini dapat pula kemudian dikembangkan menjadi ungkapan atau hampiran dengan deret fungsi-fungsi tertentu lainnya.

A. Fungsi Berkala

Muarray R. Spiegel (1986, hal 21) mengatakan bahwa:

Suatu fungsi $y = f(x)$ disebut *fungsi berkala* dengan kala $T>0$ bila untuk setiap x berlaku $f(x+T) = f(x)$. Bilangan $T>0$ yang terkecil yang masih merupakan kala T, disebut *kala dasar*, atau yang selanjutnya kan disebut saja dengan *kala*.

Contoh grafik fungsi berkala.

MILIK UPT PERPUSTAKAAN
IKIP PADANG

Contoh fungsi berkala:

1. $y = \text{Sin}x$, mempunyai kala 2π dan ini merupakan kala terkecil. Demikian pula halnya dengan: $y = \text{Cos}x$. Tetapi $n.2\pi$ (n bilangan asli) juga merupakan kalanya.
2. $y = \text{tg}x$, mempunyai kala 2π, tetapi kala terkecil ialah $n\pi$ juga merupakan kalanya.
3. $f(x) = \text{Sin}ax$, berapakah kala dasarnya?

   Misalkan kala dasarnya T, maka haruslah $f(x + T) = f(x)$ yaitu $\text{Sin } a(x + T) = \text{Sin } ax$. Diketahui $\text{Sin } a(x + T) = \text{Sin}(ax + aT) = \text{Sin } ax$ bila nilai terkecil $aT = 2\pi$. Jadi $T = \frac{2\pi}{a}$, yaitu kala dasar dari sin ax.

Latihan:

1. Berapakah kala dasar dari $f(x) = \text{Cos } \frac{x}{a}$
2. Berapa pulakah kala $f(x) = \text{Sin } n\pi x$, bila n bilangan asli
3. Berapa pulakah kala $f(x) = \text{Cos } 2n\pi x$, bila n suatu bilangan asli.
4. Berapakah kala $f(x) = C$, C adalah konstanta.
5. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai kala T, maka tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real a dan b,

   $$h(x) = af(x) + bg(x)$$

   juga mempunyai kala T.
6. a. Gamabarkan grafik fungsi Sinx, Sin2x, Sin3x, Sin4x, Sin nx.

   b. Demikian pula grafik fungsi Cosx, Cos2x, Cos3x, Cos4x, ... ,Cos nx.

7. Berapakah kala terkecil fungsi berikut:

   a. $k(x) = b_2 \text{Sin } 2x + b_3 \text{Sin } 3x$

   b. $h(x) = a_o + a_3 \text{Cos } 3x + a_4 \text{Cos } 4x + a_8 \text{Cos } 8x + a_n \text{Cos } nx$

   c. $m(x) = h(x) + k(x)$

8. Gambarkan grafik dari fungsi berikut:

   a. $f(x) = \text{Sinx}$

   b. $g(x) = \text{Sinx} + \frac{1}{3} \text{Sin } 3x$

   c. $h(x) = \text{Sinx} + \frac{1}{3} \text{Sin } 3x + \frac{1}{5} \text{Sin } 5x$

   d. $k(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi, \quad k(x + 2\pi) = k(x) \end{cases}$

   e. $f(x) = \text{Sin } 2\pi x$

   f. $g(x) = \text{Sin } 2\pi x + \frac{1}{3} \text{Sin } 6\pi x$

   g. $h(x) = \text{Sin } 2\pi x + \frac{1}{9} \text{sin } 6\pi x + \frac{1}{5} \text{Sin } 10\pi x$

   h. $k(x) = \frac{1}{2} x, \quad -\pi < x < \pi, \quad k(x + 2\pi) = k(x)$

   i. $f(x) = - \text{Cosx}$

   j. $g(x) = - \text{Cosx} + \frac{1}{4} \text{Cos } 2x$

   k. $h(x) = - \text{Cosx} + \frac{1}{4} \text{Cos } 2x - \frac{1}{9} \text{Cos } 3x$

   l. $k(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, & -\pi < x < \pi \\ k(x + 2\pi) = k(x) \end{cases}$

   m. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \end{cases}$

   n. $f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$

9. Hitunglah $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{Cos } nx \, dx = \ldots$

10. Hitunglah $\int_{0}^{\pi} e^{x} \text{ Cos } nx \, dx = \ldots$

11. Hitunglah $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \text{ Sin } nx \, dx = \ldots$

B. Deret Fourier

Fungsi berkala yang dijumpai dalam penerapan, bentuknya seringkali sangat rumit. Fungsi berkala ini ingin dinyatakan dalam bentuk fungsi berkala yang lebih sederhana bentuknya, atau setidaknya dihampiri dengan fungsi berkala yang sederhana. Untuk fungsi berkala dengan kala 2π, bentuk yang sederhana ialah fungsi sinus dan cosinus, atau kombinasi liniernya.

Misalkan suatu fungsi $f(x)$ dengan kala 2π dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi linier fungsi-fungsi sederhana sebagai berikut:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{N} (a_n \text{Cos } nx + b_n \text{Sin } nx) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Berapakah harusnya a_o, a_n, b_n, $n = 1,2,3,\ldots,N$

Untuk ini kita perhatikan hasil-hasil pengintegralan berikut:

a. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin } nx \, dx = 0$

b. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx \, dx = 0$

c. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin } nx \text{ Sin } mx \, dx = \begin{cases} 0, & n = m \\ \pi, & n = m \end{cases}$

d. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx \text{ Cos } mx \, dx = \begin{cases} 0, & n = m \\ \pi, & n = m \end{cases}$

e. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin } mx \text{ Cos } nx \, dx = 0$, untuk setiap m dan n bilangan asli.

Dengan demikian hasil pengintegralan di atas dapat dipergunakan untuk menentukan a_o, a_n, b_n menurut Shepley L. Ross (1984, hal 611) disebut sebagai *koefisien Fourier* f(x), yaitu dari (1), maka:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= a_o \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N} (a_n \text{Cos } nx + b_n \text{Sin } nx)\ dx \\
&= 2\pi a_o + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin } nx\,dx\Big) \\
&= 2\pi a_o
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$a_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

Untuk setiap m dari (1), maka:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Cos } mx\,dx &= a_o \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } mx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{n=1}^{N}(a_n \text{Cos } nx + \\
&\qquad b_n \text{Sin } nx)\Big) \text{Cos } mx\,dx \\
&= a_o \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } mx\,dx + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } nx \\
&\qquad \text{Cos } mx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin } nx \text{ Cos } mx\,dx\Big) \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3)}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan integral (b), maka integral pertama di ruas akhir sama dengan 0. Sedangkan menurut (d) hasilnya sama dengan 0 untuk n = m dan sama dengan π untuk n = m. Kemudian menurut (e), integral terakhir juga nol. Jadi akhirnya diperoleh :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Cos} mx \, dx = a_m \pi$$

$$\text{atau} \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Cos} mx \, dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots, N$$

Dengan memperhatikan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Sin} mx \, dx = a_o \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Sin} mx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx) \operatorname{Sin} mx \, dx$$

$$\text{diperoleh pula:} \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Sin} mx \, dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots, N$$

Bagaimanakah halnya dengan fungsi f(x) lain yang berkala dengan kala π ?. Jika ada fungsi $\varphi(x)$ yang berbentuk:

$$\varphi(x) = a_o + \sum_{n=1}^{N} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx)$$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(x) = f(x)$$

maka dapat dituliskan

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{N} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\text{Dalam hal ini:} \quad a_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Cos} nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

Ruas kanan dari (6) disebut dengan Deret Fourier dari f(x), a_o, a_n, b_n disebut dengan *koefisien Fourier* dari f(x).

Teorema

Jika (1) f(x) kontinu bagian demi bagian dalam interval $-\pi < x < \pi$ (interval tersebut dapat dibagi atas sebanyak hingga interval bagian yang hingga, di mana f(x) kontinu dan pada titik-titik ujung interval bagian tersebut boleh tak kontinu loncat).

(2) f(x) berkala dengan kala 2π

(3) mempunyai turunan kanan dan turunan kiri di setiap titik (Erwin Kreyszig, hal 469).

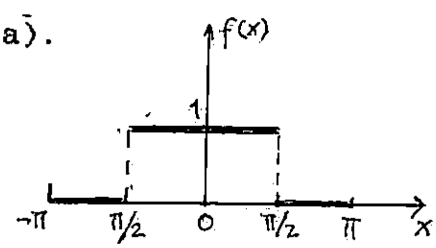
maka deret Fourier (6) konvergen ke f(x) di setiap titik x di mana f(x) kontinu dan pada x_o di mana f(x) tak kontinu loncat, konvergen ke

$$\lim_{x \to x_{o+}} f(x) + \lim_{x \to x_{o-}} f(x)$$

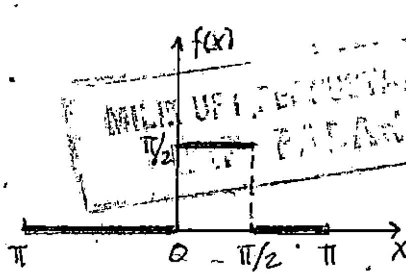
Latihan

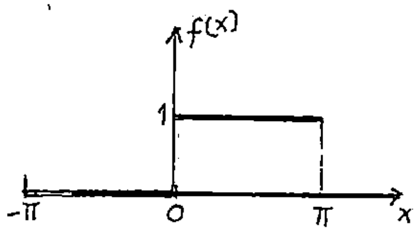
1. Tentukan deret Fourier fungsi berikut dengan kala (perioda) 2π

a).



b).



c). 

2. Tentukan pula deret Fourier dari:

   a). $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

   b). $f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$

   c). $f(x) = x^3, \quad -\pi < x < \pi$

   d). $f(x) = x^4, \quad -\pi < x < \pi$

3. Apakah dugaan anda mengenai kesimpulan yang dapat ditarik dengan membandingkan soal 2a,2c dengan soal 2b dan 2d di atas?

4. Tentukan deret Fourier dari:

   a). $f(x) = \begin{cases} x, & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

   b). $f(x) = \begin{cases} 0, & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

   c). $f(x) = \begin{cases} x^2, & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Contoh Gelombang Bujursangkar

Tentukan koefisien Fourier dari fungsi

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{dan} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{-k}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx +$$

$$\frac{k}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos nx\, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{-k}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin nx\, dx +$$

$$\frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{2k}{\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & \text{, untuk n ganjil} \\ 0 & \text{, untuk n genap} \end{cases}$$

Jadi $f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \right)$

Kalau dilihat jumlah parsialnya, maka:

$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x$

$S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right)$ dan seterusnya.

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$, maka $k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \right)$ atau

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Hasil ini diperoleh Leibniz ($\pm$ 1673) dari segi geometri.

Bukti kekonvergenan deret Fourier untuk hal khusus : f(x) kontinu dan mempunyai turunan pertama dan kedua yang kontinu.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)$$

$\sin nx \cdot dx$

$$= \frac{1}{n^2\pi} f'(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx\, dx$$

Suku pertama dari ruas kanan sama dengan nol karena f'(x) berkala dengan kala 2π. $f''(x)$ kontinu dalam selang pengintegralan, maka $|f''(x)| < M$ (dimana M suatu konstanta) Dari $|\text{Cos } nx| \leq 1$, berikutnya diperoleh pula

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \text{ Cos } nx \, dx \right| < \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, dx = \frac{2M}{n^2}$$

Dengan cara yang sam diperoleh :

$$|b_n| \leq \frac{2M}{n^2} \quad \text{untuk semua n.}$$

Jikaketerbatasanbndiataskitaturunkansepertiberikut:

Jadi $|a_o + \sum_{n=1}^{N}(a_n \text{ Cos } nx + b_n \text{ Sin } nx)| \leq |a_o| + \sum_{n=1}^{N}(a_n + b_n) \leq$

$$|a_o| - 2M.2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

Karena $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ homogen, maka deret Fourier juga homogen.

C. Funsi Berkala dengan Kala Semabarang

Misalkan $y = f(t)$ mempunyai kala T, jadi $f(x+T) = f(x)$ untuk setiap t. Kalau disubtitusikan $t = \frac{T}{2\pi}x$, maka $f(t) = f(\frac{T}{2\pi}x) = \varphi(x)$ dan untuk setiap x, $\varphi(x+2\pi) = f(\frac{T}{2\pi}x + T) = f(\frac{T}{2\pi}x) = \varphi(x)$. Ini berarti $\varphi(x)$ mempunyai kala 2π.

Menurut hasil sebelumnya,

$$\varphi(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{ Cos } nx + b_n \text{ Sin } nx)$$

dengan

$$a_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \text{ Cos } nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

MILIK UPT PERPUSTAKAAN
IKIP PADANG

Dengan mengembalikan x ke t dengan hubungan $x = \frac{2\pi t}{T}$, hasil di atas berarti:

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} \frac{2n\pi t}{T} + b_n \operatorname{Sin} \frac{2n\pi t}{T})$$

dengan

$$a_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{2\pi}{T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Cos} \frac{2n\pi t}{T} \frac{2\pi}{T} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{Cos} \frac{2n\pi t}{T} dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Sin} \frac{2n\pi t}{T} \frac{2\pi}{T} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{Sin} \frac{2n\pi t}{T} dt$$

Catatan: Karena f(t) mempunyai kala T, maka batas pengintegralan dalam menentukan koefisien Fourier itu dapat diganti dati 0 ke T, dari -T ke 0, dari a ke a+T, asal saja panjang daerah pengintegralannya sama dengan T.

Contoh: Gelombang Bujursangkar berkala T

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < -1 \\ k, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \qquad \text{kala } T = 4$$

$$a_o = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} f(t)\, dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} k\, dt = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(t) \operatorname{Cos} \frac{2n\pi t}{4} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} k \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{2} dt$$

$$= \frac{2k}{n\pi} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ genap} \\ \pm \frac{2k}{n\pi}, & n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(t) \text{ Sin } \frac{2n\pi t}{4} dt = 0$, karena integral dari fungsi ganjil. Jadi:

$$f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\text{Cos } \frac{\pi t}{2} - \text{Cos } \frac{3\pi t}{2} + \text{Cos } \frac{5\pi t}{2} - \text{Cos } \frac{7\pi t}{2} + \ldots\right)$$

Catatan : Rectifier setengah gelombang (half wave rectifier).

$$U(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ E \text{ Sin } \omega t, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$a_o = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} U(t)\, dt = \frac{\omega E}{2\pi} \int_{0}^{\pi/\omega} \text{Sin } \omega t\, dt = \frac{E}{\pi}$$

$$a_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} U(t) \text{ Cos } \frac{2n\pi t}{2\pi/\omega} dt = \frac{\omega E}{\pi} \int_{0}^{\pi/\omega} \text{Sin } \omega t \text{ Cos } n\omega t\, dt$$

$$= \frac{\omega E}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \text{Sin } (1 + n)\omega t + \text{Sin } (1 - n)\omega t \quad dt$$

$$= \frac{\omega E}{2\pi} \left[\frac{-\text{Cos}(1 + n)\omega t}{(1 + n)\omega} - \frac{\text{Cos}(1 - n)\omega t}{(1 - n)\omega} \right] \Bigg|_{0}^{\pi/\omega}$$

$$= \frac{E}{2\pi} \left[\frac{-\text{Cos}(1 + n)\pi + 1}{(1 + n)} + \frac{-\text{Cos}(1 - n)\pi + 1}{(1 - n)} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{2E}{(1+n)(1-n)}, & n \text{ genap} \\ 0, & n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$b_1 = E/2$ dan $b_n = 0$, untuk $n = 2, 3, 4, \ldots$

Sehingga : $U(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \text{ Sin } \omega t - \frac{2E}{\pi} \left[\frac{1}{1,3} \text{ Cos } \omega t + \frac{1}{3,5} \text{ Cos } 4\omega t + \ldots \right]$

Latihan

Tentukan deret Fourier f(t) dengan perioda T, gambarkan f(t) untuk tiga suku pertama deret Fourier bila diketahui:

1. $f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 3, \end{cases} \quad T = 4$

2. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 1-t, & 1 < t < 2, \quad T = 2 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < t < 0 \\ -t, & 0 < t < 1, \quad T = 2 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + t, & -\frac{1}{2} < t < 0 \\ \frac{1}{2} - t, & 0 < t < \frac{1}{2}, \quad T = 1 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} 1, & -2 < t < 0 \\ e^{-t}, & 0 < t < 2, \quad T = 4 \end{cases}$

6. $f(t) = t, \quad -1 < t < 1, \quad T = 2$

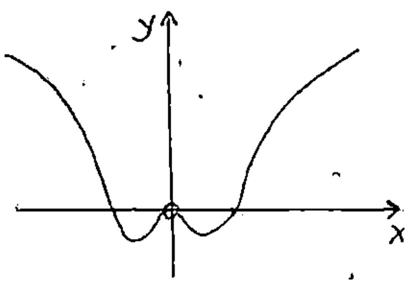
7. $f(t) = t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \quad T = \pi$

D. Fungsi genap dan Fungsi Ganjil

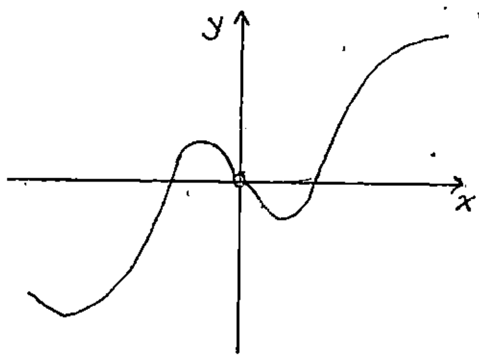
Jika f(x) fungsi ganjil, yaitu $f(x) = -f(-x)$ untuk setiap x, maka:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0 \text{ , untuk setiap x } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Jika f(x) fungsi genap, yaitu $g(x) = g(-x)$ untuk setiap x, maka: $\int_{a}^{a} g(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\, dx$, untuk setiap x ....(**)



fungsi genap



fungsi ganjil

Hal tersebut di atas dapat diterangkan sebagai berikut,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Dengan substitusi x = -t,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Jadi (7) menjadi

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Sebagai tugas anda, coba buktikan (**) !

Teorema 1: Deret Fourier Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Deret Fourier fungsi genap f(t) dengan prioda T, ialah *deret Fourier kosinus* (Erwin Kreyszig, 1983, hal.476).

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos} \frac{2n\pi}{T}$$

dengan koefisien Fouriernya adalah sebagai berikut :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{0}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_{0}^{T/2} f(t) \operatorname{Cos} \frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

Deret Fourier fungsi ganjil g(t) dengan periode T adalah *deret Fourier fungsi sinus* (Erwin Kreyszig, hal.475).

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{Sin} \frac{2n\pi t}{T}$$

dengan koefisien Fourienya adalah sebagai berikut:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_{-\pi}^{T/2} g(t) \operatorname{Sin} \frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

Sebagai latihan buat anda, coba anda tentukan deret Fourier fungsi genap f(x) dengan kala 2π, dan caba pula untuk fungsi ganjil g(x) dengan kala 2π !

Teorema di atas mudah diterangkan atau dibuktikan dengan mengingat f(t), f(t) Cos $\frac{2n\pi t}{T}$ fungsi genap dan f(t)Sin $\frac{2n\pi t}{T}$ fungsi ganjil. Selanjutnya g(t) Sin $\frac{2n\pi t}{T}$ fungsi ganjil dan g(t) Cos $\frac{2n\pi t}{T}$ fungsi ganjil. Coba anda buktikan sendiri teorema tersebut dengan lengkap dan jelas!

Teorema 2: Jumlah fungsi

Koefisien Fourier jumlah dua fungsi $f_1 + f_2$ adalah jumlah koefisien Fourier $f_1 + f_2$, adalah jumlah koefisien Fourier f_1 dan f_2 yang bersesuaian (Erwin Kreyszig, hal.477).

Contoh Pulsa siku empat

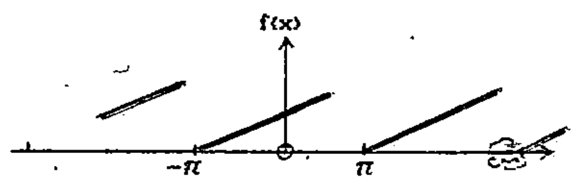
Fungsi f*(x) dalam gambar di atas adalah jumlah f(x) dan k dengan:

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & -\pi < x < 0 \\ k , & 0 < x < \pi \end{cases} , \text{ perioda } 2\pi$$

Menurut Teorema di atas, maka:

$$f^*(x) = k + f(x) = k + \frac{4k}{\pi}\left[\text{Sin } x + \tfrac{1}{3} \text{ Sin } 3x + \tfrac{1}{5}\text{Sin } 5x + \tfrac{1}{7}\text{Sin } 7x + \ldots \right]$$

Contoh Gelombang Gergaji



$f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi$

$f(x+2\pi) = f(x)$

Dapat dituliskan dalam bentuk

$f(x) = \varphi(x) + \varphi(x), \quad \varphi(x) = x, \quad \varphi(x) = \pi$

Deret Fourier semuanya nol, kecuali $a_o = \pi$. Koefisien Fourier untuk Cos nx semuanya nol, karena fungsi ganjil, sedangkan

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{Sin} nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{Sin} nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \operatorname{Cos} nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \operatorname{Cos} nx \, dx \right] =$$

$$= -\frac{2}{n} \operatorname{Cos} n\pi$$

Jadi $f(x) = \pi + 2\left[\operatorname{Sin} x - \frac{1}{2} \operatorname{Sin} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{Cos} 3x - + \ldots \right]$

Latihan

1. Yang manakah di antara fungsi berikut yang merupakan fungsi genap dan mana pula yang ganjil atau tidak kedua-duanya ?

a. $x + x^2$	f. $\mid \operatorname{Sin} nx \mid$	k. Cosh x
b. $\mid x \mid$	g. Sinh x	l. tgh x
c. e^x	h. $x^3 \operatorname{Cos} x$	m. $x \mid x \mid$
d. e^{-x}	i. $\mid x^3 \mid$	n. $\operatorname{Sin} \mid x \mid$
e. $\operatorname{Sin}^2 x$	j. ln x	

2. Fungsi berkala dengan kala 2π, tentukanlah deret Fourier dari masing-masing fungsi:

a. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

d. $f(x) = |\operatorname{Sin} x|, \quad -\pi < x < \pi$

e. $f(x) = e^{|x|}, \quad -\pi < x < \pi$

f. $f(x) = e^{-|x|}, \quad -\pi < x < \pi$

g. $f(x) = x\,|x|, \quad -\pi < x \leq \pi$

3. Tentukan pula deret Fourier dari fungsi berikut:

a. $f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$

b. $f(x) = |x \operatorname{Cos} x|, \quad -\pi < x < \pi$

c. $f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi \leq x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

e. $f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$, dengan priode 2π

f. Untuk $x = \pi$ pada deret Fourier (3.e.), tunjukkanlah bahwa: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

g. Tunjukkan pula bahwa: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

E. Pengembangan Setengah Daerah

Sebelum pasal ini kita membicarakan deret Fourier dari fungsi-fungsi berkala. Tetapi dalam berbagai masalah fisika dan teknik, sering diperlukan deret Fourier fungsi yang diidentifikasikan hanya pada selang hingga, katakanlah pada selang [0,L] . Pandang f(t) sebagai bagian dari fungsi genap atau fungsi ganjil, yang didefinisikan pada selang [-L,L] , dan kemudian dibuat berkala dengan kala 2L.

Perhatikan : $y = f(t), \quad 0 < t < L$

Definisikan : $F(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < L \\ f(-t), & -L < t < 0 \end{cases}$

dan $F(t+2L) = F(t)$

Definisi menunjukkan bahwa:

F(t) berkala dengan kala 2L

F(t) fungsi genap

$F(t) = f(t)$ untuk $0 < t < L$

F(t) disebut *perluasan berkala genap fungsi f(t).* Menurut teorema tentang deret Fourier untuk fungsi genap.

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{L}, \qquad -\infty < t < \infty \quad \ldots\ldots(1)$$

dengan

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L F(t)\, dt \quad \ldots\ldots(2)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(t) \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{L}\, dt \quad \ldots\ldots(3)$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa F(t) fungsi genap. Dan juga akan ditunjukkan bahwa (1) deret Fourier F(t) dengan koefisien Fourier diberikan oleh (2) dan (3).

Karena untuk $0 < t < L$, $F(t) = f(t)$ maka deret Fourier F(t) = f(t), maka deret Fourier f(t) pada [0,L] dengan koefisien Fouriernya seperti diberikan dalam (2), (3). Jadi:

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{L} + b_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi t}{L} \right],\ 0 < t < L \quad \ldots(4)$$

$$a_o = \frac{1}{L} \int_0^L F(t)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(t) \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{L}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Dengan cara yang sama didefinisikan pula *perluasan berkala ganjil dari f(t)*, yaitu:

$$G(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < L \\ -f(-t), & -L < t < 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Karena itu G(t) merupakan fungsi ganjil, deret Fouriernya hanya terdiri dari suku-suku sinus, yaitu:

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi t}{L}, \qquad -\infty < t < L \quad \ldots\ldots\ldots(8)$$

dengan

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L G(t) \operatorname{Sin} \frac{n\pi t}{L}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Dan menurut (7) dan (8)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi t}{L}, \qquad 0 < t < L$$

Dengan koefisien Fourier sperti dalam (9).

Jadi fungsi yang didefinisikan pada suatu seang hingga dapat dinyatakan sebagai deret Fourier kosinus atau deret Fourier sinus, sesuai dengan yang diinginkan. Pengembangan atas deret Fourier itu disebut *pengenbangan setengah daerah* (Erwin Kreyszig, 1983, hal.480).

Kalau fungsi itu didefinisikan bukan dalam selang [0,L], dapat terlebih dahulu ditransformasikan ke [0,L], sebelum diputuskan menjadi fungsi genap atau fungsi ganjil.

Contoh Pulsa Segitiga

Perhatikan fungsi berikut:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2kt}{L}, & 0 < t < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-t), & \frac{L}{2} < t < L \end{cases}$$

Pengembangan atas deret kontinu.

Fungsi ini diperluas menjadi fungsi genap.

Koefisien Fouriernya

$$a_o = \frac{1}{L}\int_0^L F(t)\, dt = \frac{1}{L}\int_0^{L/2} \frac{2k}{L} t\, dt + \frac{1}{L}\int_{L/2}^{L} \frac{2k}{L}(L-t)\, dt = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\int_0^L f(t) \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{L}\, dt\right] = \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} t \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{L}\, dt + \right.$$

$$\left. \frac{2k}{L}\int_0^{L/2} (L-t) \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{L}\, dt\right]$$

$$\int_0^{L/2} t \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{L}\, dt = \frac{Lt}{n\pi} \operatorname{Sin} \frac{n\pi t}{L} \Big|_0^{L/2} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{L/2} \operatorname{Sin} \frac{n\pi t}{L}\, dt$$

$$= \frac{L^2}{2n\pi} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\operatorname{Cos} \frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

$$\int_0^{L/2} (L-t) \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{L}\, dt = -\frac{L^2}{2n\pi} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\operatorname{Cos} n\pi - \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{2}\right)$$

Dengan demikian diperoleh:

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2 \operatorname{Cos} \frac{n\pi}{2} - \operatorname{Cos} n\pi - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ ganjil dan kelipatan } 4 \\ \frac{-16k}{n^2\pi^2}, & n \text{ genap dan bukan kelipatan } 4 \end{cases}$$

$$\text{Jadi: } f(t) = \frac{k}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16k}{\pi^2(4n+2)} \operatorname{Cos} \frac{(4n+2)}{L} t$$

Sekarang akan ditentukan pula deret Fourier sinus dari fungsi di atas itu.

$$f(t) = \frac{8k}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{Sin } \frac{n\pi}{2} \text{ Sin } \frac{n\pi t}{L}$$

$$f(t) = \frac{8k}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \text{ Sin } \frac{(2n+1)}{L} t$$

$$= \frac{8k}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \text{Sin } \frac{t}{L} - \frac{1}{3^2} \text{Sin } \frac{3t}{L} + \frac{1}{5^2} \text{ Sin } \frac{5t}{L} - + \ldots \right]$$

Bentuk Kompleks dari Deret Fourier

Dengan menggunakan $e^{i\theta} = \text{Cos } \theta + i \text{ Sin } \theta$

Hubungan ini memberikan $\text{Cos } nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx})$

$\text{Sin } nx = \frac{1}{2} (e^{inx} - e^{-inx})$

Dengan demikian deret Fourier

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{ Cos } nx + b_n \text{ Sin } nx)$$

Dapat dituliskan dalam bentuk kompleks, yaitu:

$$f(x) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + d_n e^{-inx})$$

$$c_o = a_o, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad d_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

atau $c_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx$$

Dapat juga dituliskan $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

c_n = koefisien Fourier kompleks.

Latihan:

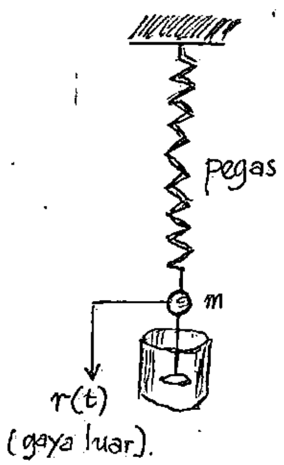
Tuliskan deret Fourier sinus dan kosinus dari fungsi-fungsi pada soal nomor 1 samapai dengan nomor 7 berikut:

1. $f(t) = t, \qquad 0 < t < L$
2. $f(t) = 0, \qquad 0 < t < L$
3. $f(t) = t^2, \qquad 0 < t < L$
4. $f(t) = e^t, \qquad 0 < t < L$
5. $f(t) = \text{Sin}\ \frac{n\pi t}{2L} \qquad 0 < t < L$
6. $f(t) = \text{Sin}\ \frac{n\pi t}{2L} \qquad 0 < t < L$
7. $f(t) = 1, \qquad 0 < t < L$
8. Tunjukkan bahwa $f(x) = e^x$, $-\pi < x < \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$ mempunyai deret Fourier kompleks, yaitu:

$$f(x) = \frac{\text{Sinh}\ \pi}{\pi} \sum_{n=\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + ni}{1 + n^2} e^{inx}$$

9. Tunjukkan bahwa koefisien Fourier komplek fungsi ganjil adalah bilangan imajiner murni dan untuk fungsi genap riel!

F. Osilasi Dipaksakan



Berikut ini adalah salah satu penggunaan deret Fourier pada persamaan diferensial biasa.

Massa yang tergantung pada pegas yang mengalami gesekan dengan pengaruh gaya luar r(t), mempunyai persamaan diferensial:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t)$$

Masalahnya: Apakah yang dinyatakan oleh m; c dan k ?

Hukum Newton menyatakan bahwa: *kalau pada suatu sistem bekerja gaya luar, akibat seluruh gaya itu ialah super posisi akibat masing-masing gaya luar tersebut.*

Kalau r(t) merupakan fungsi sinus atau kosinus, maka akibatnya yaitu penyelesaian $y = y(t)$ juga berbentuk sinus dan kosinus. Penyelesaian mantapnya (*steady*) gerak harmonis dengan frekuensinya sama dengan frekuensi r(t). Kalau r(t) merupakan fungsi berkala lain, maka penyelesaian steadynya merupakan superposisi gerak harmonis dengan frekuensi yang sama dengan frekuensi r(t) dan kelipatan dari frekuensi tersebut.Hal ini karena r(t) dapat dinyatakan sebagai deret Fourier, yaitu kombinasi liner fungsi sinus dan kosinus dengan frekuensi yang sama dengan fekuensi r(t) dan kelipatan fungsi tersebut.

Contoh:

Perhatikan $\ddot{y} + 0{,}02\dot{y} + 25y = r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2}, & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2}, & 0 < t < \pi \end{cases}$$

Bagaimanakah penyelesaian steadynya?

Penyelesaian

Deret Fourier r(t) nya ialah:

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left[\text{Cos } t + \frac{1}{3^2}\text{ Cos } 3t + \frac{1}{5^2}\text{ Cos } 5t + \dots\right]$$

Suku umum deret Fourier tersebut adalah:

$$\frac{4}{n^2\pi}\text{ Cos } nt, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Perhatikan penyelesaian persamaan diferensial

$$\ddot{y} + 0{,}02\dot{y} + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\ \text{Cos}\ nt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Penyelesaiannya berbentuk:

$$y_n(t) = A_n\ \text{Cos}\ nt + B_n\ \text{Sin}\ nt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

Subtistusi (**) kedalam persamaan diferensial (*) dan dengan menyamakan koefisien ruas kiri dan ruas kanan memberikan:

$$A_n = \frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D}\ ,\ B_n = \frac{0{,}08}{n\pi D}\ ,\ \text{dengan}\ D = (25-n^2)^2 + (0{,}02n)^2$$

Penyelesaian persamaan diferensial semula adalah:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*\overset{*}{*})$$

Amplitudo penyelesaian (**) ialah: $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$

$$= \frac{4}{n^2\pi\sqrt{D}}$$

yaitu: $C_1 = 0{,}0530$

$C_3 = 0{,}0088$

$C_5 = 0{,}5100$

$C_7 = 0{,}0011$

$C_9 = 0{,}0003$

Untuk n = 5, D sangat kecil, jadi C_5 besar, sehingga C_5 mendominasi penyelesaian($*\overset{*}{*}$). Ini berarti gerakan steady state hampir berupa osilasi harmonis, dengan frekuensi 5 kali frekuensi gaya luar.

MILIK ... AAN
IKIP PADANG

Latihan

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 9 tentukanlah penyelesaian persamaan diferensial: $\ddot{y} + \omega^2 y = r(t)$, jika:

1. $r(t) = \text{Sin } t$, $\omega = 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9;\ 1{,}1;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 10{,}0$
2. $r(t) = \text{Cos } \alpha t + \text{Cos } \beta t \qquad (\omega^2 = \alpha^2, \beta^2)$
3. $r(t) = \text{Sin } t + \frac{1}{9}\text{ Sin } 3t + \frac{1}{25}\text{ Sin } 5t$, $\omega = 0{,}5;\ 0{,}9;\ 1{,}1;\ 2;\ 2{,}9;\ 3{,}1;\ 4;\ 4{,}9;\ 5{,}1;\ 6{,}8$
4. $r(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ Cos } nt, \quad |\omega| = 1, 2, 3, \ldots, N$
5. $r(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \text{ Sin } nt, \quad |\omega| = 1, 2, 3, \ldots, N$
6. $r(t) = \begin{cases} t, & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \pi - t, & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, dan $r(t + 2\pi) = r(t)$

   $|\omega| = 1, 3, 5, \ldots$
7. $r(t) = \frac{t^2}{4}, \qquad -\pi < t < \pi$, dan $r(t + 2\pi) = r(t)$

   $|\omega| = 0, 1, 2, \ldots$
8. $r(t) = \frac{t^2}{12}(\pi^2 - t^2), \qquad -\pi < t < \pi$, dan $r(t + 2\pi) = r(t)$

   $|\omega| = 1, 2, 3, \ldots$
9. $r(t) = \frac{\pi}{4}|\text{Sin } t|, \qquad -\pi < t < \pi$, dan $r(t + 2\pi) = r(t)$

   $|\omega| = 0, 1, 2, \ldots$

Untuk soal nomor 10 sampai dengan nomor 14 tentukanlah osilasi mantap (steady) dari: $\ddot{y} + c\dot{y} + y = r(t)$, $C>0$ dan

10. $r(t) = K \text{ Sin } t$
11. $r(t) = \text{Sin } 3t$
12. $r(t) = a_n \text{ Cos } nt$
13. $r(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \text{ Sin } nt$

G. Penghampiran dengan Polinom Trigonometri

Perhatikan suatu fungsi f(x) yang berkala dengan kala 2π, yang dinyatakan dalam deret Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ a_n \text{ Cos } nx + b_n \text{ Sin } nx\ ] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Kita tuliskan jumlah bagian deret tersebut, sebagai

$$T_N\ (x) = a_o + \sum_{n=1}^{N} [\ a_n \text{ Cos } nx + b_n \text{ Sin } nx\ ] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Dalam penulisan sebelumnya telah kita ketahui bahwa (1) berarti deret dalam ruas kanan konvergen ke x pada setiap x. Ini artinya pada setiap x,

$$\lim_{N \to \infty} T_N\ (x) = f(x)$$

yaitu barisan T_N (x) konvergen ke f(x) pada setiap x.

Sekarang kita perhatikan masalah berikut:

Diketahui suatu fungsi f(x) dengan kala 2π.

Perhatikan pula polinom trigonometri

$$T_N\ (x) = a_o + \sum_{n=1}^{N} [\ \alpha_n \text{ Cos } nx + \beta_n \text{ Sin } nx\ ] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Masalahnya, berapakah seharusnya α_0, α_1, α_2, α_3, ...,α_N dan β_0, β_1, β_2, β_3, ...,β_N sehingga *error* atau *selisih* f(x) dan $T_N(x)$ sekecil mungkin.

Kalau melihat pengertian konvergen di atas; kita harus melihat selisih f(x) dan $T_N(x)$ untuk setiap x. hal ini tidak mungkin dilakukan.

Oleh karena itu orang mencari ukuran apakah sebaiknya yang dipakai untuk menentukan error itu. Orang sampai pada suatu ukuran dari error tersebut, yaitu:

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} [\ f(x) - T_N(x)\ ]^2\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

untuk fungsi yang didefinisikan dalam selang $-\pi < x < \pi$.

Error ini disebut *error kuadrat total* (Erwin Kreyszig, 1983, hal. 492).

Selanjutnya mengapa error ini juga dapat digunakan untuk fungsi berkala dengan kala 2π?

Jadi untuk menjawab permasalahan semula, kita harus mencari α_n (n = 0, 1, 2,...,N) dan β_n (n = 0, 1, 2,...,N), sehungga (4) mencapai nilai terkecil. Polinom trigonometri $T_N(x)$ yang diperoleh disebut *penghampiran f(x) dengan polinom trigonometri.*

Untuk memperoleh α_n dan β_n agar diperoleh polinom hampiran itu, kita perhatikan cara berikut, dapat ditentukan

$$E = \int^{\pi} [\ f(x) - T_N(x)\ ]^2\ dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\ dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)\ T_N(x)]\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} [T_N(x)]^2\ dx$$

Dengan menggunakan (3) diperoleh,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\ dx = \pi(2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \ldots + \beta_N^2)$$

dari (2) dan (3)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_N(x)\ dx = \pi(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 + \ldots + \beta_N b_N)$$

Kedua hal ini memberikan

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - 2\pi [2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n)] + \pi [2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)]$$

Fungsi hampiran terbaik kita peroleh apabila E merupakan error terkecil, ini bergantung pada α_0, α_n, dan β_n. Kalau E fungsi dari α_0, α_1, ... ,α_N, β_1, β_2, ... ,β_N, maka menurut kalkulus, nilai terkecil ini diperoleh bila

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_n} = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_n} = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, N$$

Kita peroleh $\alpha_0 = a_0$,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= a_n, \\ \beta_n &= b_n \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N$$

Karena (2) adalah jumlah bagian deret Fourier f(x), maka a_0, a_n, b_n, (n = 1, 2, ... , N) ialah koefisien Fouriernya. Ini berarti polinom hampiran terkecil bagi fungsi f(x) ialah polinom trigonometri dengan koefisiennya ialah koefisien Fourier f(x). Dan ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

Bila koefisien α_n dan β_n dijumlahkan masing-masing sama dengan a_n dan b_n, diperoleh error menurut (5)

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx - \pi[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)]$$

Untuk nilai α_0, α_n, β_n ($n = 1, 2, \ldots, N$) yang sembarang, diperoleh E dalam bentuk (5). Jika,

$$E - E^* = \pi \left\{ 2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^{N} [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2] \right\}$$

$$E - E^* \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Karena setiap suku tak negatif $E - E^* = 0$ jika dan hanya jika $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = b_n$. Ini berarti $E \geq E^*$ dan $E = E^*$ jika dan hanya jika $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = b_n$. Jadi hampiran f(x) terbaik dengan polinom trigonometri, ialah polinom trigonometri dengan koefisiennya berupa koefisien Fourier.

Teorema (Error Kuadrat Terkecil)

Error kuadrat total $T_N(x)$ sebagai hampiran f(x) dalam selang $-\pi < x < \pi$ *minimum* jika dan hanya jika koefisien $T_N(x)$ dalam (2) adalah koefisien Fourier f(x) yang sesuai. Nilai minimum ini diberikan oleh (6).

Karena $E^* \geq 0$ untuk setiap N, maka dari (6) diperoleh bila N

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)] \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx$$

yang disebut *ketaksamaan Bessel* bagi koefisien Fourier fungsi f(x).

MILIK UPT PERPUSTAKAAN IKIP ... G

Latihan

1. Tentukanlah polinom trigonometri sebagai hampiran terbaik untuk fungsi-fungsi berikut:
2. Hitung error kuadrat terkecil (E^*) soal (1), untuk $N = 1, 3, 5$ dan 7. Tentukan pula E, sehingga $E^* \leq 0,2$.
3. Tunjukkan bahwa E^* merupakan barisan yang turun monoton terhadap N.

H. Integral Fourier

Dalam pasal (F) kita telah melihat salh satu pengunaan deret Fourier dalam menyelesaikan masalah riel. Dalam contoh tersebut, masalahnya berkaitan dengan fungsi berkala. Banyak lagi contoh yang dapat diberikan untuk penggunaan deret Fourier dalam masalah yang berkaitan dengan fungsi berkala atau sekurangnya untuk fungsi yang didefinisikan dalam selang hingga yang dapat diperluas menjadi fungsi berkala (lihat pasal E). Akan tetapi tidak semua masalah riel yang berkaitan dengan fungsi berkala, ataupun fungsi yang didefinisikan dalam selang hingga seperti disebutkan di atas. Oleh karena itu apakah metode deret Fourier itu diperumum untuk fungsi f(x) di selang $(-\infty,\infty)$ yang tidak merupakan fungsi berkala. Secara kasar dapat dikatakan bila suatu fungsi berkala dengan kala T, bila $T \dashrightarrow \infty$ akan menjadi fungsi yang tidak lagi berkali.

Contoh:

$$f_T(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < \frac{T}{2} \end{cases}, \text{ dan } f_T(x+T) = f(x)$$

Jika T > 2 , $T \to \infty$, maka:

$$f(x) = \lim_{T \to \infty} f_T(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1,\ 1 < x < \infty \\ 1, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

Contoh:

$$f_T(x) = e^{-|x|}, \qquad -\frac{T}{2} < x < \frac{T}{2}\ ,\ \text{dan } f(x+T) = f(x)$$

$$f(x) = \lim_{T \to \infty} f_T(x) = e^{-|x|}$$

Kita lihat sekarang apa yang terjadi dengan deret Fourier $f_T(x)$, bila dibuat $T \to \infty$

Misalkan

$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} [\ a_n \cos \frac{2n\pi}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}\ ]$$

Untuk singkatnya tuliskan $w_n = \frac{2n\pi}{T}$, jadi

$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} [\ a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x\ ]$$

Karena

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\, dv$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \cos w_n v\, dv$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \sin w_n v\, dv$$

$$f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\, dv + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \cos w_n v\, dv$$

$$+ \sin w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \sin w_n v\, dv]$$

Perhatikan $w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$

sama untuk setiap n, jadi untuk setiap n dapat ditulis

$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$

Dengan menuliskan pula $\frac{2}{T} = \frac{\Delta w}{\pi}$, diperoleh:

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\,dv + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} [\,\mathrm{Cos}(w_n x)\,\Delta w \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\,\mathrm{Cos}\,w_n v\,dv$$

$$+ \mathrm{Sin}(w_n x)\,\Delta w \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\,\mathrm{Sin}\,w_n v\,dv] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Ini berlaku untuk setiap T, $0 < T < \infty$. Bila $T \to \infty$, misalkan $\lim_{T\to\infty} f_T(x) = f(x)$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$ (f(x) terintegral mutlak. Selanjutnya $\frac{1}{T} \to 0$ dan $\Delta w = \frac{2\pi}{T} \to 0$

Dengan demikian bila $T \to 0$, maka (1) menjadi:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [\,\mathrm{Cos}\,wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{Cos}\,wv\,dv +$$

$$\mathrm{Sin}\,wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{Sin}\,wv\,dv\,]\,dw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Untuk mendapatkan (2) dari (1) dapat pula diterangkan dengan *integral Riemann*. Di man (2) dapat pula dituliskan sebagai

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [\,A(w)\,\mathrm{Cos}\,wx + B(w)\,\mathrm{Sin}\,wv\,]\,dw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

dengan

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{Cos}\,wv\,dv \;\Rightarrow B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{Sin}\,wv\,dv \quad \ldots.(4)$$

(3) dan (4) merupakan fungsi f(x) dalam bentuk *integral Fourier*. Pendekatan di atas sangat sensitif, tidak boleh dipandang sebagai dapatnya f(x) dinyatakan sebagai integral Fourier. Untuk tepatnya, perhatikan teorema berikut:

Teorema:

Jika dimisalkan f(x) kontinu bagian demi bagian di setiap selang hingga, mempunyai turunan kiri dan turunan kanan, serta $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ada, maka f(x) dapat dinyatakan dalam bentuk integral Fourier. Pada setiap titik di mana f tidak kontinu nilai integral Fourier itu sama dengan nilai rata-rata limit kiri dan limit kanan f(x) pada titik-titik tersebut (Erwin Kreyszig, 1983, hal.497).

Contoh:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \operatorname{Cos} wv\,dv = \int_{-1}^{1} \operatorname{Cos} wv\,dv = \frac{2 \operatorname{Sin} w}{w}$$

$$B(w) = \int_{-1}^{1} f(v) \operatorname{Sin} wv\,dv = 0$$

Jadi

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{Cos} wx \operatorname{Sin} w}{w}\,dw = \begin{cases} \pi/2, & 0 \le x < 1 \\ \pi/4, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{Cos} wx \operatorname{Sin} w}{w}\,dw$ = merupakan *faktor takkontinu Dirichlet's.*

$$x = 0 \rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} w}{w}\,dw = \frac{\pi}{2}$$

Catatan untuk Hal Khusus:

1. Jika f(x) fungsi genap, B(w) = 0,

$$A(w) = 2 \int_{0}^{\infty} f(v) \operatorname{Cos} wv\,dv, \quad \text{dan}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} A(w) \operatorname{Cos} wx\,dw$$

2. Jika f(x) fungsi ganjil, $A(w) = 0$,

$$B(w) = 2\int_0^{\infty} f(v)\ \mathrm{Sin}\ wv\ dv, \quad \text{dan}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(w)\ \mathrm{Cos}\ wx\ dw$$

Contoh: Pulsa Tunggal

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

Tentukan integral Fouriernya!

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\ \mathrm{Cos}\ wv\ dv = \int_{-1}^{1} \mathrm{Cos}\ wv\ dv = \frac{\mathrm{Sin}\ wv}{w}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\ \mathrm{Sin}\ w}{w}$$

$$B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\ \mathrm{Sin}\ wv\ dv = \int_{-1}^{1} \mathrm{Sin}\ wv\ dv = 0$$

Dengan demikian ungkapan untuk integral Fourier f(x) adalah

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Cos}\ wx\ \mathrm{Sin}\ w}{w}\ dw$$

Untuk $x = 1$, integral itu sama dengan $\frac{1}{2}\,[f(1^+) - f(1^-)] = \frac{1}{2}$ sama dengan nilainya pada $x = -1$. Dilihat dari hasil di atas dapat dituliskan

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Cos}\ wx\ \mathrm{Sin}\ w}{w}\ dw = \frac{\pi}{2}\ f(x) = \begin{cases} \pi/2, & |x| < 1 \\ \pi/4, & x = -1,\ x = 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Integral ini disebut faktor tak kontinu Dirichlet's.

Akibat lain ialah untuk $x = 0$ diperoleh:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Sin}\ w}{w}\ dw = \frac{\pi}{2}$$

Catatan: $\mathrm{Si}(z) = \int_0^{z} \frac{\mathrm{Sin}\ w}{w}\ dw$

disebut integral Sinus dengan

grafikny seperti di samping ini

Jadi, $f(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \to \infty} Si(z)$

Kalau ditentukan jumlah deret Fourier suatu fungsi, yaitu kalau yang dijumlahkan hanya sebanyak hinggasuku-suku pertama saja, maka diperoleh polinom trigonometri yang merupakan hampiran fungsi tersebut. Hampiran ini mungkin baik bila suku-suku yang dijumlahkan makin banyak. Hal yang setara dengan berlaku untuk integral Fourier suatu fungsi, jika:

$$f(x) = \int_0^{a} [\ A(w) \operatorname{Cos} wx + B(w) \operatorname{Sin} wx\ ]\, dw$$

merupakan hampiran. Dalam hal ini

$$\lim_{a \to \infty} I_a(x) = f(x)$$

Perhatikan dalam gambar di bawah ini

$$I_a(x) = \int_0^{a} \frac{\operatorname{Cos} wx \operatorname{Sin} w}{w}\, dw$$

Sebagai hampiran f(x) untuk a = 8, a = 16 dan a = 32. Keanehan di sini adalah, walaupun $a \to \infty$, di titik takkontinu f(x) itu, grafiknya masih menyimpang cukup besar. Hal ini disebut dengan *fenomena Gibbs* (Erwin Kreyszig; 1983, hal. 498). Sebagai gambaran perhatikan contoh di atas. Dapat dituliskan

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{a} \frac{\operatorname{Cos} wx \operatorname{Sin} w}{w}\, dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{a} \frac{\operatorname{Sin}(w + wx)}{w}\, dw + \frac{1}{\pi} \int_0^{a} \frac{\operatorname{Sin}(w - wx)}{w}\, dw$$

Substitusi w + wx = t untuk integral pertama di ruas kanan

MILIK UPT PERP... AAN IKIP

dan $w - wx = -t$ di ruas kiri, kita peroleh

$$\frac{2}{\pi}\int_o^a \frac{\text{Cos } wx \text{ Sin } w}{w}\,dw = \frac{1}{\pi}\,\text{Sin}\,[a(x+1)]\;\frac{1}{\pi} - \text{Sin}\,[a(x-1)]$$

Dengan memperhatikan grafik Si(z) dapat digambarkan fenomena Gibbs itu.

Sesuai dengan deret Fourier, untuk fungsi genap $f(x)$, $B(w) = 0$ dan untuk fungsi ganjil $A(w) = 0$. Karena itu untuk fungsi yang hanya didefinisikan hanya untuk $x>0$, dapat dibuat integral Fouriernya sebagai integral kosinus (dengan memperluas menjadi fungsi genap) dan sebagai integral sinus saja (dengan memperluas sebagai fungsi ganjil).

Contoh: $f(x) = e^{-kx}$, $\quad x>0,\ k>0$

Jika didefinisikan $f(x) = \begin{cases} e^{-kx}, & x>0,\ k>0 \\ e^{kx}, & x<0,\ \text{dan } f(x) = f(-x) \end{cases}$

diperoleh fungsi genap.

Karena itu diperoleh integral Fourier yang berbentuk

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty A(w)\,\text{Cos } wx\,dw$$

dan

$$A(w) = 2\int_o^\infty e^{-kx}\text{Cos } wx\,dx = \frac{k}{k^2 + w^2}$$

$$e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_o^\infty \frac{\text{Cos } wx}{k^2 + w^2}\,dw, \qquad x>0,\ k>0$$

Akibatnya $\displaystyle\int_o^\infty \frac{\text{Cos } wx}{k^2 + w^2}\,dw = \frac{\pi}{2k}\,e^{-kx}, \qquad x>0,\ k>0$

Integral in disebut *Integral Laplace*

Sekarang akan kita tunjukkan pula bahwa:

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w \text{ Sin } wx}{k^2 + w^2}\, dw$$

Akibatnya $\int_0^\infty \frac{w \text{ Sin } wx}{k^2 + w^2}\, dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx}, \quad x>0,\ k>0$

Integral ini juga disebut dengan *Integral Laplce.*

Latihan:

Dengan menggunakan integral Fourier suatu fungsi, tunjukkan bahwa:

1. $\int_0^\infty \frac{\text{Cos } wx + w \text{ Sin } wx}{1 + w^2}\, dw = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \pi/2, & x = 0 \\ \pi e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

2. $\int_0^\infty \frac{\text{Cos } wx}{1 + w^2}\, dw = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x > 0$

3. $\int_0^\infty \frac{\text{Sin } w \text{ Cos } wx}{w}\, dw = \begin{cases} \pi/2, & 0 \le x < 1 \\ \pi/4, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

4. $\int_0^\infty \frac{\text{Sin } \pi w \text{ Sin } xw}{1 - w^2}\, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ Sin } x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x \ge \pi \end{cases}$

5. $\int_0^\infty \frac{\text{Cos}(\pi w/2) \text{ Cos } wx}{1 - w^2}\, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ Cos } x, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Nyatakanlah ungkapan integral Fourier fungsi berikut:

6. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$

8. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ 9. $f(x) = e^{-x} + e^{-2x}, \quad x>0$

10. Mengapakah $f(x) = 1,\ 0 < x < \infty$ tidak dapat dinyatakan sebagai integral Fourier?

Kalau $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(w) \text{ Cos } wx \, dx$

Untuk soal nomor (11) dan (12) tunujukkanlah bahwa:

11. $f(x) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\infty} A(w/a) \text{ Cos } wx \, dw, \qquad a > 0$

12. $x^2 f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A^*(w) \text{ Cos } wx \, dw, \qquad A^*(w) = -\frac{d^2A}{dw^2}$

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Haberman, Richard. (1987). *Elementary Applied Partial Differential Equations*. London: Prentice-Hall International,inc.

Kreyszig, Erwin. (1983). *Advanced Engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

L. Ross, Shepley. (1984). *Differential Equations*. New Yor: John Wiley & Sons.

R. Spiegel, Murray. (1986). *Analisis Fourier*. Jakarta: Erlangga.

MILIK ... USTAKAAN
IKIP PADANG