engantar

MATEMATIKA TEKNIK

II

o
l
e
h

drs. syamsuar ahmad

dra. ruzni sy

IKIP - PADANG

KATA PENGANTAR

Buku Matematika Temnik II ini merupakan lanjutan dari buku jilid I.

Maksud penerbitan.

Buku ini diterbitkan guna :

- mengantarkan para mahasiswa kedalam lapangan matematika yang sangat mereka perlukan dalam pemakaian praktis.
- membantu kelancaran jalannya perkuliahan justru banyaknya waktu kuliah yang disedap untuk menyalin materi pelajaran.
- melengkapi kekurangan buku-buku matematika di Perpustakaan yang serasi isi dan tujuan apalagi yang ditulis dalam bahasa Nasional.

Penyusunan Topik.

Setiap bab disusun sedemikian rupa sehingga betul-betul dapat membantu para mahasiswa dalam memecahkan soal-soal analisa dan mentransfer problem-problem praktis yang dihadapinya kedalam term-term matematika. Untuk maksud itu setap bab kami lengkapi dengan contoh-contoh penyelesaian soal serta soal-soal latihan yang terpilih .

Penyajian materi.

Buku ini diberikan kepada semua jurusan dalam semester-II, dengan penekanan-penekanan tertentu yang di sesuaikan dengan jurusan masing-masing .
Bagi Fakultas Esakta/Akademi lain yang membutuhkan metematika sebagai matakuliah pokok buku ini pun dapat dipergunakan .

Terahkir kritik yang membangun dari teman sejawat akan kami terima dengan hati terbuka .

Padang, Desember 1979.

Penulis,

DAFTAR ISI

		Halaman
KATA PENGANTAR		ii
DAFTAR ISI		iii
BAB I	HITUNG INTEGRAL	
	I.1. Integral tak tertentu	1
	I.2. Rumus-rumus dasar	1
	I.3. Contoh-contoh penyelesaian	2
BAB II	APLIKASI HITUNG INTEGRAL TAK TERTENTU	
	II.1. Menentukan persamaan suatu kurva	9
	II.2. Menentukan gerakkan dari suatu benda	10
BAB III	INTEGRAL TERTENTU	
	III.1. Sifat-sifat integral tertentu	14
	III.2. Contoh-contoh penyelesaian soal	14
BAB IV	APLIKASI HITUNG INTEGRAL TERTENTU	
	IV.1. Luas bidang datar	16
	IV.2. Volume benda putaran	21
	IV.3. Titik berat bidang datar	28
	IV.4. Titik berat benda putaran	31
	IV.5. Momen inersi dari bidang datar	35
	IV.6. Momen inersi dari benda putaran	39
	IV.7. Panjang busur	41
	IV.8. Luas permukaan benda putaran	45
	IV.9. K e r j a	49
	IV.10. Harga rata-rata dan harga rata-rata akar pangkat dua	51
BAB V	INTEGRAL APROSIMASI	
	V.1. Aturan trapesium	55
	V.2. Rumus Prismoidal	56
	V.3. Aturan Simpson	57
	V.4. Perluasan Deret Pangkat	57
DAFTAR BACAAN		61

HITUNG INTEGRAL

I – 1. INTEGRAL TAK TERTENTU.

Jika $F(x)$ adalah sebuah fungsi yang derivativ-nya $F'(x) = f(x)$ diketahui pada suatu interval tertentu dari sumbu x, maka $F(x)$ dinamakan anti derivativ atau integral tak tertentu dari $f(x)$. Integral tak tertentu dari suatu fungsi yang diberikan bukan tunggal, sebagai contoh misalnya x^5, x^5+2, x^5-5, umumnya $x^5 + C$ adalah integral tak tertentu dari $f(x) = 5x^4$. Lengkapnya perhitungan integral tak tertentu diatas dilambangkan sebagai :

$$\int 5x^4 dx = x^5 + C$$

dimana;

C disebut konstanta integrasi

$\int$ adalah tanda integral

$5x^4$ fungsi yang diintegralkan (integrand)

x^5 fungsi asal atau fungsi primitiv

I – 2. RUMUS-RUMUS DASAR

1. $\int dx = x + C$
2. $\int a dx = ax + C$
3. $\int \frac{d}{dx} f'(x) dx = f(x) + C$
4. $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$
5. $\int (u \pm v \pm w) dx = \int u dx \pm \int v dx \pm \int w dx$
6. $\int a u dx = a \int u dx$
7. $\int u^m dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$; $m \neq -1$
8. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$
9. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$; $a > 0$, $a \neq 1$
10. $\int e^u du = e^u + C$

$\int \sin u \, du = -\cos u + C$

12. $\int \cos u \, du = \sin u + C$

13. $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln/\sec u/ + C$

14. $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln/\sin u/ + C$

15. $\int \sec u \, du = \ln/\sec u + \operatorname{tg} u/ + C$

16. $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln/\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u/ + C$

17. $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + C$

18. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = - \operatorname{cotg} u + C$

19. $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$

20. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, du = - \operatorname{cosec} u + C$

21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

22. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$

23. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \frac{u}{a} + C$

24. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln/ \frac{u-a}{u+a}/ + C$

25. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln/ \frac{a+u}{a-u}/ + C$

26. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln(u + \ u^2+a^2) + C$

27. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln(u + \ u^2-a^2) + C$

28. $\int \sqrt{a^2-u^2} \, du = \frac{1}{2} u \ \ a^2-u^2 + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C$

29. $\int \sqrt{u^2 + a^2} \, du = \frac{1}{2} u \ \ a^2 - u^2 + \frac{1}{2} a^2 \ln(u + \ u^2+a^2) + C$

30. $\int \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{1}{2} \ u^2 - a^2 - \frac{1}{a} a^2 \ln/u + \ u^2+a^2/ + C$

I – 3 CONTOH-CONTOH PENYELESAIAN SOAL

Rumus-rumus 1 – 7

1. $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2. $\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C$

3. $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3} x^{-3} + C$

4. $\int \sqrt[3]{t}\, dt = \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + C$

5. $\int (2x^2 - 5x + 2) dx = 2\int x^2 dx - 5\int x dx + 2\int dx$

$$= \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 2x + C$$

6. $\int (3s + 4)^2 ds = \int (9s^2 + 24s + 16) ds$

$\int (9x^2 + 24x + 16) dx$

$$= \int 9 s^2 ds + \int 24 s\, ds + \int 16\, ds$$

$16\, dx$

$$= 3 s^3 + 12 s^2 + 16 s + C$$

7. $\int \frac{dv}{\sqrt[3]{v^2}} = \int v^{-\frac{2}{3}} dv = 3v^{\frac{1}{3}} + C$

diferensial

8. $\int \frac{(x + 3)dx}{(x^2 + 6x)^{\frac{1}{3}}} =$

misalkan $x^2 + 6x = u$ .. $du = (2x + 6)\, dx$

$$\int \frac{(x + 3)dx}{(x^2 + 6x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x + 6)\, dx}{(x^2 + 6x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{3}{4} u^{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4} (x^2 + 6x)^{\frac{2}{3}} + C$$

Rumus 8 - 10

9. $\int \frac{dx}{x - 2} = \int \frac{d(x - 2)}{x - 2} = \ln / (x - 2) / + C$

10. $\int \frac{(2t - 3)\, dt}{t^2 - 3t + 1} = \int \frac{d(t^2 - 3t + 1)}{t^2 - 3t + 1} = \ln (t^2 - 3t + 1) + C$

11. $\int \frac{t + 2}{t + 1} dt = \int (1 + \frac{1}{t + 1}) dt$

$$= \int dt + \int \frac{dt}{t + 1} = t + \ln /(t + 1) + C$$

12. $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

13. $\int a^{10t}dt = \frac{1}{10}\int a^{10t}d(10t) = \frac{a^{10t}}{10\ \ln a} + C$

14. $\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^{-x}\ dx}{1 + e^{-x}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{1 + e^{-x}}$

$= -\ln)1 + e^{-x}) + C$

$= \ln \frac{e^x}{1 + e^x} + C = x - \ln(1 + e^x) + C$

Rumus 11 - 20

15. $\int \sin 3x\ dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\ d(3x)$

$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C$

16. $\int \cos \frac{1}{4}x\ dx = 4\int \cos \frac{1}{4}x\ d(\frac{x}{4})$

$= 4 \sin \frac{x}{4} + C$

17. $\int \text{tgt}\ dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\ dt = -\int \frac{d(\cos t)}{\cos t}$

$= -\ln \cos t + C = \ln/\sec t/ + C$

18. $\int \sec x\ dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \text{tg}\ x)}{\sec x + \text{tg}\ x}\ dx$

$= \int \frac{\sec x\ \text{tg}\ x + \sec^2 x}{\sec x + \text{tg}\ x}\ dx = \int \frac{d(\sec x + \text{tg}\ x)}{\sec x + \text{tg}\ x}$

$= \ln/\sec x + \text{tg}\ x/ + C$

19. $\int \frac{\sin t + \cos t}{\cos t}\ dt = \int (\text{tg}\ t + 1)\ dt = \int \text{tgt}\ dt + \int dt$

$= \ln/\sec/ + t + C$

20. $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{du}{2\sin \frac{1}{2}u \cos \frac{1}{2}u} = \int \frac{\sec^2 \frac{1}{2}u \cdot \frac{1}{2}\ du}{\text{tg}\frac{1}{2}u}$

$= \ln\ \text{tg}\ \frac{1}{2}u + C.$

21. $\int \sin x \cos x\ dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\ dx$

$= \frac{1}{4}\int \sin 2x\ d(2x)$

$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Rumus 21 - 23

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc tg } x + C$

23. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg } x \quad x + C$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} = \text{arc sin } \frac{x}{5} + C$

25. $\int \frac{dt}{9 + t^2} = \frac{1}{3}\text{ arc tg } \frac{x}{3} + C$

26. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - 1}} = \text{arc sec } v + C$

27. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 dx}{1 - (x^2)^2} = \frac{1}{3}\text{ arc sin } x^3 + C$

28. $\int \frac{dx}{5 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{ arc tg } \frac{x}{5} + C$

29. $\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5} = \int \frac{2\,dx}{4x^2 + 4x + 10} = \int \frac{2\,dx}{(2x + 1)^2 + 9}$

$$= \frac{1}{3}\text{ arc tg } \frac{2x + 1}{3} + C$$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{28 - 12x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64 - (x^2 + 12x + 36)}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{64 - (x + 6)^2}} = \text{arc } \frac{x + 6}{8} + C$$

Rumus 24 - 27

31. $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln \left| \frac{x - 1}{x - 1} \right| + C$

32. $\int \frac{dx}{4 - x^2} = \frac{1}{4}\ln \left| \frac{2 + x}{2 - x} \right| + C$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{1}{2} \int \frac{2\, dx}{\sqrt{(2x)^2 + 3^2}} = \frac{1}{2} \ln (2x + \sqrt{4x^2 + 9}) + C$

36. $\frac{dt}{\sqrt{4t + t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t + 2)^2 - 4}} = \ln (t + 2 + \sqrt{4t + t^2}) + C$

Rumus 28 - 30

37. $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{16 - x^2} + 8 \arcsin \frac{x}{4} + C$

38. $\int \sqrt{x^2 - 16}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 16} - 8 \ln / x + \sqrt{x^2 - 16} / + C$

39. $\int \sqrt{2x^2 + 3}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{2x^2 + 3}\, \sqrt{2}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}\, x}{2} \sqrt{2x^2 + 3} + \frac{3}{2} \ln (\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 + 3}) + C \right.$

SOAL - SOAL LATIHAN :

40. $\int (3 - 2x - x^4)\, dx$

41. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{2} x + 2)\, dx$

42. $\int (x^2 + 1)^2\, dx$

43. $\int \frac{dx}{x^5}$

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 3}}$

46. $\int y^3 \sqrt{1 + y^4}\, dy$

47. $\int \frac{(x + 1)\, dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}}$

48. $\int \frac{(x + 1)(x - 1)}{\sqrt{x}}\, dx$

49. $\int \frac{dx}{x - 5}$

50. $\int \frac{dx}{4x + 1}$

51. $\int \frac{x - 1}{x + 1}\, dx$

52. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}\, dx$

53. $\int a^{5x}\, dx$

54. $\int e^{4x}\, dx$

55. $\int e^{-x^2 + 2} x\, dx$

56. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$

57. $\int (e^x + 1)^2\, dx$

58. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

59. $\int \sin 5x \, dx$

60. $\int \cos \frac{1}{4} x dx$

61. $\int \operatorname{cosec} 3x dx$

62. $\int tg^2 t \, dt$

63. $\int tg \frac{1}{2} t dt$

64. $\int \sin ax \cos ax \, dx$

65. $\int \sin^3 x \cos x dx$

66. $\int \cos^4 x \sin x dx$

67. $\int \frac{dx}{1 + \cos 3x}$

68. $\int \sin 2x \cos 2x dx$

69. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$

70. $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{x^2 + 1} dx$

71. $\int (a + bx)^2 dx$

72. $\int (a^2 - x^2) dx$

73. $\int (3 - 5x)^2 dx$

74. $\int \sqrt{7x^3} dx$

75. $\int \frac{dx}{e^{2x}}$

76. $\int 10^x dx$

77. $\int \frac{(6x - 7)dx}{3x^2 - 7 + 8}$

78. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

79. $\int \frac{x^3}{9 + 4x^4} dx$

80. $\int \frac{\cos x dx}{e^{\sin x}}$

81. $\int \sqrt{a + bx} dx$

82. $\int \frac{dx}{(a + bx)^3}$

83. $\int \frac{\sqrt{x} \, dx}{4 + \sqrt{x}}$

84. $\int e^{\cos x} \sin x dx$

85. $\int \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} dx$

86. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$

87. $\int \frac{dx}{5 + x^2}$

88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 5}}$

89. $\int \frac{e^{2x} dx}{1 + e^{4x}}$

90. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$

91. $\int \frac{x dx}{9x^2 + 4}$

92. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9 \ln^2 x}}$

93. $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 6x + 13} dx$

94. $\int \frac{x dx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}}$

95. $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

96. $\int \frac{dx}{9 - x^2}$

97. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

98. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}}$

99. $\int \sqrt{12 + 4x - x^2}\,dx$

100. $\int \sqrt{x^2 - 2x - 3}\,dx$

==== ========

II - 1. Menentukan persamaan suatu kurva.

Apabila persamaan $y = f(x)$ dari suatu kurva diketahui, maka gradiennya m pada suatu titik $P(x,y)$ dari kurva diberikan oleh $m = f'(x)$. Tetapi sebaliknya, apabila gradien pada suatu titik $P(x,y)$ yang diberikan oleh $m = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ diketahui, maka suatu himpunan kurva $y = f(x) + C$ didapatkan dengan jalan integrasi. Untuk memperoleh sebuah kurva yang diminta, diperlukan untuk mendefinisikan suatu nilai dari C. Ini dapat diperoleh misalnya kurva yang diminta itu melalui suatu titik tertentu.

Contoh :

Tentukanlah persamaan dari himpunan kurva, apabila gradiennya pada setiap titik sama dengan - 2 kali absis titik yang bersangkutan dan tentukan pula suatu kurva itu yang melalui titik (1, 1).

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = -2x \quad \text{atau } dy = -2x\,dx$$

$$\text{maka } \int dy = \int -2x\,dx$$

$$y = -x^2 + C$$

Untuk titik (1, 1) ;

$$1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$$

Jadi kurva yang melalui (1, 1) ialah :

$$y = -x^2 + 2$$

Contoh 2.

Pada setiap titik dari suatu kurva tertentu diketahui $y'' = x^2 - 1$. Tentukanlah persamaan kurva yang melalui titik (1, 1), apabila tangennya sama dengan tangen dari garis $x + 12y = 13$.

Jawab :

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 1; \text{ maka}$$

$$y' = \int \frac{d}{dx}(y') = \int (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x + C$$

Pada titik (1, 1) gradiennya atau $y' = -\frac{1}{12}$,

maka :

$$\frac{x^3}{3} - x + C = -\frac{1}{12} \longrightarrow C = \frac{7}{12}$$

sekarang; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{7}{12}$ dan

$$y = \int (\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{7}{12})dx$$

$$= \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + C$$

untuk titik (1, 1) $1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + C_2$

$$C_2 = 5/6$$

Jadi persamaan yang diminta :

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + C$$

II - 2 Menentukan persamaan gerakan dari suatu benda

Dalam persamaan $S = f(t)$; dimana S adalah jarak suatu benda yang bergerak dari suatu titik tertentu menurut suatu garis lurus atau lengkungan dalam waktu t, maka kecepatan dan percepatan pada setiap saat diberikan berturut-turut oleh :

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) \text{ dan } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$$

Kemudian sebaliknya jika kecepatan atau percepatan dari suatu benda diketahui pada suatu waktu tertentu t, maka persamaan gerakan dari benda tersebut dapat ditentukan.

Contoh :

Sebuah bola digulirkan diatas lantai yang agak kesat dengan kecepatan awal 25 ft/dt. Dengan adanya gaya gesekan maka percepatan menjadi 6 ft/detik.

Berapa jauh bola tadi dapat bergulir ?.

Jawab :

$$a = \frac{dv}{dt} = -6 \quad \text{dan} \quad v = -6t + C_1$$

Untuk $t = 0$, $v = 25$ dan karenanya $C_1 = 25$

dan $v = -6t + 25$

$v = \frac{ds}{dt} = -6t + 25$, maka :

$$S = \int (-6t + 25)\,dt = -3t^2 + 25t + C_2$$

Pada $t = 0$, $S = 0 \longrightarrow C_2 = 0$, maka

$$S = -3t^2 + 25t$$

Ketika $v = 0$, $t = 25/6$, jika ; bola bergulir selama 25/6 detik, dan jarak yang diminta adalah :

$$S = -3(25/6)^2 + 25(25/6)$$

$$= -\frac{625}{12} + \frac{625}{6} = 625/12 \text{ ft}$$

SOAL - SOAL LATIHAN :

1. Tentukanlah persamaan himpunan kurva jika diketahui gradiennya pada suatu titik $P(x, y)$ sama dengan $3x^2y$, dan tentukan pula salah satu dari kurva tersebut yang melalui titik $(0,8)$. $p = 3x^2y$ $\int 3x^2$ $3\int x^2$

2. Suatu besaran tertentu q bertambah rata-rata berbanding lurus dengan dirinya sendiri. Pada waktu $t = 0$, $q = 25$ dan pada $t = 2$, $q = 75$. Hitunglah q pada waktu $t = 6$.
   q . t

3. Tentukanlah persamaan dari himpunan kurva jika diketahui subtangennya pada setiap titik sama dengan duakali absis titik yang bersangkutan.

4. Suatu partikel bergerak menurut garis lurus dari titik a-

awal v_o dan percepatan a.

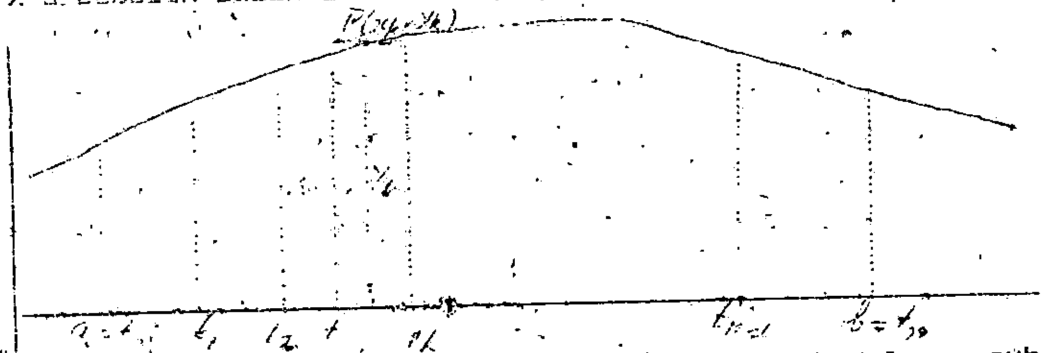
Tentukanlah S pada waktu t, jika :

a). $a = 32$, $v_o = 2$ b). $a = 12t^2 + 6t$, $v_o = -3$

5. Sebuah mobil dengan perlambatan rata-rata 0,8 ft/detik^3.
Berapakah jauh mobil itu bergerak sebelum ia berhenti jika kecepatan permulaan 15 km/jam.

====

Misalkan diketahui fungsi $y = f(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$ kontinu dan positif. Sekarang kita ingin menentukan luas bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ disebelah atas, sumbu x disebelah bawah dan dua ordinat $x = a$ dan $x = b$.



Untuk itu bagilah interval yang diketahui itu kedalam n subinterval dengan $n - 1$ titik bagi $t_1, t_2, \ldots\ldots; t_{n-1}$ dimana $a < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_{n-1} < b$.

Nyatakan panjang masing-masing subinterval itu dengan $\Delta_1 x = t_1 - t_0$, $\Delta_2 x = t_2 - t_1, \ldots\ldots \Delta_k x = t_k - t_{k-1} \ldots\ldots$ $\Delta_n x = t_n - t_{n-1}$. Selanjutnya pada setiap titik bagi $t_1, t_2 \ldots\ldots t_{n-1}$ kita tarik garis vertikal pada sumbu x, dengan demikian bidang yang akan ditentukan luasnya itu telah terbagi kedalam n buah jalur. Dengan hitung pendekatan luas setiap jalur dapat dipandang sebagai luas sebuah persegi panjang. Sekarang perhatikan persegi panjang yang ke - k dengan alas $\Delta_k x$ dan tinggi $f(x_k)$ dimana $t_{k-1} < x_k < t_k$, luas persegi panjang ini adalah $f(x_k)\Delta_k x$. Jika luas semua persegi panjang disebut S_n maka =

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$$

Kemudian misalkan jumlah subinterval itu bertambah tak terhingga, dengan perkataan lain $n \to \infty$ maka ;

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x.$$

Bentuk terakhir ini hitung integral dapat ditulis sebagai :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x = \int_a^b f(x)dx.$$

Jika luas bidang yang ditanyakan itu disebut A, maka A =

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Dalam rumus ini a dan b berturut-turut disebut batas bawah dan batas atas integrasi.

III - 1. Sipat-sipat integral tertentu

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \rightarrow \int_a f(x)dx$

3. $\int_a^b C(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

5. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (a < b < c)$

6. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

III - 2. CONTOH - CONTOH PENYELESAIAN SOAL.

1. $\int_1^3 x^3\, dx = \frac{1}{4}x^4\Big]_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$

$\frac{1}{4}(81 - 1)$

2. $\int_{-1}^1 (2x^2 - x^3)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big]_{-1}^1$

$= (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$

3. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^2 x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$= 2\sqrt{x}\Big]_0^2 = 2\sqrt{2}$

4. $\int_{-2}^{3} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2\,e^{-\frac{x}{2}}\Big]_{-2}^{3}$

$$= -2\,(e^{-\frac{3}{2}} - e).$$

5. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3\Big]_{0}^{3} = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2$

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

7. $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big]_{-3}^{3} = \frac{1}{3}\Big[\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})\Big] = \frac{\pi}{6}$

8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x\,dx = -\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = -(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0)$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

9. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{6}\ln\Big|\frac{x-3}{x+4}\Big|\Big]_{-1}^{2}$

$$= \frac{1}{6}(\ln\frac{1}{5} - \ln 2) = \frac{1}{6}\ln 0{,}1$$

<u>Soal - soal latihan.</u>

10. $\int_{0}^{2} (2-x)^2\,dx$

11. $\int_{-1}^{2} (1-t^2)\,t\,dt$

12. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

13. $\int_{1}^{8} \sqrt{1+3x}\,dx$

14. $\int_{0}^{3} x(1-\sqrt{x})^2\,dx$

15. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{25-x^2}$

16. $\int_{0}^{2\pi} \sin\frac{1}{2}t\,dt$

17. $\int_{0}^{\sqrt{2}} xe^{x^2}\,dx$

18. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}$

19. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}$

B A B IV

APLIKASI HITUNG INTEGRAL TERTENTU

IV - 1. Luas bidang datar.

Dalam pasal 1 Bab III diatas telah kita lihat bahwa luas yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dandua ordinat $x = a$ dan $x = b$ ialah :

$$A = \int_a^b f(x)dx;$$

atau jika bidang itu dibatasi oleh kurva $x = g(y)$ dan dua absis $y = C$ dan $y = d$ maka :

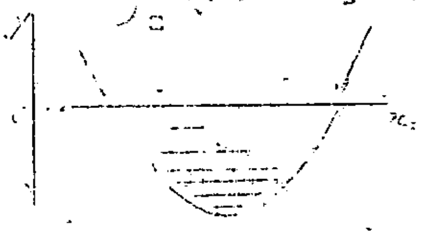
$$A = \int_c^d g(y)dy.$$

Kedua rumus diatas hanya berlaku apabila :

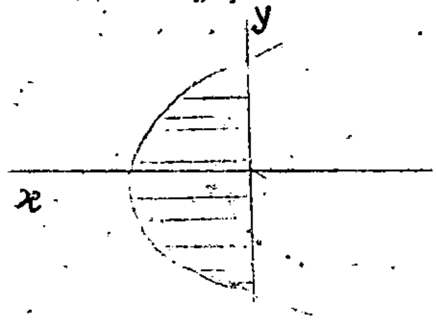
1. $y = f(x)$ atau $x = g(y)$ kontinu dan positif dalam interval tersebut.
2. $y = f(x)$ tidak memotong sumbu x atau $x = g(y)$ tidak memotong sumbu y.
3. $y = f(x)$ atau $x = g(y)$ adalah fungsi-fungsi berharga satu.

Penjelasan :

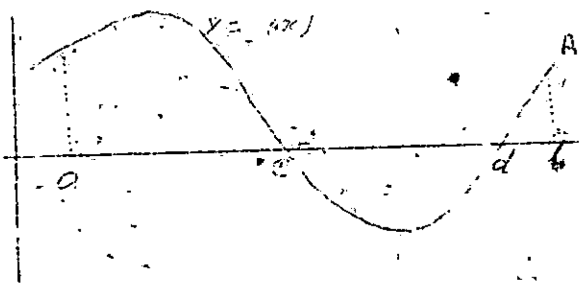
1. Jika $y = f(x)$ kontinu dan negatif pada interval $a \leq x \leq b$ maka $\int_a^b f(x)dx$ negatif, ini berarti bahwa luas gambar yang ditanyakan seluruhnya terletak dibawah sb x.



2. Jika $x = g(y)$ kontinu dan negatif pada interval $c \leq y \leq d$ maka $\int_c^d g(y)\, dy$ negatif, ini berarti bahwa luas gambar yang diminta seluruhnya berada disebelah kiri sb y.

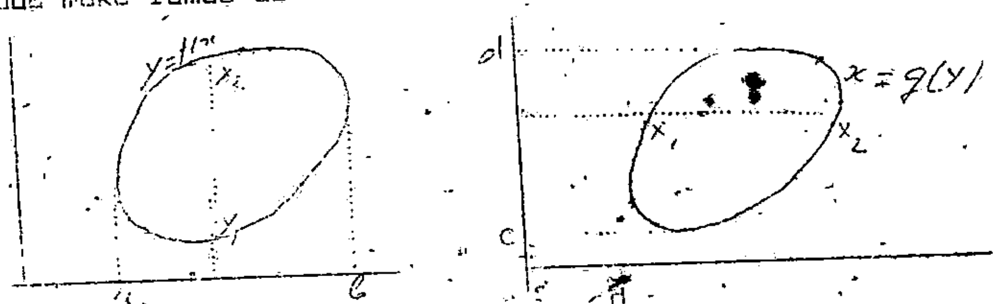


3. Jika $y = f(x)$ berubah tanda dalam interval $a \leq x \leq b$ berarti kurva memotong sb x pada satu titik atau lebih atau jika $x = g(y)$ berubah tanda dalam interval $c \leq y \leq d$ berarti kurvanya memotong sb y, maka luas bidang yang diminta dinyatakan sebagai jumlah dua atau lebih integral tertentu.



$$A = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d -f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx.$$

4. Jika $y = f(x)$ atau $x = g(y)$ adalah fungsi-fungsi berharga dua maka rumus diatas berubah menjadi :



$$A = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx \quad ; \quad A = \int_c^d (x_2 - x_1)\,dy.$$

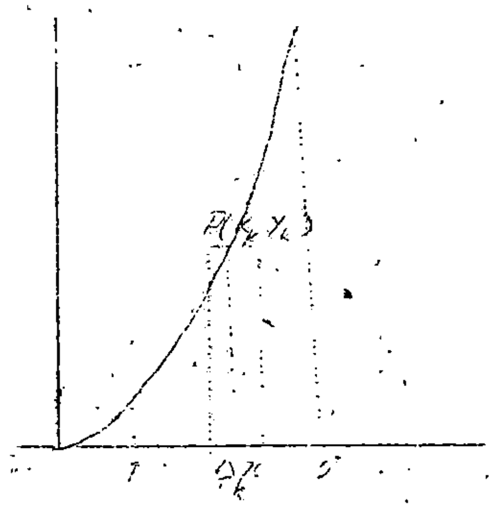
Berikut ini diberikan langkah-langkah untk menentukan luas bidang diatas :

1. Buat gambar sket dari luas bidang yang diminta.
2. Lukis sebuah jalur yang ke - k sebagai wakil.
3. Lukis pada jalur ini sebuah persegi panjang pendekatan dengan alas $\Delta_k x$ dan tingginya $f(x_k)$
4. Jumlahkan luas semua persegi panjang dan pakailah konsep dasar hitung integral untuk $n \to \infty$

CONTOH 1.

Tentukan luas bidang yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x dan ordinat $x = 1$ dan $x = 5$.

Jawab :



$dA = y_k \cdot \Delta_k x$

$$A = \int_1^5 y \, dx$$

$$= \int_1^5 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big]_1^5$$

$$= \frac{1}{3} (125 - 1)$$

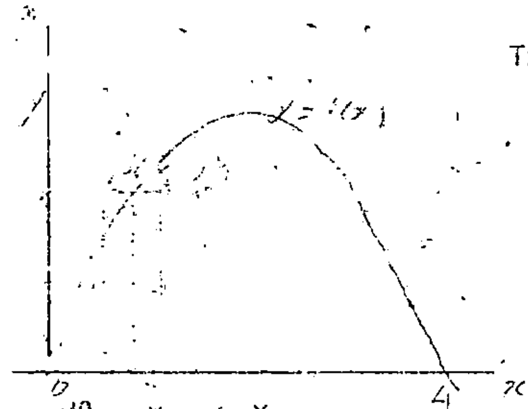
$$= 41 \frac{1}{3}$$

satuan persegi.

Contoh 2.

Hitung luas bidang yang dibatasi oleh kurva

$y = 4x - x^2$ dan sumbu x.



Titik potong dengan sb x :

$y = 0, 0 = 4x - x^2$

$= x(4 - x)$

$x_1 = 0, \; x_2 = 4.$

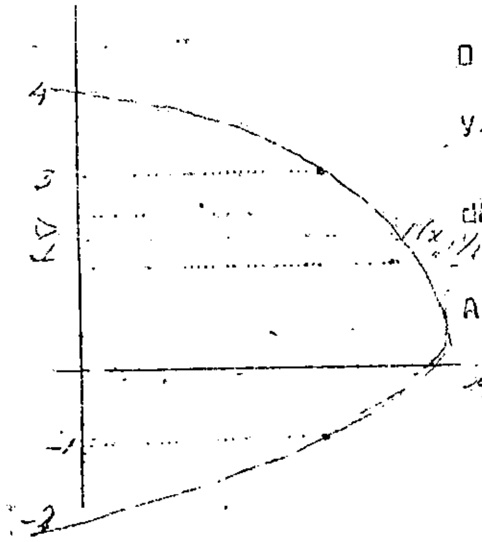
$dA = y_k \cdot \Delta_k x$

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx$$

$$= 2x^2 - \frac{1}{3} x^3 \Big]_0^4 = 2.4^2 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 = \frac{32}{3}$$ satuan persegi.

Contoh 3

Hitunglah luas gambar yang dibatasi oleh parabola $x = 8 + 2y - y^2$, sb y dan garis $y = -1$, $y = 3$



Titik potong dengan sb $y \rightarrow x = 0$

$$0 = 8 + 2y - y^2 = (y + 2)(y - 4) = 0$$

$$y_1 = -2 \; ; \quad y_2 = 4$$

$$dA = x_k \cdot \Delta y$$

$$A = \int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)\,dy$$

$$= 8y + y^2 - \frac{y^3}{3} \Big]_{-1}^{3} = 24 + 9 - 8$$

$$= 9\tfrac{2}{3} \text{ satuan persegi.}$$

Contoh 4.

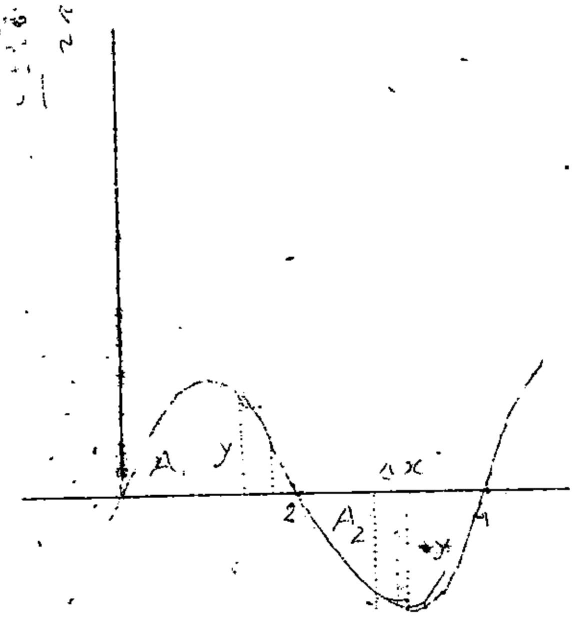
Hitunglah luas gambar yang dibatasi oleh kurva

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x \text{ dan sb } x.$$

Jawab : Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$$0 = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x - 2)(x - 4)$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2 \; ; \quad x_3 = 4.$$



$$A_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \Big]_0^2 = 4$$

$$A_2 = \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$

$$= -\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right) \Big]_2^4 = 4$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$= 4 + 4 = 8 \text{ satuan persegi.}$$

Contoh 5

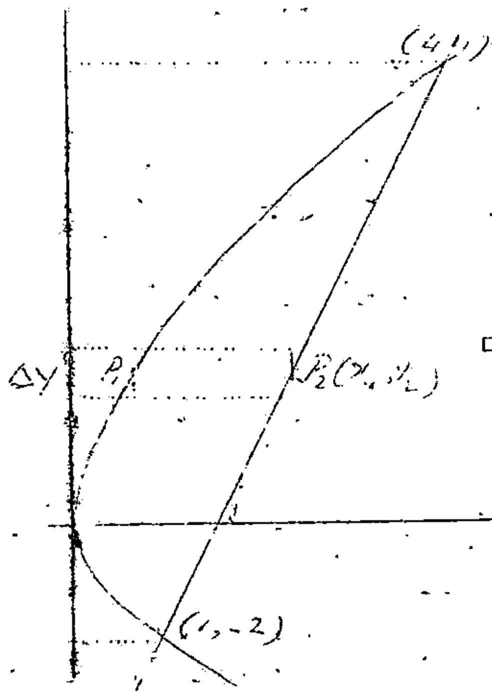
Hitunglah luas gambar antara parabola $y^2 = 4x$

$\sqrt{64} = 2\tfrac{1}{3}$

dengan garis $y = 2x - 4$

Jawab : Titik potong kedua kurva kita dapatkan dari :

$$y^2 = 4x = 4\left(\frac{y+4}{2}\right) \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0$$



$$(y + 2)(y - 4) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = -2 \\ x_1 = 1 \end{array}\right] (1, -2) \; ; \quad \begin{array}{l} y_2 = 4 \\ x_2 = 4 \end{array} \quad (4, 4)$$

$$dA = (x_2 - x_1) \triangle y.$$

$$= \left(\frac{1}{2} y + 2 - \frac{y^2}{4}\right) \triangle y$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2} y - \frac{y^2}{4}\right) \triangle y$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left(2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

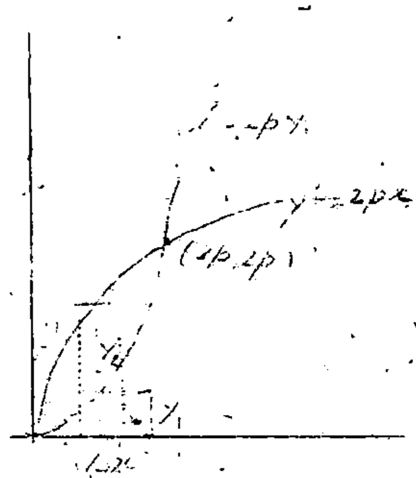
$$= 2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12} \Big]_{-2}^{4}$$

$$= 9 \text{ satuan persegi.}$$

Contoh 6.

Hitunglah luas bidang antara kedua kurva

$y^2 = 2px$ dan $x^2 = 2py$



Titik potong kedua kurva

$$y^2 = 2px \rightarrow \left(\frac{x^2}{2p}\right)^2 = 2px$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2p \\ y = 2p \end{array}\right] (2p, 2p)$$

$$dA = (y_2 - y_1) \triangle x$$

$$= \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) \triangle x$$

$$A = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3} . \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3.2p} \Big]_0^{2p}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot (2p)^{3/2} - \frac{(2p)^3}{3 \cdot 2p}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 4p^2 - \frac{4}{3} p^2 = \frac{4}{3} p^2 \text{ satuan persegi.}$$

SOAL - SOAL LATIHAN.

7. Hitunglah luas bidang yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$ dan $x = 5$,

8. Hitunglah luas bidang yang dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$ dan $x = 3$.

9. Hitunglah luas bidang antara parabola $x = 3y^2 - 9$, sb y dan garis-garis $y = 0$, $y = 1$.
$= 3(y^2 - 3)$

10. Hitunglah luas bidang antara parabola $y = 9 - x^2$ dan garis $y = x + 3$.
$0 = 9 - x^2$
$x^2 = 9$
$x = 3$

11. Hitunglah luas gambar antara kedua pabola $y = x^2 - 4$ dan $y = 3 - 2x^2$.

12. Hitunglah luas gambar antara parabola $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ dan garis $y = x + 5\frac{1}{2}$

13. Hitunglah luas gambar antara garis $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, sb x dan garis $x = \pm a$.

14. Hitung luas ellip $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

15. Hitung luas benda $y^2 = x^4(4 + x)$.

IV - 2. VOLUME BENDA PUTAR.

Apabila suatu bidang datar diputar sekelliling suatu garis lurus maka terjadilah sebuah benda yang dinamakan benda putaran, sedangkan garis ini disebut sumbu putaran.

A. METODA I (DISC METHOD)

Dalam peristiwa ini kita bedakan dua jenis sumbu putaran :

1. Sumbu putaran merupakan bagian atau batas dari bidang yang diputar.

2. Sumbu putaran bukan merupakan bagian dari bidang yang diputar.

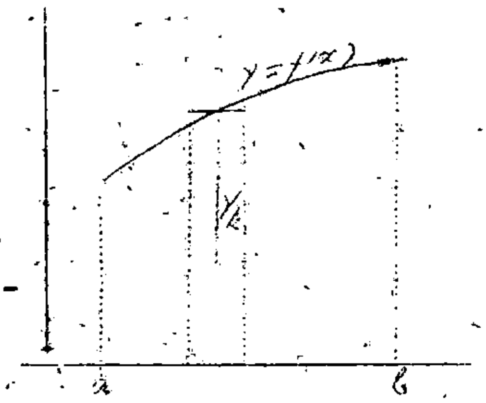
Langkah-langkah penyelesaian.

Ad. 1.

Misalkan bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sb x dan dua ordinat $x = a$ dan $x = b$ diputar sekeliling sb x, maka untuk menentukan volume benda yang terjadi ikutilah urutan pengerjaan dibawah ini.

a. Buatlah gambar sket dari bidang yang akan diputar.

b. Buatlah pembagian jalur tegak lurus sumbu putaran (dalam gambar cukup dilukiskan sebuah saja) dan lukis pula pada jalur ini persegi panjang pendekatan dengan alas dan tinggi masing-masing disebut $\Delta_k x$ dan y_k.



c. Tentukanlah volume silinder yang terjadi apabila persegipanjang diputar keliling sb x; jadi $\Delta v = \pi y_k^2 \cdot \Delta_k x$ dan volume untuk n buah silinder menjadi $\sum_{k=1}^{n} \pi y_k^2 \cdot \Delta_k x$.

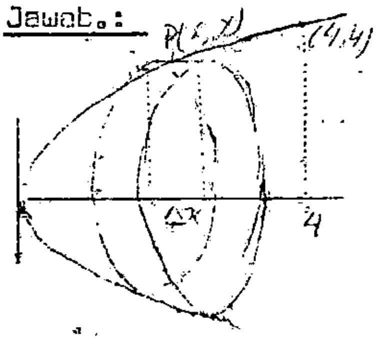
d. Misalkan jumlah persegi panjang itu bertambah manjadi tak terhingga; jadi untuk $n \to \infty$, selanjutnya pakaikan konsep hitung integral :

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi y_k^2 \Delta_k x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Contoh 1.

Hitunglah volume benda yang terjadi apabila bidang antara parabola $y^2 = 4x$ dan garis $x = 4$ yang terletak dikwadran pertama diputar sekeliling sumbu x.

Jawab. :



$$\Delta v = \pi y^2 \Delta x$$

$$\therefore \quad v = \int_0^4 \pi y^2 dx$$

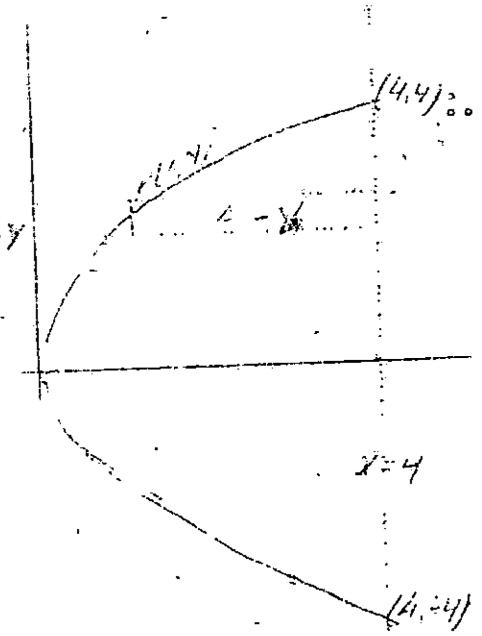
$$= \pi \int_0^4 4x \, dx = 2\pi x^2 \Big]_0^4$$

= 32 satuan kubik.

Contoh 2.

Hitunglah volume benda yang terjadi apabila daerah antara parabola $y^2 = 4x$ dan garis $x = 4$, diputar sekeliling garis $x = 4$.

Jawab :



Jari-jori silinder = 4 - x

$$\Delta v = \pi(4-3)^2 \; y\Delta$$

$$\therefore v = \int_{-4}^{4} \pi (4-x)^2 dy$$

$$= 2\pi \int_0^4 (4 - \frac{y^2}{4})^2 dy$$

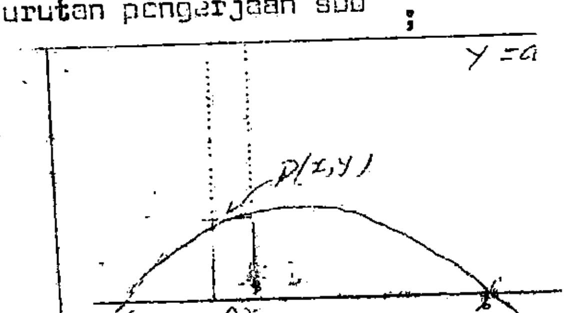
$$= 2\pi \int_0^4 (16 - 2y^2 + \frac{y^4}{16}) dy$$

$$= 2\pi \left(16y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{y^5}{80}\right]_0^4$$

$$= \frac{1024\pi}{15} \text{ satuan kubik.}$$

Ad. 2.

Misalkan bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ sb x diputar sekeliling garis $y = a$, maka untuk menentukan volume benda yang terjadi ikutilah urutan pengerjaan sbb ;



a. seperti ad. 1 diatas.

b. seperti ad. 1 diatas

c. sambung sisi persegi panjang sehingga memotong sumbu putaran y = a pada dua buah titik. volume silinder yang diminta dipe- roleh dari selisih kedua volume selinder yang terjadi; jadi:

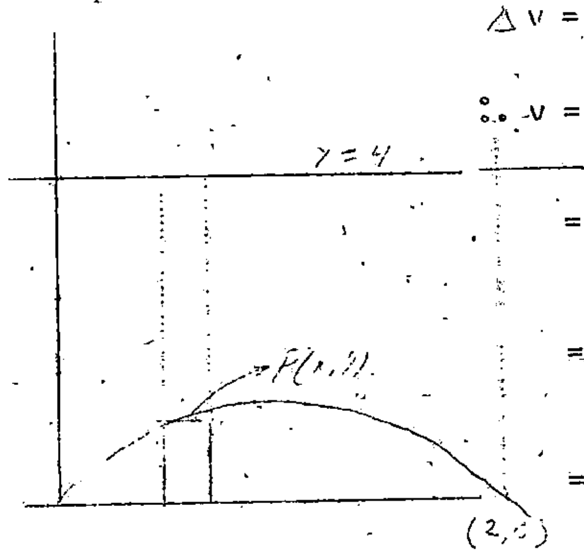
$$\Delta v = \pi a^2 \Delta x - \pi (a - y)^2 \Delta x.$$

d. seperti ad. 4 diatas.

Contoh 3.

Hitunglah volume benda yang terjadi dengan memutar luas gambar potongan parabola $y = 2x - x^2$ dengan sumbu x sekeliling garis $y = 4$.

Jawab :



$$\Delta v = \pi (4)^2 \Delta x - \pi (4 - y)^2 \Delta x$$

$$\therefore v = \pi \int_0^2 \{ 4^2 - (4 - y)^2 \} dx$$

$$= \pi \int_0^2 (8y - y^2)\, dx$$

$$= \pi \int_0^2 (16x - 12x^2 + 4x^3 - x^4) dx$$

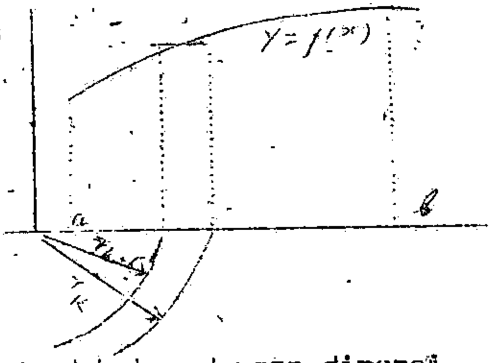
$$= \pi \left[8x^2 - 4x^3 + x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \frac{48\pi}{5}$$

B. METODA II (SHELL METHOD)

Pada metoda ini pembagian jalur dibuat sejajar dengan sumbu putaran.

Misalkan bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan dua ordinat $x = a$ dan $x = b$ yang terletak di kwadran pertama diputar keliling sumbu y. Untuk menentukan volume benda yang terjadi, ikutilah urutan pengerjaan sbb :



a. seperti ad. 1 dalam A.

b. buat pembagian jalur sejajar dengan sumbu putaran (dalam gambar cukup dilukiskan sebuah saja), dan lukis pula pada jalur ini persegipanjang pendekatan dengan dimensi $\Delta_k x$ dan y_k.

c. Tentukan volume silinder shell yang terjadi apabila persegi panjang ini diputar keliling sb y. Jika jari-jari dalam dan luar masing-masing disebut r_{k-1} dan r_k, maka :

$$\Delta_k v = \pi(r_k^2 - r_{k-1}^2)\, y_k$$

Dengan dalil harga menengah :

$$r_k^2 - r_{k-1}^2 = \frac{d}{dx}(x^2)\Big]_{x=x_k^1}(r_k - r_{k-1})$$

$$= 2x_k^1 \Delta_k x$$

dimana $r_{k-1} < x_k^1 < r_k$

$$\therefore \Delta_k v = 2\pi x_k^1 y_k \Delta_k x = 2\pi x_k^1 f(x_k)\Delta_k x.$$

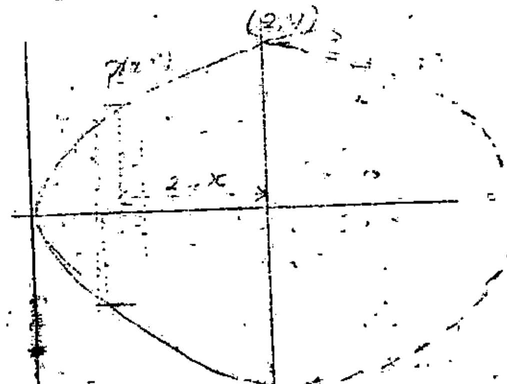
d. seperti ad. 1 dalam A.

$$v = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum x_k^1 f(x_k)\Delta_k x$$

$$= 2\pi \int_a^b x\, f(x)dx$$

Contoh 4.

Tentukanlah volume yang terjadi apabila parabola $y^2 = 8x$ diputar sekeliling garis $x = 2$.



Tinggi persegi panjang pendekatan $\doteq 2y \doteq 4\sqrt{x}$ dan alasnya Δx, sedangkan jarak titik tengahnya terhadap sumbu putaran $= 2 - x$.

Apabila persegi panjang ini diputar sekeliling sumbu putaran $x = 2$, maka volume silinder shell yang terjadi adalah $\Delta v = 2\pi(2 - x)\, 4\sqrt{2x}\,\Delta x$. Jadi volume yang ditanyakan menjadi :

$$\therefore v = 8\sqrt{2}\,\pi \int_0^2 (2 - x)\sqrt{x}\, dx$$

$$= 8\sqrt{2}\,\pi \int_0^2 (2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})\, dx$$

$$= 8\sqrt{2}\,\pi\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big]_0^2$$

$$\doteq \frac{256\pi}{15}$$ satuan kubik.

IV - 3. Titik berat bidang datar.

Yang dimaksud dengan bidang datar ialah bidang yang homogen seperti pelat tipis atau dengan perkataan lain massa persatuan volume dari bidang tersebut sama dimana-mana.
Untuk menentukan koordinat titik berat bidang ini harus terlebih dahulu kita pahami tiga perinsip dasar seperti berikut :

1. titik berat dari suatu persegi panjang adalah titik potong kedua diagonalnya.
2. momen dari suatu bidang terhadap suatu garis sama dengan hasilkali luas bidang itu dengan jarak titik beratnya kegaris tersebut.
3. jumlah momen dari beberapa bidang sejajar terhadap suatu garis sama dengan momen resultannya.

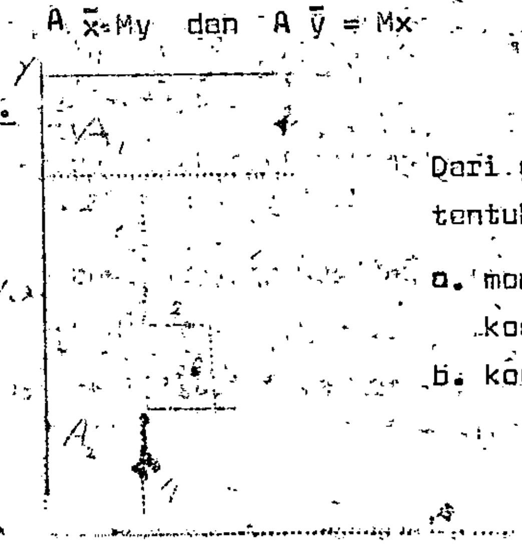
Momen dari suatu terhadap sumbu-sumbu koordinat dapat ditentukan sebagai berikut :

1. buatlah gambar sket dari bidang yang akan ditentukan titik beratnya itu.
2. lukislah sebuah persegi panjang pendekatan seperti halnya dalam menentukanluas.
3. tentukanlah hasilkali luas persegi panjang ini dengan jarak titik beratnya kesumbu-sumbu koordinat, dan kemudian tentukanlah jumlahnya untuk semua persegi-panjang.
4. Anggaplah jumlah persegi panjang itu mendekati tak terhingga banyaknya dan selanjutnya pakaikan perinsip dasar hitung integral.

Jika suatu bidang luasnya A, dan titik beratnya $(\bar{x}, \bar{y})$ sedangkan momennya terhadap sb x dan sb y masing-masing disebut M_x dan M_y maka berlaku :

$$A\,\bar{x} = M_y \quad \text{dan} \quad A\,\bar{y} = M_x$$

Contoh 1.



Dari gambar disebelah ini tentukanlah :

a. momen terhadap sumbu-sumbu koordinat
b. koordinat titik beratnya.

Jawab :

$A_1 = 5 \times 2 = 10$; titik beratnya $(2\frac{1}{2}, 9)$

$A_2 = 8 \times 2 = 16$; titik beratnya $(1 ; 4)$

$A_3 = 2 \times 2 = 4$; titik beratnya $(3 ; 5)$

$Mx = 10 \times 9 + 16 \times 4 + 4 \times 5 = 174$

$My = 10 \times 2,5 + 16 \times 1 + 4 \times 3 = 53$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 10 + 16 + 4 + 30$

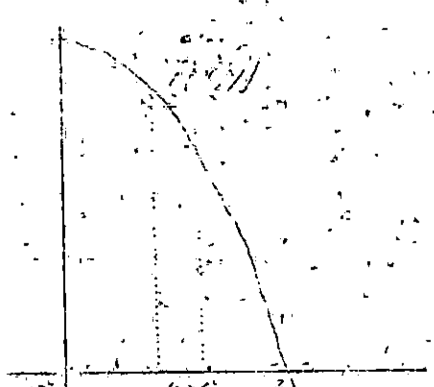
$A\bar{x} = My \quad 30\bar{x} = 53 ; \bar{x} = 1,77$

$A\bar{y} = Mx \quad 30\bar{y} = 174 ; \bar{y} = 5,8$

$\therefore$ Titik berat bidang yang ditanya $z(1\frac{77}{100} ; 5\frac{8}{10})$

Contoh 2.

Tentukanlah titik berat dari bidang yang terletak di - kwadran pertama yang dibatasi oleh parabola $y = 9 - x^2$ dan sumbu x.



Titik berat dari persegi panjang ialah $(x, \frac{y}{2})$.

$$A = \int_0^3 y\, dy = \int_0^3 (9 - x^2)\, dx$$

$$= 9x - \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^3 = 18$$

$$Mx = \int_0^3 y \cdot \frac{1}{2} y\, dx = \frac{1}{2}\int_0^3 y^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 (9 - x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^3 (81 - 18x^2 + x^4)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{129,6}{2} = 64,8$$

$$My = \int_0^3 y \cdot x\, dx = \int_0^3 x(9 - x^2)\, dx$$

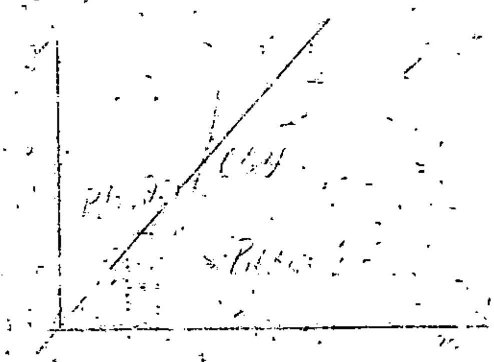
$$= \int_0^3 (9x - x^3)\, dx = \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^3 = \frac{81}{4}$$

$\bar{X} = \frac{My}{A} = \frac{9}{8}$; $\bar{y} = \frac{Mx}{A} = 3,6$

$\therefore$ Titik berat yang ditanya $Z\left(\frac{9}{8}, \frac{18}{5}\right)$

Contoh 3.

Tentukanlah titik berat bidang yang terletak dikwadran pertama dan dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$.



Titik berat dari persegi panjang adalah $\left(x, \frac{x + x^2}{2}\right)$

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$Mx = \int_0^1 (x - x^2).\frac{1}{2}(x + x^2)\,dx = \frac{1}{15}$$

$$My = \int_0^1 (x - x^2).x\,dx = \frac{1}{12}$$

$$\bar{x} = \frac{My}{A} = {}^{1/12}/_{1/6} = \frac{1}{2} \; ; \; \bar{y} = \frac{Mx}{A} = {}^{1/15}/_{1/6} = \frac{2}{5}$$

Jadi titik beratnya $Z\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

SOAL - SOAL LATIHAN.

4. Tentukanlah titik berat dari bidang yang terletak dikwadran pertama yang dibatasi oleh parabola $y = 4 - x^2$ dan sb x.

5. Tentukanlah titik berat bidang yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 9$.

6. Tentukanlah titik berat dari bidang yang dibatasi oleh kedua kurva $y = 4x - x^2$ dan garis $y = x$.

7. Tentukanlah titik berat gambar yang dibatasi oleh kurva $x^2 = 8y$, $y = 0$ dan $x = 4$.

8. Hitunglah titik berat lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ yang terletak dikwan pertama.

9. Tentukanlah titik berat gambar yang dibatasi oleh kurva $x^2 = 8y + 4$ dan $x^2 = 4y$ yang terletak dikwadran pertama.

10. Tentukanlah titik berat bidang antara kurva $x = y^2$ dan $x^2 = -8y$.

IV - 4 Titik berat benda Putaran

Momen dari suatu benda putaran dengan volume V, yang terjadi dengan memutar suatu bidang datar sekeliling sumbu koordinat terhadap bidang yang melalui titik asal O dan tegak lurus sumbu putaran itu dapat ditentukan sebagai berikut :

1. Lukislah gambar sket dari bidang tersebut dan buatlah pembagian bidang tegak lurus sumbu putaran dan setiap sub bagian dapat dipandang sebagai persegi panjang pendekatan.
2. Tentukanlah hasil kali volume dari selinder yang terjadi dengan jarak titik berat persegi panjang kebidang yang melalui O dan tegak lurus sumbu putaran seperti yang disebutkan diatas. Selanjutnya tentukanlah jumlahnya untuk semua persegi panjang.
3. Anggaplah jumlah dari persegi panjang itu mendekati tak terhingga dan selanjutnya pakaikanlah perinsip dasar hitung integral.

Apabila sumbu putaran itu adalah sb. x, maka titik berat benda itu akan terletak pada sumbu x tersebut. Jika Myz momen benda putaran itu terhadap bidangyang melalui titik asal O dan tegak lurus sb x, maka :

$$V\bar{x} = Myz \ ; \ \bar{y} = 0$$

Dengan cara yang sama apabila sumbu y sebagai sumbu putaran, maka kita peroleh :

$$V\bar{y} = Mxz \ ; \ \bar{x} = 0$$

Dalil Pappus I.

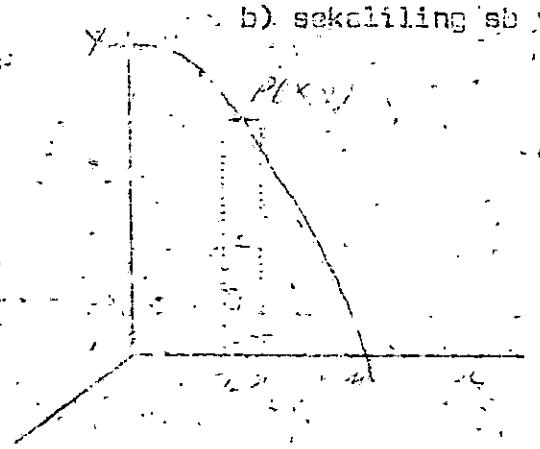
Apabila suatu bidang diputar sekeliling sumbu pada bidang itu, jadi tidak memotong bidang, maka volume benda yang terjadi sama dengan hasilkali luas bidang yang diputar dengan keliling lingkaran yang dijalani oleh berat bidang tersebut.

Contoh 1.

Tentukanlah titik berat benda putaran yang terjadi apabila gambar yang dibatasi oleh grafik $y = 4 - x^2$ dan terletak dikwadran pertama diputar :

a) sekeliling sb x

b) sekeliling sb y.



a) $V = \int_0^2 \pi y^2 dx$

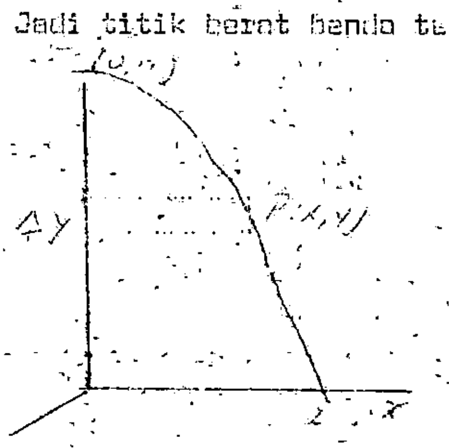
$= \pi \int_0^2 (4 - x^2)dx$

$= \pi \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 256\pi/15$

$M_{yz} = \int_0^2 \pi y^2 . x\, dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 x\, dx = 32\pi/3$

$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{256\pi/15}{32\pi/3} = \frac{5}{8}$

Jadi titik berat benda tersebut $(\frac{5}{8}, 0)$.



b) $V = \int_0^4 \pi x^2 dy$

$= \pi \int_0^4 (4 - y)\, dy$

$= \pi \left(4y - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$

$M_{xz} = \int_0^4 \pi x^2 . y\, dy$

$= \pi \int_0^4 (4 - y).y\, dy = \pi \int_0^4 (4y - y^2)\, dy$

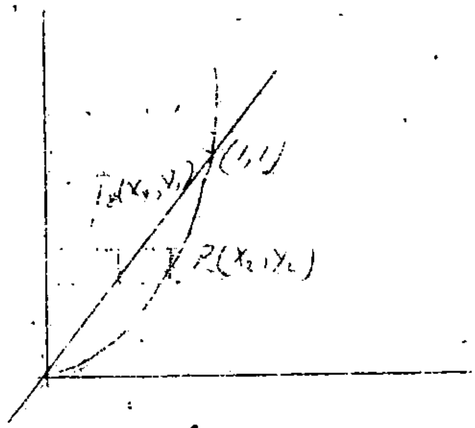
$$= \pi\left(2y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^4 = 10\frac{2}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{Mxz}{V} = \frac{10\frac{2}{3}}{8\pi} = 4/3$$

Jadi titik berat benda tersebut (0, 4/3).

Contoh 2.

Tentukanlah koordinat titik berat benda putaran apabila bidang yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$ diputar sekeliling sb y.



$$V = \int_0^1 \pi\,(x_2^2 - x_1^2)\ dy$$

$$= \pi\int_0^1 (\,y - y^2)\ dy$$

$$= \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

$$Myz = \pi\int_0^1 (y - y^2).y\ dy$$

$$= \pi\int_0^1 (y^2 - y^3)\ dy$$

$$= \pi\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$$

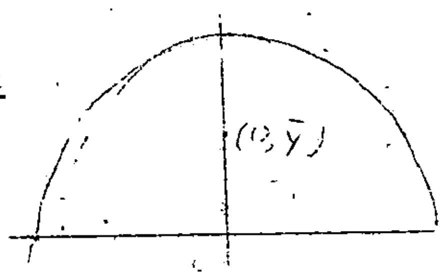
$$\bar{y} = \frac{Mxz}{V} = \frac{\pi}{12}\Big/\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Jadi titik berat benda putaran tersebut $(\,0, \frac{1}{2}\,)$

Contoh 3.

Tentukan koordinat titik berat setengah lingkaran dengan radius r.

Jawab



$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dengan dalil Pappus :

$$V = A.2\pi\bar{y}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 . 2\pi\bar{y}$$

$$\frac{4}{3}r = \pi\bar{y} \longrightarrow \bar{y} = \frac{\frac{4}{3}r}{\pi} = \frac{4r}{3\pi}$$

Jadi koordinat titik berat benda $Z\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$

SOAL - SOAL LATIHAN.

4. Tentukanlah koordinat titik berat benda yang terjadi apabila daerah antara kurva $y = x^2$, $y = 9$ dan $x = 0$ diputar sekeliling sb x.

5. Seperti soal nomor 4, jika diputar sekeliling sb y.

6. Tentukanlah koordinat titik berat benda putaran apabila daerah antara parabola $y = 9 - x^2$ diputar sekeliling sb x.

7. Tentukanlah koordinat titik berat dari benda putaran apabila bidang yang dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$ da $y = x$ diputar sekeliling sb x.

8. Tentukanlah koordinat titik berat benda yang terjadi apabila bidang antara kurva $x^2 - y^2 = 16$ dan garis-garis $y = 0$, $x = 8$ diputar sekeliling sb x.

9. Tentukanlah koordinat titik berat benda yang terjadi apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $(x - 2)y^2 = 4$, $y = 0$ dan $x = 5$ diputar sekeliling sb x.

10. Tentukanlah koordinat titik berat benda putaran apabila bidang antara kedua kurva $y = -x^2 - 3x + 6$ dan $x + y - 3 = 0$, diputar sekeliling sb x.

IV - 5 Momen Inersi dari suatu bidang datar.

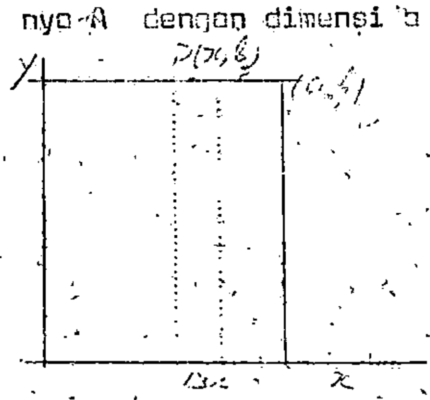
Momen inersi Il dari suatu bidang terhadap garis 1 yang terletak pada bidang tersebut dapat dihitung sebagai berikut :

1. Buatlah gambar sket dari bidang dan lukislah pembagian sejajar dengan garis 1 (cukup dilukis sebuah saja), dan lukis pula persegi panjang pendekatannya.
2. Tentukanlah hasilkali luas persegipanjang ini dengan kwadrat jarak dari titik beratnya kegaris 1 dan kemudian jumlahkan untuk semua persegipanjang.
3. Anggaplah jumlah persegi panjang itu mendekati tak terhingga dan pakaikanlah perinsip dasar hitung integral.

Jari-jari girasi R adalah suatu $\sqrt{\ }$ Il = AR^2; dimana A adalah luas bidang. $\sqrt{\ }$ bilangan positip yang memenuhi hubungan

Contoh 1.

Tentukanlah momen inersi dari persegi panjang yang luasnya A dengan dimensi a dan b, terhadap salah satu sisinya



Misalkan persegi panjang itu seperti tergambar disebelah ini dan misalkan pula sisi dalam pertanyaan diatas berimpit dengan sb. y.

Dalam hal ini luas sub persegi panjang dA = b.Δx, sedangkan titik beratnya (x, $\frac{b}{2}$) dan momen inersi untuk satu elemen ini sama dengan b.Δx.x^2

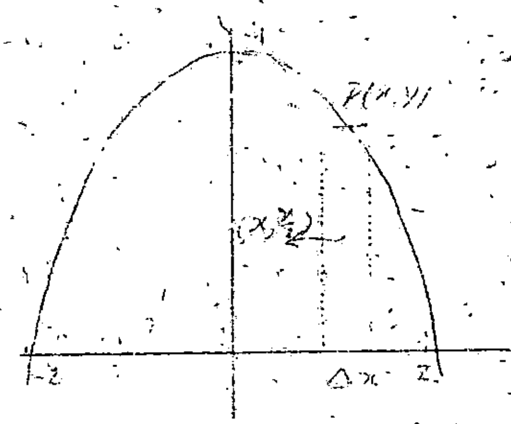
$$\text{Jadi : } Iy = \int_0^a x^2 b\, dx = \frac{b}{3}\, x^3 \Big]_0^a = \frac{1}{3} a^3 b = \frac{1}{3} A a^2$$

Dari hasil ini dapat diambil suatu patokan bahwa momen inersi dari suatu persegi panjang terhadap suatu sisinya sama dengan $\frac{1}{3}$ hasilkali luas persegipanjang itu dengan kwadrat sisi yang lain.

Contoh 2.

Hitunglah momen inersi dari bidang yang dibatasi oleh parabola $y = 4 - x^2$ dan sumbu x terhadap sumbu, y; dan tentukan lah besarnya jari-jari giresi.

Cara 1.



Luas persegi panjang dalam gambar $dA = y \cdot \Delta x$, sedangkan titik beratnya $(x, \frac{y}{2})$

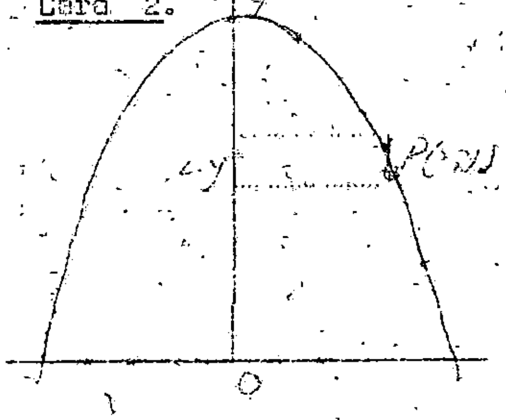
Momen inersi $I_y = \int_{-2}^{2} x^2 y \, dx$

$$I_y = 2\int_0^2 x^2(4 - x^2)\, dx$$

$$= 2\int_0^2 (4x^2 - x^4)\, dx$$

$$= 2\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128}{15}$$

Cara 2.



Luas persegi panjang $dA = x \cdot \Delta y$ sedangkan sisi yang tegak lurus sb y adalah x.

Sekarang pergunakan hasil soal contoh no. 1 diatas jadi :

Momen inersi dari persegi panjang ini sama dengan $\frac{1}{3}(x \cdot \Delta y) \cdot x^2 = \frac{1}{3}x^3 \cdot \Delta y$.

$$\therefore \; I_y = \frac{2}{3}\int_0^4 x^3 \, dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^4 (4 - y)^{3/2} dy$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(4 - 4)^{5/2}\Big]_0^4 = \frac{128}{15}$$

$$A = 2\int_0^4 x \, dy$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{4 - y}\, dy$$

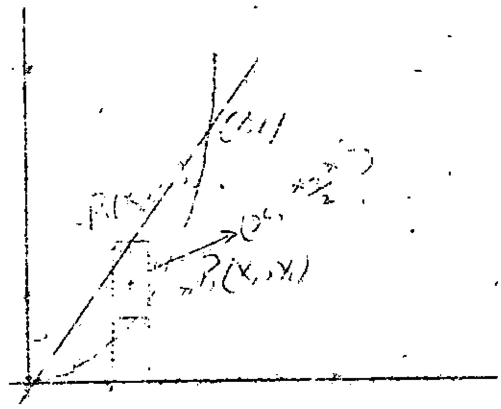
$$= -2 \cdot \frac{2}{3}(4 - y)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{32}{3}$$

$$Iy = R^2 \longrightarrow \frac{128}{15} = \frac{32}{3} R^2$$

$$R^2 = 4/5 \longrightarrow R = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Contoh 3

Hitunglah momen inersi dari bidang yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$ yang terletak pada kwadran pertama terhadap sumbu y.



$$dA = (y_2 - y_1)\Delta x$$

$$= (x - x^2)\Delta x.$$

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 1/3x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$Iy = \int_0^1 x^2(x - x^2)\, dx$$

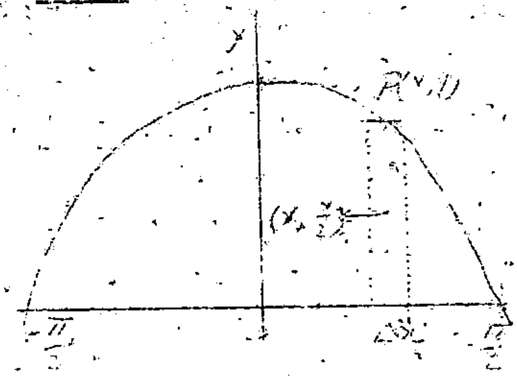
$$= \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{1}{20}$$

Contoh 4.

Hitunglah momen inersi terhadap sb x dari bidang yang dibatasi oleh kurva $y = \cos x$ dari $x = -\frac{\pi}{2}$ ke $x = \frac{\pi}{2}$ d sb x, dan tentukan pula jari²jari giraninya.

Jawab



$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= 2 \sin x \Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$Ix = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cdot \frac{1}{3} \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\, d \sin x$$

$$= \frac{1}{3} \Big[\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$Ix = AR^2 \longrightarrow \frac{2}{3} = 2R^2$$

$$R^2 = \frac{1}{3} \longrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

SOAL - SOAL LATIHAN :

5. Diketahui parabola $y = 9 - x^2$ dan garis $y = o$
   Ditanyakan :
   a. hitunglah momen inersi bidang yang dibatasi parabola $y = 9 - x^2$ dan garis $y = o$ terhadap sumbu y.
   b. tentukanlah besaranya jari-jari girasi.

6. Hitunglah momen inersi dari bidang yang dibatasi oleh kurva $y = cx^2$, $y = o$; $x = 1$ terhadap sumbu y.

7. Hitunglah momen inersi dari bidang yang dibatasi oleh parabola $y = 4 - x^2$ dan $y = o$ yang terletak pada kwadran pertama terhadap sb. x.

8. Hitunglah momen inersi dari luas gambar yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$, $x = 1$ terhadap sumbu y.

9. Hitunglah momen inersi dari lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ terhadap diameternya.

10. Hitunglah momen inersi dari ellip $4x^2 + 9y^2 = 36$ terhadap sb x.

IV - 6 Momen Inersi dari benda putaran.

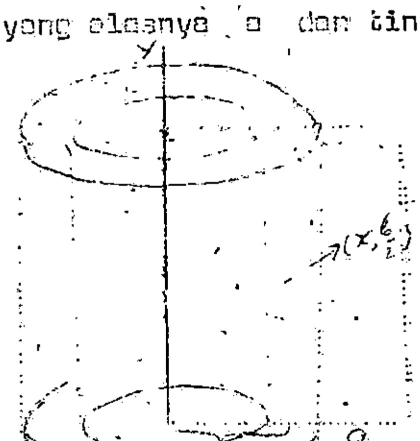
Momen inersi I_p dari suatu benda putaran dengan volume V yang terjadi dengan memutar suatu bidang sekeliling garis p pada bidang itu terhadap garis tersebut dapat dihitung sebagai berikut :

1. Buatlah gambar sket dari bidang itu dan lukislah pembagian sejajar sumbu putaran p (cukup dilukis sebuah saja) dan buatlah persegi panjang pendekatannya.
2. Tentukanlah hasilkali volume yang terjadi dengan memutar persegi panjang tadi sekeliling garis p dengan kwadrat jarak dari titik berat persegi panjang itu kegaris p dan kemudian jumlahkan untuk seluruh persegi panjang.
3. Anggaplah jumlah persegi panjang itu mendekati tak terhingga banyaknya dan pakaikan perinsip dasar hitung integral.

Jari-jari giresi R adalah suatu bilangan positif yang memenuhi hubungan $I_p = VR^2$, dimana V adalah volume benda putaran.

Contoh 1.

Hitunglah momen inersi suatu silinder tegak yang tingginya b dan jari-jari alasnya a, terhadap sumbunya.
Misalkan silinder itu terjadi dengan memutar persegi panjang yang alasnya a dan tingginya b.



Lukislah sebuah subpersegi panjang seperti dalam gambar disebelah ini dengan titik beratnya $(x, \frac{b}{2})$, volume silinder yang terjadi dengan memutar subpersegi panjang ini sekeliling sb y ialah $\Delta V = 2\pi bx.\Delta x$ (dalil Pappus). sedangkan $V = \pi ba^2$

$$I_p = 2\pi\int_0^a x^2 . bx\, dx$$

$$= 2\pi\int_0^a bx^3 dx = \frac{1}{2}\pi ba^4$$

$$= \frac{1}{2}\pi ba^2 . a^2 = \frac{1}{2} Va^2$$

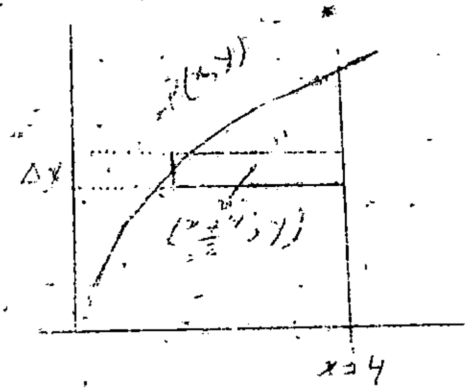
Dari hasil ini kelihatan bahwa momen inersi dari silinder putar terhadap sumbunya sama dengan setengah hasilkali volume dan kwadrat jari-jarinya.

Contoh 2.

Hitunglah momen inersi dari benda yang terjadi dengan memutar bidang yang dibatasi oleh $y^2 = 4x$ dan garis $x = 4$ sekeliling sumbu x.

Jawab.

Cara I



$$\Delta V = 2\pi y(4 - x)\Delta y$$

$$= 2\pi y(4 - \frac{y^2}{4})\Delta y$$

$$V = 2\pi\int_0^4 y(4 - \frac{y^2}{4})\, dy$$

$$= 2\pi\int_0^4 (4y - \frac{y^3}{4})\, dy$$

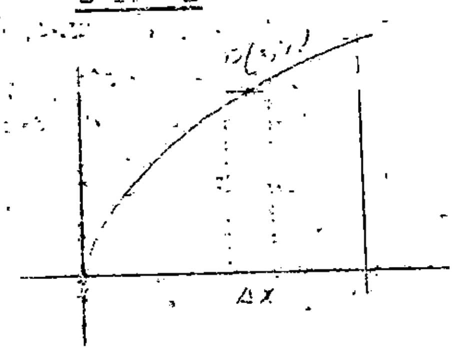
$$= 2\pi(2y^2 - \frac{y^4}{16}\Big]_0^4 = 32\pi$$

$$I_x = 2\pi\int_0^4 y^2 . y(4 - \frac{y^2}{4})\, dy$$

$$= 2\pi\int_0^4 (4y^3 - \frac{y^5}{4})\, dy$$

$$= 2\pi(y^4 - \frac{y^6}{24}\Big]_0^4 = \frac{512\pi}{3}$$

Cara 2



$$\Delta V = \pi y^2 \Delta x$$

$$V = \pi\int_0^4 y^2\, dx = 4\pi\int_0^4 x\, dx$$

$$= 4\pi\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = 32\pi$$

$$Ix = \frac{1}{2}\pi\int_0^4 y^4\,dx = 8\pi\int_0^4 x^2\,dx$$

$$= 8\pi\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^4 = \frac{512\,\pi}{3}$$

SOAL - SOAL LATIHAN.

3. Hitunglah momen inersi dari benda yang terjadi dengan memutar bidang yang dibatasi oleh parabola $y = 4 - x^2$, $x = 0$ dan $y = 0$ terhadap sumbu x.

4. Hitunglah momen inersi dari benda yang terjadi dengan memutar bidang yang dibatasi oleh parabola $y^2 = 8x$, sb x dan garis $x = 2$ sekeliling sumbu x dan tentukan pula besar jari-jari girasinya.

5. Hitunglah momen inersi terhadap sumbu putaran dari benda putaran yang terjadi dengan memutar bidang yang diberikan dibawah ini sekeliling sumbu putarannya :

   a. $x^2 = 8y$, $y = 2$ sekeliling sb y.

   b. $y = 4x - x^2$, $y = 0$ sekeliling sb x.

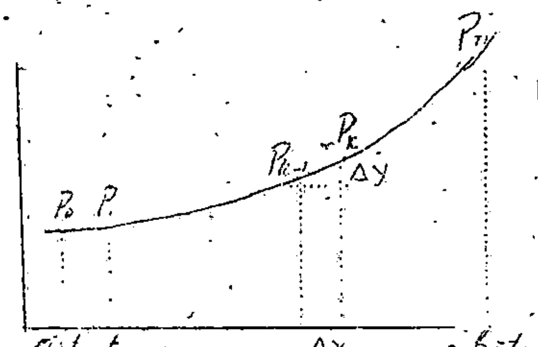
   c. $y^2 = 8x$, $x = 2$ sekeliling sb y.

   d. $4x^2 + 9y^2 = 36$ sekeliling sb x.

   e. $x^2 + y^2 = a^2$ sekeliling $y = b$ m, b a.

IV - 7 Pnjang Busur.

Misalkan $y = f(x)$ kontinu sepanjang interval $a \leq x \leq b$ dan terbagi kedalam n sub interval dengan titik-titik bagi $t_0 = a$, t_1, t_2 ...., t_{n-1}, $t_n = b$. seperti gambar dibawah ini :



Kemudian lukiskanlah garis-garis tegak lurus sb x pada titik bagi ini hingga memotong kurva $y = f(x)$ pada titik-titik $P_0 = A$, P_1, P_2 .... P_{n-1}, $P_n = B$.

Selanjutnya perhatikan busur $P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2}$

Menurut dalil harga menengah ada sekurang-kurangnya satu titik $x = x_k$ pada busur $P_{k-1}P_k$ dengan $f'(x)$ sama dengan miringnya busur $P_{k-1}P_k = \frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}$.

Jadi : $P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\Delta_k x$; $t_{k-1} < x < t_k$

dan

$$AB = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,\Delta_k x$$

atau

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Jika pembagian interval itu terhadap sb y maka rumusnya menjadi :

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Apabila $A(u = u_1)$ dan $B(u = u_2)$ adalah dua buah titik pada kurva yang dinyatakan dengan persamaan parameter $x = f(u)$; $y = g(u)$ dan memenuhi syarat kontinu, maka panjang busur AB diberikan oleh :

$$S = \int_{AB} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du.$$

Contoh 1.

Hitunglah panjang busur dari kurva $y = \ln \cos x$ dari $x = \frac{\pi}{6}$ ke $x = \frac{\pi}{4}$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot -\sin x = -\operatorname{tg} x.$$

$$S = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec x\,dx$$

$$= \ln\left|\sec x + \operatorname{tg} x\right|_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \ln(1 + \sqrt{2})/\sqrt{3} \quad \text{satuan}$$

Contoh 2.

Hitunglah panjang busur dari kurva $y^2 = x^3$ sepanjang interval $x = 0$ ke $x = 2$.

Jawab.

$$2yy' = 3x^2 \longrightarrow y' = \frac{3x^2}{2y}$$

$$S = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

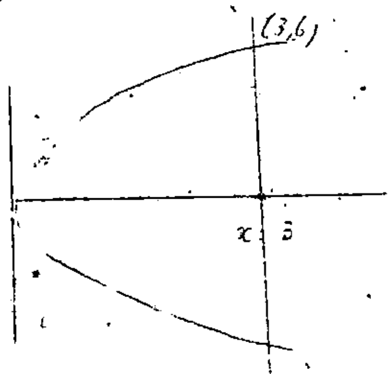
$$= \frac{4}{9} \int_0^2 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right).$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^2$$

$$= \frac{8}{27} \left(5\tfrac{1}{2}\sqrt{5\tfrac{1}{2}} - 1\right) \text{ satuan.}$$

Contoh 3

Hitunglah panjang busur dari parabola $y^2 = 12x$ yang dipotong oleh garis $x = 3$.



Panjang busur yang diminta duakali panjang busur dari titik (0,0) ke titik (3,6) $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{12} = \frac{y}{6}$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{36+y^2}{36}$$

$$\therefore\ S=2\int_0^6\sqrt{\frac{36+y^2}{36}}\,dy$$

$$=2.\frac{1}{6}\int_0^6\sqrt{36+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{y}{2}\sqrt{36+y^2}+18\ \ln\left(y+\sqrt{36+y^2}\right)\right]_0^6$$

$$=6\left\{\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}\right)\right\}\quad \text{satuan}$$

<u>Contoh 4</u>

Hitunglah panjang busur dari kurva $x=t^2$; $y=t^3$ dari $t=0$ ke $t=2$.

<u>Jawab</u> :

$$\frac{dx}{dt}=2t\ ;\ \frac{dy}{dt}=3t^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4t^2+9t^4.$$

$$\therefore\ S=\int_0^2\sqrt{4t^2+9t^4}\,dt$$

$$=\int_0^2\sqrt{1+\frac{9}{4}t^2}\,.\,2t\,dt$$

$$=\int_0^2\left(1+\frac{9}{4}t^2\right)^{\frac{1}{2}}.\,2t\,dt$$

$$=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\ \text{satuan}$$

SOAL - SOAL LATIHAN

5. Tentukanlah panjang busur dari kurva $y = x^{3/2}$ dari $x = 0$ ke $x = 5$.

6. Hitunglah panjang busur dari $x = 2y^{3/2} - 3$ dari $y = 0$ ke $y = 3$.

7. Hitunglah panjang busur dari kurva $y = \frac{1}{2} a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ dari $x = 0$ ke $x = a$.

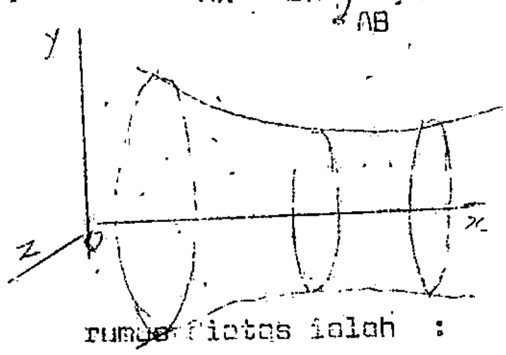
8. Hitunglah panjang busur dari kurva $y^3 = 8x^2$; $x = 1$; $x = 8$.

9. Hitunglah panjang busur dari cikloida $x = \theta - \sin\theta$, $y = \cos\theta$ dari $\theta = 0$ ke $\theta = 2\pi$

IV - 8. LUAS PERMUKAAN BENDA PUTAR.

Apabila $A(a,c)$ dan $B(b,d)$ dua buah titik pada kurva $y = f(x)$, dimana $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu dan tidak berubah tanda pada interval $a \leq x \leq b$, maka luas permukaan dari benda yang terjadi jika busur AB diputar sekeliling sb x diberikan oleh :

$$A_x = 2\pi \int_{AB} y\,ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



Jika $f'(x) \neq 0$ atau dengan kata lain kurva $y = f(x)$ tidak sejajar dengan sb x, maka bentuk lain dari rumus diatas ialah :

$$A_x = 2\pi \int_{AB} y\,ds = 2\pi \int_c^d y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Apabila $A(a,c)$ dan $B(b,d)$ dua buah titik pada kurva $x = g(y)$, dimana $g(y)$ dan $g'(y)$ kontinu dan tidak berubah tanda dalam interval $c \leq y \leq d$, maka luas permukaan benda yang

Jawab :

Disini $h = 20$ dan

$$\int_0^{120} f(x)\,dx \approx \frac{20}{3}(0 + 4.22 + 2,41 + 4.53 + 2,38 + 4,17 + 0) = 3507 \text{ m}^3.$$

SOAL - SOAL LATIHAN :

4. Hitung luas gambar yang dibatasi oleh kurva $y = e^{-x^2}$ sb x dan garis $x = 0$ dan $x = 1$ dengan mempergunakan :

   a) aturan Simpson

   b) perluasan deret.

b) Hitunglah harga pendekatan dari : $\int_2^6 \frac{dx}{x}$ dengan mempergunakan :

   a) aturan trapesium dengan $n = 4$

   b) rumus prismoidal

   c) aturan Simpson dengan $n = 4$

========

SOAL - SOAL LATIHAN

5. Tentukanlah panjang busur dari kurva $y = x^{3/2}$ dari $x = 0$ ke $x = 5$.

6. Hitunglah panjang busur dari $x = 2y^{3/2} - 3$ dari $y = 0$ ke $y = 3$.

7. Hitunglah panjang busur dari kurva $y = \frac{1}{2} a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ dari $x = 0$ ke $x = a$.

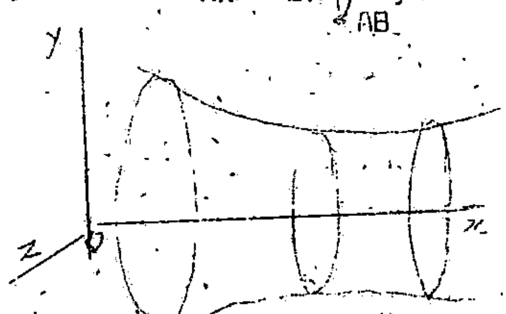
8. Hitunglah panjang busur dari kurva $y^3 = 8x^2$; $x = 1$; $x = 8$.

9. Hitunglah panjang busur dari cikloida $x = \theta - \sin\theta$, $y = \cos\theta$ dari $\theta = 0$ ke $\theta = 2\pi$

IV - 8. LUAS PERMUKAAN BENDA PUTAR.

Apabila $A(a,c)$ dan $B(b,d)$ dua buah titik pada kurva $y = f(x)$, dimana $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu dan tidak berobah tanda pada interval $a \leq x \leq b$, maka luas permukaan dari benda yang terjadi jika busur AB diputar sekeliling sb x diberikan oleh :

$$Ax = 2\pi \int_{AB} y\,ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



Jika $f'(x) \neq 0$ atau dengan kata lain kurva $y = f(x)$ tidak sejajar dengan sb x, maka bentuk lain dari rumus diatas ialah :

$$Ax = 2\pi \int_{AB} y\,ds = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Apabila $A(a,c)$ dan $B(b,d)$ dua buah titik pada kurva $x = g(y)$, dimana $g(y)$ dan $g'(y)$ kontinu dan tidak berobah tanda dalam interval $c \leq y \leq d$, maka luas permukaan benda yang terjadi jika busur AB diputar sekeliling sb y diberikan oleh :

$$A_y = 2\pi\int_{AB} x\,dy = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

atau

$$A_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Apabila fungsi diatas diberikan dalam bentuk persamaan parameter $y = f(t)$, $x = g(t)$ yang memenuhi syarat-syarat kontinu dan diputar sekeliling sb x, maka luas permukaan benda yang terjadi :

$$A_x = 2\pi\int_{AB} y\,ds = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

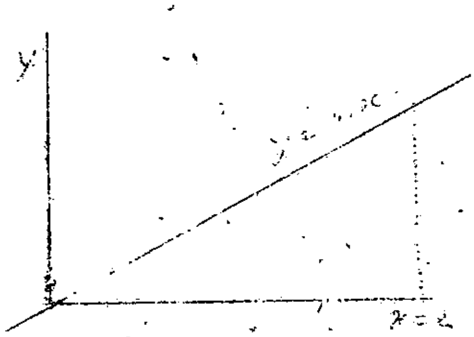
dan atau

$$A_y = 2\pi\int_{AB} x\,ds = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

jika diputar sekeliling sb y.

Contoh 1.

Hitunglah luas permukaan benda putar apabila garis $y = mx$ dari $x = 0$ ke $x = 2$ diputar sekeliling sb x.



$$A_x = 2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

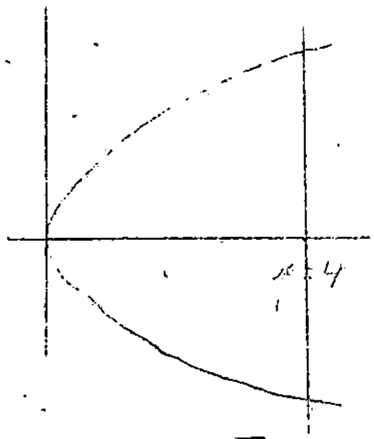
$$= 2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+m^2}\,dx$$

$$= 2\pi\sqrt{1+m^2}\int_0^2 mx\,dx$$

$$= 4\pi m\sqrt{1+m^2}.$$ Satuan persegi.

Contoh 2

Hitunglah luas permukaan benda putaran apabila busur parabola $y^2 = 4x$ dari $x = 0$ ke $x = 4$ diputar sekeliling sb x.



$$2\,yy' = 4 \longrightarrow y' = \frac{2}{y}$$

$$A_x = 2\pi \int_0^4 y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 y\sqrt{1 + \frac{4}{y^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{4x + 4}\,dx$$

$$= \frac{8\pi}{3}(x + 1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4$$

$$= \frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1) \quad \text{satuan persegi.}$$

Contoh 3.

Hitunglah luas permukaan sebuah bola apabila lingkaran $x = a\cos t$; $y = a\sin t$ diputar sekeliling sb y.

Jawab.

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \;; \quad \frac{dy}{dt} = a\cos t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t.$$

$$= a^2$$

$$A_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$$

$$= 4\pi a^2.$$

$3\pi^3 \cdot 3.5\,a^2 \cdot 4a^2$

SOAL - SOAL LATIHAN.

4. Hitunglah luas permukaan benda putaran apabila kurva $x = y^3$ dari $y = 0$ ke $y = 3$ diputar sekeliling sb y.

5. Hitunglah luas permukaan benda putaran apabila busur $y = \frac{1}{3} x^2$ dari $x = 0$ ke $x = 3$ diputar sekeliling sb x.

6. Hitunglah luas permukaan benda putaran apabila busur $y^2 = 12 x$ dari $x = 0$ ke $x = 5$ diputar sekeliling sb x.

7. Hitunglah luas permukaan benda putaran apabila busur $4x = 2 \ln y - y^2$ dari $y = 0$ ke $y = 3$ diputar sekeliling sb x.

8. Hitunglah luas permukaan elipsoida putar apabila ellips $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$ diputar sekeliling sumbu panjangnya

----

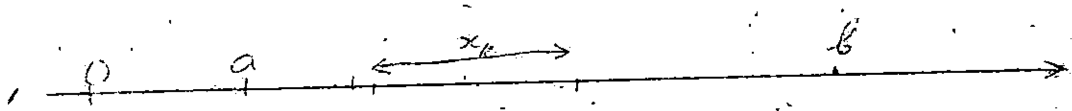
IV - 9. KERJA

Gaya konstan.

Kerja W yang dilakukan oleh gaya konstan F yang bekerja pada suatu jarak berarah S sepanjang garis lurus adalah $F.S$.

Gaya yang berobah-robah.

Anggaplah suatu gaya $F(x)$ yang berobah-robah secara kontinu bekerja sepanjang garis lurus. Misalkan x_i menyatakan jarak berarah dari suatu titik yang dilalui gaya itu dari suatu titik tertentu pada garis itu.



Untuk menghitung kerja yang dilakukan suatu gaya yang menyebabkan titik berpindah dari $x = a$ ke $x = b$;

1. Bagilah interval $a \leq x \leq b$ kedalam n subinterval dan misalkan x_k adalah sebuah titik dalam interval ke- k.

2. Anggaplah bahwa selama perpindahan sepanjang subinterval ke-k gaya itu konstan dan sama dengan $F(x)$. Kerja yang dilakukan selama perpindahan ini sama dengan $F(x_k)\Delta_k x$, dana kerja total yang dilakukan oleh himpunan n gaya diberikan oleh :

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k)\Delta_k x$$

3. Apabila $n \to \infty$ maka $\Delta x \to 0$, dan

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(x_k)\Delta_k x$$

$$= \int_a^b F(x)dx$$

Contoh 1

Jika diberikan suatu pegas panjangnya dalam keadaan normal 10 in, membutuhkan gaya sebesar 25 lb untuk meregangnya $\frac{1}{4}$ in. Hitunglah kerja yang dilakukan untuk meregang pegas dari 11 12 in.

Jawab.

Jawab.

Misalkan x menyatakan panjang regangan

maka $F(x) = kx$

Apabila $x = \frac{1}{4}$, $F(x) = 25$ maka;

$$25 = \frac{1}{4}k, \quad k = 100,$$

dan $F(x) = 100\,x.$

3. Kerja yang diminta :

$$W = \int_{1}^{2} 100\,x\,dx$$

$$= 150 \text{ in - lb}$$

Contoh 2.

Suatu kabel beratnya 3 lb/ft dibuka gulungannya dari suatu lilitan silinder. Setelah siap digulung sepanjang 50 ft, maka tentukanlah kerja yang dilakukan oleh gaya grafitasi sehingga siap digulung 250 ft lagi.

Jawab.

Misalkan x = panjang kabel yang dibuka gulungannya pada setiap saat, maka :

$F(x) = 3x$, dan :

$$W = \int_{50}^{300} 3x\,dx = 131.250 \text{ ft.}$$

Contoh 3.

Pemuaian gas dalam suatu silinder menyebabkan sebuah piston bergerak sedemikian rupa sehingga volume dari ruangan gas itu bertambah dari 15 menjadi 25 m^3. Misalkan hubungan antara tekanan (p lb/m^2) dan volume (V m^3) adalah $p.v^{1.4} = 60$. Hitunglah kerja yang dilakukan gas tersebut.

Jawab.

Jika A menyatakan luas dari suatu ptongan melintang dari selinder, p A adalah gaya tekan oleh gas. Disini volume bertambah sebesar $\triangle V$ yang menyebabkan piston bergerak sejarak $\triangle V/A$ dan kerja yang berhubungan dengan perpindahan ini adalah :

$$pA.\ \frac{\triangle V}{A} = \frac{60}{V^{1.4}} \triangle V$$

maka :

$$W = 60 \int_{15}^{25} \frac{dv}{V^{1.4}} = -\frac{60}{A} V^{-4} \Big]_{15}^{25}$$

$$= -150 \left(\frac{1}{25^4} - \frac{1}{15^4} \right) = 9.39 \text{ in}$$

SOAL - SOAL LATIHAN.

4. Jika suatu gaya dari 80 lb meregang suatu pegas dari 12 ft sejauh 1 ft. Tentukankanlah kerja yang dilakukan dalam peregangan ini.

   a). dari 12 ke 15 ft

   b). dari 15 ke 16 ft.

5. Hitunglah kerja yang dilakukan gaya gravitasi dalam pergerakan sebuah roket seberat 8 ton sampai pada ketinggian 200 km diatas permukaan bumi.

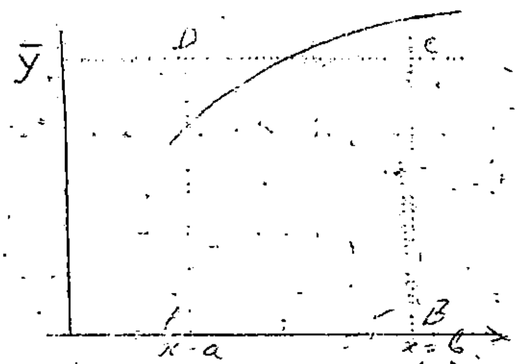
IV - 10. HARGA RATA-RATA DAN HARGA RATA-RATA AKAR PANGKAT DUA.

a. Harga rata - rata.

Seperti dalam ilmu hitung harga rata-rata dari sejumlah bilangan asli y_1, y_2, ... , y_n diberikan oleh :

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n}{N}$$

Sekarang diberikan fungsi $y = F(x)$ dan diminta untuk menentukan harga rata-rata $\overline{y}$ dalam interval $x = a$ ke $x = b$, seperti yang dilukiskan dibawah ini.



Dalam hal ini kita lukis persegi panjang ABCD yang sama luasnya dengan luas daerah, dibawah kurva $y = f(x)$ antara ordinat $x = a$ dan $x = b$; jadi :

$$AB.AD = \int_a^b y \, dx$$

$$(b-a)\bar{y} = \int_a^b y \, dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y \, dx$$

Contoh 1.

Hitunglah harga rata-rata dari $y = 4x^3$ dari ordinat $x = 2$ dan $x = 4$.

Jawab :

$$\bar{y} = \frac{1}{(4-2)}\int_2^4 y \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^4 4x^3 dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[x^4 \Big]_2^4$$

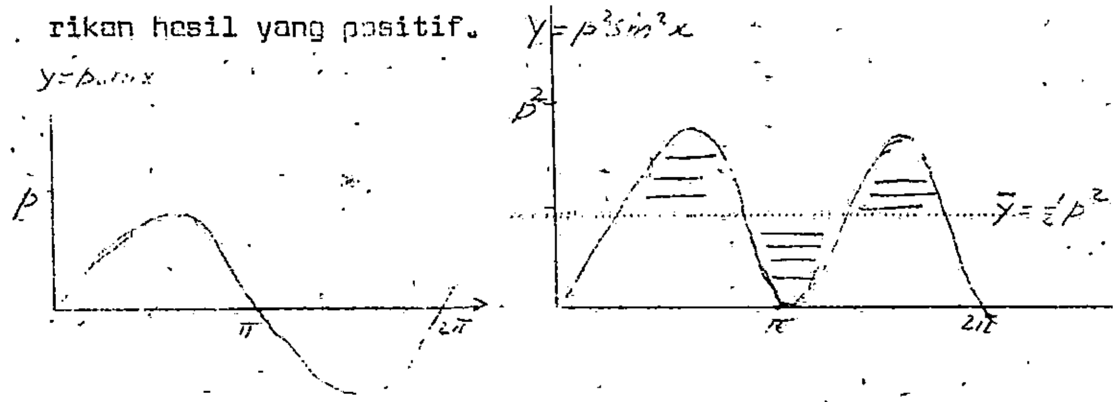
$$= \underline{\underline{120}}$$

b. Harga rata-rata akar pangkat dua.

Dalam banyak hal harga rata-rata tidak mempunyai arti, sebagai contoh apabila kurva terdapat diatas dan dibawah sumbu x ; jadi mengandung nilai yang positif dan negatif.

Untuk kurva sinus misalnya, setengah lingkaran pertama nilainya positif dan setengah lingkaran kedua negatif, dengan demikian nilai rata-ratanya adalah nol. Oleh sebab itu harga rata-rata untuk suatu lingkaran penuh tidak memberikan informasi tentang besarnya amplitudo dari kurva.

Untuk mengatasi kekurangan ini kita pergunakan nilai pangkat dua, oleh karena pangkat dua dari bilangan negatif akan memberikan hasil yang positif.



Sekarang kita lukis kurva dari sinus pangkat dua; jadi $\bar{y} = p^2 \sin^2 x$. Kurva ini symetris terhadap garis $\bar{y} = \frac{1}{2} p^2$

Ini berarti bahwa :

$\frac{1}{2} p^2$ adalah harga rata-rata dari $(p \sin x)^2$ atau

$\frac{1}{2} p^2$ adalah harga pangkat dua dari $p \sin x$.

Jadi $\frac{p}{\sqrt{2}}$ adalah harga rata-rata akar pangkat dua dari $p \sin x$.

Contoh 2

Hitunglah harga rata-reta pangkat dua dari suatu arus yang melalui suatu tahanan, jika aliran adalah sinusoidal dan memenuhi persamaan : $i = 5 \sin 100 \pi t$.

Jawab :

Misalkan setiap interval equivalen dengan setengah lingkaran yang mengambil sudut dari 0 ke π radian ; jadi dari $t = 0$ ke $t = \frac{1}{100}$.

$$\frac{1}{(0,01 - 0)} \int_0^{0.01} i^2 dt = 100 \int_0^{0,01} 25 \sin^2 100 \pi t \, dt$$

$$= 2500 \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \frac{\sin 200\pi t}{100\pi} \right]_0^{0,01}$$

$$= \frac{25}{2}$$

Jadi harga rata akar pangkat dua dari arus tersebut $= \frac{5}{\sqrt{2}}$ A

SOAL - SOAL LATIHAN.

1. Hitunglah harga rata-rata dari :

   a). $y = 3 \cos 2x$ antara $x = 0$ dan $x = 3$

   b). $y = x^{\frac{1}{2}}$ antara $x = 0$ dan $x = 4$.

2. Hitunglah harga rata-rata akar pangkat dua dari :

   a). $y = x^{-1}$ antara $x = 1$ dan $x = 10$

   b). $y = x + \frac{1}{x}$ antara $x = \frac{1}{2}$ dan $x = 2$.

=======

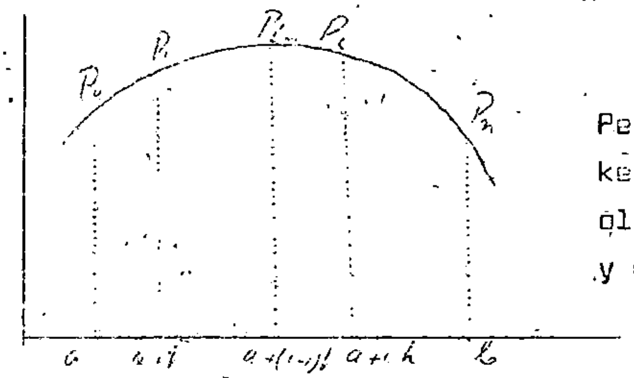
INTEGRAL APROKSIMASI

Jika integral biasa sukar dilakukan yaitu apabila integral tidak dapat dinyatakan dalam suku-suku fungsi elementer atau apabila integrand f(x) diberikan berbentuk suatu tabel dari nilai-nilai maka kita dapat menentukan nilai pendekatan dari :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

V - 1 Aturan trapesium

Misalkan suatu bidang yang disebelah atas dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan disebelah bawah oleh sb x dan kiri kanan dengan dua ordinat $x = a$ dan $x = b$. Bidang tersebut dibagi-bagi kedalam n jalur vertikal sehingga setiap jalur mempunyai lebar yang sama yakni : $h = \frac{b - a}{n}$



Perhatikanlah jalur yang ke i, sebelah atasnya dibatasi oleh busur Pi - 1 Pi dari $y = f(x)$

Dengan hitung pendekatan luas jalur ini sama dengan :

$$\frac{1}{2} h \left[f\left\{a + (i - 1)h\right\} + f(a - ih) \right]$$

dimana busur Pi - 1 Pi diganti dengan garis lurus Pi-1 Pi

luas seluruh bidang menjadi :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} \left\{ f(a) + f(a + h) \right\} + \frac{h}{2} \left\{ f(a + h) + f(a + 2h) \right. + \ldots +$$

$$\frac{h}{2} \left[f\left\{a + (n - 1)h\right\} + f(b) \right]$$

atau :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2f(a + h) + 2f(a + 2h) + \ldots \right.$$

$$+ 2f\left[a + (n-1)h \right] + f(b)$$

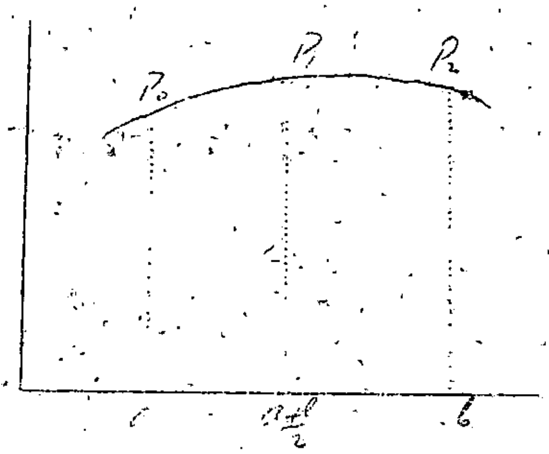
$$\approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) \right] + h\left[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots \right.$$

$$\left. + f(a + n - 1)h \right]$$

$$\approx \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1})$$

V - 2 Rumus Prismoidal.

Misalkan luas bidang yang dinyatakan dengan $\int_a^b f(x)\,dx$ dipisahkan kedalam dua jelur vertikal dengan lebar yang sama yakni $h = \frac{1}{2}(b - a)$, dan misalkan busur Po P1 P2 dari $y = f(x)$ diganti dengan busur parabola $y = Ax^2 + Bx + C$, yang melalui titik-titik Po (a, y_0), P1$\left(\frac{a+b}{2}, y_1\right)$; $P_2(b_2, y_2)$



Kita mempunyai :

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx$$

$$= \frac{b-a}{3}\left[A(a^2 + ab + b)^2) + \frac{3}{2}B(a + b) + 3C \right]$$

Sekarang Po, P1, P2 terletak pada $y = Ax^2 + Bx + C$

maka :

$$y_0 = Aa^2 + Ba + C$$

$$y_1 = A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B\left(\frac{a+b}{2}\right) + C$$

$$y_2 = Ab^2 + Bb + C$$

dan

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2\left[A(a^2 + ab + b^2) + \frac{3}{2}B(a + b) + 3C \right]$$

Jadi :

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{b}(y_o + 4y_1 + y_2)$$

$$= \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2)$$

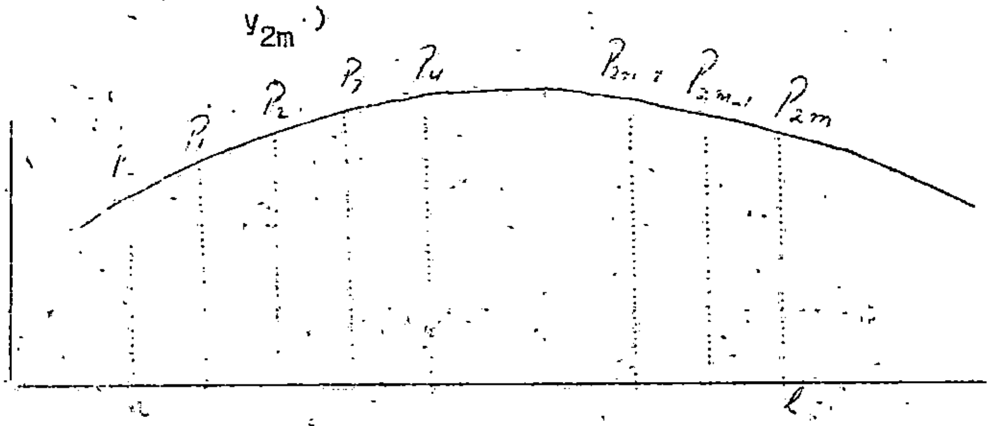
V – 3 Aturan Simpson.

Misalkan luas bidang diatas tadi dibagi kedalam $n = 2m$ jalur dengan lebarnya masing-masing $h = \frac{b-a}{n}$. Menurut rumus prisma diatas maka luas setiap daerah busur Po P1 P2, P2 P3 P4 . . . ., P2m-2 P2m-1 P2m kita peroleh.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[f(a) + 4F(a+h) + 2F(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \ldots + 2f\{a+(2m-2)h\} + 4f\{a+(2b-1)h\} + f(b)\Big]$$

atau

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$



V – 4 Perluasan deret pangkat.

Dengan metode ini fungsi yang akan diambil integralnya (integrand) dirobah kedalam n suku pertama dari deret Maclaurin atau deret Taylor (lihat matematika Teknik I).

Contoh 1.

Hitunglah : $\int_1^3 \ln dx$

a). dengan aturan trapesium untuk $n = 5$

b). dengan aturan Simpson untuk $n = 8$.

Jawab :

a). $n = 5, \quad h = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$$\int_1^3 \ln x \, dx \simeq 0{,}2(\ln 1 + \ln 3) + 0{,}4(\ln 1{,}4 + \ln 1{,}8 + \ln 2{,}2 + \ln 2{,}6)$$

$$0{,}2(1{,}0986) + 0{,}4(0{,}3365 + 0{,}5878 + 0{,}7885 + 0{,}9555)$$

$$= \underline{1{,}2870}.$$

b). $n = 8, \quad h = \frac{3-1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$$\int_1^3 \ln x \, dx \simeq \frac{1}{12}(\ln 1 + 4\ln 1\tfrac{1}{4} + 2\ln 1\tfrac{1}{2} + 4\ln 1\tfrac{3}{4} + 2\ln 2 + 4\ln 2\tfrac{1}{4} + 2\ln 2\tfrac{1}{2} + 4\ln 2\tfrac{3}{4} + \ln 3)$$

$$\simeq \frac{1}{12}(0 + 4(0{,}2231) + 2(0{,}4055) + 4(0{,}5596) + 2(0{,}6931) + 4(0{,}8109) + 2(0{,}9163) + 4(1{,}0116) + (1{,}0986)$$

$$\simeq \frac{1}{12}(0{,}8924 + 0{,}8110 + 2{,}2384 + 1{,}3862 + 3{,}2436 + 1{,}8326 + 4{,}0464 + 1{,}0986)$$

$$= \frac{15{,}5492}{12} = 1{,}2950.$$

Contoh 2.

Hitunglah harga pendekatan dari $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2}$

dengan :

a) metoda Prismoidal

b) perluasan deret (7 suku pertama)

c) integrasi langsung.

Jawab :

a) Disini $h = \dfrac{\frac{1}{2} - 0}{2} = \dfrac{1}{4}$; $f(a) = f(0) = 1$

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{16}{17}$; $f(b) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \frac{64}{17} + \frac{4}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{12} (1 + 3.76471 + 0,8) = 0,4637$$

b) $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12})dx$$

$$= \left. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \frac{1}{13.2^{13}}$$

$$= 0,50000 - 0,04167 + 0,00625 - 0,00112 + 0,00022$$

$$- 0,00004 + 0,00001 = 0,4636$$

c) $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2} = \left. \operatorname{artg} x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \operatorname{artg} \frac{1}{2} = 0,4637$$

Contoh 3.

Sebidang tanah terletak antara suatu pagar lurus dan aliran arus. Pada jarak x meter dari satu ujung pagar, lebar tanah itu y meter diukur sebagai berikut :

x :	0 :	20 :	40 :	60 :	80 :	100 :	120 :
y :	0 :	22 :	41 :	53 :	38 :	17 :	0 :

Ditanyakan luas tanha tersebut dengan mempergunakan aturan Simpson.

Jawab :

Disini $h = 20$ dan

$$\int_0^{120} f(x)\,dx \approx \frac{20}{3}(0 + 4.22 + 2,41 + 4.53 + 2,38$$
$$+ 4,17 + 0) = 3507 \text{ m}^3.$$

SOAL - SOAL LATIHAN :

4. Hitung luas gambar yang dibatasi oleh kurva $y = e^{-x^2}$ sb x dan garis $x = 0$ dan $x = 1$ dengan mempergunakan :

a) aturan Simpson

b) perluasan deret.

b) Hitunglah harga pendekatan dari :

$\int_2^6 \frac{dx}{x}$ dengan mempergunakan :

a) aturan trapesium dengan $n = 4$

b) rumus prismoidal

c) aturan Simpson dengan $n = 4$

=======

DAFTAR BACAAN

ALGER.L.PHILIP, Mathematics for Science and Enginering, Mc. Grow Hill Book Company Inc. New York.

AYRES FRANK, Differential and Integral Calculus, Mc Grow Hill Book Company Inc. New York

EDWAR YOSEF , Differensial Calculus, London Ltd .

PIPES LOUIS.A, Applied Mathematics For Enginee and Physics .

$$\sqrt[3]{x}\,dt = x^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\sqrt[4]{(4+16x^2)} = (4+16x^2)^{\frac{1}{4}}\,dt = 4(1+4x^2)^{1/4}$$

$$= 4 \cdot \tfrac{3}{4}(1+4x^2)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{12}{4}(1+4x^2)^{\frac{4}{3}}$$

$$= 3(1+4x^2)^{\frac{4}{3}}$$

$$3\,[illegible]\,(1+4x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$