LAPORAN PENELITIAN HIBAH PENGAJARAN

UPAYA PENINGKATAN MUTU PERKULIAHAN MATA KULIAH KALKULUS III MELALUI PENGEMBANGAN MODEL KONSTRUKTIVIS

Oleh :

DRA. MEDIA ROSHA, MSI.

(Ketua Tim Peneliti)

Penelitian ini dibiayai oleh :
" DUE - Like PROJECT" 1999/2000
No. Kontrak 92/K12.35/Due-like/1999
Tanggal 1 September 1999

FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA
UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2000

UPAYA PENINGKATAN MUTU PERKULIAHAN MATA KULIAH KALKULUS III MELALUI PENGEMBANGAN MODEL KONSTRUKTIVIS

Personalia Peneliti

Ketua : Dra. Media Rosha, MSi.

Anggota : Drs. Mukhni, MPd.

Dra. Nonong Amalita, MSi.

ABSTRAK

Media Rosha, dkk. **Upaya Peningkatan Mutu Perkuliahan Mata Kuliah Kalkulus III Melalui Pengembangan Model Konstruktivis.**

Masalah terpenting dalam proses pembelajaran matematika adalah bagaimana cara mengkondisikan proses pembelajaran yang sedemikian rupa sehingga mahasiswa dapat menguasai konsep-konsep matematika. Proses pembelajaran yang dimaksud adalah adanya keaktifan mahasiswa untuk mengkonstruk pengetahuannya. Keaktifan tersebut dapat diciptakan dalam bentuk belajar kelompok, dan pemberian fasilitas yang dapat memudahkan mahasiswa untuk belajar dalam usaha mencapai penguasaan yang maksimal. Permasalahan yang diteliti, apakah model belajar konstruktivis dapat digunakan dalam pengajaran Kalkulus III di Jurusan Kimia (NK) FMIPA UNP Padang.

Untuk memecahkan masalah diatas dilakukan penelitian tindakan dua siklus masing-masing untuk satu pokok bahasan. Pada tiap siklus dirancang strategi pengubahan konsepsi dengan melihat kemampuan awal mahasiswa dan berdasarkan konsep-konsep essensial materi yang sedang dipelajari. Proses pembelajaran meliputi : diskusi dalam kelompok, diskusi antar kelompok, kemudian dosen meluruskan ide / gagasan konsep permasalahan dengan menggunakan strategi pengubahan konsepsi. Data tentang keaktifan mahasiswa, tingkat penguasaan yang dicapai, dan keefektifan model belajar yang digunakan dikumpulkan oleh pengamat. Informasi yang diperoleh digunakan untuk melihat kecendrungan tingkat keaktifan mahasiswa. Juga diliput informasi tentang hal positif dan saran perbaikan dari mahasiswa yang diwawancarai. Semua informasi diurutkan dan dipakai untuk mengadakan perbaikan terhadap model belajar konstruktivis yang digunakan.

Hasil dari penelitian, mahasiswa aktif berdiskusi dalam kelompoknya maupun antar kelompok, aktif membaca strategi pengubahan konsepsi, sangat aktif memperhatikan perkuliahan, dan aktif mengerjakan latihan. Keaktifan mahasiswa pada siklus II lebih tinggi dibandingkan siklus I. Nilai rata-rata yang dicapai mahasiswa jauh melebihi nilai rata-rata yang diperoleh mahasiswa pada tahun sebelumnya. Dengan menggunakan model belajar konstruktivis ternyata dapat meningkatkan keaktifan dan hasil belajar mahasiswa. Karena itu model belajar konstruktivis dapat digunakan dalam perkuliahan Kalkulus III , dengan syarat kita selalu mengadakan perbaikan.

PENGANTAR

Kegiatan penelitian merupakan bagian dari darma perguruan tinggi, di samping pendidikan dan pengabdian kepada masyarakat. Kegiatan penelitian ini harus dilaksanakan oleh Universitas Negeri Padang yang dikerjakan oleh staf akademikanya ataupun tenaga fungsional lainnya dalam rangka meningkatkan mutu pendidikan, melalui peningkatan mutu staf akademik, baik sebagai dosen maupun peneliti.

Kegiatan penelitian mendukung pengembangan ilmu serta terapannya. Dalam hal ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang berusaha mendorong dosen untuk melakukan penelitian sebagai bagian yang tidak terpisahkan dari kegiatan mengajarnya, baik yang secara langsung dibiayai oleh dana Universitas Negeri Padang maupun dana dari sumber lain yang relevan atau bekerja sama dengan instansi terkait. Oleh karena itu, peningkatan mutu tenaga akademik peneliti dan hasil penelitiannya dilakukan sesuai dengan tingkatan serta kewenangan akademik peneliti.

Kami menyambut gembira usaha yang dilakukan peneliti untuk menjawab berbagai permasalahan pendidikan, baik yang bersifat interaksi berbagai faktor yang mempengaruhi praktek kependidikan, penguasaan materi bidang studi, ataupun proses pengajaran dalam kelas yang salah satunya muncul dalam kajian ini. Hasil penelitian seperti ini jelas menambah wawasan dan pemahaman kita tentang proses pendidikan. Walaupun hasil penelitian ini mungkin masih menunjukkan beberapa kelemahan, namun kami yakin hasilnya dapat dipakai sebagai bagian dari upaya peningkatan mutu pendidikan pada umumnya. Kami mengharapkan di masa yang akan datang semakin banyak penelitian yang hasilnya dapat langsung diterapkan dalam peningkatan dan pengembangan teori dan praktek kependidikan.

Hasil penelitian ini telah ditelaah oleh tim pereviu usul dan laporan penelitian Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang, yang dilakukan secara "blind reviewing'. Kemudian untuk tujuan diseminasi, hasil penelitian ini telah diseminarkan yang melibatkan dosen/tenaga peneliti Universitas Negeri Padang sesuai dengan fakultas peneliti. Mudah-mudahan penelitian ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pada umumnya, dan peningkatan mutu staf akademik Universitas Negeri Padang.

Pada kesempatan ini kami ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang membantu terlaksananya penelitian ini, terutama kepada pimpinan lembaga terkait yang menjadi objek penelitian, responden yang menjadi sampel penelitian, tim pereviu Lembaga Penelitian dan dosen senior pada setiap fakultas di lingkungan Universitas Negeri Padang yang menjadi pembahas utama dalam seminar penelitian. Secara khusus kami menyampaikan terima kasih kepada proyek Due-Like dan Rektor Universitas Negeri Padang yang telah berkenan memberi bantuan pendanaan bagi penelitian ini. Kami yakin tanpa dedikasi dan kerjasama yang terjalin selama ini, penelitian ini tidak akan dapat diselesaikan sebagaimana yang diharapkan dan semoga kerjasama yang baik ini akan menjadi lebih baik lagi di masa yang akan datang.

Terima kasih.

Padang, Maret 2000
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang,

Prof. Drs. Kumaidi, MA., Ph.D.
NIP 130605231

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

I. LATAR BELAKANG

Dunia saat ini memasuki abad XXI dan disebut dengan *world without border* (dunia tanpa batas). Dunia tanpa batas atau yang disebut juga dunia yang mengglobal dikuasai oleh kemajuan teknologi, industrialisasi serta perdagangan bebas, dan dengan demikian diharapkan pula naiknya taraf hidup manusia kearah yang lebih baik. Salah satu cara yang dipandang relevan untuk menjawab tantangan keadaan dunia yang mengglobal adalah membekali peserta didik dengan suatu keterampilan untuk bisa berpikir secara aktif dan mandiri. Dengan perkataan lain, proses belajar mengajar yang lebih mengaktifkan mahasiswa dalam membentuk atau mengkonstruksikan sendiri informasi, serta bertanggung jawab untuk mengarahkan dan mengatur kegiatan belajar mereka dalam memahami informasi.

Sehubungan dengan upaya peningkatan kualitas sumber daya manusia, proses pendidikan dalam era globalisasi ini mengalami pergeseran proses pendidikan yang semula dipandang sebagai proses sosialisasi bergeser ke pembelajaran. Proses sosialisasi dimaksudkan suatu proses yang bertujuan menyiapkan peserta didik untuk menyesuaikan diri dalam kehidupan bermasyarakat. Proses pembelajaran dimaksudkan sebagai suatu proses dimana pendidik berperan untuk mengatur, menyiapkan dan membantu peserta didik (mahasiswa) sehingga tercipta kondisi belajar yang kondusif dalam mewujudkan peserta didik (mahasiswa) yang berkualitas.

Tidak dapat dipungkiri bahwa sebagian besar tenaga pengajar (dosen) pada jurusan matematika, metode yang mereka gunakan dalam proses pembelajaran adalah metode ceramah yang dipadukan dengan pemberian tugas. Salah satu kelemahan dari metode ini adalah proses pembelajaran yang menempatkan dosen sebagai pusat kegiatan (teacher - centered) dan sebaliknya mahasiswa menjadi kurang kreatif dalam mengemukakan gagasannya. Oleh karena itu diharapkan setiap dosen mencari terobosan baru dalam mencoba cara agar mahasiswanya belajar, yang pada gilirannya meningkatkan kemampuan mahasiswa.

Salah satu model belajar yang dapat diterapkan sehingga proses pembelajaran terwujud atau membuat mahasiswa aktif belajar adalah *model belajar konstruktivis.*

Kalau model belajar konvensional yang dilaksanakan selama ini dilandasi asumsi tersembunyi bahwa *pengetahuan dapat dipindahkan secara utuh dari pikiran dosen ke pikiran mahasiswa.* Maka model belajar konstruktivis mempunyai asumsi *pengetahuan di bangun di dalam pikiran mahasiswa..*

1. ILMU MATEMATIKA

Ilmu Matematika merupakan kumpulan ide-ide yang bersifat abstrak, dengan struktur-struktur yang diatur menurut urutan yang logis. Matematika juga merupakan suatu cara berpikir, untuk mendapatkan ilmu pengetahuan, mengutamakan ketajaman penalaran, dan ketepatan. Menurut Soedjadi (1983), matematika mempunyai objek abstrak beserta berbagai simbol serta gambaran-gambaran sebagai hasil abstraksi dan idealisasi, dewasa ini matematika dapat dipandang sebagai : 1) alat penata nalar; 2) alat komputasi; 3) alat komunikasi.

Mengingat pentingnya matematika seperti tersebut diatas, matematika diajarkan mulai dari Sekolah Dasar sampai keperguruan tinggi. Matematika juga dipakai oleh ilmu-ilmu lainnya, untuk diterapkan pada bidang masing-masing. Hal ini karena matematika mempunyai sifat kekuantitatifan, paling tidak dapat memberikan kemudahan bagi seseorang dalam menyikapi suatu masalah. Itulah sebabnya matematika selalu memberikan jawaban yang lebih bersifat eksak dalam memecahkan masalah.

Seseorang akan merasa mudah memecahkan masalah dengan bantuan matematika, karena ilmu matematika itu sendiri memberikan kebenaran berdasarkan alasan logis dan sistematis. Di samping itu matematika dapat memudahkan dalam pemecahan masalah karena proses kerja matematika dilalui secara teratur yang meliputi, tahap observasi, menebak, menguji hipotesis, mencari analogi, dan akhirnya merumuskan teorema-teorema. Soedjadi (1983) memandang bahwa "matematika merupakan ilmu yang bersifat abstrak, aksiomatik, dan deduktif".

Diperguruan tinggi eksakta, mahasiswa harus mempelajari matematika. Mata kuliah ditahun pertama diberi nama kalkulus atau ada juga yang menamakan matematika dasar. Mata kuliah ini menjadi dasar bagi mahasiswa untuk mengikuti mata kuliah selanjutnya dalam bidang masing-masing. Oleh sebab itu, mata kuliah ini merupakan fundamen yang harus kuat dan kokoh, makasiswa harus memahami dan menghayati konsep-konsep yang terdapat didalamnya.

Dalam kurikulum jurusan kimia (NK) Program S – 1 1998, yang dilaksanakan di UNP Padang, dinyatakan bahwa kalkulus terbagi atas kalkulus I, kalkulus II dan kalkulus III dengan bobot masing-masing 4 SKS. Kalkulus III berisi topik persamaan differensial biasa, yang membahas solusi dan terapan dari persamaan differensial tersebut. Topik dari kalkulus III adalah : PD. Linier orde –1 dan terapan, PD linier orde –2 dan terapannya.

2. BELAJAR

Dari banyak hasil penelitian menunjukkan bahwa pembelajaran akan berhasil apabila prosesnya melibatkan mental peserta didik (mahasiswa) sebanyak mungkin yang disebut belajar. Kegiatan yang disebut belajar dapat terjadi dimana-mana, baik di dalam ruang kuliah maupun di luar ruang kuliah. Seseorang dikatakan telah belajar kalau padanya telah terjadi perubahan- perubahan tertentu, misal seseorang yang tidak dapat menghitung berubah menjadi mahir berhitung. Namun tidak semua perubahan yang terjadi pada diri seseorang dikarenakan orang tersebut telah belajar, misalnya bayi yang belum bisa tengkurap menjadi bisa tengkurap.

Sumadi Suryasubrata (1971) mengemukakan bahwa belajar adalah aktifitas untuk menghasilkan perubahan-perubahan dalam diri peserta didik, pengetahuan dan kecakapan baru. Sementara itu Gibby (1973) mendefinisikan istilah belajar sebagai "a person's activity brings about a relatively permanent change in behavior". Disini Gibby mendefinisikan belajar sebagai perubahan tingkah laku yang relatif permanen.. Definisi istilah belajar menurut Gibby di atas masih perlu diberikan penjelasan lebih terinci.

Lebih lanjut Gibby membedakan tiga jenis belajar yaitu :

a. Belajar kognitif (cognitive learning) berkenaan dengan proses berfikir dalam mendapatkan pengetahuan.
b. Belajar sosial (sosial learning), yang berlangsung setiap saat bilamana seseorang berhubungan dengan orang lain.
c. Belajar gerak (motor learning), berkenaan dengan gerakan fisik dari seseorang untuk mencapai perubahan tertentu.

Dengan memperhatikan ketiga jenis belajar diatas, belajar dalam penelitian ini adalah aktifitas seseorang yang menjadikan kemampuan berfikirnya meningkat. Selanjutnya ciri-ciri kegiatan yang disebut belajar dapat diidentifikasikan sebagai berikut :

a. Belajar adalah aktifitas individu yang menghasilkan perubahan kemampuan berfikir menjadi meningkat.
b. Perubahan itu pada pokoknya adalah didapatkannya kemampuan baru secara tidak kebetulan.
c. Perubahan itu terjadi karena usaha.

Dalam matematika, tujuan belajar cenderung pada bidang kognitif. Tujuan belajar bidang kognitif secara umum dapat diklasifikasikan menjadi 6 tingkat, yaitu : ingatan, pemahaman, aplikasi, analisa, sintesa dan evaluasi. Untuk mata kuliah kalkulus III tingkat yang ingin dicapai adalah aplikasi dan analisa.

Matematika merupakan bidang studi yang hampir seluruh kegiatannya menggunakan daya nalar dan pikiran manusia. Adalah tidak cukup bahwa transfer matematika hanya menggunakan informasi saja tanpa mengandalkan bahwa mahasiswa sebenarnya dapat mengkonstruksikan pengetahuannya berdasarkan pengalamannya dan stimulus yang diberikan oleh dosen, baik mengkopi secara keseluruhan maupun mengkopi sebagian saja.

3. MODEL BELAJAR KONSTRUKTIVIS

Dalam praktek pendidikan science dan matematika telah lama diusahakan agar partisipasi mahasiswa dalam membangun pengetahuannya lebih ditekankan. Belajar adalah kegiatan aktif mahasiswa dalam membangun pengetahuannya. Kedua segi ini menunjukkan suatu pandangan baru dalam pendidikan science dan metematika, yaitu konstruktivis. Pandangan baru ini menitik beratkan konsep bahwa *dalam belajar seseorang mengkonstruksi pengetahuannya.*

Para ilmuwan yang menganut psikologi kognitif berusaha untuk menjawab pertanyaan epistemologi mengenai cara memperoleh pengetahuan yaitu *bagaimana kita menjadi tahu tentang apa yang kita ketahui.* Konstruktivisme sebagai aliran psikologi kognitif berpendapat manusialah yang membangun makna terhadap suatu realita. Implikasinya dalam pembelajaran, bahwa pengetahuan tidak dapat dipindahkan secara utuh dari pikiran dosen ke pikiran mahasiswa. Mahasiswa itu sendirilah yang seharusnya aktif secara mental dalam membentuk pengetahuannya.

Prinsip-prinsip konstruktivis yang diajukan oleh Paul Suparno (1997 : 49) adalah sebagai berikut :

1. Pengetahuan dibangun oleh peserta didik sendiri, baik secara personal maupun sosial.
2. Pengetahuan tidak dapat dipindahkan dari pendidik ke peserta didik, kecuali hanya dengan konsep menuju konsep yang lebih rinci, lengkap, serta sesuai dengan konsep ilmiah.
3. Peserta didik aktif mengkonstruksi terus menerus, sehingga selalu terjadi perubahan konsep menuju konsep yang lebih rinci, lengkap, serta sesuai dengan konsep ilmiah.
4. Pendidik sekedar membantu menyediakan sarana dan situasi agar proses konstruksi peserta didik berjalan mulus.

Prinsip-prinsip konstruktivis lebih menekankan kepada intensitas dan frekuensi, kualitas penekanannya ditujukan agar mahasiswa *mengkonstruksi sendiri nature* dari science atau matematika, sehingga kriteria kuat dalam science atau matematika tersebut dapat tertanam dalam diri mahasiswa, Turmudi (1997: 7) menjelaskan prinsip yang khas pada konstruktivis antara lain :

1. Penerimaan terhadap jawaban peserta didik dipandang asing.
2. Membimbing usaha peserta didik dalam *mengkonstruksi suatu* penyelesaian matematika.
3. Mendorong (encourage) peserta didik untuk berani *memecahkan / mengkonstruksi sendiri.*
4. Sedikit memberi *leading* dan lebih banyak *mendengarkan* peserta didik.
5. Memberikan kesempatan untuk *berinteraksi sosial serta diskusi dalam grup* kecil maupun grup besar.
6. Disarankan dengan sangat pemakaian alat *peraga sebagai jembatan* untuk membantu peserta didik belajar matematika.
7. Menggunakan *games dan puzzle* sebagai pendekatan mengajar.

8. Menghubungkan dengan situasi kehidupan sehari-hari.
9. Penekanan evaluasi atau assasemen pada proses dari pada produk.

Belajar merupakan modifikasi dari ide-ide yang telah ada pada diri mahasiswa. Karena itu, belajar dapat dipandang sebagai pembentukan pengertian atas pengalaman-pengalaman dalam hubungannya dengan pengetahuan awal. Oleh karena itu, dalam proses pembelajaran sangat penting bagi mahasiswa untuk mendapat kesempatan guna mengemukakan gagasannya. Dengan demikian, maka mahasiswa akan memiliki kesempatan untuk melaksanakan negosiasi makna dan dicapainya konsensus.

Menurut *Piaget* (Kamii, 1990) pengetahuan sosial dapat diperoleh dengan jalan diberitahu. Tetapi, pengetahuan fisik dan logica-matematika tidak dapat diperoleh hanya dibertitahu saja individu itu harus secara aktif berinteraksi dengan lingkungannya.

Tafsiran perorangan dari suatu konsep ilmu disebut konsepsi. Konsepsi mahasiswa pada umumnya berbeda dengan konsepsi ilmuwan. Konsepsi ilmuwan bersifat ilmiah, dan melibatkan lebih banyak hubungan antara konsep. Miskonsepsi mahasiswa sering muncul karena mereka hanya menggunakan pola pikir intuitif dan akal sehat, dan tidak menggunakan pola pikir ilmiah dalam menanggapi dan menjelaskan permasalahan yang mereka hadapi.

Pengajaran matematika yang berlangsung hingga saat itu hampir seluruhnya didominasi oleh kegiatan dosen. Berkaitan dengan hal ini, maka para dosen yang semula sebagai sumber otoritas ilmu pengetahuan harus bergeser menuju perannya yang baru yaitu sebagai fasilitator dan mediator yang kreatif, serta pergeseran dan mengajar sebagai suatu pembebanan menuju mengajar sebagai suatu proses negosiasi (Bodner : 1986).

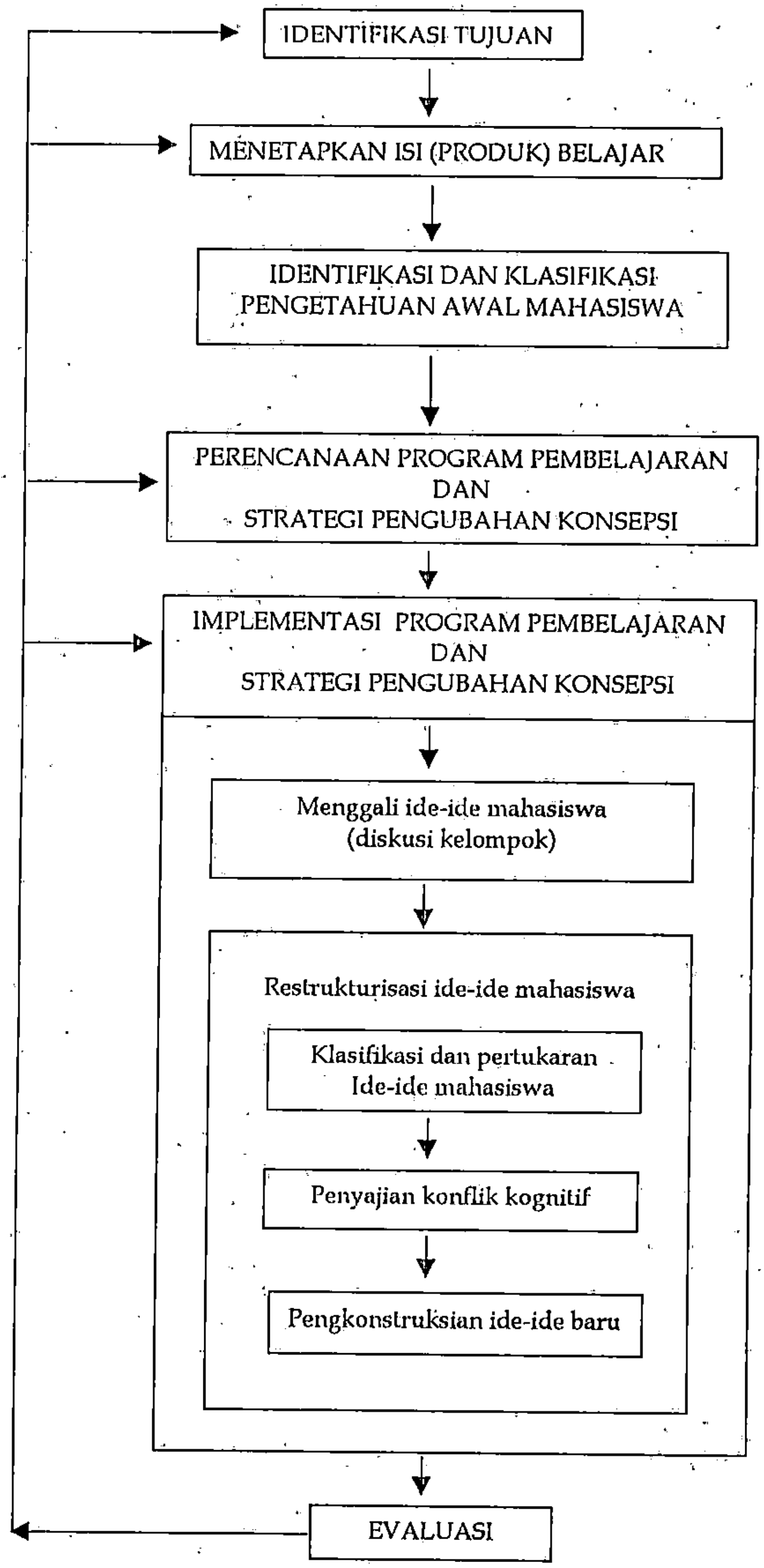
Ada dua aliran pemikiran tentang konstruktivisme, yaitu konstruktivisme Piagetian dan konstruktivisme Vygotskian. Para konstruktivis Piagetian mengutamakan penyajian konflik kognitif dalam proses pembelajaran, khususnya dalam mengubah miskonsepsi mahasiswa menuju konsepsi ilmiah. Para konstruktivis Vygotskian menekankan pada penerapan teknik diskusi dalam proses pembelajaran, sebagai cara untuk saling tukar gagasan/ide. Penelitian ini berpijak pada kedua aliran diatas. Implementasi proses pembelajaran terkait dengan penyajian konflik kognitif, dan melibatkan mahasiswa dalam diskusi.

Model belajar konstruktivis merupakan suatu model belajar dengan rangkaian kegiatan belajar dikelas yang diawali dengan orientasi dan penyajian masalah yang berhubungan dengan konsep yang akan dipelajari, dilanjutkan dengan pengajuan gagasan atau konsepsi oleh masing-masing mahasiswa, evaluasi terhadap konsepsi mahasiswa tersebut. Model belajar konstruktivis berpusat kepada mahasiswa (Student - Centered), dengan harapan proses pembelajaran yang dilaksanakan menjadi lebih bermakna dan kuat melekat pada diri mahasiswa.

Model belajar konvensional adalah model belajar dengan rangkaian belajar yang dimulai dengan orientasi dan penyajian informasi yang berkaitan dengan konsep yang akan dipelajari, dilanjutkan dengan pemberian ilustrasi atau contoh soal oleh dosen, diskusi dan tanya jawab, sampai akhirnya dosen merasa bahwa apa yang telah diajarkannya dapat dimengerti mahasiswa. Model ini tidak memberikan dasar yang cukup untuk perkembangan kognitif mahasiswa serta penggunaan keterampilan kognitif yang lebih tinggi.

Dari uraian diatas, maka kita perlu beralih dari model belajar konvensional yang dilandasi asumsi tersembunyi bahwa pengetahuan dapat dipindahkan secara utuh dari pikiran dosen ke pikiran mahasiswa, menuju model belajar konstruktivis yang berlandaskan asumsi bahwa pengetahuan dibangun didalam pikiran mahasiswa.

Langkah-langkah pengembangan model belajar konstruktivis diberikan oleh Driver (1988) sebagai berikut :



Gambar 1 : Pengembangan Model Belajar Konstruktivis.

4. PENGAJARAN KALKULUS III DI FMIPA UNP PADANG.

Pengajaran kalkulus III yang dilakukan oleh dosen MIPA UNP Padang sampai saat ini umumnya dengan ceramah sambil menuliskan hal-hal penting dengan menulis di white board. Dosen lebih banyak menghabiskan waktu untuk menulis dan bercerita, sementara mahasiswa sibuk mencatat. Dosen hanya punya sedikit waktu untuk berdiskusi dengan mahasiswa, dan mahasiswa kurang waktu untuk berfikir memahami konsep-konsep yang dipelajari. Karena terbatasnya waktu dan banyaknya materi yang akan dipelajari, maka banyak konsep-konsep yang tidak sempat dijelaskan secara tuntas.

Bahan bacaan untuk kalkulus III ini dikemukakan dosen pada awal perkuliahan, tetapi banyak mahasiswa tidak mampu membeli atau sulit memperolehnya. Kalaupun mahasiswa mempunyai bahan bacaan, mereka kesulitan mencernanya dengan cepat dan baik, lebih ironisnya mahasiswa tidak bisa memahami bahan bacaan berbahasa asing, karena kesulitan dalam bahasanya. Karena itu sebagian besar mahasiswa mengandalkan catatan kuliah dari dosennya saja.

5. UPAYA YANG TELAH DILAKUKAN PENELITI.

Sebagai staf pengajar jurusan matematika FMIPA UNP Padang, peneliti peduli dengan pengajaran matematika yang dilaksanakan. Yang telah peneliti lakukan sehubungan dengan hal itu adalah penelitian. Penelitian yang telah dilaksanakan merupakan penelitian eksperimen yang berjudul "pengembangan model konstruktivis dalam mata kuliah persamaan differensial di jurusan pendidikan matematika FPMIPA IKIP Padang" (1999). Melalui penelitian ini ditemukan : 1) penggunaan model konstruktivis membuat mahasiswa menjadi aktif sementara dosen lebih bersifat sebagai fasilitator, sebagian besar mahasiswa dapat membangun sendiri pengetahuannya ; 2) mahasiswa menyenangi model belajar konstruktivis; 3) model belajar konstruktivis mempunyai keunggulan komparatif terhadap model belajar konvensional.

II. MASALAH

Berdasarkan karakteristik ilmu matematika, maka pengajaran matematika haruslah sedemikian rupa sehingga mahasiswa dapat belajar secara aktif memperoleh konsep-konsep yang dipelajari. Oleh sebab itu, penelitian itu berpijak pada asumsi bahwa mahasiswa dapat belajar maksimal jika punya waktu yang cukup dengan fasilitas yang memadai.

Belajar adalah suatu proses aktif dalam memperoleh pengalaman pengetahuan baru sehingga menyebabkan perubahan tingkah laku. Dari itu model belajar konstruktivis yang mengajak mahasiswa belajar secara aktif, harus dapat kita terapkan. Berdasarkan hal ini, tema kepedulian penelitian ini adalah pengembangan model belajar konstruktivis dalam pengajaran kalkulus III.

Masalah yang diharapkan dapat terjawab oleh penelitian ini adalah :

1. Miskonsepsi apa sajakah yang terdapat pada mahasiswa dalam mata kuliah kalkulus III ?
2. Bagaimana cara menghilangkan / mengurangi miskonsepsi mahasiswa dalam mempelajari kalkulus III.
3. Sejauh mana tingkat penguasaan mahasiswa atas konsep-konsep kalkulus III ?
4. Bagaimanakah efektifitas strategi pengubahan konsepsi dalam pembelajaran kalkulus III ?
5. Benarkah perubahan model belajar menjadi model belajar konstruktivis dapat diterima mahasiswa dalam mempelajari kalkulus III ?

III. TUJUAN

Sejalan dengan latar belakang dan masalah, maka tujuan utama dalam penelitian ini adalah mengembangkan model belajar konstruktivis dalam perkuliahan kalkulus III pada mahasiswa jurusan kimia (NK) FMIPA UNP Padang.

Hasil yang ingin dicapai dalam kegiatan ini antara lain :

1. Mendeskripsikan miskonsepsi-miskonsepsi mahasiswa yang berkaitan dengan konsep kalkulus III
2. Merumuskan strategi pengubahan konsepsi dalam bentuk modul kecil untuk mengubah miskonsepsi mahasiswa menjadi konsepsi ilmiah.
3. Mendeskripsi tingkat penguasaan mahasiswa atas konsep-konsep kalkulus III.
4. Menguji efektifitas strategi pengubahan konsepsi dalam pembelajaran kalkulus III.
5. Menganalisis apakah model belajar konstruktivis dapat diterima mahasiswa sebagai suatu kemudahan dalam mempelajari kalkulus III ?.

IV. SIKLUS PERTAMA

1. PERENCANAAN

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun pelajaran 1999 /2000. Penelitian ini direncanakan secara bersama antara bersama ketua dan anggota peneliti dalam pertemuan dan diskusi. Hal-hal yang dilakukan sebagai berikut :

a. Mengkaji Silabus Matakuliah Kalkulus III

Pada langkah ini dikaji isi kurikulum kalkulus III dari berbagai sumber bacaan, hal ini dilakukan untuk mencari konsep-konsep penting dalam setiap pokok bahasan. Kemudian memilah-milah setiap pokok bahasan menjadi beberapa sub pokok bahasan. Berikutnya ditentukan kedalam konsep yang akan diajarkan.

Pokok bahasan yang diajarkan adalah : 1) Persamaan diferensial orde-1 ; 2) Persamaan diferensial orde-2. Persamaan diferensial orde-1 memuat sub pokok bahasan sebagai berikut : 1) P.D. variabel terpisah ; 2) P.D. Homogen 3) P.D. non homogen ; 4) P.D. eksak ; 5) P.D. non Eksak ; 6) P.D. Linier ; dan 7) P.D. Bernoulli. Sedangkan persamaan diferensial orde-2 mempunyai sub pokok bahasan : 1) Bentuk-bentuk P.D. orde-2 ; 2) PD. Linear orde-2 koefisien konstanta yang homogen dan non homogen (metode koefisien tak tentu, metode variasi parameter, dan metode operator diferensial). Silabus dibagikan kepada mahasiswa, sehingga mahasiswa tahu materi yang akan diajarkan dosennya pada setiap pertemuan. Pada siklus pertama materi yang diajarkan adalah P.D. orde-1.

b. Memilih Buku Ajar

Buku yang dapat digunakan dalam pembelajaran kalkulus III ini cukup banyak, ada yang berbahasa Indonesia maupun berbahasa Inggeris. Menurut pengalaman peneliti, mahasiswa lebih menyenangi buku berbahasa Indonesia (karena mahasiswa umumnya tidak mampu berbahasa Inggeris). Buku berbahasa Indonesia yang membahas persamaan diferensial umumnya tidak lengkap. Karena itu peneliti juga menggunakan buku berbahasa Inggeris sebagai buku anjuran.

Buku ajar yang digunakan pada perkuliahan kalkulus III ini sebagai berikut :

1). Persamaan diferensial biasa oleh Widiarti dan Pamuntjak, diterbitkan oleh Depdikbud.

2). Penuntun belajar persamaan diferensial oleh Kartono, Penerbit Andi Offset, Yogyakarta.

3). Differensial Equation oleh Shepley L. Ross, Penerbit John Willey dan Sons.

c. Mencari Materi Pengetahuan Awal Mahasiswa.

Materi prasyarat untuk mata kuliah kalkulus III meliputi : turunan, turunan parsial, integral, teknik-teknik pengintegralan. Identifikasi pengetahuan awal mahasiswa dilakukan melalui tes berbentuk uraian (lihat lampiran 7).

d. Mencari Permasalahan yang Akan Dimunculkan pada Perkuliahan.

Permasalahan yang diberikan adalah konsep-konsep essensial dalam materi bahasan, disamping itu beberapa materi prasyarat yang turut mendukung juga dimunculkan. Dengan dibahasnya permasalah ini di dalam diskusi kelompok maupun diskusi antar kelompok, diharapkan konsep-konsep tersebut dapat dikuasai dengan baik. Dosen dapat mengetahui miskonsepsi-miskonsepsi yang dialami mahasiswa disaat diskusi berlangsung.

Permasalahan-permasalahan yang diberikan pada siklus pertama untuk masing-masing sub pokok bahasan adalah :

1). P.D. Variabel terpisah

- Berikan definisi dan bentuk umum dari P.D variabel terpisah
- Bagaimana cara mencari solusinya

2). P.D. Homogen

- Berikan definisi dan beentuk umum dari PD homogen

- Bagaimana cara mencari solusinya.

3). P.D. non Homogen

- Berikan definisi dan bentuk umum dari P.D. non homogen
- Bagaimana cara mencari solusinya.

4).P.D Eksak.

- Berikan definisi dan bentuk umum P.D eksak.
- Tentukan syarat perlu dan cukup agar P.D
  $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$
  merupakan P.D eksak.
- Bagaimana cara mencari solusinya.

5). PD. Non Eksak

- Berikan definisi dan bentuk umum P.D. non Eksak
- Bagaiman cara mereduksi P.D. non eksak menjadi P.D. Eksak
- Berikan definisi dari faktor integrasi, apakah faktor integrasi tunggal
- Apabila persamaan diferensial
  $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$
  Merupakan P.D non eksak, dan U suatu faktor integrasi. Berikan suatu persamaan yang digunakan untuk mencari faktor integrasi.

6). P.D Linier.

- Berikan definisi dan bentuk umum P.D. linier
- Tentukan faktor integrasi dari P.D. linier
- Jelaskan kaitan faktor integrasi dari P.D linier dengan faktor integrasi P.D. eksak.
- Bagaimana cara mencari solusinya.

7). P.D. Bernouli

- Berikan definisi dan bentuk umum P.D bernoulli
- Bagaimana cara mencari solusinya.

e. Membuat strategi pengubahan konsepsi

Strategi pengubahan konsepsi diwujudkan dalam bentuk modul-modul kecil. Strategi pengubahan konsepsi disusun oleh tim peneliti. Penyusunan strategi pengubahan konsepsi memanfaatkan informasi tentang pengetahuan awal mahasiswa.

Strategi pengubahan konsepsi dirancang untuk mengubah miskonsepsi mahasiswa menuju konsepsi ilmiah. Penyusunannya didasarkan pada konsep-konsep essensial yang meliputi : bentuk umum P.D yang dibahas, teori yang mendukung P.D., cara mencari solusi P.D. serta contoh dan penyelesaian soal. Strategi pengubahan konsepsi yang digunakan pada siklus I dapat dilihat pada lampiran 8.

Tabel 1. Jumlah Bahan Penelitian Siklus Pertama

No	Sub Pokok Bahasan	Permasalahan	Jumlah Halaman Fotokopi Strategi Pengubahan Konsepsi
1.	P.D. Variabel Terpisah	2	1
2.	P.D. Homogen	2	2
3.	P.D. Non Homogen	2	2
4.	P.D. Eksak	3	5
5.	P.D. Non Eksak	4	15
6.	P.D. Linier	4	6
7.	P.D. Bernoulli	2	5

2. PELAKSANAAN

Penelitian ini bertujuan untuk meningkatkan mutu perkuliahan kalkulus III dengan menggunakan model belajar konstruktivis. Karena itu semua aktifitas dalam tujuan penelitian. Dalam proses pembelajaran diusahakan agar mahasiswa aktif untuk mengkonstruk pengetahuannya, sedangkan dosen berfungsi sebagi fasilitator.

Sebelum proses perkuliahan dengan menggunakan model konstruktivis mahasiswa diberi tes pengetahuan awal. Dari hasil tes tersebut dapat diketahui sejauh mana tingkat pengetahuan awal mahasiswa. Untuk memantapkan kemampuan awal mahasiswa, dosen memberikan perkuliahan matrikulasi untuk materi pengetahuan awal dengan melihat kepada hasil tes

Setiap pertemuan perkuliahan peneliti memulai pada sub pokok bahasan baru dan akan berakhir pada ujung sub pokok bahasan tersebut. Kepada mahasiswa diminta untuk mempelajari sendiri materi sebelum perkuliahan berlangsung, materi yang akan disajikan bisa dilihat pada silabus. Untuk memotivasi mahasiswa agar mempelajari materi sebelum perkuliahan, peneliti menekankan bahwa peran serta mahasiswa dalam diskusi termasuk kedalam penilaian hasil belajar.

Kegiatan perkuliahan dalam setiap pertemuan secara umum adalah sebagai berikut :

a. Dosen Membagi Mahasiswa Atas Kelompok Kecil (4 orang)

Model belajar konstruktivis menerapkan dua hal yaitu: belajar berkelompok (cooperative learning) dan metode penemuan. Dalam hal belajar kelompok, paling efektif jumlah setiap kelompok terdiri dari 4 mahasiswa sehingga posisi duduk mereka bisa saling berhadapan. Karena jumlah mahasiswa dalam penelitian ini berjumlah 32 orang jadi terdapat 8 kelompok kecil pada setiap perkuliahan

b. Dosen Memberikan Permasalahan

Pemberian permasalahan kepada mahasiswa dengan tujuan untuk menggali pengetahuan awal mahasiswa dan untuk mengetahui ide/gagasan konsep tentang materi yang dibahas. Model konstruktvis menyadari dan memberi tekanan pada pentingnya pengetahuan awal mahasiswa dalam proses pembelajaran. Belajar menurut pandangan konstrutivis adalah proses modifikasi dan restrukturisasi gagasan yang telah dimulai sebelumnya.

c. Menggali Ide-ide Mahasiswa

Pada langkah ini ide-ide dari masing-masing mahasiswa digali melalui diskusi kelompok kecil (4 Orang), sehingga setiap mahasiswa mempunyai peluang yang diharapkan untuk mengemukakan konsepsinya. Dalam diskusi kelompok ini akan terjadi saling tukar gagasan, dan pada akhirnya akan terjadi konsensus atau negosiasi makna dari setiap kelompok. Hasil diskusi dari masing-masing kelompok dilaporkan atau dikomunikasikan dalam diskusi kelas.

d. Restrukturisasi Ide-Ide Mahasiswa

Restrukturisasi ide-ide mahasiswa merupakan inti dari proses pengajaran menggunakan model belajar konstruktivis. Langkah-langkah restrukturisasi meliputi : 1). klarifikasi dan pertukaran ide-ide mahasiswa .2) penyajian konflik kognitif. 3) pengkonstruksian ide-ide baru.

Berdasarkan laporan hasil diskusi kelompok yang disampaikan pada diskusi kelas, dosen mengidentifikasi dan mengklarifikasi persamaan dan perbedaan ide-ide mahasiswa selanjutnya ide-ide tersebut diberi komentar. Disini bukan hanya dosen yang memahami dan menyadari miskonsepsi mahasiswa, tetapi mahasiswa harus sadar akan miskonsepsinya.

Pada diskusi kelas akan muncul konflik kognitif, penyajian konflik kognitif merupakan fase yang paling utama dan krusial dalam pengubahan miskonsepsi mahasiswa. Pada fase inilah mahasiswa akan sadar bahwa mereka harus mengganti atau merestrukturisasai gagasannya yang miskonsepsi menuju konsepsi ilmiah. Selanjutnya fase terakhir, restrukturisasi ide-ide baru.

e. Dosen Memberikan Strategi Pengubahan Konsepsi

Pengkonstruksian ide-ide baru mahasiswa dibantu dengan memberikan strategi pengubahan konsepsi. Strategi pengubahan konsepsi disini berupa suatu modul kecil.

Pada langkah ini mahasiswa membaca strategi pengubahan konsepsi, disini dosen bertindak sebagai fasillitator. Jika mahasiswa menghendaki dosennya untuk menjelaskan sebagian dari isi strategi pengubahan konsepsi, maka dosen dapat menjelaskannya dengan memanfaatkan ide-ide mahasiswa yang sudah merupakan konsepsi ilmiah.

f. Pengecekan Restrukturisasi Ide-ide Mahasiswa

Pada langkah ini dosen meminta mahasiswanya untuk dapat menyampaikan ide-ide barunya secara lisan. Penyampaian ide-ide baru ini dilaksanakan untuk sebagian besar mahasiswa. Setelah dosen puas akan hasil penyampaian ide-ide baru ini, langkah ini baru dihentikan.

g. Dosen Memberikan Latihan

Setelah berakhirnya restrukturisasi ide-ide mahasiswa, mahasiswa diberi latihan yang berupa pengerjaan soal-soal. Latihan ini dikerjakan dalam waktu tertentu, dikumpulkan dan dinilai.

Perkuliahan pada siklus I ini dilaksanakan dalam 8 kali pertemuan, tiap kali pertemuan direncanakan 3 kali 50 menit. Tetapi pada pelaksanaannya tiap kali pertemuan membutuhkan waktu lebih dari 3 kali 50 menit. Pada siklus I dibahas 7 sub pokok bahasan, ini berarti dibahas 1 sub pokok bahasan untuk 1 kali pertemuan.

3. OBSERVASI

a. Teknik Pengumpulan Data

Pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan oleh tim peneliti, dengan empat teknik pengumpulan data yaitu : pengamatan, wawancara, dan tes.

Pengamatan :

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan model belajar konstruktivis, yang mengarahkan proses pembelajarannya kepada mahasiswa sentris. Sehingga data yang diutamakan adalah aktifitas mahasiswa dalam proses pembelajaran tersebut. Aktifitas yang diamati sebagai berikut

- interaksi mahasiswa dengan dosen, yaitu dengan jumlah mahasiswa yang bertanya kepada dosen
- Interaksi mahasiswa dengan temannya, yaitu dengan jumlah mahasiswa yang aktif berdiskusi baik didalam kelompoknya, maupun saat berdiskusi antar kelompok.
- Interaksi dengan bahan pengajaran yaitu dari jumlah mahasiswa yang serius membaca strategi pengubahan konsepsi
- Interaksi mahasiswa dengan materi pengajaran, yaitu dari jumlah mahasiswa yang sungguh-sungguh memperhatikan keterangan dan penjelasan dosen
- Interaksi mahasiswa dengan tugas dari dosen yaitu dari jumlah mahasiswa yang serius mengerjakan latihan.

Semua aktifitas diatas dicatat oleh anggota tim peneliti yang berada di dalam kelas selama proses pembelajaran berlangsung. Data keaktifan mahasiswa dicatat pada lembaran observasi (lampiran 2)

Wawancara

Untuk mengetahui persepsi mahasiswa atas proses pembelajaran menggunakan model konstruktivis, peneliti mewawancarai 2 orang mahasiswa disetiap akhir perkuliahan. Pertanyaan meliputi hal positif dan saran-saran mengenai: buku ajar yang dipakai, permasalahan yang diberikan dosen, dan strategi pengubahan konsepsi yang diberikan dosen. Berikut juga ditanyakan tentang pembagian kelompok diskusi, pelaksanaan diskusi, pelurusan ide atau gagasan, konsep permasalahan oleh dosen, contoh soal yuang diberikan dan latihan yang diberikan dosen di ruang kuliah. Hasil wawancara dicatat pada lembaran wawancara (Lampiran 3)

Tes

Tes ini berisikan pengetahuan-pengetahuan awal yang harus dikuasai mahasiswa. Dari tes ini dapat diketahui sejauh mana tingkat pengetahuan awal mahasiswa sebelum belajar kalkulus III (lampiran 7).

b. Teknik Analisis data

Data hasil tes pengetahuan awal

Hasil tes pengetahuan awal yang diberikan kepada mahasiswa dinilai, hal ini dimaksudkan untuk mengetahui tingkat penguasaan pengetahuan awal mahasiswa. Tingkat penguasaan menggunakan kriteria:

Istimewa	(> 95%)
Baik sekali	(> 85%-95%)
Baik	(> 75%-85%)
Lebih dari cukup	(>65%-75%)
Cukup	(>55%-65%)
Hampir cukup	(>45%-55%)
Kurang	(>35%-45%)
Kurang sekali	(>25%-35%)
Buruk	(>15%-25%)
Buruk sekali	(≤ 15%)

Data hasil diskusi mahasiswa

Dari hasil diskusi dalam kelompok kecil dan diskusi kelas, peneliti akan menemukan miskonsepsi-miskonsepsi mahasiswa. Berikutnya miskonsepsi- tersebut dideskripsikan.

Data keaktifan Mahasiswa

Data yang sudah terkumpul pada lembaran observasi dianalisis dengan membuat grafik antara keaktifan tiap aspek dan sub pokok bahasan masing-masing, sehingga terlihat kecendrungannya. Tingkat keaktifan menggunakan kriteria :

Sangat Aktif (> 75 %)

Aktif (>50% -75 %)

Kurang Aktif (25 % - 50 %)

Tidak aktif (< 25 %)

Dari nilai rata-rata diperoleh tingkat keaktifan mahsiswa dalam tiap aspek sehingga perbandingan antar aspek juga dapat dilihat.

Informasi tentang hal positif dan saran-saran.

Informasi yang terkumpul pada lembaran wawancara akan disusun dan diurutkan.

c. Hasil Analisis Data

Dari hasil tes pengetahuan awal dapat dilihat tingkat penguasaanya sebagai berikut :

1) Tingkat penguasaan tertinggi adalah 76%.
2) Tingkat penguasaan terendah adalah 37%
3) Rata-rata tingkat penguasaan adalah 61,2%

Jika dilihat pada kriteria tingkat penguasaan, rata-rata pengetahuan awal mahasiswa berada pada tingkat cukup. Tingkat penguasaan tertinggi pada kriteria baik, sedangkan tingkat penguasaan terendah dengan kriteria kurang.

Dari hasil diskusi dalam kelompok dan antar kelompok dijumpai miskonsepsi sebagai berikut :

1). Definisi persamaan diferensial terpisah menurut konsepsi mahasiswa adalah :

- Persamaan diferensial dimana masing-masing variabel x dan y terpisah
- Persamaan diferensial yang berbentuk $\frac{dy}{dx} = f(x)$

2). Definisi persamaan diferensial homogen menurut konsepsi mahasiswa adalah :

- Persamaan diferensial yang mempunyai bentuk $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$
- Persamaan diferensial berbentuk $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx = 0$, dimana P dan Q merupakan fungsi homogen

3). Definisi persamaan diferensial non homogen menurut konsepsi mahasiswa adalah :

- Persamaan diferensial berbentuk P (x,y) dx + Q (x,y) dy =f (x)

4). Definisi persamaan diferensial eksak menurut konsepsi mahasiswa adalah :

- Persamaan diferensial yang berbentuk M (x,y) dx + M (x,y) dy = 0, yang memenuhi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

5). Definisi persamaan diferensial non eksak menurut konsepsi mahasiswa adalah :

- Persamaan diferensial yang berbentuk M (x,y) dx + N (x,y) dy =0

6). Definisi persamaan deferensial linier menurut konsepsi mahasiswa adalah :

- Persamaan berbentuk M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0 , dengan M (x,y) dan N (x,y) linier.

7). Definisi persamaan deferensial bernoulli menurut konsepsi mahasiswa adalah :

- Persamaan diferensial berbentuk $\frac{dy}{dx} + f(x)\, y^n = g(x)$

Data mengenai keaktifan mahasiswa pada setiap sub pokok bahasan dapat dilihat tingkat kecendrungannya (lampiran 4a s/d 4f). Rata-rata tingkat keaktifan dalam masing-masing aspek sebagai berikut:

1). Mahasiswa termasuk kategori kurang aktif bertanya kepada dosen dalam proses pembelajaran (rata-rata setiap pertemuan 50%)

2). Mahasiswa termasuk kategori aktif berdiskusi dalam kelompok kecil (rata-rata setiap pertemuan 66,5%)

3). Mahasiswa termasuk kategori aktif berdiskusi antar kelompok (rata-rata setiap pertemuan 52,2%)

4). Mahasiswa termasuk kategori aktif membaca strategi pengubahan konsepsi saat proses pembelajaran berlangsung (rata-rata setiap pertemuan 65,6%)

5). Mahasiswa termasuk kategori sangat aktif memperhatikan proses pembelajaran (rata-rata setiap pertemuan 95,9%)

6). Mahasiswa termasuk kategori aktif mengerjakan latihan dalam perkuliahan(rata-rata setiap pertemuan 52,7%).

Dari hasil wawancara terhadap mahasiswa didapatkan hal-hal positif yang harus dipertahankan dan saran-saran yang harus dilakukan untuk perbaikan. Kedua hal tersebut dibagai pada dua kelompok yaitu: materi yang dipergunakan dalam perkuliahan, dan pelaksanaan perkuliahan.

Hal-hal positif pada materi

- buku ajar memuat materi yang akan diajarkan
- buku ajar wajib dimiliki semua mahasiswa
- permasalahan yang diberikan dosen membuka wawasan mahasiswa tentang materi yang dipelajari
- strategi pengubahan konsepsi menguraikan teori dengan jelas
- strategi pengubahan konsepsi memuat contoh soal dan penyelesaiannya
- -strategi pengubahan konsepsi memudahkan mahasiswa dalam belajar

Hal-hal positif pada pelaksanaan perkuliahan

- perkuliahan menyenangkan
- perkuliahan mengajak mahasiswa untuk belajar keras dulu sebelum perkuliahan berlangsung
- mahasiswa tahu dimana kekurangannya untuk diperbaiki
- mahasiswa bisa mengeluarkan ide/pendapat
- sewaktu dosen meluruskan ide/pendapat mahasiswa, mahasiswa menjadi mengerti kenapa idenya harus dirobah karena miskonsepsi
- mahasiswa menguasai konsep dengan baik
- penjelasan dosen terarah

Saran-saran pada materi

- contoh soal pada strategi pengubahan konsepsi untuk setiap pokok bahasan ditambah

- contoh soal pada strategi pengubahan konsepsi diberikan dari mudah ke sukar

Saran-saran pada pelaksanaan perkuliahan

- pembagian kelompok kecil harus homogen
- jika dosen menjelaskan di depan kelas jangan terlalu cepat
- dalam menanggapi hasil diskusi suatu kelompok jangan dosen sampai menyebut nama anggotanya.
- contoh soal yang dijelaskan dosen, agar berbeda dengan contoh soal yang ada di buku ajar dan strategi pengubahan konsepsi
- agar dosen juga mengikutkan hasil telaahan buku ajar dalam meluruskan ide mahasiswa.

4. REFLEKSI

Dari analisis observasi ditemukan hal-hal berikut ini :

a. Tingkat keaktifan mahasiswa dalam bertanya kepada dosen saat perkuliahan termasuk kategori kurang aktif. Sedangkan tingkat keaktifan mahasiswa dalam: berdiskusi dalam kelompok kecil; membaca strategi pengubahan konsepsi dan mengerjakan latihan dalam perkuliahan, termasuk ke dalam kategori aktif. Hanya keaktifan memperhatikan proses pembelajaran yang berada dalam kategori sangat aktif.
b. Terdapat hal-hal positif dan saran-saran pada materi yang digunakan dan proses perkuliahan.

Berdasarkan temuan di atas, perlu dilakukan tindakan selanjutnya agar keaktifan mahasiswa lebih meningkat lagi. Untuk itu kita harus memperkirakan sebab-sebab terjadi keberhasilan dan kekurangan dalam pembelajaran. Perkiraaan itu sebagiannya dapat didasarkan kepada hal-hal positif dan saran-saran yang diperoleh dari wawancara kepada mahasiswa.

a. Kurang aktif mahasiswa bertanya kepada dosen saat perkuliahan disebabkan antara lain :

- mahasiswa tidak menguasai materi dengan baik
- mahasiswa belum terbiasa aktif dalam kuliah, karena selama ini hanya mendengar dan menyalin.
- mahasiswa belum mempunyai masalah yang akan ditanyakan.
- mahasiswa malu bertanya kepada dosen.

b. Aktifnya mahasiswa berdiskusi dalam kelompok kecil disebabkan antara lain :

- kondisi kelompok kecil yang hanya 4 orang membuat mahasiswa tidak bisa diam saja.
- mahasiswa sudah belajar sebelumnya, sehingga bisa mengikuti diskusi dengan baik.
- karena mahasiswa sudah diberi tahu dosen, kalau keaktifan dalam diskusi termasuk ke dalam penilaian.
- permasalahan yang demikian dosen membuat mahasiswa tertarik untuk membahasnya.

c. Aktifnya mahasiswa berdiskusi antar kelompok disebabkan antara lain :

- mahasiswa termotivasi belajar.
- mahasiswa mempunyai pengetahuan tentang permasalahan yang diberikan.
- dosen memandu diskusi dengan baik.
- dosen menghargai semua pendapat yang masuk.
- adanya keinginan mahasiswa agar eksistensi kelompoknya muncul dalam diskusi kelas.

d. Aktifnya mahasiswa membaca strategi pengubahan konsepsi disebabkan antara lain :

- mahasiswa termotivasi untuk belajar.
- strategi pengubahan konsepsi disajikan secara sistematis.
- ingin mengetahui lebih jelas tentang materi yang dipelajari.

e. Sangat aktifnya mahasiswa memperhatikan proses pembelajaran disebabkan antara lain :

- mahasiswa termotivasi untuk memahami materi.

- adanya fotokopi strategi pengubahan konsepsi yang diberikan pada mahasiswa, sehingga mahasiswa hanya memperhatikan keterangan dan penjelassan dosen.
- adanya contoh soal.
- adanya latihan mengerjakan soal akhir perkuliahan.

f. Aktifnya mahasiswa mengerjakan latihan dalam perkuliahan disebabkan antara lain :
   - Mahasiswa memahami materi dengan baik.
   - Latihan dikumpul dan dinilai dosen.
   - Mahasiswa telah memahami contoh soal dengan baik.
   - Adanya kesadaran mahasiswa, bahwa dengan mengerjakan soal mahasiswa akan memahami materi perkuliahan dengan baik.

V. SIKLUS KEDUA

1. PERENCANAAN

Sama halnya dengan siklus pertama, maka siklus kedua juga dirancang untuk menerapkan model belajar konstruktivis pada perkuliahan kalkulus III.

a. Mengkaji Silabus Matakuliah Kalkulus III

Pada langkah ini, mengkaji materi lanjutan dari materi siklus I. Materi perkuliahan adalah P.D orde 2 yang meliputi : bentuk-bentuk P.D orde – 2, dan P.D linier orde 2 koefisien konstanta. Sub pokok bahasan P.D linier orde 2 meliputi : P.D linier orde-2 homogen dan P.D linier orde – 2 non homogen. Sedangkan P.D linier orde-2 non homogen dapat diselesaikan dengan menggunakan metode : koefisien tertentu, variasi parameter, dan operator diferensial.

b. Memilih Buku Ajar

Buku ajar yang digunakan sama dengan yang digunakan pada siklus pertama.

c. Mencari Permasalahan yang akan Dimunculkan pada Perkuliahan

Tujuan pemberian permasalahan adalah untuk mengetahui sejauh mana konsepsi mahasiswa tentang materi kalkulus III. Di samping itu dengan memberikan permasalahan, dosen dapat mengetahui bentuk-bentuk miskonsepsi yang dialami mahasiswanya.

Permasalahan-permasalahan yang diberikan pada siklus kedua untuk masing-masing sub pokok bahasan dan sub-sub pokok bahasan sebagai berikut :

1) Bentuk-bentuk P.D orde-2
   - Berikan definisi P.D orde –2
   - Tentukan bentuk-bentuk P.D orde –2, dan contoh.

2) P.D linier orde - 2 koefisien konstanta

a) P.D linier orde -2 koefisien konstanta homogen

- Berikan definisi dan bentuk umum dari P.D linier orde -2 dengan koefisien konstanta yang homogen.
- Bagaimana cara mencari solusinya.

b) P.D linier orde – 2 koefisien konstanta non homogen

- Berikan definisi dan bentuk umum persamaan diferensial linier orde -2 dengan koefisien konstanta yang non homogen.
- Pada P.D linier orde - 2 koefisien konstanta yang non homogen, misalkan diperoleh solusi homogen y_n dan solusi khusus y_k, kenapa solusi umum y dapat ditulis $y = y_n + y_k$

(1) Metode koefisien tak tentu

- Berikan bentuk-bentuk pemisalan solusi khusus y_k dari fungsi aljabar dan trigonometri.
- Bagaimana cara mencari solusi dengan metode koefisien tak tentu.

(2) Metode Variasi Parameter

- Apa yang dimaksud dengan metode variasi parameter.
- Berikan teorema metode variasi parameter P.D linier orde -2 koefisien konstanta yang non homogen.
- Bagaimana cara mencari solusi dengan metode variasi parameter.

(3) Metode Operator Diferensial

- Apa yang dimaksud dengan operator diferensial.
- Tunjukan bahwa operator diferensial bersifat linier.
- Tunjukan cara penggunaan metode operator diferensial dalam mencari solusi P.D.

d. Membuat Strategi Pengubahan Konsepsi.

Strategi pengubahan konsepsi dirancang untuk mengubah miskonsepsi mahasiswa menuju konsepsi ilmiah. Penyusunannya didasarkan pada hasil tes pengetahuan awal dan konsep-konsep yang meliputi : bentuk umum P.D yang dibahas, teorema dari metode yang digunakan, cara mencari solusi P.D, serta contoh dan penyelesaian soal. Disamping itu penyusunan strategi pengubahan konsepsi memperhatikan saran-saran pada siklus I. Strategi pengubahan konsepsi yang digunakan pada siklus II dapat dilihat pada lampiran 9.

Tabel 2. Jumlah Bahan Penelitian siklus Kedua

No	Sub Pokok bahasan	Permasalahan	Jumlah Halaman Fotokopi Strategi Pengubahan Konsepsi
1	Bentuk-bentuk P.D orde-2	2	7
2	P.D linier orde-2 koefisien konstanta		
	a) Homogen	2	4
	b) Non homogen		
	1) Metode koefisien tak tentu	4	6
	2) Metode variasi parameter	3	6
	3) Metode operator diferensial	3	14

2. PELAKSANAAN

Penelitian ini menggunakan model belajar konstruktivis, dengan harapan dapat meningkatkan mutu perkuliahan kalkulus II. Siklus kedua ini dilaksanakan pada 6 kali pertemuan perkuliahan. Setiap pertemuan pada siklus II ini membutuhkan waktu yang lebih dari 3 x 50 menit.

Secara umum pelaksanaan perkuliahan pada siklus kedua merupakan kelanjutan perbaikan dari siklus pertama, yaitu sebagai berikut :

a. Kurang aktifnya mahasiswa bertanya mungkin disebabkan mereka belum mempunyai masalah. Sebagai upaya, mahasiswa disuruh lagi membaca dengan serius sub pokok bahasan yang akan diajarkan.
b. Karena mahasiswa menyebutkan dosen menjelaskan terlalu cepat, maka upaya pada siklus ini dosen menjelaskan materi lebih lambat dibanding siklus I.

c. Kurang aktifnya mahasiswa bertanya mungkin disebabkan dosen kurang dapat memancing mahasiswa untuk bertanya. Diupayakan pada siklus ini memberikan kata-kata :"Siapa mau bertanya, siapa yang tidak mengerti, silakan bertanya dan lain-lain".
d. Mahasiswa menyarankan agar dosen mengikutkan hasil telaahan buku ajar dalam meluruskan ide mahasiswa. Karena itu pelaksanaan pengajaran siklus kedua dosen meluruskan ide mahasiswa di samping menggunakan strategi pengubahan konsepsi, juga mencoba menunjukan teorinya pada buku ajar.
e. Mahasiswa menyarankan agar dosen memberikan contoh soal yang berbeda dengan strategi pengubahan konsepsi dan buku ajar. Maka hal itu akan diupayakan pada siklus kedua.
f. Dosen berusaha agar pembagian kelompok kecil selalu homogen.
g. Dosen hanya menyebut nama kelompok, dan tidak menyebut nama anggota kelompok.

3. OBSERVASI

a. Teknik Pengumpulan Data.

Pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan oleh tim peneliti, dengan empat teknik pengumpulan data yaitu : pengamatan, wawancara, survei dan angket.

Pengamatan:

Pengamatan dilakukan oleh tim peneliti. Aktifitas yang diamati meliputi : jumlah mahasiswa yang bertanya kepada dosen ; jumlah mahasiswa yang berdiskusi di dalam kelompok kecil ; jumlah mahasiswa berdiskusi antar kelompok ; jumlah mahasiswa yang memperhatikan perkuliahan ; dan jumlah mahasiswa yang mengerjakan latihan dalam perkuliahan.

Wawancara

Wawancara dilakukan pada 2 orang mahasiswa disetiap akhir perkuliahan, dengan tujuan untuk mengetahui persepsi mahasiswa atas proses pembelajaran menggunakan model konstruktivis. Isi wawancara meliputi materi penelitian dan pelaksanaan perkuliahan (lihat lampiran 3).

Angket

Angket digunakan untuk memperoleh data tentang pendapat mahasiswa terhadap model belajar konstruktivis, angket diharapkan dapat menjawab pertanyaan apakah model belajar konstruktivis dapat diterima mahasiswa dalam mempelajari kalkulus III. Angket diberikan pada akhir siklus II.

Survei

Setelah nilai kalkulus III diperoleh, nilai tersebut dibandingkan dengan nilai kalkulus III tahun pelajaran 1998/1999. Nilai tersebut dapat diperoleh dijurusan Matematika FMIPA UNP Padang.

b. Teknik Analisis Data

Tingkat keaktifan mahasiswa dilihat pada enam aspek (bertanya, diskusi dalam kelompok, diskusi antar kelompok, membaca, memperhatikan dan mengerjakan latihan) dengan cara menghitung prosentase keaktifan. Sehingga kecendrungannyadapat diketahui, dengan kriteria

Sangat aktif (>75 %)
Aktif (> 50 % - 75 %)
Kurang aktif (25 % - 50 %)
Tidak aktif (< 25 %)

Informasi tentang hal-hal positif dan saran-saran dikumpulkan dan diurutkan. Nilai kalkulus III dicari rata-ratanya, kemudian dibandingkan dengan nilai rata-rata nilai kalkulus III tahun ajaran 1998/1999. Data yang diperoleh dari angket dianalisis dengan mencari skor maksimum dan skor minimum. Dari rentangan skor itu dibagi menjadi lima jenjang kualifikasi.

c. Hasil Analisis Data

Dari hasil diskusi dalam kelompok dan antar kelompok dijumpai miskonsepsi sebagai berikut :

1) Definisi persamaan diferensial orde – 2 menurut konsepsi mahasiswa adalah :
   - Persamaan dengan turunan kedua
2) Definisi persamaan diferensial orde – 2 dengan koefisien konstanta menurut konsepsi mahasiswa adalah :
   - P.D yang setiap koefisiennya konstanta.
3) Definisi persamaan diferensial orde dengan koefisien dengan koefisien konstanta yang homogen menurut konsepsi mahasiswa adalah :
   - PD yang memuat turunan kedua yang tertinggi dengan setiap koefisien konstanta dan fungsinya homogen.
4) Solusi P.D linier orde – 2 koefisien konstanta menurut konsepsi mahasiswa adalah :
   - Fungsi yang memenuhi P.D homogen dan P.D non homogennya.
5) Operator diferensial menurut konsepsi mahasiswa adalah
   - Turunan X
6) Metode variasi parameter menurut konsepsi mahasiswa adalah :
   - Suatu metode yang menggunakan variabel dan parameter.

Data mengenai keaktifan mahasiswa pada setiap sub pokok bahasan dapat dilihat tingkat kecenderungannya (lampiran 6a s/d 6f). Rata-rata tingkat keaktifan dalam masing-masing aspek sebagai berikut :

1. Mahasiswa termasuk kategori aktif bertanya kepada dosen dalam proses pembelajaran (rata-rata setiap pertemuan 52,5 %).
2. Mahasiswa termasuk kategori aktif berdiskusi dalam kelompok kecil (rata-rata setiap pertemuan 68,1 %).

3. Mahasiswa termasuk kategori aktif berdiskusi antar kelompok di kelas (rata-rata setiap pertemuan 56,9 %)
4. Mahasiswa termasuk kategori aktif membaca strategi pengubahan konsepsi saat proses pembelajaran berlangsung (rata-rata setiap pertemuan 71,8%).
5. Mahasiswa termasuk kategori sangat aktif memperhatikan proses pembelajaran (rata-rata setiap pertemuan 97,5 %).
6. Mahasiswa termasuk kategori aktif mengerjakan latihan dalam perkuliahan (rata-rata setiap pertemuan 68,1 %).

Perbedaan dan persamaan keaktifan mahasiswa dalam kedua siklus adalah sebagai berikut :

1) Keaktifan mahasiswa pada siklus kedua meningkat dibandingkan siklus pertama dalam aspek bertanya kepada dosen dalam proses pembelajaran (rata-rata 50 % menjadi 52,5 %).
2) Keaktifan mahasiswa pada siklus kedua meningkat dibandingkan siklus pertama dalam aspek berdiskusi dalam kelompok kecil (rata-rata 66,5 % menjadi 68,1 %).
3) Keaktifan mahasiswa pada siklus kedua meningkat dibandingkan siklus pertama dalam aspek berdiskusi antar kelompok (rata-rata 52,2 % menjadi 56,9 %).
4) Keaktifan mahasiswa pada siklus kedua meningkat dibandingkan siklus pertama dalam aspek membaca strategi pengubahan konsepsi saat proses pembelajaran berlangsung (rata-rata 65,6 % menjadi 71,8 %).
5) Keaktifan mahasiswa pada siklus kedua meningkat dibandingkan siklus pertama dalam aspek memperhatikan proses pembelajaran (rata-rata 95,9 % menjadi 97,5 %).
6) Keaktifan mahasiswa pada siklus kedua meningkat dibandingkan siklus pertama dalam aspek mengerjakan latihan dalam perkuliahan (rata-rata 52,7 % menjadi 68,1 %).

Dari hasil wawancara terhadap mahasiswa didapatkan hal-hal yang harus dipertahankan dan saran-saran yang harus dilakukan perbaikan. Kedua hal tersebut dibagi pada dua kelompok yaitu materi dan pelaksanaan perkuliahan.

Hal-hal positif pada materi

Hal positif pada materi isinya menunjukan bahwa sebagian ada yang sama dengan siklus pertama.

Hal positif yang sama

- materi ada pada buku ajar
- permasalahan dari dosen membuka wawasan mahasiswa
- strategi pengubahan konsepsi menguraikan teori dengan jelas.
- strategi pengubahan konsepsi memuat contoh soal dan solusinya.
- strategi pengubahan konsepsi memudahkan mahasiswa belajar.

Hal positif yang baru

- contoh soal membuat mahasiswa memahami materi dengan baik
- strategi pengubahan konsepsi memudahkan mahasiswa menguasai materi.
- buku ajar banyak soal untuk latihan di ruamah.
- permasalahan yang diberikan dosen, membuat mahasiswa harus siap sebelum ikut perkuliahan.

Hal-hal positif pada pelaksanaan perkuliahan

Hal positif yang sama dengan siklus pertama.

- mahasiswa menguasai konsep dengan baik.
- penjelasan dosen terarah.
- mahasiswa bisa mengeluarkan ide/pendapat.

Hal positif yang baru.

- dosen menjelaskan cukup lambat.
- pelurusan ide/pendapat oleh dosen dengan menggunakan strategi pengubahan konsepsi disajikan menarik.
- diskusi membuat mahasiswa terlatih mengeluarkan pendapat.
- dosen menghargai semua pendapat mahasiswa.
- mahasiswa merasa terlibat dalam PBM, tidak merasa kalau sedang diajar.

Saran-saran pada Materi

- agar dosen membuat buku ajar.
- ada baiknya buku yang berbahasa inggris diterjemahkan oleh dosen.

Saran-saran pada pelaksanaan perkuliahan

- waktu untuk mengerjakan latihan dibatasi
- pengerjaan latihan dilakukan oleh kelompok, jangan masing-masing mahasiswa.

Nilai rata-rata indeks prestasi (IP) mahasiswa dalam mata kuliah kalkulus III dua tahun terakhir sebagai berikut :

- tahun pelajaran 1998/1999 (31 orang) nilai rata-rata : 1,19
- tahun pelajaran 1999/2000 (32 orang) nilai rata-rata : 2,22

Jika dibandingkan nilai rata-rata indeks prestasi mahasiswa kedua tahun pelajaran, maka nilai rata-rata indeks prestasi mahasiswa dengan model konstruktivis jauh melebihi nilai rata-rata indeks prestasi mahasiswa dengan model konvensional.

Untuk memperoleh gambaran tentang respon mahasiswa terhadap model belajar konstruktivis, maka data dari angket dianalisis secara deskriptif. Jumlah butir angket yang digunakan dalam penelitian ini 12 butir, dengan rentangan skor setiap butirnya 1 sampai 5. Semua pernyataaan dalam angket berupa pernyataan positif. Dengan demikian, maka skor maksimum adalah 60 dan skor minimum 12. Dengan menggunakan lima jenjang kualifikasi, maka kriterianya disusun sebagai berikut :

Tabel 3. Kriteria Kualifikasi Respon Mahasiswa Terhadap Model Belajar Konstruktivis

No	Rata-rata skor (X)	kualifikasi
1	$12 \leq X \leq 21,6$	Sangat kurang
2	$21,6 < X \leq 31,2$	Kurang
3	$31,2 < X \leq 40,8$	Cukup
4	$40,8 < X \leq 50,4$	Baik
5	$50,4 < X \leq 60$	Sangat baik

Analisis data respon mahasiswa terhadap model belajar konstruktivis dengan menggunakan statistik deskriptif diperoleh rata-rata skor X = 50,1. Dengan mengkonfirmasikan X terhadap kriteria kualifikasi di atas, maka dapat disimpulkan bahwa respon mahasiswa terhadap model belajar konstruktivis berada pada kategori baik. Artinya bahwa pandangan mereka terhadap model belajar konstruktivis positif dan dapat memberikan kemudahan dalam mempelajari kalkulus III.

4. REFLEKSI

Hasil analisis data kedua siklus sebagai berikut:

a. Tingkat keaktifan mahasiswa dalam aspek: bertanya kepada dosen saat perkuliahan; berdiskusi dalam kelompok; berdiskusi antar kelompok; membaca strategi penngubahan konsepsi; dan mengerjakan latihan dalam perkuliahan, termasuk dalam kategori aktif. Hanya keaktifan memperhatikan proses pembelajaran yang berada dalam kategori sangat aktif.
b. Terdapat hal-hal positif dan saran-saran pada materi yang digunakan dan proses perkuliahan.
c. Rata-rata indeks prestasi mahasiswa yang dicapai mahasiswa lebih tinggi dari rata-rata sebelumnya.
d. Terdapat peningkatan prosentase rata-rata keaktifan mahasiswa.
e. Respon mahasiswa atas model konstruktivis pada kualifikasi baik.

Berdasarkan temuan di atas, perlu dikaji penyebab terjadinya keberhasilan dalam pembelajaran.

a. Terdapatnya peningkatan prosentase rata-rata keaktifan mahasiswa untuk keenam aspek, disebabkan oleh :
    - adanya perbaikan pelaksanaan perkuliahan
    - adanya perbaikan strategi pengubahan konsepsi.
    - mahasiswa telah familiar dengan model belajar konstruktivis.

b. Adanya peningkatan tingkat keaktifan bertanya kepada dosen saat perkuliahan, disebabkan oleh :
   - mahasiswa mulai menguasai materi.
   - mahasiswa sudah mempunyai masalah sebelum berangkat kuliah.
   - mahasiswa mulai familiar dengan dosennya.

c. Aktifnya mahasiswa berdiskusi dalam kelompok kecil disebabkan antara lain :
   - mahasiswa mulai familiar dengan temannya.
   - mahasiswa mulai merasakan manfaat dari diskusi.
   - jumlah kelompok yang 4 orang saja, mengharuskan mahasiswa masing-masing mengeluarkan ide.

d. Aktifnya mahasiswa berdiskusi antar kelompok disebabkan antara lain :
   - mahasiswa sudah terbiasa berdiskusi.
   - dosen memandu diskusi dengan baik.
   - mahasiswa sudah banyak menguasai materi.
   - mahasiswa mempunyai motivasi belajar yang tinggi.

e. Aktifnya mahasiswa membaca strategi pengubahan konsepsi, disebabkan oleh :
   - strategi pengubahan konsepsi sudah dilengkapi dengan soal dari yang mudah ke yang sukar.
   - minat membaca mahasiswa sudah meningkat.
   - mahasiswa mempunyai motivasi belajar yang tinggi.
   - strategi pengubahan konsepsi disajikan secara sistematis.

f. Sangat aktifnya mahasiswa memperhatikan proses pembelajaran disebabkan antara lain :
   - mahasiswa menyenangi proses perkuliahan.
   - adanya fotokopi strategi pengubahan konsepsi, sehingga mahasiswa tidak perlu mencatat lagi.
   - adanya keingintahuan mahasiswa terhadap materi.

g. Aktifnya mahasiswa mengerjakan latihan dalam perkuliahan, disebabkan antara lain :
   - mahasiswa telah memahami materi.
   - adanya keinginan mahasiswa untuk melatih diri.

h. Adanya hal positif baru dalam siklus kedua, disebabkan :

- mahasiswa melihat manfaat baru pada model konstruktivis.
- pelaksanaan model konstruktivis semakin baik.

i. Berkurangnya saran dalam siklus kedua, disebabkan :

- model konstruktivis terlaksana baik.
- mahasiswa sudah cocok dengan model konstruktivis.

VI. HASIL PENELITIAN

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan model belajar konstruktivis dalam perkuliahan kalkulus III, kemudian mengetahui cara efektif untuk menerapkan model belajar konstruktivis tersebut pada mata kuliah kalkulus III. Dari kedua siklus diperoleh hasil sebagai berikut :

a. Mahasiswa mengalami miskonsepsi dalam mata kuliah kalkulus III, miskonsepsi terdapat pada P.D orde – 1 dan P.D orde – 2. Miskonsepsi meliputi pendefinisian, teori yang mendukung, dan mencari solusi P.D.
b. Miskonsepsi dapat dihilangkan/dikurangi dengan melakukan pelurusan ide atau gagasan oleh dosen dengan menggunakan strategi pengbahan konsepsi.
c. Tingkat penguasaan mahasiswa tercermin pada rata-rata indeks prestasi sebesar 2,22 (dengan kualifikasi cukup).
d. Strategi pengubahan konsepsi efektif digunakan dalam model belajar konstruktivis. Strategi pengubahan konsepsi yang dihasilkan pada siklus pertama dan siklus kedua masing-masingnya berjumlah 34 halaman.
e. Model belajar konstruktivis dapat diterima mahasiswa sebagai suatu kemudahan dalam perkuliahan kalkulus III. Hasil ini dapat dilihat pada penganalisisan data yang diperoleh dari angket.

VII. TINDAK LANJUT

Berdasarkan hasil yang telah dicapai pada kedua siklus di dalam penelitian ini dapat dikemukakan tindak lanjut yang direkomendasikan dan yang direncanakan untuk dilakukan.

1. TINDAK LANJUT YANG DIREKOMENDASIKAN

- Model konstruktivis dapat digunakan dalam perkuliahan kalkulus III di masa datang.
- Strategi pengubahan konsepsi dapat digunakan untuk meluruskan ide/gagasan mahasiswa dalam mata kuliah kalkulus III.

2. TINDAK LANJUT YANG DIRENCANAKAN

- Melengkapi strategi pengubahan konsepsi dengan soal-soal aplikasi kimia.
- Dosen akan membuat buku ajar untuk matakuliah kalkulus III.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Bodner, George M, (1986). *Constructivism: A Theory of Knowledge Journal of Chemical Education*. Vol. 63, No.10

Driver, (1988). *Changing conceptions*. Centre for studies in sciece and mathematics. University of leeds.

Gibby, (1973). *The Process of Learning Mathematics*. USA : Pergamon Press.

Kamii, C, (1990). *Constructivis and Beginning Arithmetic*. Virginia : NCTM

Media, Rosha, (1999). *Pengembangan Model Konstruktivis dalam Mata Kuliah Persamaan Differensial di Jurusan Matematika FPMIPA IKIP Padang*. Laporan Penelitian (IKIP Padang)

Paul, Suparno, (1997). *Filsafat Konstruktivisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta : Kanisius

Soejadi, (1983). *Upaya Peningkatan Penguasaan Materi Matematika oleh Guru Matematika*. Yogyakarta : Sumbangsih.

Sumardi, Suryasubrata, (1971). *Psikologi Belajar*. Yogyakarta : Paparingan.

Turmudi, (1997). *Konstruktivisme : Pandangan Baru dalam Belajar Matematika*. Makalah. (Bandung).

Lampiran 1.

SASARAN BELAJAR DAN ISI STRATEGI PENGUBAHAN KONSEPSI TIAP SUB POKOK BAHASAN SIKLUS PERTAMA

Pokok Bahasan : P.D. Linter Orde-1

Untuk pokok bahasan ini telah dihasilkan 34 halaman strategi pengubahan konsepsi. Pokok bahasan ini memuat sub pokok bahasan sebagai berikut :

1. **Persamaan Diferensial Variabel Terpisah**

   Diharapkan mahasiswa memahami bentuk persamaan diferensial orde-1 derajat satu dengan variabel terpisah, dan dapat mencari penyelesaiannya. Dalam strategi pengubahan konsepsi dibuat bentuk umum P.D. Variabel terpisah, langkah-langkah metode mencari penyelesaian beserta contohnya.

2. **Persamaan Diferensial Homogen**

   Diharapkan mahasiswa memahami ciri-ciri persamaan diferensial homogen, dan dapat mencari penyelesaiannya dengan metode yang cocok. Karena itu strategi pengubahan bahan konsepsi memuat bentuk umum P.D. homogen, cara mencari penyelesaian, dan contoh soal.

3. **Persamaan Diferensial Non Homogen**

   Diharapkan mahasiswa memahami bentuk umum persamaan diferensial non homogen dan dapat mencari penyelesaiannya. Strategi pengubahan konsepsi yuang dibuat memuat bentuk umum P.D. non homogen dan cara-cara mencari penyelesaiannya, berikut contoh soal.

4. **Persamaan Diferensial Eksak**

Diharapkan mahasiswa memahami ciri-ciri persamaan diferensial eksak, dan dapat mencari solusinya sehingga strategi pengubahan konsepsi berisikan bentuk umum P.D. eksak, syarat perlu dan cukup suatu P.D. eksak, dan cara mencari penyelesaian persamaan tersebut, serta contoh soal.

5. **Persamaan Deferensial Non Eksak**

Diharapkan mahasiswa memahami ciri-ciri persamaan diferensial non eksak, dan mencari solusinya. Karena itu strategi pengubahan konsepsi memuat syarat P.D. non eksak, bagaimana cara merobah P.D. non eksak menjadi P.D. eksak, cara mencari solusi dan disertai contoh soal.

6. **Persamaan Diferensial Linier**

Diharapkan mahasiswa memahami bentuk umum persamaan diferensial Linier, dan dapat menyelesaikannya. Strategi pengubahan konsepsi berisikan bentuk umum P.D. Linier orde-1 dan langkah-langkah mencari solusi, serta contoh soal.

7. **Persamaan Diferensial Bernouli**

Diharapkan mahasiswa memahami ciri-ciri persamaan diferensial bernouli, dan dapat mencari solusinya. Dalam strategi pengubahan konsepsi termuat bentuk umum P.D. bernouli, metode-metode mencari solusi, serta contoh.

Lampiran 2

LEMBARAN OBSERVASI

Pokok Bahasan :
Tanggal :

Sub Pokok Bahasan	Jumlah Mahasiswa yang Aktif					
	Bertanya	Diskusi (Dalam Kel)	Diskusi (Antar kel)	Membaca	Memper hatikan	Latihan

Lampiran 3

WAWANCARA PERSEPSI MAHASISWA ATAS PERKULIAHAN

Tanggal : ....

Materi yang dipergunakan dalam perkuliahan

1. Buku ajar yang dipakai

   Hal Positif : ....

   ....

   ....

   Saran-saran : ....

   ....

   ....

2. Permasalahan yang diberikan dosen

   Hal Positif : ....

   ....

   ....

   Saran-saran : ....

   ....

   ....

3. Strategi pengubahan konsepsi yang diberikan dosen

   Hal Positif : ....

   ....

   ....

   Saran-saran : ....

   ....

   ....

Pelaksanaan Perkuliahan

4. Pembagian kelompok diskusi

Hal Positif : ....

....

....

Saran-saran : ....

....

....

5. Pelaksanaan diskusi

Hal Positif : ....

....

....

Saran-saran : ....

....

....

6. Pelurusan ide / gagasan konsep permasalahan oleh dosen

Hal Positif : ....

....

....

Saran-saran : ....

....

....

7. Contoh Soal yang diberikan

Hal Positif : ....

....

....

Saran-saran : ....

....

....

8. Latihan yang diberikan Dosen di ruang kuliah

Hal Positif : ....

....

....

Saran-saran : ....

....

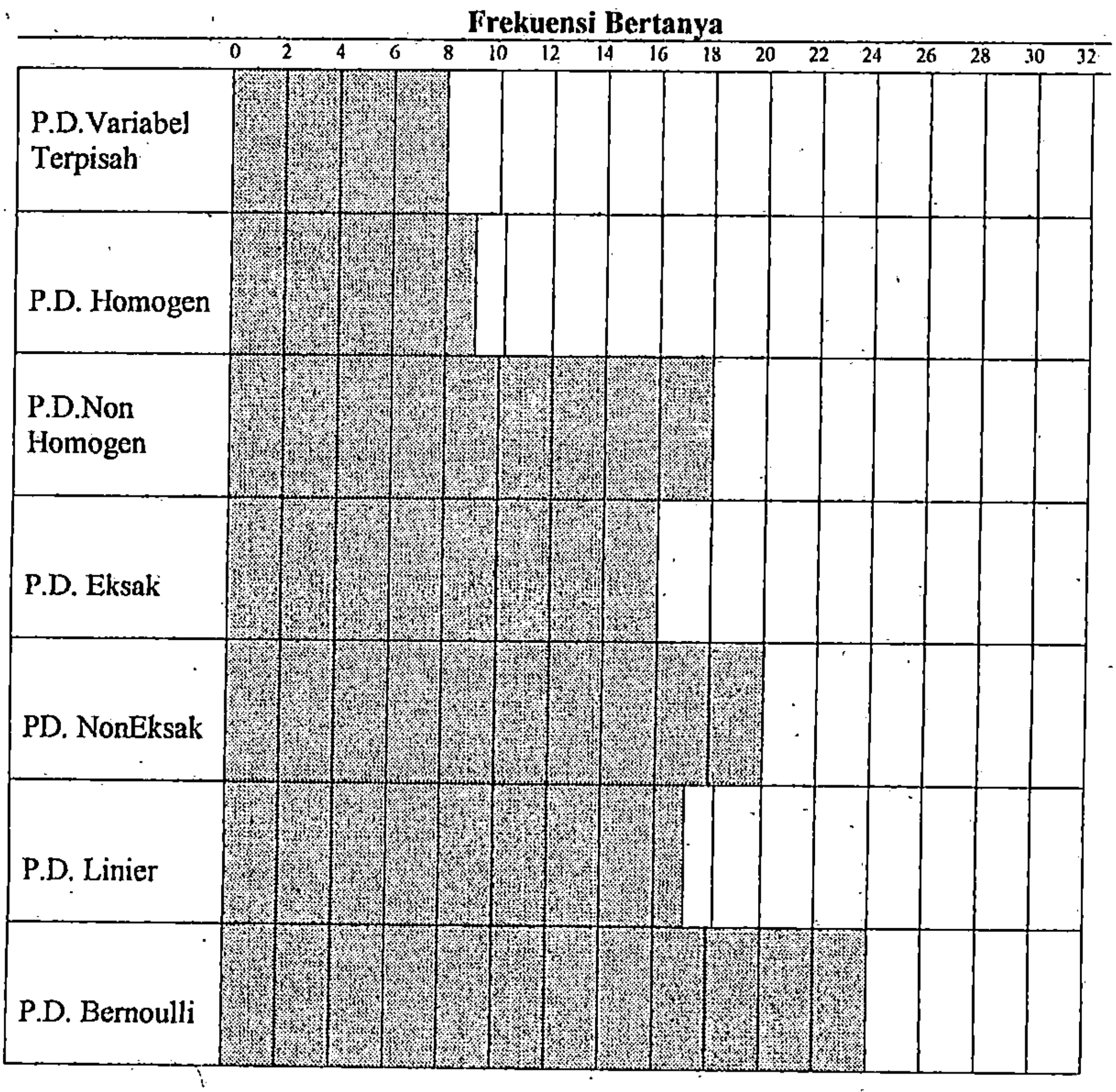
....

Lampiran 4

FREKUENSI KEAKTIFAN MAHASISWA PADA SIKLUS PERTAMA

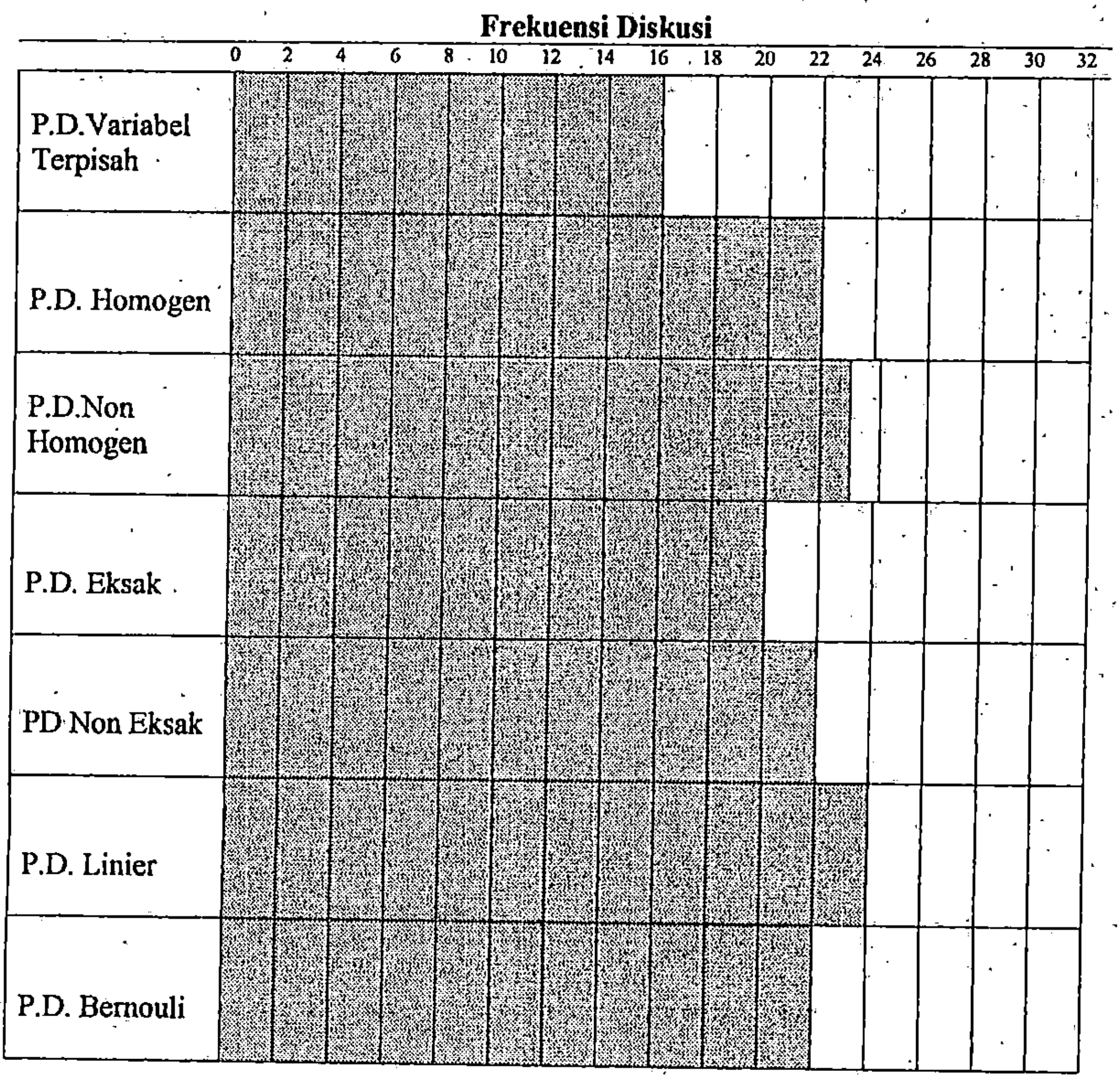
Lampiran 4a

Frekuensi mahasiswa bertanya pada tiap sub pokok bahasan



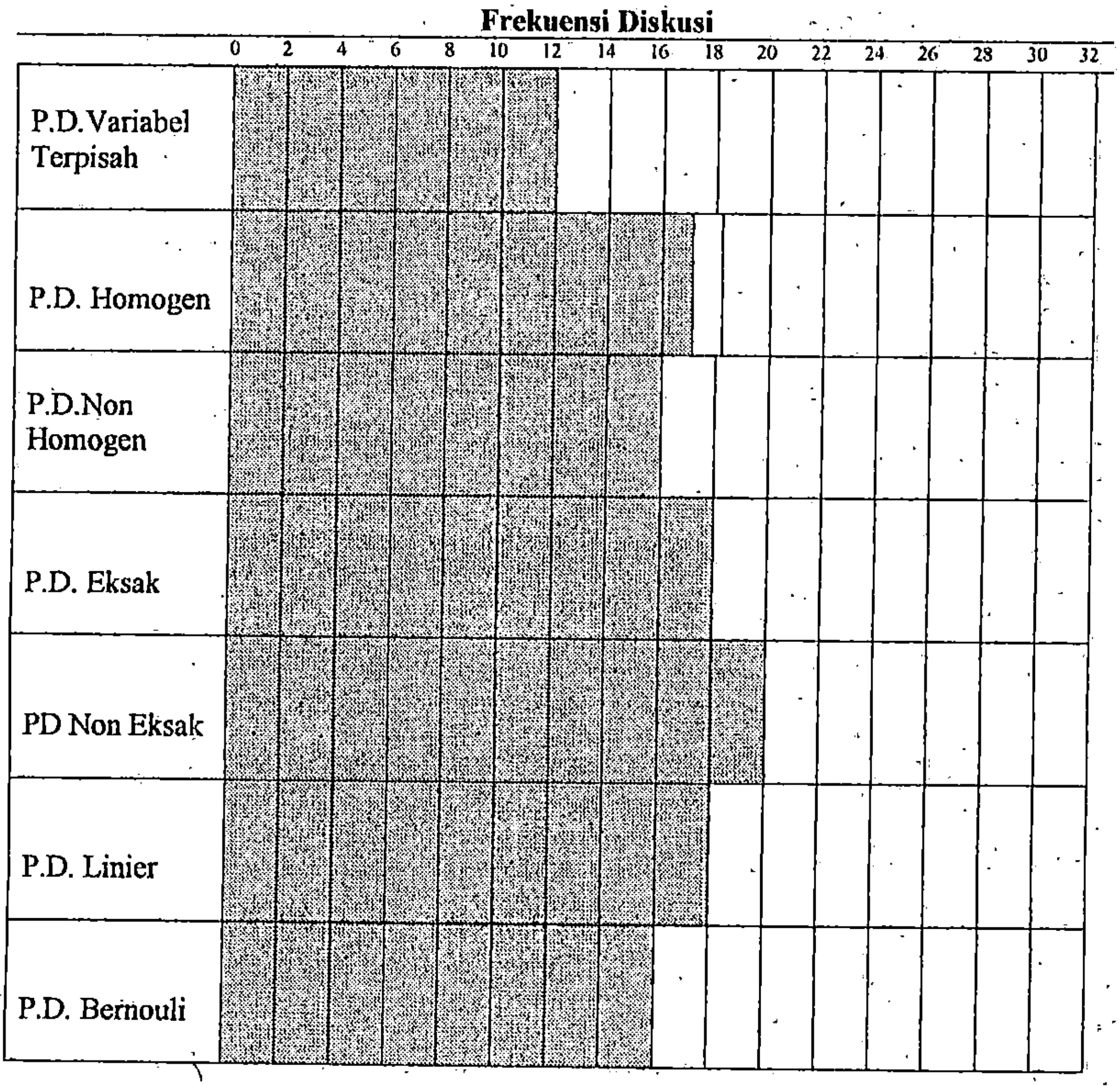
Lampiran 4b

Frekuensi mahasiswa berdiskusi dalam kelompoknya pada tiap sub pokok bahasan



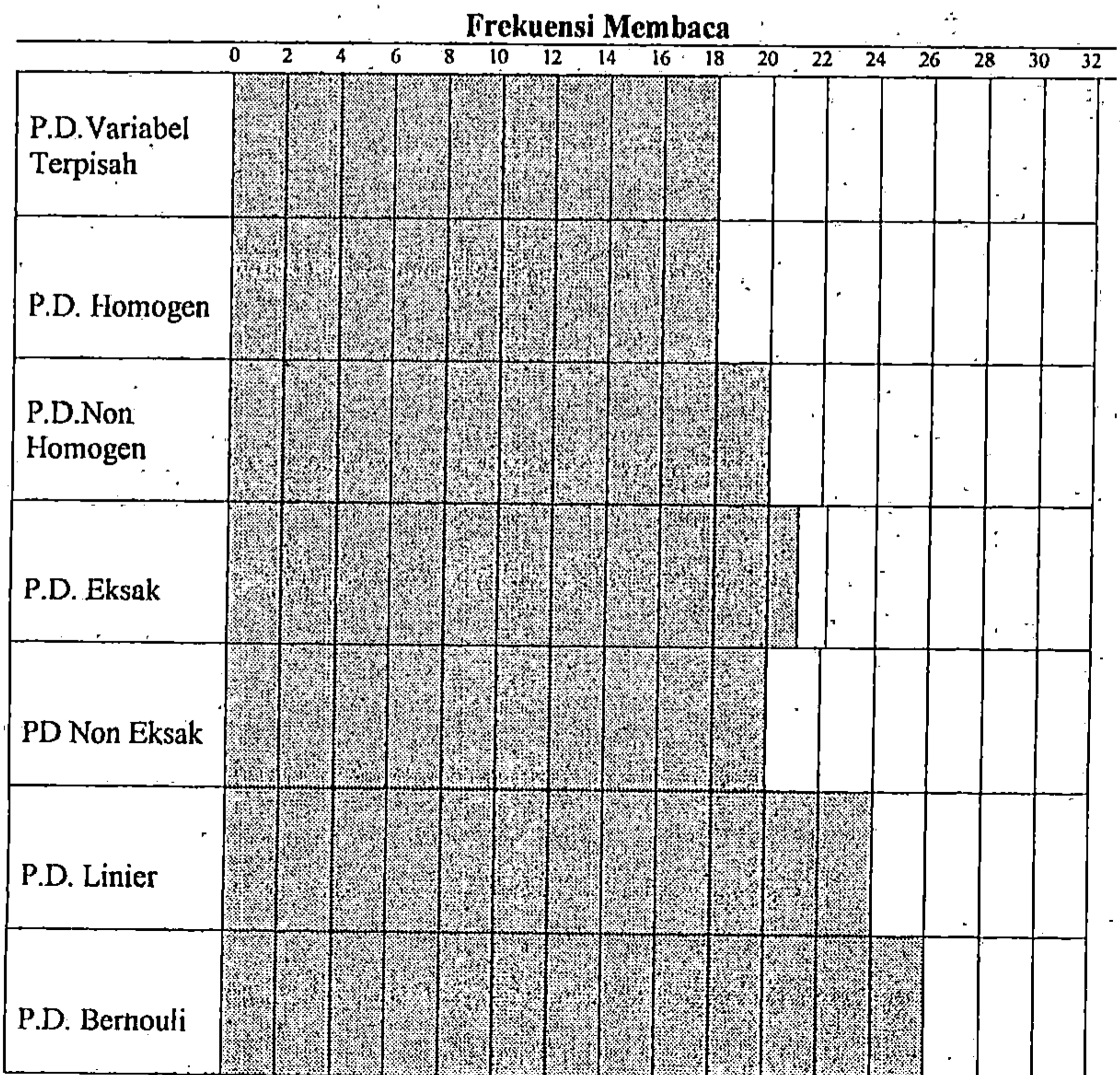
Lampiran 4 c

Frekuensi mahasiswa berdiskusi antar kelompok pada tiap sub pokok bahasan



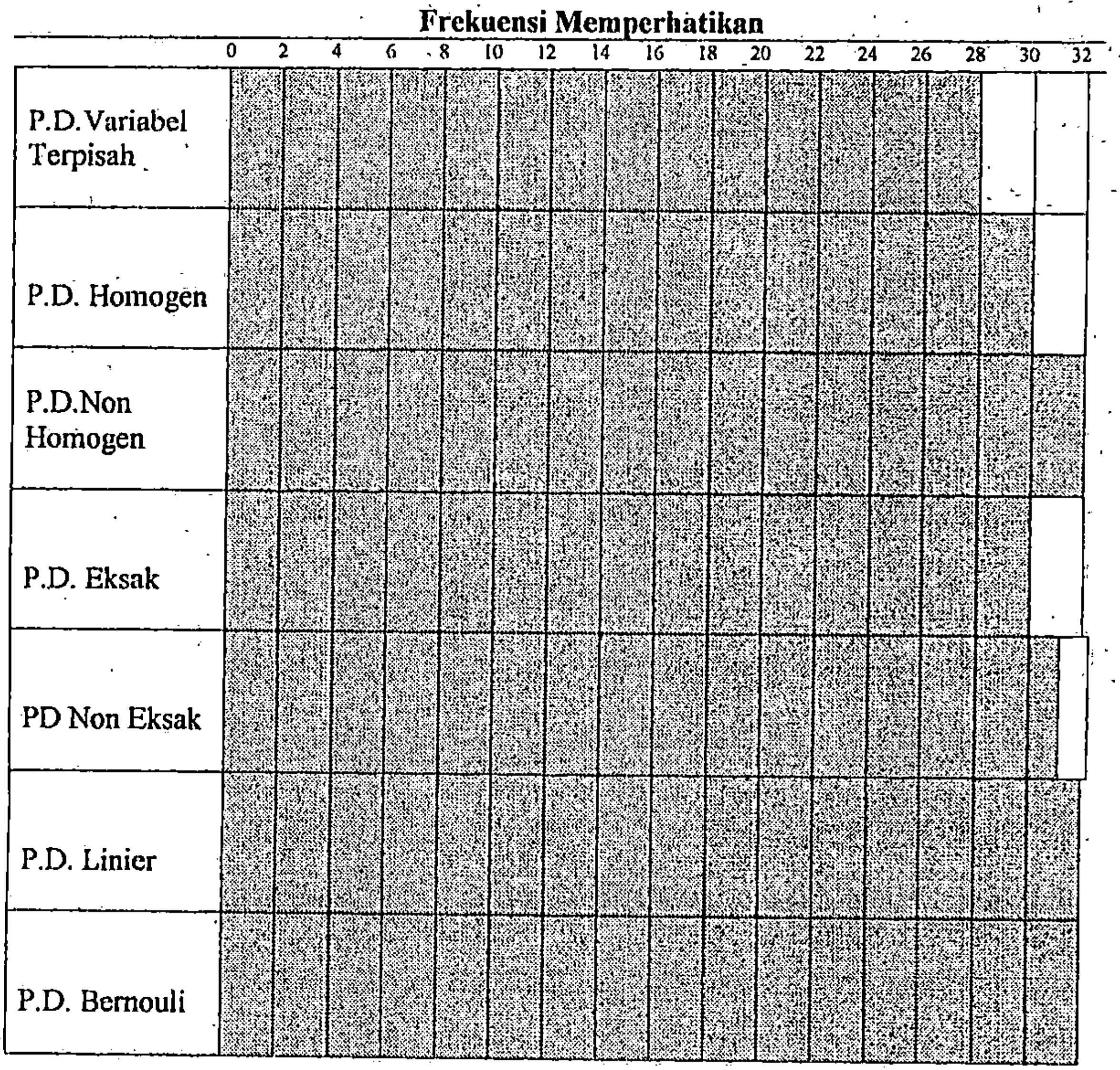
Lampiran 4 d

Frekuensi mahasiswa yang membaca strategi pengubahan konsepsi pada tiap sub pokok bahasan



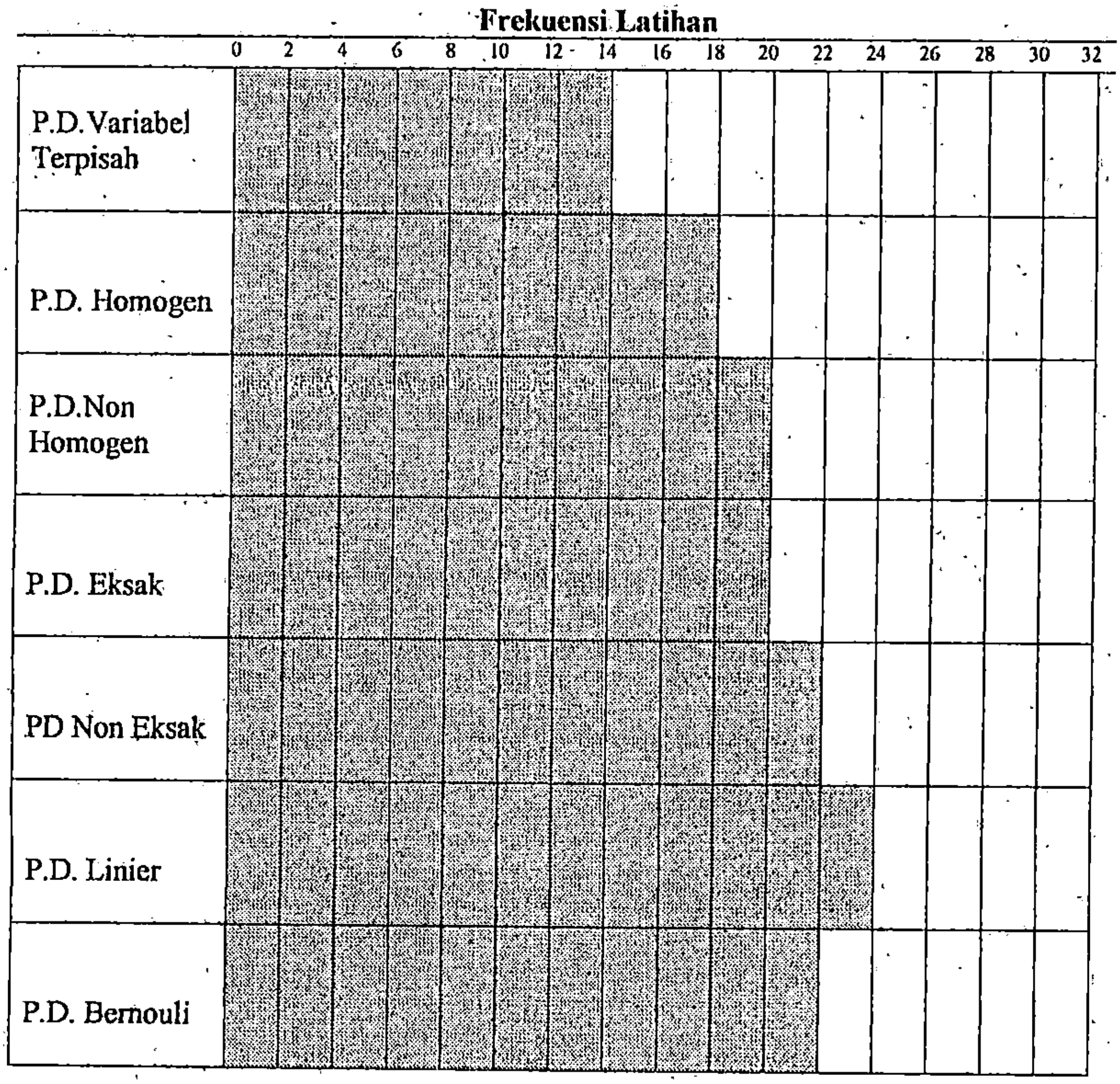
Lampiran 4 e

Frekuensi mahasiswa memperhatikan perkuliahan pada tiap sub pokok bahasan



Lampiran 4 f

Frekuensi mahasiswa mengerjakan latihan pada tiap sub pokok bahasan



LAMPIRAN 5.

SASARAN BELAJAR DAN ISI STRATEGI PENGUBAHAN KONSEPSI TIAP SUB POKOK BAHASAN SIKLUS KEDUA

Pokok Bahasan : P.D. Linier Orde – 2.

Untuk pokok bahasan itu telah dihasilkan 34 halaman strategi pengubahan konsepsi. Pokok bahasan ini membuat sub pokok bahasan sebagai berikut :

1. **Bentuk-bentuk persamaan diferensial orde – 2.**

   Diharapkan mahasiswa memahami berbagai bentuk persamaan diferensial orde–2 dan cara mencari solusinya. Strategi pengubahan konsepsi memuat bentuk-bentuk P,D orde –2 dan cara mencari solusinya, beserta contoh soal.

2. **Persamaan Diferensial Linier Orde –2 Koefesian Konstanta**

   Diharapkan mahasiswa memahami bentuk umum P.D Limier orde –2 koefesien yang homogen dan non homogen, dan cara mencari solusi masing-masingnya. Dalam strategi pengubahan konsepsi terdapat :

   a. Bentuk umum P.D Linier orde –2 dengan koefesien konstanta yang homogen, berikut cara mencari solusi dan contoh soal

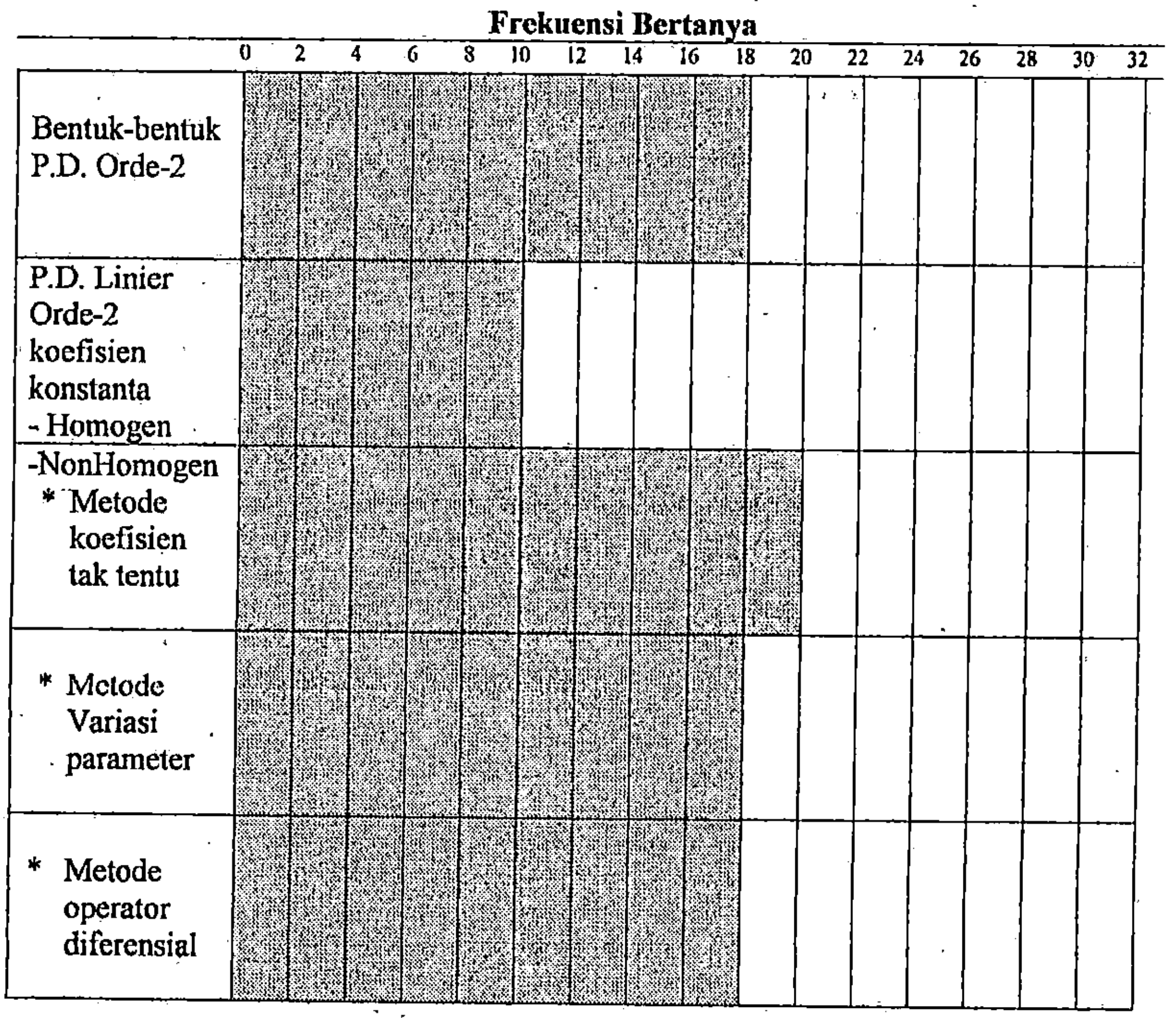
   b. Bentuk umum P.D linier orde –2 dengan koefesien konstanta yang non homogen, cara mencari solusi homogen, dan cara mencari solusi non homogen dengan berbagai metoda, serta contoh soal.

Lampiran 6

FREKUENSI KEAKTIFAN MAHASISWA PADA SIKLUS KEDUA

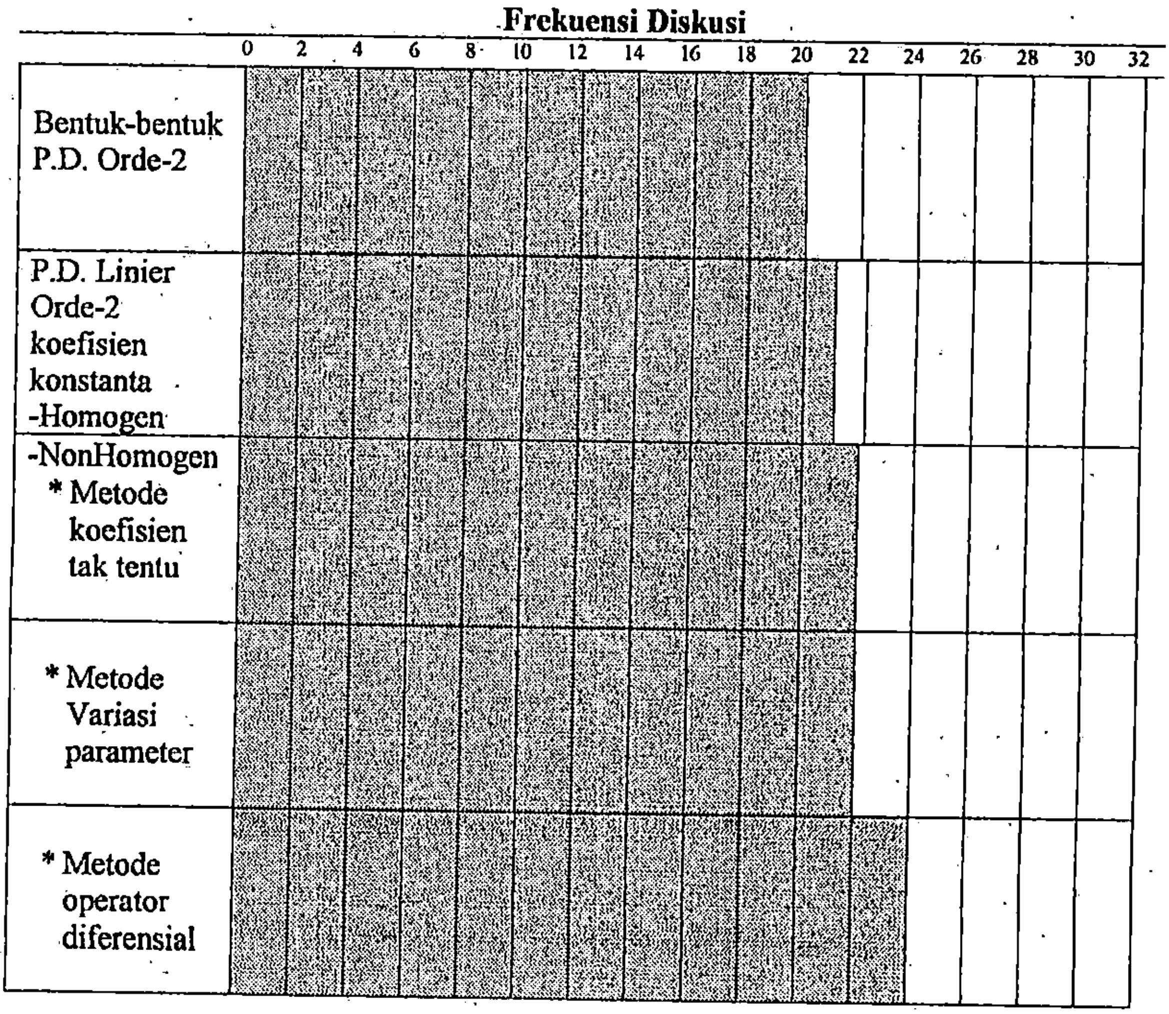
Lampiran 6 a

Frekuensi mahasiswa bertanya pada tiap sub pokok bahasan



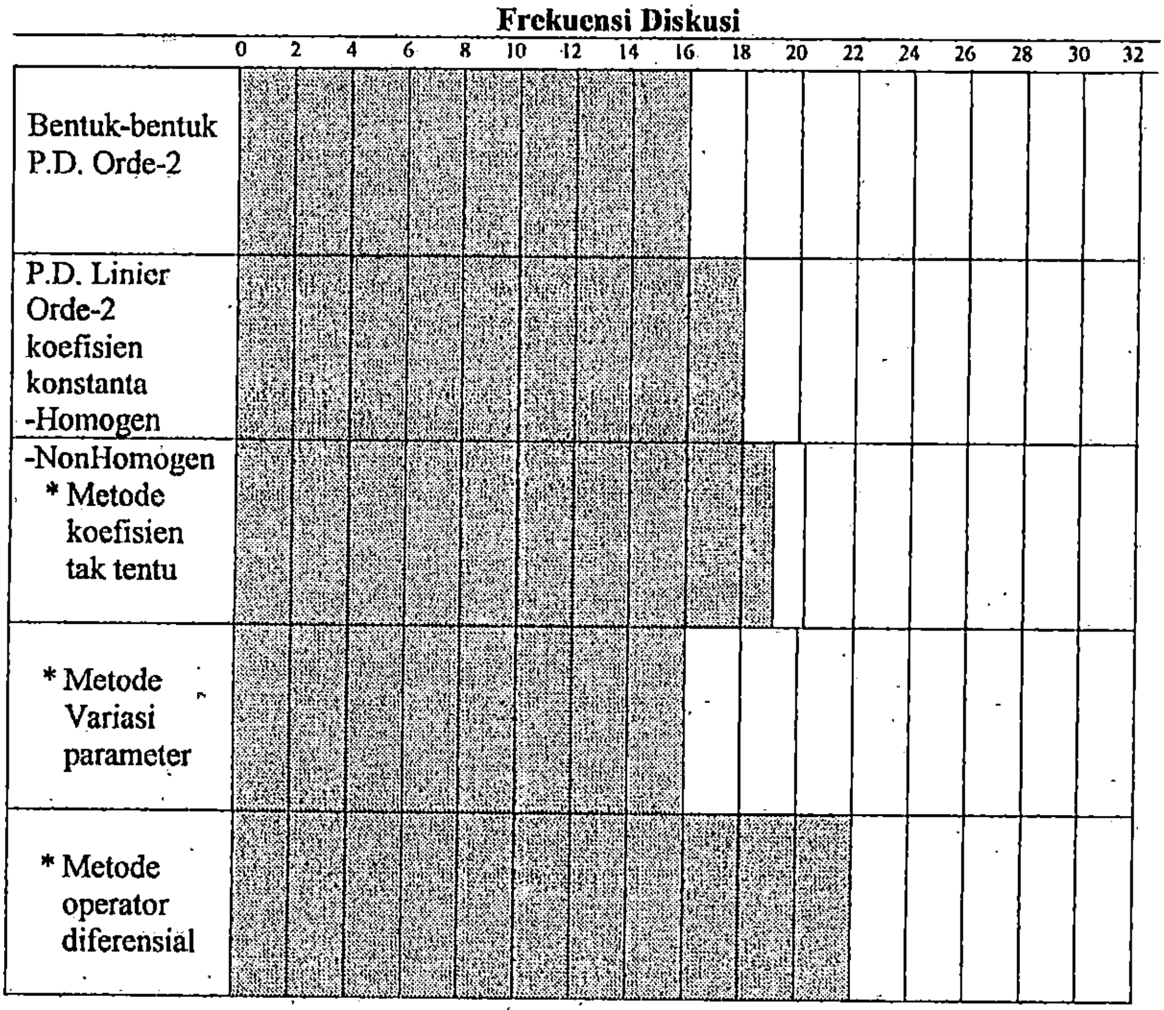
Lampiran 6 b

Frekuensi mahasiswa berdiskusi dalam kelompoknya tiap sub pokok bahasan



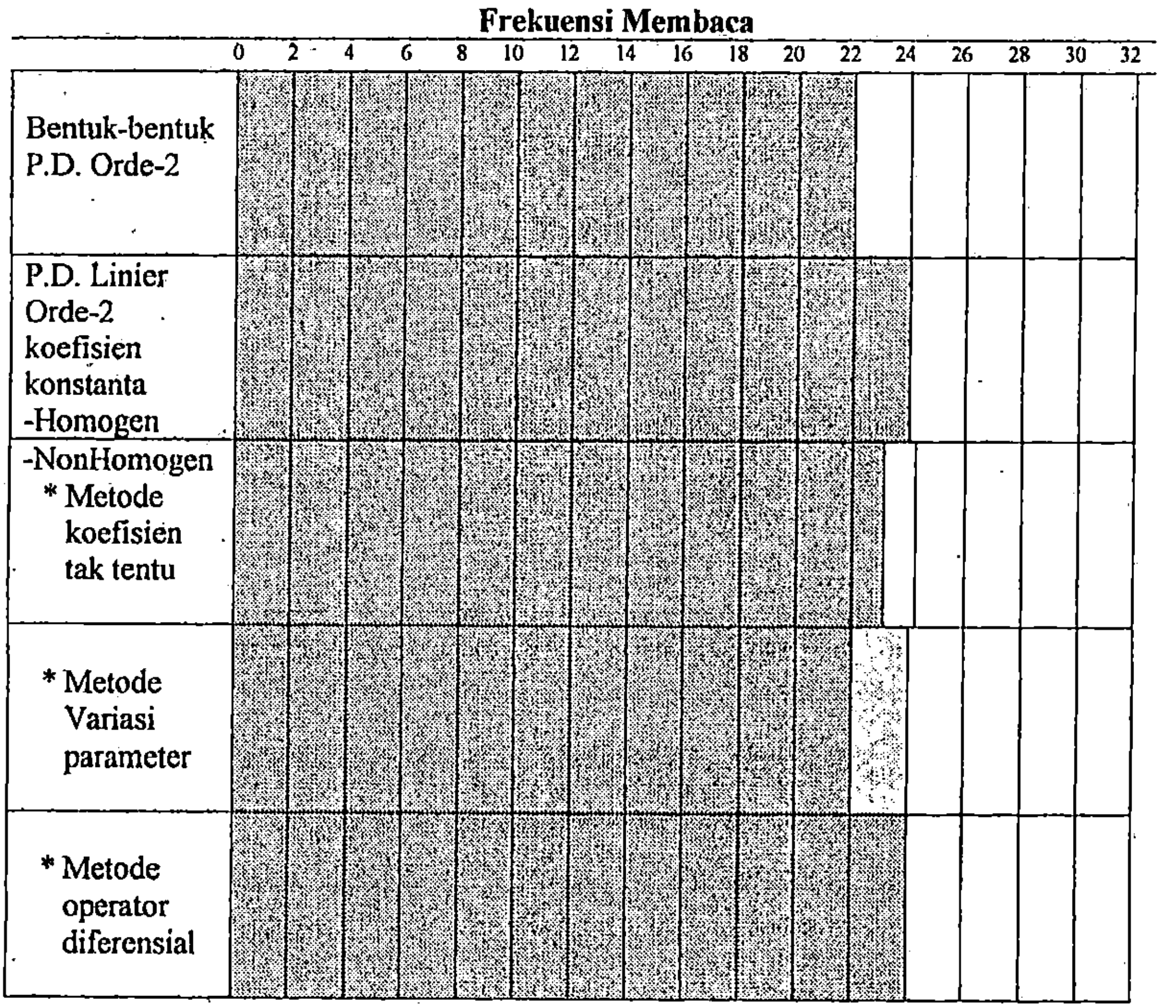
Lampiran 6 c

Frekuensi mahasiswa berdiskusi antar kelompok pada tiap sub pokok bahasan



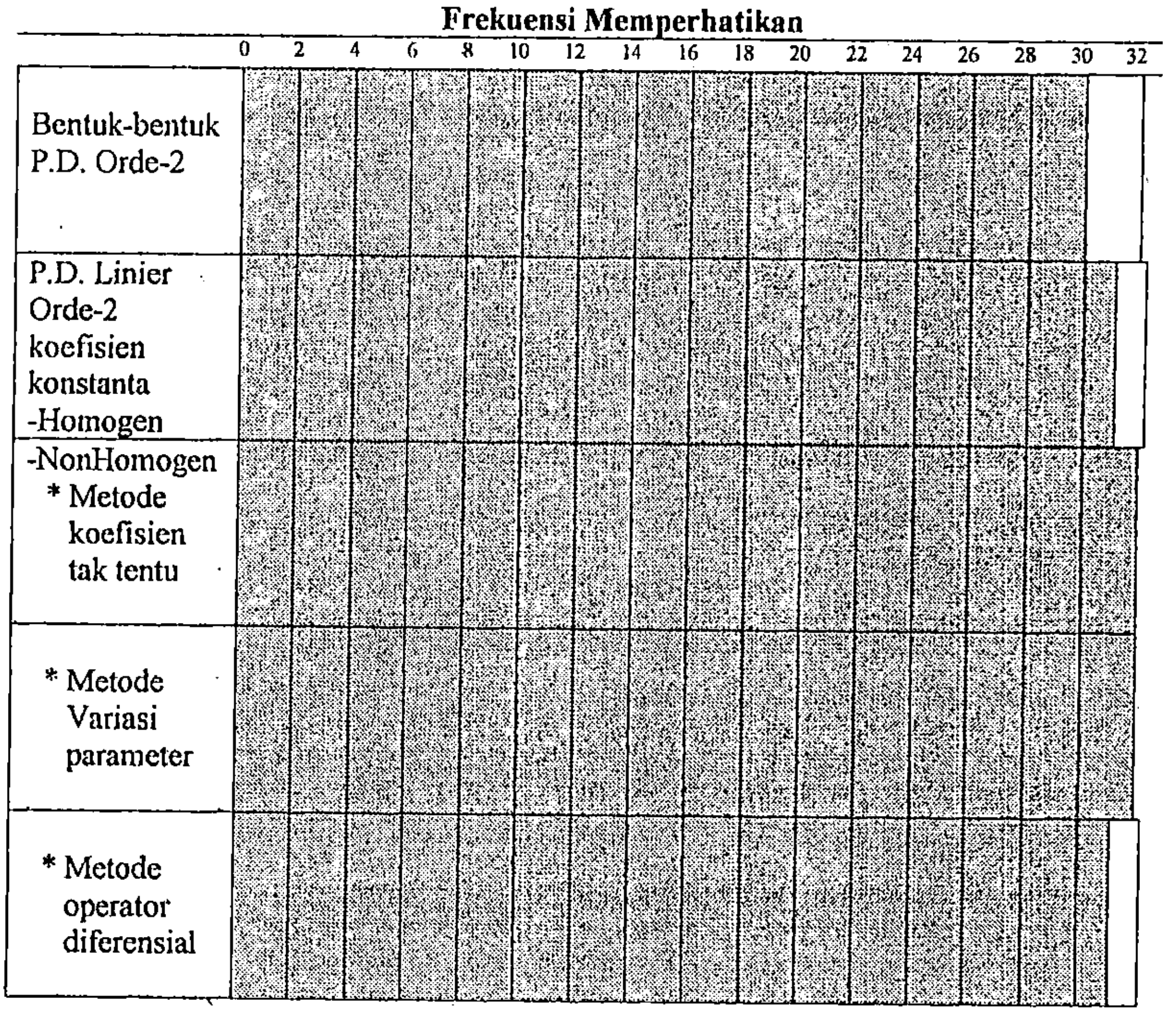
Lampiran 6 d

Frekuensi mahasiswa yang membaca strategi pengubahan konsepsi pada tiap sub pokok bahasan



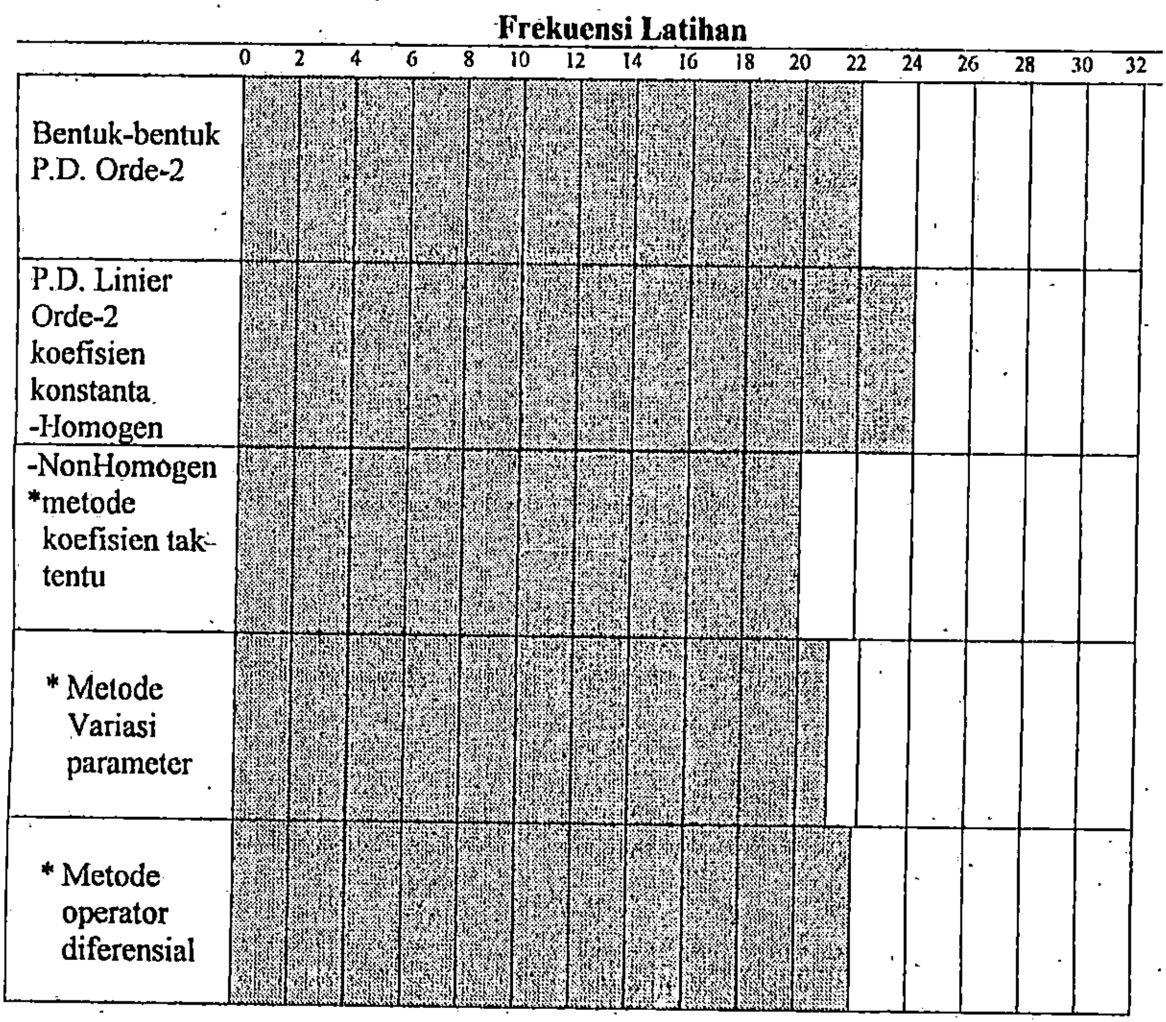
Lampiran 6 e

Frekuensi mahasiswa memperhatikan perkuliahan pada tiap sub pokok bahasan



Lampiran 6 f

Frekuensi mahasiswa mengerjakan latihan pada tiap sub pokok bahasan



Lampiran 7

TES PENGETAHUAN AWAL MAHASISWA

I. Carilah turunan dari fungsi di bawah ini

1. $D_t\ (t\sqrt{2t+6})$
2. $D_x^2\ (3x+2)^{\frac{2}{3}}$
3. $\frac{d}{dx}\ \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+4)}}\right)$
4. Hitung $D_x y$ dengan $y = (3x^2+5)^2\ (x^3-11)^4$
5. Cari D_y jika $y = (a+bx^3)^5$
6. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $x^3+y^3=x^3y^3$
7. Turunkanlah $y\sqrt{x^3-4} = x+11$
8. Cari $f'(x)$ jika $f(x) = \ln\ (x + \sqrt{x^2+1})$
9. $x\ e^y + 2x - \ln y = 4$, tentukan $\frac{dy}{dx}$
10. Jika $y = e^{ax^2+bx+c}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$
11. $D_z\ \left[(z^2 + \cosh z)(2z - \sinh z)\right]$
12. $D_y\ \frac{\tan y + 1}{\tan y - 1}$
13. $D_x\ (\sqrt{x}\ \tan\sqrt{\frac{1}{x}}\ )$
14. $x\cos y + y\cos x = 1$, carilah $\frac{dy}{dx}$
15. Carilah $\frac{d^2u}{dv^2}$, jika $u = 2\tan 3v$
16. $D_x\ (\mathrm{sech}^{-1}\ x^2)$
17. $D_x\ \left[(3x-1)\ (\cos^{-1} e^x)\right]$
18. Jika $f(r,\theta) = 3r^3\cos 2\theta$, tentukan $\frac{\partial f}{\partial r}$ dan $\frac{\partial f}{\partial \theta}$
19. Tentukan F_x dan F_y dari:

    a. $F(x,y) = \frac{2x - y}{xy}$ b. $F(x,y) = 3xy^2$

20. Jika $f(x,y,z) = e^{-xyz} - \ln\ (xy-z^2)$, tentukan $f_x(x,y,z)$

II. Selesaikan integral di bawah ini

1. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$, carilah anti turunan $F(x)+C$

2. $\displaystyle\int \frac{3y}{\sqrt{(2y^2+5)}}\,dy$

3. $\displaystyle\int d(3 \tan x + \sqrt{2x+1})$

4. $\displaystyle\int \frac{1-s^4}{2s^2}\,ds$

5. $\displaystyle D_t\int \frac{t^{3/2}}{\sqrt{(t^2+17)}}\,dt$

6. $\displaystyle\int x \sin^3(x^2) \cos(x^2)\,dx$

7. Buktikan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$, $a \quad 0$

8. $\displaystyle\int e^{ax^2+b}\,dx$

9. $\displaystyle\int x\, e^{ax^2+b}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x-3)\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{z^3 + 2z^2}{z - 2}\,dz$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4x + 9}\,dx$

14. $\displaystyle\int \sin^6 t \cos^2 t\,dt$

15. $\displaystyle\int \tan^5 t \sec^{-3/2} t\,dt$

16. $\displaystyle\int x \sqrt{x+3}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{(4 - t^2)}}\,dt$

18. $\displaystyle\int z^3 \ln z\,dz$

19. $\displaystyle\int x \sin^3 x\,dx$

20. $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$

21. $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$

22. $\int \frac{6x^2 + 22x - 23}{(2x-1)(x^2+x-6)}\,dx$

23. $\int \frac{5x + 7}{x^2 + 4x + 4}\,dx$

24. $\int e^x \sin e^x\,dx$

25. $\int \frac{e^{x+2}}{e^{x+3} + 1}\,dx$

Lampiran 8

STRATEGI PENGUBAHAN KONSEPSI SIKLUS PERTAMA

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE-1

Persamaan Diferensial linier orde-1 mempunyai bentuk :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$$P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy = 0$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

A. P.D. VARIABEL TERPISAH

Jika Persamaan Diferensial linier orde-1 dalam bentuk (1) bisa ditulis dalam bentuk :

$$f_1(x) \cdot g_2(y)\,dx + f_2(x) \cdot g_1(y)\,dy = 0$$

dengan faktor integrasi :

$$\frac{1}{f_2(x) \cdot g_2(y)}$$

yang dikalikan dikedua ruasnya sehingga didapat :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

bentuk (2) dinamakan Persamaan Diferensial dengan variabel terpisah. Solusi umum dari Persamaan Diferensial variabel terpisah dicari dengan mengintegralkan suku demi sukunya.

Contoh: Tentukan penyelesaian persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

Jawab :

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$$

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{y}dy = C$$

$$\ln x + \ln y = \ln C_1$$

$$xy = C_1$$

B. P.D. HOMOGEN

Fungsi M (x, y) disebut homogen berderajat n jika :

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x,y)$$

Suatu Persamaan Difefensial linier orde-1 : $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

disebut homogen jika $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ keduanya homogen berderajat sama.

Persaman Diferensial homogen dapat ditulis sebagai :

$$M\left(\frac{y}{x}\right) dx + N\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

Solusi umum Persamaan Diferensial homogen dapat diperoleh dengan transformasi :

$y = vx$ sehingga $dy = v\,dx + x\,dv$

Maka:

$$M\left(\frac{vx}{x}\right) dx + N\left(\frac{vx}{x}\right) dy = 0$$

$$M(v)\,dx + N(v)\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$[M(v) + vN(v)]\,dx + N(v)\,x\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(v)}{M(v) + v\,N(v)}\,dv = 0$$

Bentuk terakhir adalah Persamaan Diferensial variabel terpisah, sehingga solusi bisa diperoleh.

Contoh : Tentukan penyelesaian persamaan

$$(x^2 - xy + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$$

jawab : Misalkan $y = vx$

maka $dy = v\,dx + x\,dv$

Sehingga

$$(x^2 - x.vx + v^2x^2)dx - x.vx(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2 - vx^2 + v^2x^2)dx - v^2x^2(vdx + xdv) = 0$$

$$(1 - v + v^2)dx - v(vdx + xdv) = 0$$

$$(1 - v)dx - vxdv = 0$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{v}{1-v}dv = 0$$

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{v}{1-v}dv = C$$

$$\ln x + \int \frac{1-v-1}{1-v}dv = C$$

$$\ln x + \int \left(1 - \frac{1}{1-v}\right)dv = C$$

$$\ln x + v + \ln(1-v) = \ln C_1$$

$$(1-v)xe^{v} = C_1$$

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)xe^{\frac{y}{x}} = C_1$$

$$(x-y)e^{\frac{y}{x}} = C_1$$

C. P.D. NON HOMOGEN

Bentuk yang dibahas adalah :

$$(a_1x + b_1y + c_1)\ dx + (a_2 x + b_2y + c_2)\ dy = 0$$

1. Jika : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

Lakukan transformasi $a_1x + b_1y = t$

maka $a_1\ dx + b_1\ dy = dt$

$$dy = \frac{dt - a_1 dx}{b_1}$$

Substitusi ke Persamaan Diferensial asal, diperoleh Persamaan Diferensial dengan variabel terpisah.

2. Jika $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Persamaan Diferensial dirubah menjadi Persamaan Diferensial Homogen dengan cara :

Transformasi $u = a_1x + b_1y + c_1 \Longrightarrow du = a_1dx + b_1dy$

$v = a_2x + b_2y + c_2 \Longrightarrow dv = a_2dx + b_2dy$

dari du dan dv dapat dicari dx dan dy :

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} du & b_1 \\ dv & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{b_2du - b_1dv}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & du \\ a_2 & dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1dv - a_2du}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Substitusi ke Persamaan Diferensial :

$$u \, \frac{b_2du - b_1dv}{a_1b_2 - a_2b_1} + v \, \frac{a_1dv - a_2du}{a_1b_2 - a_2b_1} = 0$$

$$u\,(b_2du - b_1dv) + v\,(a_1dv - a_2du) = 0$$

$$(ub_2 - va_2)\,du + (va_1 - ub_1)\,dv = 0$$

$$M(u,v)\,du + N(u,v)\,dv = 0$$

M dan N homogen berderajat 1

Persamaan Diferensial yang diperoleh adalah Persamaaan Diferensial homogen.

Contoh : Tentukan persamaan differensial

$$(x + y)\,dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$$

Jawab : misalkan $x + y = u$

Maka $dx + dy = dv$

Sehingga

$$u(du\text{-}dy) + (3u\text{-}4)dy = 0$$

$$udu - udy + (3u - 4)dy = 0$$

$$udu + (2u - 4)dy = 0$$

$$\frac{u}{u-2}du + 2dy = 0$$

$$\int \frac{u}{u-2}du + \int 2dy = C$$

$$\int\left(1 + \frac{2}{u-2}\right)du + 2\int dy = C$$

$$u + 2\ln(u-2) + 2y = C$$
$$\ln(u-2)^2 = C - u - 2y$$
$$(u-2)^2 = e^{c-u-2y}$$
$$(u-2)^2 = C_1 e^{-(u+2y)}$$
Jadi $$(x+y-2)^2 = C_1 e^{-(x+y+2y)}$$
$$(x+y-2)^2 = C_1 e^{-(x+3y)}$$

D. P.D. EKSAK

Sebuah Persamaan Diferensial yang berbentuk : M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0 merupakan Persamaan Diferensial Eksak, apabila ruas kiri merupakan suatu differensial total dari F,

atau $\exists F \ni \dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy = 0$

atau $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ dan $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$

Teorema

Syarat perlu dan cukup agar Persamaan Diferensial : M (x,y) dx + N(x,y) dy = 0 merupakan Persamaan Diferensial eksak ialah :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Bukti :

($\Longrightarrow$) Diketahui M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0 eksak, akan ditunjukkan :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

karena $M = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ dan $N = \dfrac{\partial F}{\partial y}$

F dapat diturunkan, maka F kontinu

$$\left.\begin{array}{l} M = \dfrac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\[2ex] N = \dfrac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{array}\right\} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$$

karena urutan tidak pengaruh, jika F kontinu

$(\Longleftarrow)$ Diketahui $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

akan ditunjukkan M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0 eksak

Misalkan $F = M \int (x,y) dx + c(y)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\, dx + c'(y) = N(x,y)$$

$$c'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\, dx$$

$$c(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\, dx \right] dy + D$$

Substitusi ke F

$$F = \int M(x,y)\, dx + \underbrace{\int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\, dx \right] dy}_{P} + D$$

$$= \int M(x,y)\,dx + \int P\,dy + D$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,dx + \int P\,dy + D\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\int P dy + \frac{\partial}{\partial y} D$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + P$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

$$= N(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int M(x,y)\,dx + \int P\,dy + D\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx + \frac{\partial}{\partial x}\int\left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right]dy$$

$$= M(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}\int\left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\;dx\right]\,dy$$

$$= M(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}\int N\,dy - \frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\;dy$$

Karena $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M\,dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} \int N\,dy - \frac{\partial}{\partial x} \int N\,dy$$

$$= M(x,y)$$

Terbukti ada Persamaan Diferensial eksak

Cara mencari solusi Persamaan Diferensial eksak, diselesaikan dengan 2 cara yaitu :

1. Integralkan M (x,y) terhadap x dengan menganggap y konstan.

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx + C^{1}(y)$$

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int [\, M(x,y)\,dx + C^{1}(y)$$

$$C^{1}(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx$$

$$C(y) = \int [\, N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx \,]\,dy$$

Substitusi ke F sehingga dapat hasilnya.

2. Integralkan N (x,y) terhadap y dengan menganggap x konstan

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + C(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int N(x,y)\,dy + C^{1}(x)$$

$$M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int N(x,y)\, dy + C^{1}(x)$$

$$C^{1}(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int N(x,y)\, dy$$

$$C(x) = \int M(x,y)\, dx - \int \frac{\partial}{\partial x} \int N(x,y)\, dy\, dx$$

Substitusi ke F sehingga dapat hasilnya.

Contoh : Tentukan penyelesaian persamaan diferensial

$(x + y)\, dx + (x-y)\, dx = 0$

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= x + y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ N(x,y) &= x - y \rightarrow \frac{\partial N}{\partial y} = 1 \end{aligned}\right\} \text{P.D Eksak}$$

Solusi

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int M(x,y) dx + C(y) \\ &= \int (x + y) dx + C(y) \\ &= \frac{1}{2} x^{2} xy + C(y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + c^{1}(y)$$

Karena $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$

Maka

$$\begin{aligned} x + c^{1}(y) &= x - y \\ c^{1}(y) &= -y \\ c(y) &= -\frac{1}{2} y^{2} \end{aligned}$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2} x^{2} + xy - \frac{1}{2} y^{2}$$

Sehingga Solusi :

$$\frac{1}{2} x^{2} + xy - \frac{1}{2} y^{2} = C$$

E. P.D. NON EKSAK

Bila M(x,y) dx + N(x,y) day = 0 Non Eksak, atau $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Maka P.D Non eksak dapat direduksi menjadi PD eksak dengan cara mengalikan PD non eksak dengan faktor integrasi.

Contoh :

$$y\,dx - x\,dy = 0\,,\ \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Jika dikalikan $\dfrac{1}{y^2}$, maka;

$$\frac{y}{y^2}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0$$

$$\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0\,,\ -\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

PD Menjadi eksak ==> $\dfrac{1}{y^2}$ adalah faktor integrasi

Catatan : Sebuah PD mungkin mempunyai beberapa faktor integrasi.

y dx = x dy = 0 ==> faktor integrasi : $\dfrac{1}{y^2}, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{y}{x^3}, \dfrac{1}{xy}$

Jika M (x,y) dx + N(x,y) dy = 0 Non eksak

Dan U (x,y) Faktor integrasi

Maka MU dx + NU dy = 0 Eksak

$$\frac{\partial}{\partial y}(MU) = \frac{\partial}{\partial x}(NU)$$

$$U\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\boxed{U\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Dari persamaan ini faktor integrasi U dapat dicari.

Adakalanya faktor integrasi diketahui bentuk fungsinya, ada kalanya bentuk tersebut tidak diketahui sama sekali.

Mencari faktor integrasi.

1. Bila faktor integrasi merupakan fungsi x

$$U = U(x) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Maka :
$$U\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$U\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\, dx$$

Agar U merupakan fungsi x, maka
$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$$

Sehingga faktor integrasi:
$$U = e^{\int f(x)\, dx}$$

$$\text{Dimana } f(x) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

2. Bila faktor integrasi merupakan fungsi y

$$U = U(y) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dy}$$

Maka
$$U\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$U\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=-M\frac{du}{dy}$$

$$\frac{\partial u}{u}=-\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}}{M}dy$$

Agar U merupakan fungsi y, maka $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=g\,(y)$

Sehingga faktor integrasi : $U=e^{-\int g\,(y)\,dy}$

Dimana $g\,(y)=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}$

3. Bila faktor integrasi U = U (x,y)

Misalkan (x,y) = z $\Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

Maka $U\left[\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right]=N\dfrac{\partial u}{\partial x}-M\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$=N\frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}-M\frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \left[N \frac{\partial z}{\partial x} - M \frac{\partial z}{\partial y} \right] \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N \dfrac{\partial z}{\partial x} - M \dfrac{\partial z}{\partial y}} dz$$

Sehingga faktor integrasi : $U = e^{\int k(z)\, dz}$

Dimana

$$K(z) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N \dfrac{\partial z}{\partial x} - M \dfrac{\partial z}{\partial y}}$$

4. Bila $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ Homogen
   Maka faktor integrasi :

$$U(x,y) = \frac{1}{x\, M(x,y) + y\, N(x,y)}$$

5. Bila $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$
   Dapat ditulis dalam bentuk
   $y\, f(x,y)\, dx + x\, g(x,y)\, dy = 0$
   Dimana $f(x,y) \neq g(x,y)$
   Maka faktor integrasi :

$$U(x,y) = \frac{1}{xy\, [\, f(x,y)] - g(x,y)]}$$

Beberapa contoh dalam soal dan penyelesaiannya

1. Selesaikan $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{x^2}{2y}$

   Dimana faktor integrasi merupakan fungsi dari x saja.

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$$

kali 2xy

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 + x^2$$

$$(y^2 + x^2)\,dx - 2\,xy\,dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x^3 + y^2 \Longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y \\ N(x,y) = -2\,x\,y \Longrightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -2\,y \end{array}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ PD Non eksak}$$

Faktor integrasi merupakan fungsi x

$$U = U(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$U\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$U\ \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\ \frac{du}{dx}$$

$$U.\ 4\,y = -2\,x\,y\ .\ \frac{du}{dx}$$

$$4\,u = -2\,x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{2}{x}\,dx$$

$$U = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

Faktor integrasi $U(x) = \dfrac{1}{x^2}$

PD. Non eksak : $(y^2 + x^3)\,dx - 2xy\,dy = 0$

PD. Eksak : $\dfrac{y^2 + x^3}{x^2}\,dx - \dfrac{2\,x\,y}{x^2}\,dy = 0$

$$(x + \frac{y^2}{x^2})dx - \frac{2y}{x}dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x + \dfrac{y^2}{x^2}, \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2} \\ \\ N(x,y) = -2\dfrac{y}{x}, \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{2y}{x^2} \end{array}\right\} \text{PD Eksak}$$

Solusi $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + c(y)$

$$= \int (x + \frac{y^2}{x^2})\,dx + C(y)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{y^2}{x} + c(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y}{x} + c^1(y)$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = \frac{-2y}{x}\right\} \begin{array}{l} c'(y) = 0 \\ c(y) = \wp \end{array}$$

Solusi umum :

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{y^2}{x} + \wp$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{y^2}{x} + \wp = 0$$

$$x^3 - 2y^2 = \wp_1 x$$

2. Selesaikan : $(xy^2 + y)\,dx + x\,dy = 0$

Dimana faktor integrasi merupkan funsi dari z dan $z = xy$

Jawab :

$$(xy^2 + y)\,dx + x\,dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = xy^2 + y, \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 1 \\ \\ N(x,y) = x \qquad , \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \end{array}\right\} \text{PD Non eksak}$$

Faktor integrasi merupakan fungsi z (z = xy)
U = U(z) , z = xy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}. y = y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}. x = x\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$U\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x}\right] = Ny\frac{\partial u}{\partial z} - Mx\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U. 2\,x\,y = xy\frac{du}{dz} - (x^2y^2 + x\,y)\frac{du}{dz}$$

$$2\,U = \frac{du}{dz} - (xy + 1)\frac{du}{dz}$$

$$2\,U = \frac{du}{dz} - (\,z + 1)\,\frac{du}{dz}$$

$$= -z\frac{du}{dz}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{-2}{z}\,dz$$

$$U = e^{\int -2/z\,dz} = e^{-2\ln z} = z^{-2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

Faktor integrasi $U(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$

PD. Non eksak = $(xy^2 + y)\,dx + x\,dy = 0$

PD Eksak : $\dfrac{xy^2+y}{x^2y^2}dx + \dfrac{x}{x^2y^2}dy = 0$

$$\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2y}\right]dx + \frac{1}{xy^2}dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2y}, \quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2y^2} \\ \\ N(x,y) = \dfrac{1}{xy^2}, \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2y^2} \end{array}\right\} \text{PD eksak}$$

Solusi :

$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + C(x)$

$$= \int \frac{1}{xy^2}dy + c(x)$$

$$= -\frac{1}{xy} + c(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2y} + C^1(x) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2y} \end{array}\right\} \begin{array}{l} c^1(x) = 1/x \\ c(x) = \ln x + \wp \end{array}$$

Solusi :

$$F(x,y) = -\frac{1}{xy} + \ln x + \wp$$

$$-\frac{1}{xy} + \ln x + \wp = 0$$

$$-\frac{1}{xy} + \ln x = \wp_1$$

3. Selesaikan Y $(x^2 + y^2 - 1)\,dx + x\,(x^2 + y^2 + 1)\,dy = 0$
Dengan menggunakan faktor integrasi yang merupakan suatu fungsi dari z dan $z = x^2 + y^2$

Jawab:

$$y(x^2 + y^2 - 1)\,dx + x\,(x^2 + y^2 + 1)\,dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M(x,y) = x^2 + y^3 - y, & \dfrac{\partial M}{\partial y}\ x^2 + 3y^2 - 1 \\ N(x,y) = x^3 + y^2 + y, & \dfrac{\partial N}{\partial x}\ 3x^2 + y^2 + 1 \end{array}\right\}\ \text{Non eksak}$$

Fakto integrasi merupakan fungsi z $(z = x^{2+}y^2)$

$$U = U(z),\ z = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\ .\ 2x = 2x\,\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\ .\ 2y = 2y\,\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\,\frac{\partial u}{\partial x} - M\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$U(-2x^2 + 2y^2 - 2) = (x^3 + y^2 + x)\,2x\,\frac{\partial u}{\partial z} - (x^2 y + y^3 - y)\,2y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U(-2x^2 + 2y^2 - 2) = (2x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2\,\frac{\partial u}{\partial z} - (2x^2 y^2 + 2y^4 - 2y^2)\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U(-2x^2 + 2y^2 - 2) = (2x^4 - 2y^4 + 2x^2 + 2y^2)\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U(-2x^2 + 2y^2 - 2) = 2\,[(x^4 - y^4) + (x^2 + y^2)]\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U(-x^2 + y^2 - 1) = [(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)]\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U(-x^2 + y^2 - 1) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2 + 1)\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U(-x^2 + y^2 - 1) = -(x^2 + y^2)\ (-x^2 + y^2 - 1)\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U = -(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$u = -z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{du}{u} = -\ \frac{dz}{z}$$

$$U = e^{\int -dz/z} = e^{-\ln z} = z^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Faktor Integrasi $U(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

PD. Non eksak : $y(x^2 + y^2 - 1)\,dx + x(x^2 + y^2 + 1)\,dy = 0$

PD. Eksak : $\dfrac{y}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 - 1)\,dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + 1)\,dy = 0$

$$\left[y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right]dx + \left[x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right]dy = 0$$

Solusi : $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + c(y)$

$$= \int\left[y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right]dx + C(y)$$

$$= \int y\,dx - \int \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + c(y)$$

$$= \int y\,dx - \int \frac{1/y}{(x/y)^2 + 1}\,dx + c(y)$$

$$= \int y\,dx - \int \frac{1}{(x/y)^2 + 1}\,d\left(\frac{x}{y}\right) + c(y)$$

$$= x\,y - \text{arc tan}\frac{x}{y} + c(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} + c^1(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2}$$

Sehingga : $x - \dfrac{1}{1 + (x/y)^2} \cdot \dfrac{-x}{y^2} + c^1(y) = \dfrac{x^3 + y^2 + x}{x^2 + y^2}$

$$x + \frac{x}{x^2 + y^2} + c^1(y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$c^1(y) = 0$$
$$c(y) = \wp$$

Solusi umum : $F(x,y) = xy - \text{arc tan}\dfrac{x}{y} + \wp$

$$xy - \text{arc tan}\frac{x}{y} + \wp = 0$$

$$x\,y - \text{arc tan } x/y = \wp_1$$

4. Selesaikan persamaan differensial

$y\,(y^2 - 2\,x^2)\,dx + x\,(2y^{2-x}2)\,dy = 0$

Jawab :

$y\,(y^2 - 2x^2)\,dx + x\,(2y^2 - x^2)\,dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = y^3 - 2x^2y, \dfrac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 - 2x^2 \\ \\ N(x,y) = 2xy^2 - x^3, \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y^2 - 3x^2 \end{array}\right\} \text{PD Non Eksak}$$

$y(y^2 - 2x^2)\,dx + x(2y^2 - x^2)\,dy = 0$ adalah PD Homogen

Maka faktor integrasi.

$$U(x,y) = \frac{1}{x\,M(x,y) + y\,N(x,y)}$$

$$= \frac{1}{xy(y^2-2x^2) + yx(2y^2-x^2)}$$

$$= \frac{1}{3xy(y^2-x^2)}$$

PD Eksak : $\dfrac{y(y^2 - 2x^2)}{3xy(y^2-x^2)}\,dx + \dfrac{x(2y^2 - x^2)}{3x\,y(y^2 - x^2)}\,dy = 0$

$$\frac{y^2 - 2x^2}{3x(y^2 - x^2)}\,dx + \frac{2y^2 - x^2}{3y(y^2 - x^2)}\,dy = 0$$

Solusi : $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + c(y)$

$$= \int \frac{y^2 - 2x^2}{3x(y^2-x^2)}\,dx + c(y)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{y^2-2x^2}{3x(y^2-x^2)} = \dfrac{A}{3x} + \dfrac{Bx + C}{y^2 - x^2} \\ \\ \dfrac{y^2 - 2x^2}{3x(y^2-x^2)} = \dfrac{A(y^2 - x^2) + 3x(Bx+c)}{3x(y^2 - x^2)} \\ \\ y^2 - 2x^2 = Ay^2 - Ax^2 + 3Bx^2 + 3cx \\ \qquad A = 1 \\ \qquad -A + 3B = -2 \Longrightarrow B = -\dfrac{1}{3} \\ \qquad C = 0 \end{array}}$$

$$F(x,y) = \int \left(\frac{1}{3x} - \frac{1/3\, x}{y^2 - x^2} \right) dx + c(y)$$

$$= \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{6} \ln | x^2 - y^2 | + c(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{6} \frac{-2y}{x^2 y^2} + C^1(y) = \frac{-y}{3(x^2 - y^2)} + C^1(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = \frac{2y^2 - x^2}{3y\,(y^2 - x^2)}$$

Sehingga : $\dfrac{-y}{3\,(x^2 - y^2)} + c^1\,(y) = \dfrac{2y^2 - x^2}{3y(y^2 - x^2)}$

$$C^1(y) = \frac{2y^2 - x^2}{3y(y^2 - x^2)} - \frac{y^2}{3y\,(y^2 - x^2)}$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{3y\,(y^2 - x^2)} = \frac{1}{3y}$$

$$C\,(y) = \frac{1}{3} \ln y + \wp$$

Solusi umum : $F\,(x,y) = \dfrac{1}{3} \ln x + \dfrac{1}{6} \ln | x^2 - y^2 | + \dfrac{1}{3} \ln y + \wp$

$$\frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{6} \ln | x^2 - y^2 | + \frac{1}{3} \ln y + \wp = 0$$

$$x^2 y^2\,(x^2 - y^2) = \wp_1$$

5. Selesaikan persamaan differensial
   $(y - xy^2)dx - (x + x^2 y)\, dy = 0$
   Jawab

$$(y - xy^2)\, dx - (x + x^2y)\, dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M(x,y) = y - xy^2 , & \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2x\,y \\ N(x,y) = -x - x^2y , & \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1 - 2xy \end{array}\right\} \text{PD Non eksak}$$

P.D dapat dirobah menjadi:

$$y(1-xy)\, dx + x(-1 - xy)dy = 0$$

Faktor integral adalah :

$$U(x,y) = \frac{1}{xy[f(x,y) - g(x,y)]}$$

$$= \frac{1}{xy[(1 - xy) - (-1\, xy)]}$$

$$= \frac{1}{2xy}$$

PD Eksak : $\dfrac{y}{2xy}(1 - xy)\, dx + \dfrac{x}{2xy}(-1-xy)\, dy = 0$

$$\frac{1 - xy}{2x}\, dx - \frac{1 + xy}{2y}\, dy = 0$$

Solusi : $F(x,y) = \int M(x,y)\, dx + c(y)$

$$= \int \left(\frac{1}{2x} - \frac{y}{2}\right) dx + c(y)$$

$$= \frac{1}{2} \ln x - \frac{xy}{2} + c(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{2} + C^1(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = -\frac{1 + xy}{2y} = \frac{-1}{2y} - \frac{x}{z}$$

Sehingga : $-\dfrac{x}{2} + C^{1}(y) = -\dfrac{1}{2y} - \dfrac{x}{2}$

$$c(y) = -\frac{1}{2}\ln y + \wp$$

Solusi Umum : $F(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{xy}{2} - \dfrac{1}{2}\ln y + \wp$

$$\frac{1}{2}\ln x - \frac{xy}{2} - \frac{1}{2}\ln y + \wp = 0$$

$$\ln x - xy - \ln y = \wp_{1}$$

F. P.D. LINIER

Bentuk umum : $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ .... (1)

Cara pemecahan :

1.Metode Faktor Integrasi

Robah bentuk umum menjadi :

$$dy + P(x)y = Q(x)dx \qquad .... \qquad (2)$$

$$[P(x)y - Q(x)dx + dy = 0$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x)$$, ini merupakan fungsi dari x saja.

Maka faktor integrasi :

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} \qquad .... \qquad (3)$$

Dari (2) dan (3) diperoleh :

$$e^{\int p(x)dx}dy + p(x)y\, e^{\int p(x)dx}dx = q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx$$

$$d(e^{\int p(x)dx}y) = q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx$$

$$e^{\int p(x)dx}y = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx + c$$

sehingga solusinya :

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx + c]$$

contoh 1

Selesaikan persamaan diferensial :

$$x\frac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2 + 3x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2 \qquad .... \qquad (4)$$

Faktor integrasi :

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$= e^{-\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= e^{-\ln x}$$

$$= \frac{1}{x}$$

Robah (4) menjadi :

$$dy - \frac{1}{x} y\, dx = (x^2 + 3x - 2)dx$$

Kalikan dengan faktor integrasi :

$$\frac{1}{x} dy - \frac{1}{x^2} y dx = (x + 3 - \frac{2}{x})dx$$

$$d(\frac{y}{x}) = (x + 3 - \frac{2}{x})dx$$

$$\frac{y}{x} = \int (x + 3 - \frac{2}{x})dx$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\ln x + c$$

$$y = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x\ln x + cx$$

solusinya :

$$y = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x\ln x + cx$$

2. METODE VARIASI PARAMETER

Kita tahu bahwa solusi umum dari :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \text{ adalah :}$$

$$y = c e^{-\int p(x)dx} \quad , \text{ c : konstanta sebarang.}$$

Selanjutnya kita dapat menebak solusi dari :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \text{ adalah :}$$

$$y(x) = v(x) e^{-\int p(x)dx} \quad , \text{ v(x) fungsi menggantikan c.}$$

Masalahnya adalah akan dicari v(x).

$$y = v(x) e^{-\int p(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = v'(x) e^{-\int p(x)dx} - p(x)v(x) e^{-\int p(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$v'(x) e^{-\int p(x)dx} - p(x)v(x) e^{-\int p(x)dx} + p(x)v(x) e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$v'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$
$$v'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$v(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + c$$

Jadi solusi dari :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \text{ adalah :}$$
$$y = v(x)e^{-\int p(x)dx}$$
$$y = [\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + c]\; e^{-\int p(x)dx}$$

Contoh 2

Selesaikan persamaan diferensial :

$$y\ln y\, dx + (x - \ln y)dy = 0$$

Jawab :

$$y\ln y\, dx = (\ln y - x)dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\ln y - x}{y\ln y}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y\ln y}x$$
$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$$

misalkan :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = 0$$
$$x = c\,e^{-\int \frac{1}{y\ln y}dy}$$
$$= c\,e^{-\ln(\ln y)}$$
$$= c\frac{1}{\ln y}$$

solusi

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y} \text{ adalah :}$$
$$x = v(y)\,\frac{1}{\ln y}$$

$$\frac{dx}{dy} = v'(y)\ \frac{1}{\ln y} + v(y)\ \frac{-1}{(\ln y)^2}\ \frac{1}{y}$$

$$= v'(y)\ \frac{1}{\ln y} - \frac{v(y)}{y(\ln y)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$$

$$v'(y)\ \frac{1}{\ln y} - \frac{v(y)}{y(\ln y)^2} + \frac{1}{y\ln y}v(y)\ \frac{1}{\ln y} = \frac{1}{y}$$

$$v'(y)\ \frac{1}{\ln y} = \frac{1}{y}$$

$$v'(y) = \frac{1}{y}\ \ln y$$

$$v(y) = \int \frac{1}{y} \ln y\ dy$$

$$= \int \ln y\ d(\ln y)$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 y + c$$

solusinya adalah :

$$x = v(y)\frac{1}{\ln y}$$

$$x = \frac{1}{2}(\ln^2 y + c)\frac{1}{\ln y}$$

$$2x \ln y = \ln^2 y + c$$

3. Metode Bernoulli

Misalkan $y = u.v$ dengan u dan v masing-masing fungsi dari x.

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

maka persamaan (1) menjadi :

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uvp(x) = q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v[\frac{du}{dx} + u\ p(x)] = q(x) \qquad \ldots\ldots \qquad (5)$$

u ditentukan sedemikian rupa, sehingga :

$$\frac{du}{dx} + u\ p(x) = 0$$

$$u = e^{-\int p(x)dx}$$

persamaan (5) menjadi :

$$u\frac{dv}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = q(x)\ e^{\int p(x)dx}$$

$$v = \int\ q(x)\ e^{\int p(x)dx} + c$$

sehingga solusi : y = u.v adalah :

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int\ q(x)\ e^{\int p(x)dx} + c]$$

<u>Contoh 3</u>

Selesaikan dengan metode Bernoulli :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec}^2 x - y \cot an\, x$$

<u>Jawab:</u>

$$\frac{dy}{dx} + y \cot an\, x = \operatorname{cosec}^2 x$$

misalkan $y = uv \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

maka $\quad u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uv \text{ cotan } x = \operatorname{cosec}^2 x$

$$u\frac{dv}{dx} + v[\frac{du}{dx} + uv \text{ cotan } x] = \operatorname{cosec}^2 x$$

ambil $\quad \frac{du}{dx} + u \text{ cotan } x = 0$

$$\frac{du}{dx} = -u \text{ cotan } x$$

$$\frac{du}{u} = -\text{cotan } x\, dx$$

$$\ln = -\int \cot an\ x\, dx = -\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= -\ln \sin x$$

$$u = \frac{1}{\sin x}$$

sehingga : $\quad u\frac{dv}{dx} = \operatorname{cosec}^2 x$

$$\frac{1}{\sin x}\,\frac{dv}{dx} = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{cosec} x$$

$$v = \int \operatorname{cosec} x \, dx$$

$$= \int \operatorname{cosec} x \, \frac{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x} \, dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x} \, dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x} \, dx$$

$$= -\int \frac{d(\operatorname{cotan} x + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x}$$

$$v = -\ln(\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x) + c$$

solusi : $y = uv$

$$= -\ln \frac{(\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x) + c}{\sin x}$$

$$y \sin x = -\ln(\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x) + c$$

G. P.D. BERNOULLI

Bentuk umum : $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Cara pemecahan :

1.Mereduksi menjadi persamaan diferensial linier

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$$

misalkan : $$\frac{1}{y^{n-1}} = z = y^{1-n}$$

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}$$

subsitusi ke dalam persamaan diferensial :

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + z\,p(x) = q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n) + z\,p(x) = (1-n)\,q(x)$$

bentuk terakhir ini merupakan persamaan diferensial linier, selanjutnya solusi dapat dicari.

Contoh 1

Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3 y^6$$

Jawab :

$$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{1}{y^5} = x^2$$

Misalkan :

$$\frac{1}{y^5} = z$$

$$-\frac{5}{y^6}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5}\frac{dz}{dx}$$

maka :

$$-\frac{1}{5}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = x^2$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{5}{x}z = -5x^2 \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

$$p(x) = -\frac{5}{x}$$

faktor integrasi :

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{5}{x}dx}$$

$$= e^{-5\ln x}$$

$$= \frac{1}{x^5}$$

persamaan (2) menjadi :

$$-\frac{1}{x^5}\frac{dz}{dx} + \frac{5}{x^6}z = -\frac{5}{x^3}$$

$$\frac{dz}{x^5} - \frac{5z}{x^6}dx = -\frac{5}{x^3}dx$$

$$d(\frac{z}{x^5}) = -\frac{5}{x^3}dx$$

$$\frac{z}{x^5} = \frac{5}{2}x^{-2} + c$$

$$z = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$$

$$y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$$

solusi :

$$y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$$

2.METODE BERNOULLI :

misalkan :

y = uv ; u dan dan v masing-masing fungsi dari x.

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

maka persamaan (1) menjadi :

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uv\,p(x) = q(x)\,u^n v^n$$

$$u\frac{dv}{dx} + v[\frac{du}{dx} + u\,p(x)] = q(x)\,u^n v^n \qquad \ldots.. \qquad (3)$$

u ditentukan sedemikian rupa, sehingga :

$$\frac{du}{dx} + u\,p(x) = 0$$

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}$$

persamaan (3) menjadi :

$$u\frac{dv}{dx} = q(x)\,u^n v^n$$

$$\frac{dv}{v^n} = q(x)\,u^{n-1}dx$$

$$\frac{1}{1-n}v^{1-n} = \int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx + c$$

$$v^{1-n} = (1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx + c$$

sedangkan $y = uv \Rightarrow \quad y^{1-n} = u^{1-n}v^{1-n}$

solusi :

$$y^{1-n} = (1-n)e^{(n-1)\int p(x)dx}[\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx} + c]$$

<u>contoh 2 :</u>

Selesaikan persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$$

Jawab :

Misalkan $y = uv$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

persamaan menjadi :

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uv = u^2v^2(\cos x - \sin x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v[\frac{du}{dx} + u] = \quad u^2v^2(\cos x - \sin x)$$

ambil :

$$\frac{du}{dx} + u = 0$$

$$\frac{du}{u} = -dx$$

maka :

$$u\frac{dv}{dx} = \quad u^2v^2(\cos x - \sin x)$$

$$\frac{dv}{dx} = \quad uv^2(\cos x - \sin x)$$

$$\frac{dv}{dx} = \quad v^2e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$$\frac{dv}{v^2} = \quad e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$$-\frac{1}{v} = \int e^{-x}(\cos x - \sin x)\ dx$$

$$v^{-1} = \int e^{-x}(\cos x - \sin x)\ dx$$

sehingga :

$$v^{-1} = -\frac{1}{2}e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}e^{-x}\cos x + \frac{1}{2}e^{-x}\cos x - \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$$

$$= -e^{-x}\sin x + c$$

sedangkan :

$$y = uv \qquad \Rightarrow \qquad y = u^{-1}v^{-1}$$

$$= e^{x}[-e^{-x}\sin x + c]$$

$$\frac{1}{y} = -\sin x + ce^{x}$$

solusi :

$$y = \frac{1}{ce^{x} - \sin x}$$

catatan * :

$$\int e^{-x}\sin x dx = \int \sin x d(e^{-x})$$

$$= -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x dx$$

$$= -e^{-x}\sin x - \int \cos x d(e^{-x})$$

$$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x dx - e^{-x}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}e^{-x}\cos x$$

$$\int e^{-x}\cos x dx = -\int \cos x d(e^{-x})$$

$$= --e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x dx$$

$$= -e^{-x}\cos x - [-\frac{1}{2}e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}e^{-x}\cos x]$$

$$= -e^{-x}\cos x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin x + \frac{1}{2}e^{-x}\cos x$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x}\cos x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$$

STRATEGI PENGUBAHAN KONSEPSI SIKLUS KEDUA

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE-2

A. BENTUK-BENTUK P.D. ORDE-2

1. $\frac{d^2y}{d^2x} = f(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + c_1$$

$$dy = \left[\int f(x)dx + c_1\right]dx$$

$$y = \int \left[\int f(x)dx + c_1\right]dx + c_2$$

<u>contoh 1</u>

Tentukan solusi umum y'' = k sin x , dan tentukan solusi khusus jika untuk x = 0, y = 0

Jawab :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = k \sin x$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = k \sin x \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int k \sin x dx + c_1$$

$$= -k \cos x + c_1$$

$$dy = [\, k \cos x + c_1 \,]\, dx$$

$$y = \int [-k \cos x + c_1 \,]\, dx + c_2$$

$$y = -k \sin x + c_1 \;\; x + c_2 \qquad \text{(solusi umum)}$$

$$y = -k \sin x + c_1 \;\; x + c_2$$

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow 0 = -k \sin 0 + c_1 + c_2$$

$$c_1 = 0$$

$$y^1 = -k \cos x + c_1 + c_2$$

$$x = 0, y^1 = 0 \Rightarrow 0 = -k \cos 0 + c_1$$

$$c_1 = k$$

: solusi khusus $y = -k \sin x + kx$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, \dfrac{dy}{dx})$

mis. $\dfrac{dy}{dx} = p$, maka $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{dp}{dx}$

sehingga persamaan diferensial menjadi berbentuk :

$\dfrac{dp}{dx} = f(x, p)$ $\Rightarrow$ (persamaan diferensial order 1)

misalkan sulosinya ;

$p = p(x, c_1)$

maka : $\dfrac{dy}{dx} = p(x, c_1)$

$dy = p(x, c_1)\ dx$

$y = \int p(x,c_1)dx + c_2$

contoh 2 .

Tentukan solusi umum dari :

$x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} = a$, $a =$ konstan.

Jawab.

mis. $\dfrac{dy}{dx} = p$, maka $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$

sehingga persamaan diferensial menjadi

$x^2 \dfrac{dp}{dx} + xp = a$ (persamaan diferensial order-1 linier)

$\Leftrightarrow$ $x^2\ dp + xp\ dx = a\ dx$

$x^2\ dp + p\ dx = a\ \dfrac{dx}{x}$

$d(xp) = a\ \dfrac{dx}{x}$

$x\ \dfrac{dy}{dx} = a \ln |x| + c_1$

$xp = a \ln |x| + c_1$

$dy = [a \ln |x| + c_1]\ \dfrac{dx}{x}$

$$y = a\int \ln|x| \ \frac{dx}{x} + c_1 \int \ \frac{dx}{x}$$

$$y = a\int \ln|x| \ d(\ln|x|) + c_1 \ln|x| + c_2$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2} \ a\ln^2|x| + c_1 \ln|x| + c_2$$

solusi umum : $y = \frac{1}{2} \ a\ln^2|x| + c_1 \ \ln|x| + c_2$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$

mis. $\frac{dy}{dx} = p$

kalikan persamaan dengan $f'(p)$, sehngga ruas kiri menjadi

$\frac{d}{dx}$ [g (p)] dan ruas kanan menjadi h (y , y')

Selanjutnya lakukan proses integrasi.

Contoh 3.

Tentukan solusi umum dari $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y$

Jawab :

$$y'' = 2y$$

$$\frac{dp}{dx} = 2y$$

——————— kali 2p

$$2p \ \frac{dp}{dx} = 4yp$$

$$\frac{d}{dx}[p^2] = 4y \ \frac{dy}{dx}$$

$$d(p^2) = 4y \ \frac{dy}{dx} \ dx$$

$$= 4y\,dy$$

$$p^2 = \int \ 4y\,dy = 2y^2 + c_1$$

$$p = \sqrt{2y^2 + c_1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{2y^2 + c_1}} = dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + c_1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}y)}{\sqrt{(\sqrt{2}y)^2+(\sqrt{c_1})^2}} = \int dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\sqrt{2}y+\sqrt{2y^2+c_1}\right| = x + c_2$$

$$\ln \left|\sqrt{2}y+\sqrt{2y^2+c_1}\right| = \sqrt{2}\,x + \ln c_3$$

$$\ln \left|\frac{\sqrt{2}y+\sqrt{2y^2+c_1}}{c_3}\right| = \sqrt{2}\,x$$

$$\frac{\sqrt{2}y+\sqrt{2y^2+c_1}}{c_3} = e^{\sqrt{2}\,x}$$

solusi umum : $\sqrt{2}y+\sqrt{2y^2+c_1} = c_3\, e^{\sqrt{2}\,x}$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y, \dfrac{dy}{dx})$

mis. $\dfrac{dy}{dx} = p$, maka $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\,\dfrac{dp}{dy}$

sehingga persamaan diferensial menjadi

$p\,\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$ $\Rightarrow$ persamaan diferensial order – 1

misalkan solusinya : $p = p\,(y, c_1)$

berarti $\dfrac{dy}{dx} = p\,(y, c_1)$

$$\frac{dy}{p(y,c_1)} = dx$$

sehingga didapat solusi umumnya adalah :

$$x = \int \frac{dy}{p(y,c_1)} + c_2$$

contoh 4.

Tentukan solusi umum dari $y\,y'' + 2(y')^2 - 2yy'' = 0$

Jawab :

mis. $y' = p$

$\Rightarrow$ $y\,p\,\dfrac{dp}{dy} + 2\,p^2 - 2\,y\,p = 0$

$$y\frac{dp}{dy} + 2p - 2y = 0$$

$$\frac{dp}{dy} + \frac{2}{y}p = 2$$ (persamaan diferensial orde-1 linier)

Faktor Integrasi : $e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = y^2$

Sehingga : $y^2\frac{dp}{dy} + 2yp = 2y^2$

$$y^2\,dp + 2y\,p\,dy = 2y^2\,dy$$

$$d(y^2 p) = 2y^2\,dy$$

$$y^2 p = \int 2y^2 dy = \frac{2}{3}y^3 + c_1$$

$$p = \frac{2}{3}y + c_1 y^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}y + c_1 y^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3}y = c_1 y^{-2}$$ (persamaan diferensial Bernoulli)

$\Leftrightarrow \quad y^2\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3}y^3 = c_1$

misal : $z = y^3$. $\quad \frac{dz}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$

sehingga :

$$\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} - \frac{2}{3}z = c_1$$

$$\frac{dz}{dx} - 2z = 3c_1$$ (PD linier order-1)

Faktor integrasi : $e^{\int -2dx} = e^{-2x}$

$$e^{-2x}dz - 2e^{-2x}z\,dx = 3c_1e^{-2x}\,dx$$

$$d(ze^{-2x}) = 3c_1e^{-2x}dx$$

$$ze^{-2x} = -\frac{3}{2}c_1e^{-2x} + c_2$$

$$z = A + Be^{2x}$$

Solusi umum :

$$y^3 = A + Be^{2x}$$

5. $\dfrac{d^2y}{d^2x} = f(\dfrac{dy}{dx})$

misalkan $= p$

sehingga $\dfrac{d^2y}{d^2x} = \dfrac{dp}{dx}$

persamaan berbentuk $\dfrac{dp}{dx} = f(p)$

contoh 5

Temtukan solusi persamaan diferensial dari :

$\dfrac{d^2y}{d^2x} = \dfrac{1}{a}\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx}).^2}$, a = konstanta

Jawab 5

Misal : $\dfrac{dy}{dx} = p$, maka $\dfrac{d^2y}{d^2x} = \dfrac{dp}{dx}$

Sehingga persamaan diferensial menjadi :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}\,dx$$

$$\ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right| = \frac{1}{a}x + c_1$$

$$p+\sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x}{a}+c_1}$$

$$\sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x}{a}+c_1} - p$$

$$1+p^2 = e^{2(\frac{x}{a}+c_1)} - 2p\,e^{\frac{x}{a}+c_1} + p^2$$

$$2p\,e^{\frac{x}{a}+c_1} = e^{2(\frac{x}{a}+c_1)} - 1$$

$$2p = e^{\frac{x}{a}+c_1} - e^{-(\frac{x}{a}+c_1)}$$

$$p = \frac{e^{\frac{x}{a}+c_1} - e^{-(\frac{x}{a}+c_1)}}{2}$$

$$= \sinh\,(\frac{x}{a}+c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{a}+c_1\right)$$

$$dy = \sinh\left(\frac{x}{a}+c_1\right)\ dx$$

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}+c_1\right)+c_2$$

B. P.D. LINIER ORDE-2 KOEFISIEN KONSTANTA

Bentuk umum :

$y'' + ay' + by = f(x)$; a,b konstanta

f(x) kontinu pada domainnya

B.1. P.D. LINIER ORDE-2 KOEFESIEN KONSTANTA HOMOGEN

Bentuk $y'' + ay' + by = 0$, dinamakan persamaan linier order-2 homogen.

Pandang bentuk : $y'' + ay' + by = 0$

Misalkan solusi $y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$

Maka :

$r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$

$(r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$

$(r^2 + ar + b) = 0$ (karena e^{rx} tidak pernah nol)

persamaan $r^2 + ar + b = 0$ dinamakan persamaan karakteristik dari persamaan diferensial. $y'' + ay' + by = 0$.

Tulis $y'' + ay' + by = 0$, a,b konstanta

$[D^2 + aD' + by]y = 0$, $D = \frac{d}{dx}$, $D' = \frac{d^2}{dx^2}$

$[D - r_1]\,[D - r_2]y = 0$ r_1, r_2 = akar persamaan karakteristik.

Misalkan : $u = [D - r_2]$

Maka :

$[D - r_1]u = 0$

$\frac{du}{dx} - r_1 u = 0$ (persamaan order-1, diselesaikan dengan pemisahan peubah)

$\frac{du}{dx} = r_1 u$

$$\frac{du}{u} = r_1 dx$$

$$\ln|u| = r_1\,x + \ln c_1$$

$$u = c_1 e^{r_1 x}$$

Subsitusi ke dalam pemisalan :

$$u = [D - r_2]y$$

$$c_1 e^{r_1 x} = [D - r_2]y$$

$$\frac{du}{dx} - r_2 Y = c_1 e^{r_1 x} \quad \text{(persamaan diferensial linier order-1)}$$

Faktor Integrasi :

$$e^{-\int r_1 dx} = e^{-r_1 x}$$

$$e^{-r_1 x}dy - r_2 e^{-r_1 x} y dx = c_1\, e^{(r_1 - r_1)x}$$

$$d(y e^{-r_1 x}) = c_1\, e^{(r_1 - r_1)x}$$

$$y e^{-r_1 x} = \int c_1\, e^{(r_1 - r_1)x} + c_2$$

Berdasarkan akar persamaan karakteristik r_1, r_2 dapat dikelompokkan dalam 3 kasus :

1. r_1 dan r_2 riel berbeda

   solusinya :

$$e^{-r_1 x}y = c_1 \int e^{(r_1 - r_1)x}dx + c_2$$

$$= \frac{c_1}{r_1 - r_2} e^{(r_1 - r_1)x} + c_2$$

$$= \frac{c_1}{r_1 - r_2} e^{r_1 x} + c_2 e^{r_1 x}$$

$$= k_1 e^{r_1 x} + k_1 e^{r_1 x}$$

2. r_1 dan r_2 riel sama

   solusinya :

$$e^{-r_1 x}y = c_1 \int e^{(r_1 - r_1)x}dx + c_2$$

   misalkan : $r_1 = r_2 = r$

   maka :

$$e^{-r x}y = c_1 \int dx + c_2$$

$$= c_1 x + c_2$$

$$y = (c_1 x + c_2)e^{rx}$$

3. r_1 dan r_2 kompleks

   misalkan : $r_1 = p + qi,\ r_2 = p - qi,\ p,q \in R,\ i = \sqrt{-1}$

karena r_1 dan r_2 berbeda maka :

$$
\begin{aligned}
y &= c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x} \\
&= c_1\, e^{(p+qi)x} + c_2\, e^{(p-qi)\,x} \\
&= e^{\,px}\left[c_1\, e^{qix} + c_2\, e^{-qi\,x}\right]
\end{aligned}
$$

dengan rumus Euler :

$$
\begin{aligned}
e^{qix} &= \cos qx + i \sin qx \\
e^{-qix} &= \cos qx - i \sin qx
\end{aligned}
$$

diperoleh :

$$
\begin{aligned}
y &= e^{\,px}[c_1(\cos qx + i\sin qx) + c_2(\cos qx + i \sin qx)] \\
&= e^{\,px}[(c_1 + c_2)\cos qx + (c_1 - c_2)I \sin x] \\
&= e^{\,px}(\cos qx + k_2 \sin qx)
\end{aligned}
$$

Teorema :

Misalkan persamaan diferensial $y'' + ay' + by = 0$, a,b $\in$ R

Mempunyai persamaan karakteristik : $r^2 + ar + b = 0$

Dengan akar-akarnya adalah : r_1 dan r_2

Maka solusi persamaan diferensial tersebut adalah :

1. Jika $r_1 \neq r_2$, r_1 , r_2 $\in$ R

   Maka :

   $$y = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x}$$

2. Jika $r_1 = r_2 = r$; $r \in R$

   Maka :

   $$y = (c_1 x + c_2)e^{r\,x}$$

3. Jika $r_1 = p + qi$ dan $r_2 = p - q\,I$

   Maka :

   $$y = e^{\,px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$$

contoh 1

Tentukan solusi dari : $y'' - 2y' - 3y = 0$

Jawab :

Persamaan karakteristik : $r^2 - 2r - 3 = 0$

$$
\begin{aligned}
(r-3)(r+1) &= 0 \\
r_1 = 3 \ , \quad r_2 &= -1
\end{aligned}
$$

solusi persamaan diferensial :

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

contoh 2

Selesaikan persamaan diferensial $16y'' - 8y' + y = 0$

Jawab :

Persamaan karakteristik : $16r^2 - 8r + 1 = 0$

$$(4r-1)^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \tfrac{1}{4}$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial :

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{1}{4}x}$$

contoh 3

Selesaikan persamaan diferensial : $y'' - 8y' + 20y = 0$

Jawab :

Persamaan karakteristik : $r^2 - 8r + 20 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-80}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm 4i}{2}$$

$$= 4 \pm 2i$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial :

$$y = e^{4x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

3.2. P.D. LINIER ORDE-2 KOEFESIEN KONSTANTA NON HOMOGEN

Bentuk $y'' + ay' + by = f(x)$, dinamakan persamaan diferensial linier order-2 Non Homogen.

Pandang bentuk $y'' + ay' + by = f(x)$, $f(x) \neq 0$, kontinu pada domainnya.

Telah dipelajari bahwa solusi persamaan diferensial Homogen $y'' + ay' + by = 0$

adalah :

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

dengan : u_1, u_2 berbentuk fungsi eksponen, suku banyak linier, sinus dan kosinus, beserta kombinasinya.

Solusi persamaan diferensial homogen $y'' + ay' + by = 0$, dinamakan solusi homogen atau komplementer dinotasikan :

$$y_h \text{ atau } y_c$$

solusi umum persamaan diferensial non homogen order-2 adalah jumlah dari solusi homogennya dan non homogennya.
Solusi persamaan diferensial non homogen $y'' + ay' + by = f(x)$, dinamakan solusi khusus atau partikulir, dinotasikan :

$$y_k \text{ atau } y_p$$

Perhatikan bahwa y dan y_k adalah solusi $y'' + ay' + by = f(x)$ maka di dapat :

$$y'' + ay' + by = f(x)$$
$$y_k'' + ay_k' + by_k = f(x)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \; -$$
$$(y - y_k)'' + a(y - y_k)' + b(y - y_k) = 0$$

Hal ini berarti :

$y - y_k$ adalah solusi persamaan diferensial homogennya, sehingga :

$$y_h = y - y_k$$

Jadi solusi : $y = y_h - y_k$

Teorema :

Jika persamaan diferensial $y'' + ay' + by = f(x)$, mempunyai solusi homogen y_h, dan solusi non homogen y_k, maka :
Solusi umum dari persamaan diferensial tersebut adalah :

$$y = y_h - y_k$$
$$y = y_c - y_p$$

Cara mencari y_k ada 3 metode :

B.2.a. METODE KOEFISIEN TAK TENTU

Metopde ini hanya dapat digunakan untuk kasus fungsi f memuat bentuk yang serupa dengan solusi homogennya.
Pemilihan bentuk solusi non homogen, harus diatur agar y_k tidak memuat bentuk yang sama dengan y_h, yang akan mengakibatkan ruas kiri persamaan diferensial bernilai nol.
Beberapa patokan memilih y_k :

Bentuk f(x)	y_k yang dicoba
$f(x)=e^{px}$	$y_k = ke^{px}$
$f(x)=x^2$	$y_k = kx^2+lx+m$
$f(x)=\sin x$	$y_k = k\cos x + l\sin x$
$f(x)=\cos x$	$y_k = k\cos x + l\sin x$

Secara umum : jika

f(x) = $e^{ax}\cos bx(p_0x^m+...+p_m)+ e^{ax}\sin bx(q_0x^m+...+q_m)$

maka :

$y_k = e^{ax}\cos bx(k_0x^m+...+k_m)+ e^{ax}\sin bx(l_0x^m+...+l_m)$

Catatan :

a. Solusi non homogen tidak boleh muncul pada solusi homogen nya. Jika hal ini terjadi , kalikan solusi khusus y_k dengan factor x atau x^2, sampai y_k tidak memuat lagi bentuk solusi homogennya.

b. Jika f(x) memuat suku banyak dan salah satu akar karakteristik 0, maka pemilihan y_k tidak menghasilkan bentuk yang sesuai, untuk itu kalikan solusi non homogen yang biasa dengan x.

Contoh Pemilihan y_k :

1. $y'' - 2y' - 3y = 2e^{-x}$, $y_h = c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$, $y_k = kxe^{-x}$

   karena solusi homogennya memuat e^{-x}.

2. $y'' - 2y' + y = 2e^{x}$, $y_h = c_1xe^{x}+c_2e^{x}$, $y_k = kx^2e^{x}$

   karena solusi homogennya memuat e^x dan xe^x

3. $y'' + 4y = 4\cos 2x,$ $\quad y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin x$

   $y_k = x(k\cos 2x + l\sin 2x)$

   Karena solusi homogennya memuat cos 2x.

4. $y'' + 4y = 4x^2$, $y_h = c_1 + c_2e^{-4x}$, $y_k = x(kx^2+lx+m)$

   Karena y_k yang biasa bila digantikan ke persamaan diferensial menghasilkan ruas kiri berbentuk linier dan ruas kanan kuadrat.

Contoh 4

Tentukan solusi dari $y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$

Jawab ;

Solusi homogen : $y'' - y' - 2y = 0$

Persamaan karakteristik : $\quad r^2 - r - 2 = 0$

$$(r-2)(r+1) = 0$$
$$r_1 = 2, r_2 = -1$$

jadi : $y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$

solusi non homogen : $y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$

misal : $y_h = ke^{3x}$

$y'_h = 3ke^{3x}$

$y''_h = 9ke^{3x}$

subsitusi ke dalam persamaan diferensial :

$$y_k'' - y_k' - 2y_k = 2e^{3x}$$
$$9ke^{3x} - 3ke^{3x} - 2ke^{3x} = 2e^{3x}$$
$$4ke^{3x} = 2e^{3x}$$
$$4k = 2$$
$$k = ½$$

jadi : $y_k = \frac{1}{2}e^{3x}$

solusi umum : $y = y_h + y_k$

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$

contoh 5 :

Tentukanlah solusi dari $y'' + 4y' = 4x^2$

Jawab :

Solusi homogen : $y'' + 4y' = 0$

Persamaan karakteristik $r^2 + 4r = 0$

$$r(r+4) = 0$$
$$r_1 = 0, r_2 = -4$$

jadi : $y_h = c_1 + c_2e^{-4x}$

solusi non homogen : $y'' + 4y' = 4x^2$

misal : $y_k = x(kx^2 + lx + m)$

$$y_k' = kx^2 + lx + m + x(2kx + l)$$
$$= 3kx^2 + 2lx + m$$
$$y_k'' = 6kx + 2l$$

Substitusi Kedalam P.D

$Y_k '' + 4\ Y_k' = 4x^2$
$6kx + 2L + 12Kx^2 + 8Lx + 4M = 4X^2$
$12Kx^2 + (6K + 8L)x\ 2L + 4M = 4x^2$

$12K = 4 \qquad \Longrightarrow K = \frac{1}{3}$

$6K + 8L = 0 \qquad L = \frac{-1}{4}$

$2L + 4M = 0 \qquad M = \frac{1}{8}$

$Y_k = x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)$

Solusi Umum :

$$Y_u = Y_h + Y_k$$
$$= C_1 + C_2 e + x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)$$

CONTOH 6

Tentukan Solusi dari : $Y'' - 4Y' + 13Y = 3e^{2x} \operatorname{Sin} 3x$

JAWAB

Solusi Homogen : $Y'' - 4Y' + 13Y = 0$

Persamaan Karakteristik $r^2 - 4r + 13 = 0$

$$r\,1.2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = 2 \pm 3i$$

$Y_h = e^{2x}[C_1 \operatorname{Cos} 3x + C_2 \operatorname{Sin} 3x]^2$

Solusi Non Homogen " $Y'' - 4Y' + 13Y = 3e^{2x} \operatorname{Sin} 3x$

Misalkan :

$$Y_k = x\,[ke^{2x} \operatorname{Sin} 3x + L e^{2x} \operatorname{Cos} 3x]$$
$$= x e^{2x}[K \operatorname{Sin} 3x + L \operatorname{Cos} 3x]$$

Maka :

$Y_k' = [e^{2x} + 2xe^{2x}][K \operatorname{Sin} 3x\ \ L \operatorname{Cos} 3x] +$
$\quad xe^{2x}[3k \operatorname{Cos} 3x - 3L \operatorname{Sin} 3x]$
$= e^{2x}[K \operatorname{Sin} 3x + L \operatorname{Cos} 3x] +$
$\quad xe^{2x}[(2k-3L)\operatorname{Sin} 3x + (3K+2L)\operatorname{Cos} 3x]$

$Y_k'' = 2e^{2x}[K \operatorname{Sin} 3x + L \operatorname{Cos} 3x] + e^{2x}[3K \operatorname{Cos} 3x - 3L \operatorname{Sin} 3x]$
$+ [e^{2x} = 2xe^{2x}][(2k-3L)\operatorname{Sin} 3x + (3k + 2L)\operatorname{Cos} 3x]$
$+ xe^{2x}[(Gk-gL)\operatorname{Cos} 3x - (gk + Gl)\operatorname{Sin} 3x]$
$= e^{2x}[(2k - 3L+2K-3L)\operatorname{Sin} 3x + (2L + 3K + 3K + 2L)\operatorname{Cos} 3x]$
$+ xe^{2x}[(4k-GL-GL-Gk)\operatorname{Sin} 3x + (Gk + 4L + Gk - gL)\operatorname{Cos} 3x]$
$= e^{2x}[(4k-GL)\operatorname{Sin} 3x + (4L + Gk)\operatorname{Cos} 3x]$
$+ xe^{2x}[(-5k-12L)\operatorname{Sin} 3x + (12k-5L)\operatorname{Cos} 3x]$

Substitusi Kedalam P.D

$Y_k'' - 4Y_k' + 13Y_k = 3e^{2x}\operatorname{Sin} 3x$
$e^{2x}[(4K-6L)\operatorname{Sin} 3x + (4L + 6K)\operatorname{Cos} 3x] +$
$xe^{2x}[(-5K-12L)\operatorname{Sin} 3x + (12K - 5L)\operatorname{Cos} 3x] +$
$e^{2x}[-4k \operatorname{Sin} 3x - 4L \operatorname{Cos} 3x] +$
$xe^{2x}[(-8k + 12L)\operatorname{Sin} 3x + (-12k-8L)\operatorname{Cos} 3x] +$
$xe^{2x}[13k \operatorname{Sin} 3x + 13L \operatorname{Cos} 3x] = 3e^{2x}\operatorname{Sin} 3x.$

$e^{2x}[-6L \operatorname{Sin} 3x + 6K \operatorname{Cos} 3x] = 3e^{2x}\operatorname{Sin} 3x$
$-6L = 3 \quad ====> L = -\frac{1}{2}$
$6K = 0 \quad\quad K = 0$

$$Y_K = xe^{2x}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Cos} 3x\right)$$
$$= \frac{-1}{2} xe^{2x}\operatorname{Cos} 3x$$

Solusi Umum

$$Y_u = Y_h + Y_k$$
$$= e^{2x}[c_1 \operatorname{Cos} 3x + (c_2 \operatorname{Sin} 3x] - \frac{1}{2} x e^{2x}\operatorname{Cos} 3x$$
$$= e^{2x}[(c_1 - \frac{1}{2}x)\operatorname{Cos} 3x + c_2 \operatorname{Sin} 3x]$$

B.2.b. METODE VARIASI PARAMETER

Metode koefesien tak tentu mempunyai banyak kelemahan, karena pemakaiannya terbatas pada fungsi-fungsi tertentu saja, dan pemilihan bentuk solusi khususnya harus memperhatikan beberapa syarat.

Gagasan metode variasi parameter ialah mengandaikan bahwa solusi khusus persamaan diferensialnya mempunyai bentuk yang sama dengan solusi homogennya tetapi para meternya bervariasi, berubah menjadi fungsi.

Teorema : Metode Variasi Parameter.

Misalkan $Y_h = C_1 U_1 (X) + C_2 U_2 (x)$ adalah solusi homogen dari $Y'' + aY' + bY = f(x)$; a,b adalah konstanta dan f adalah fungsi kontinu pada daerah definisinya maka

Solusi khususnya berbentuk

$$Y_k = V_1 (x) U_1 (x) + V_2 (x) U_2 (x)$$

Dengan

$$V_1(x) = \int \frac{-U_2 (x) f(x)}{\omega (x)} dx$$

$$V_2(x) = \int \frac{-U_1 (x) f(x)}{\omega (x)} dx$$

$$\omega (x) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ U_1 & U_2 \end{vmatrix}$$

Bukti :

Solusi homogen berbentuk :

$Y_h = C_1 U_1 (x) + C_2 U_2 (x)$; C_1, C_2 para meter disini $U_1 (x)$ dan $U_2 (x)$ berbentuk e^{px}, xc^{px}, $e^{px} \text{Cos } qx$, $e^{px} \text{Sin } qx$

Dalam hal ini, kita mengganti parameter C_1 dan C_2 dengan fungsi $V_1 (x)$ dan $V_2 (x)$, sehingga dipunyai bentuk :

$$Y_k = V_1 (x) U_1 (x) + V_2 (x) U_2 (x)$$

Dengan $V_1 (x)$ dan $V_2 (x)$ adalah fungsi yang akan ditentukan

$$Y_k' = V_1 U_1^1 + U_1 V_1^1 + V_2 U_2^1 + U_2 U_2^1$$
$$= [U_1^1 V_1 + V_2 U_2^1] + [U_1 V_1^1 + U_2 V_2^1]$$

Untuk menentukan V_1 dan V_2 ditetapkan syarat dipilih sehingga tujuan menentukan V_1 dan V_2 tercapai.

Ambil : $U_1 V_1^1 + U_2 V_2^1 = 0$ ....(1)

Sehingga

$$Y_k^1 = V_1 U_1^1 + V_2 U_2^1$$

Turunan kedua diperoleh

$$Yk'' = V_1 U_1^{11} + V_1^1 U_1^1 + V_2^1 U_2^1 + V_2 U_2^{11}$$

Karena Y_k, Y_k^1, Y_k^{11} harus memenuhi P.D Non homogen maka

$$Y_k^{11} + a Y_k^1 + b Y_k = f(x)$$

$$V_1 U_1^{11} + U_1^1 + U_2^{11} V_2 + U_2^1 V_2^1 + a [V_1 U_1^1 + V_2 U_2^1] + b [V_1 U_1 + V_2 U_2] = F(x)$$

$$U_1^1 V_1^1 + U_2^1 V_2^1 + V_1 \underbrace{[U_1^{11} + a\,U_1^1 + b\,U_1]}_{=0} + [\,V_2 \underbrace{[U_2^{11} + a\,U_2^1 + bU_2]}_{=0} = f(x)$$

(Karena U_1 dan U_2 solusi homogen)

Sehingga :

$V_1 U_1 + V_2 U_2^1 = f(x)$ .... (2)

Dari (1) dan (2) memberikan seperti dalam $V_1{}^1$ dan $V_2{}^1$ sebagai berikut :

$U_1 V_1^1 + U_2 V_2^1 = 0$

$U_1^1 V_1^1 + U_2 V_2^1 = f(x)$

Selanjutnya akan diselesaikan seperti dengan cara cramer

$\omega = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ U_1^1 & U_2^1 \end{vmatrix}$ adalah determinan wronski untuk U_1 dan U_2

Dalam hal ini $\omega \neq 0$, karena U_1 dan U_2 bebas linear. Pada kasus ini ω juga merupakan fungsi dari x, yang sering ditulis $\omega = \omega(x)$

Solusi adalah :

$$V_1^1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & U_2 \\ f(x) & U_2^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ U_1^1 & U_2^1 \end{vmatrix}} = \frac{-U_2 f(x)}{\omega(x)}$$

$$V_2^1 = \frac{\begin{vmatrix} U_1 & 0 \\ U_1^1 & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ U_1^1 & U_2^1 \end{vmatrix}} = \frac{U_1 f(x)}{\omega(x)}$$

Sehingga didapat :

$$V_1(x) = \frac{-U_2(x) f(x)}{\omega(x)} dx$$

$$V_2(x) = \frac{U_1(x) f(x)}{\omega(x)} dx$$

Contoh 7

Tentukan solusi dari : $Y^{11} - 2Y^1 + y = 2e^x$

Jawab

Solusi homogen : $Y^{11} - 2y^1 + y = 0$

MILIK PERPUSTAKAAN
UNIV. NEGERI PADANG

Persamaan karakteristik $r^2 - 2r + 1 = 0$

$r_{1,2} = 1$

$Y_h = [\, C_1 + C_2 x \,]\, e^x$

Bentuk solusi non homogen :

$Y_k = V_1 U_1 + V_2 U_2$; $U_1 e^x$ dan $U_2 = x e^x$

Turunan pertama dari U_1 dan U_2 adalah :

$U_1{}^1 = e^x$, $U_2{}^1 e^x + x e^x$

Determinan wronski P.D adalah :

$$\omega = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ U^{11} & U^{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}$$

$$= e\,2x + xe2x - xe^{2x}$$

$$= e^{2x}$$

Menurut metode variasi parameter

$$V_1(x) = \frac{-U_2(x)\ f(x)}{\omega(x)}\,dx = \frac{-xe^x \,.\, 2e^x}{e^x}\,dx$$

$$V_2(x) = \frac{U\,1(x)\,f(x)}{\omega(x)}\,dx = \frac{e^x \,.\, 2\,e^x}{e^{2x}}$$

$$= \int 2\,dx = 2x$$

Jadi solusi non homogen adalah :

$$\begin{aligned} Y_k &= V_1 U_1 + V_2 U_2 \\ &= -x^2 e^x + 2x^2 e^x \\ &= x^2 e^x \end{aligned}$$

Solusi umum : $Y_u = Y_h + Y_k$

$= [\, C_1 + C_2 x \,]\, e^x + x^2 e^x$

Contoh 8

Tentukan solusi dari : $Y'' + Y = \text{Cosec } x$

Jawab

Solusi homogen : $Y'' + Y = 0$

Persamaan karakteristik $r^2 + 1 = 0$

$r_{1,2} = \pm i$

$Y_h = C_1 \text{Cos } x + C_2 \text{Sin } x$

Bentuk solusi non homogen :
$Y_k = V_1 U_1 + V_2 U_2$; $U_1 = \text{Cos } x$ dan $U_2 = \text{Sin } x$

Turunan pertama dari U_1 dan U_2 adalah :
$U_1{}^1 = -\text{ Sin } x$, $U_2{}^1 = \text{Cos } x$

Determinan wronski P.D adalah :

$$\omega = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ U_1{}^1 & U_2{}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Cos } x & \text{Sin } x \\ -\text{Sin } x & \text{Cos } x \end{vmatrix}$$

$$= \text{Cos}^2 x + \text{Sin}^2 x$$
$$= 1$$

Menurut metode variasi parameter

$$V_1(x) = \frac{-U_2(x)\, f(x)}{\omega(x)} d\,x = \frac{-\text{ Sin } x \text{ Coses } x}{1} dx$$

$$= -\int d\,x = -x$$

$$V_2(x) = \frac{U1(x)\, f(x)}{\omega(x)} d\,x = \frac{\text{Cos } x \text{ Coses } x}{1} d\,x$$

$$= \int \text{Cotan } x\, dx = \text{In I Sin } x \text{ I}$$

Jadi solusi non homogen adalah :

$$Y_k = V_1 U_1 + V_2 U_2$$
$$= -x \text{ Cos } x + \text{Sin } x.\ \text{In I Sin } x \text{ I}$$

Solusi umum : $Y_u = Y_n + Y_k$

$$= C_1 \text{ Cos } x + C_2 \text{ Sin } x - x \text{ Cos } x + \text{In I Sin } x \text{ I . Sin } x$$
$$= (C_1 - x) \text{ Cos } x + (C_2 - \text{In I Sin } x \text{ I}) \text{ Sin } x$$

Contoh 9.
Tentukan solusi dari Y " + 2 y ' + 2 y = e^{-x} $\text{Sec}^3 x$

Jawab
Solusi homogen : $Y'' + 2 y^1 + 2 y = 0$

Persamaan karakteristik $r + 2 r + 2 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

$$Yn = e^{-x} [C_1 \text{ Cos } x + C_2 \text{ Sin } x]$$

Bentuk solusi non homogen

$Y_k = V_1\, U_1 + V_2\, U_2$; $U_1 = e^{-x}$ Cos x dan $U_2\, e^{-x}$ Sin x

Turunan pertama dari U_1 dan U_2 adalah :

$U_1^{\,1} = -\, e^{-x}\,\text{Sin x} - e^{-x}\,\text{Cos x},\; U_2^{\,1} = -\, e^{-x}\,\text{Sin} + e^{-x}\,\text{Cos x}$

Determinan wronski P.D adalah :

$$\omega = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ U_1^{\,1} & U_2^{\,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x}\,\text{Cos x} & e^{-x}\,\text{Sin x} \\ -e^{-x}\,\text{Sin x} - e^{-x}\,\text{Cos x} & -e^{-x}\,\text{Sin x} + e^{-x}\,\text{Cos x} \end{vmatrix}$$

$$= (-\text{Cos x Sin x} + \text{Cos } 2x + \text{Sin } 2\,x + \text{Sin x Cos x})\; e - 2x$$
$$= e^{-2x}$$

Menurut metode variasi parameter

$$V_1(x) = \frac{-U_2(x)\, f(x)}{\omega(x)}\, dx = \frac{-e^{-x}\,\text{Sin x}\; e^{-x}\,\text{Sec}^3\, x}{e^{-2x}}\, dx$$

$$= -\frac{\text{Sin x}}{\text{Cos}^3 x}\, dx = \frac{a(\text{Cos x})}{\text{Cos 3 x}} - \frac{1}{2}\;\text{Cos x} = -\frac{1}{2}\,\text{Sec}^2\, x$$

$$V_2(x) = \frac{U_1(x)\, f(x)}{\omega(x)}\, dx = \frac{e^{-x}\,\text{As x}\; e^{-x}\,\text{Sec}^3\, x}{e^{-2x}}\, dx$$

$$= \int \text{Sec}^2\, x\, d\, x = \text{Tan x}$$

Jadi solusi Non homogen adalah :

$$Y_k = V_1\, U_1 + V_2\, U_2$$
$$= -\frac{1}{2}\;\text{Sec}^2\, x \,.\, e^{-x}\,\text{Cos x tan x} \,.\, e^{-x}\,\text{Sin x}$$

$$= e^{-x}\left(-\frac{1}{2\,\text{Cos x}} + \frac{\text{Sin}^2\, x}{\text{Cos x}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\; e - x \left(\frac{1 - 2\,\text{Sin } 2\,x}{\text{Cos x}}\right)$$

$$= -\frac{\text{Cos } 2x}{2\,\text{Cos x}}\, e^{-x}$$

Solusi Umum : $Y_u = Y_h + Y_k$

$$= e^{-x}\,[C_1 \operatorname{Cos} x + C_2 \operatorname{Sin} x] - \frac{\operatorname{Cos} 2x}{2 \operatorname{Cos} x}\, e^{-x}$$

B.2.c. METODE OPERATOR DIFERENSIAL

Metode ini desebut juga dengan metode singkat (short method) notasi $D \equiv d/dx$ sering digunakan dalam P.D karena :

- Dapat menyederhanakan penulisan
- Lebih praktis dan konstruktif dalam penjabarannya.
- Lebih mudah dipelajari dan mudah memahaminya.

Pandang bentuk $Y'' + aY' + bY = f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a\,dy}{dx} + by = f(x)$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{ad}{dx} + b\right] y = f(x)$$

$$(D^2 + aD + b)\,y = f(x),\; D = \frac{d}{dx}$$

$$F(D)\,y = f(x)$$

Sehingga

$$Yk = \frac{1}{F(D)}\, f(x)$$

Cara mencari Yk sebagai berikut

a. Jika F(D) dapat diuraikan atas faktor-faktornya

- Jika $F(D) = D$, Maka $Y = \dfrac{1}{D} f(x) = \dfrac{dx}{d} f(x)$

  $dy = f(x)\,dx \implies y = \int f(x)\,dx$

- Jika $F(D) = D - r$

  Boleh ditulis $(D-r)\,y = f(x)$

  $$\frac{dy}{dx} - ry = f(x) \implies \text{P.D Linear orde 1}$$

  Faktor Integrasi $= C^{-\int r dx} = e^{-rx}$

  SHG :

  $e^{-rx}\,dy - re^{-rx}\,y\,dx = e^{-rx} f(x)\,dx$

  $d(y\,e^{-rx}) = e^{-rx} f(x)\,dx$

$$y = e^{rx} \int e^{-rx} f(x)\, dx$$

- Jika $F(D) = (D - r_1)(D - r_2)$
  Caranya diintegrasikan satu demi Satu

$$y = \frac{1}{(D - r_1)\ (D - r_2)}\ f(x)$$

$$= \frac{1}{(D - r_2)}\ e^{r_1 x} \int e^{-r_1 x} f(x)\, dx$$

$$= e^{r_2 x} \int e^{-r_2 x} [\, e^{r_1 x} \int e^{-r_1 x} f(x)\, dx\,]\, dx$$

$$= e^{r_2 x} \int e^{(r_1 - r_2)x} \int e^{-r_1 x} f(x)\, (dx)^2$$

Contoh 10 : Selesaikan $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 10\, e^{4x}$

Jawab : Solusi homogen : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2\, y = 0$

Pers. Karakteristik $r^2 - 3\, r + 2 = 0$
$r_1 = 2,\ r_2 = 1$

$$Y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

Solusi Non Homogen

$$Y_k = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} 10\, e^{4x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D-1)} 10\, e^{4x}$$

$$= e^{1x} \int e^{(2-1)x} \int e^{-2x} .\ 10\, e^{4x}\, (dx)^2$$
$$= e^x \int e^x \int 10\, e^{2x}\, dx\, dx$$
$$= e^x \int e^x\, 5\, e^{2x}\, dx$$
$$= 5\, ex \int e^{3x}\, dx$$
$$= \frac{5}{3} e^x\ e^{3x} = \frac{5}{3} e^{4x}$$

Solusi umum : $Y_u = Y_h + Y_k$

$$C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \frac{5}{3} e^{4x}$$

b. Jika f (x) mempunyai bentuk-bentuk tertentu

1. $f(x) = e^{px}$

   a. Jika p bukan akar dari F (D) = 0

   $D(e^{px}) = pe^{px}$

   $D^2(e^{px}) = p^2 e^{px}$

   $F(D) = D^2 + aD + b$

   $F(D)\, e^{px} = CD^2 + aD + b\,)\, e^{px}$

   $= p^2 e^{px} + ape^{px} + be^{px}$

   $= (p^2 + ap + b)\, e^{px}$

   F (p)

   $F(D)\, e\, px = F(p)\, e\, px$

1 $\frac{1}{F(P)} e\, px = \frac{1}{F(D)} e\, px$

atau :

$$\boxed{Yk = \frac{1}{F(D)} e^{px} = \frac{1}{F(D)} e^{px}}$$

Contoh 11 : Tentukan Y_k dari $Y^{11} - 3y^1 + 2y = 10\, e^{4x}$

Jawab : $Y_k = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} 10\, e^{4x}$

$$= \frac{10}{4^2 - 3 - 4 + 2} e^{4x} = \frac{10}{16 - 12 + 2} e^{4x} = \frac{5}{3} e\, 4x$$

b). Jika P akar rangkap satu dari F(D) = 0
atau F(D) = (D-p) G (D)

$$\frac{1}{F(D)} e^{px} = \frac{1}{D - p} \cdot \frac{1}{G(D)} e^{px}$$

$$= \frac{1}{D\text{-}p} \frac{1}{G(p)} e^{px}$$

$$= \frac{1}{G(p)} e^{px} \int e^{px} e^{px}\, dx$$

$$= \frac{1}{G(p)} xe^{px}$$

Atau

$$\boxed{Yk = \frac{1}{F(D)} e^{px} = \frac{1}{(D-p)\,G(D)} e^{px} = \frac{1}{G(p)} x\, e^{px}}$$

Contoh 12 : Tentukan Y_k dari $Y^{11} - 3y^{1} + 2y = e^{2x}$

Jawab : $$Y_k = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e\, 2x$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D-1)} e^{2x} = \frac{1}{D-2} \quad \frac{1}{2-1} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{D-2} e^{2x} = e^{2x} \int e^{-2x} e^{2x} dx$$

$$= xe^{2x}$$

Atau : $$Y_k = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D-1)} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2-1} xe^{2X}$$

$$= xe^{2x}$$

b. Jika p akar rangkap dua dari persamaan $F(D) = 0$ atau $F(D) = (D-p)^2$

$$\frac{1}{F(D)} e^{px} = \frac{1}{(D-p)^2} e^{px}$$

$$= \frac{1}{D-p} e^{px} \int e^{px}\ e^{px}\, dx$$

$$= \frac{1}{D-p} x e^{px}$$

$$= e^{px} \int e^{px} x e^{px}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{px}$$

b. Contoh 13 : tentukan Y_k dari $Y^{11} - 2y^1 + y = e^x$

Jawab : $Y_k = \dfrac{1}{D^2 - 2D + 1} e^x$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} e^x$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^x$$

2. $f(x) = \text{Sin}\,(px + q)$ atau $f(x) = \text{Cos}\,(px + q)$
   $D\,(\text{Sin}\,(px + q)) = p\,\text{Cos}\,(px + q)$
   $D^2\,(\text{Sin}\,(px + q)) = -p^2\ \text{Sin}\,(px + q)$
   $D^3\,(\text{Sin}\,(px + q)) = -p^3\ \text{Cos}\,(px + q)$

   $(D^2)^n\,\text{Sin}\,(px + q) = (-p^2)^n\,\text{Sin}\,(px + q)$

   Analog $(D^2)^n\,\text{Cos}\,(px + q) = (-p^2)^n\,\text{Cos}\,(px + q)$

   Sehingga

   $f(D^2)\,\text{Sin}\,(px + q) = f(-p^2)\,\text{Sin}\,(px + q)$
   $f(D^2)\,\text{Cos}\,(px + q) = f(-p^2)\,\text{Cos}\,(px + q)$.

   a). Jika $F(D) = G(D^2)$ dengan $G(-p^2) \neq 0$

   $$\frac{1}{F(D)}\,\text{Sin}\,(px + q) = \frac{1}{G(D^2)}\,\text{Sin}\,(px + q)$$

   $$= \frac{1}{G(-p^2)}\,\text{Sin}\,(px + q)$$

Atau :

$$\boxed{Yk = \frac{1}{F(D)} \text{Sin}\,(px+q) = \frac{1}{G(D^2)} \text{Sin}\,(px+q) = \frac{1}{G(-p^2)}\ \text{Sin}\,(px+q)}$$

Contoh 14. Tentukan Y_k dari $(D^2+5)\,y = \text{Sin}\,2x$

Jawab : $Y_k = \dfrac{1}{D^2+5}\ \text{Sin}\,2x$

$$= \frac{1}{-4+5}\ \text{Sin}\,2x = \text{Sin}\,2x$$

Analog :

$$\boxed{Y_k = \frac{1}{F(D)} \text{Cos}\,(px+q) = \frac{1}{G(D^2)} \text{Cos}\,(px+q) = \frac{1}{D(-p^2)} \text{Cos}\,(px+q)}$$

b. Jika $F(D) = G(D^2)$, Dengan $G(-p^2) = 0$
atau $F(D) = D^2 + p^2$

$$\frac{1}{D^2+p^2}\ \text{Sin}\,(px+q) = \text{I m}\ \left\{\frac{1}{D^2+p^2}\, e^{i(px+q)}\right\}$$

$$= \text{I m}\ \left\{ e^{iq}\ \frac{1}{(D-p\,i)\,(D+pi)}\ e^{ipx}\right\}$$

$$\frac{1}{D^2+p^2}\ \text{Sin}\,(px+q) = \text{I m}\ \left\{ e^{iq}\ \frac{1}{D-p\,i}\ \frac{e^{ipx}}{2\,p\,i}\right\}$$

$$= \text{I m}\left\{\frac{e^{iq}}{2\,p\,i}\, e^{ipx} \int e^{-px} e^{ipx}\, dx\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\frac{e^{iq}}{2pi} x\, e^{ipx}\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\frac{x}{2pi} x\, e^{i(px+q)}\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\frac{x}{2pi}[\mathrm{Cos}\,(px+q) + i\,\mathrm{Sin}\,(px+q)]\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\frac{x}{2p}[\quad \mathrm{Cos}\,(px+q) + \mathrm{Sin}\,(px+q)]\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\frac{x}{2p}[-i\,\mathrm{Cos}\,(px+q) + \mathrm{Sin}\,(px+q)]\right\}$$

$$= \frac{-x}{2p}\mathrm{Cos}\,(px+q)$$

Jadi :

$$\boxed{Yk = \frac{1}{F(D)}\mathrm{Sin}\,(px+q) = \frac{1}{D^2+p^2}\,\mathrm{Sin}\,(px+q) = \frac{-x}{2p}\mathrm{Cos}\,(px+q)}$$

Analog :

$$\boxed{Yk = \frac{1}{F(D)}\mathrm{Cos}\,(px+q) = \frac{1}{D^2+p^2}\,\mathrm{Cos}\,(px+q) = \frac{-x}{2p}\mathrm{Sin}\,(px+q)}$$

Contoh 15 Tentukan Y_k dari $(D^2 + 9)\,y = \cos 3x$

$$\text{Jawab : } Y_k = \frac{1}{D^2+9}\cos 3x$$

$$= \frac{x}{6}\sin 3x$$

c. Jika $F(D) = D^2 + aD + b$

$$\frac{1}{D^2+aD+b}\sin(px+q) = \frac{1}{-p+aD+b}\sin(px+q)$$

$$= \frac{aD-(b-p^2)}{[aD+(b-p^2)][aD-(b-p^2)]}\sin(px+q)$$

dst

Cara yang sama juga dapat dilakukan untuk $\cos(px+q)$

Contoh 16 : Tentukan Y_k dari $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 2\sin 3x$

$$\text{Jawab : } Y_k = \frac{1}{D^2-4D+13}\,2\sin 3x$$

$$= \frac{1}{-9-4D+13}\,2\sin 3x$$

$$= \frac{1}{4(1-D)}\,2\sin 3x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1+D}{1-D^2}\sin 3x$$

$$= \frac{1}{2}\;\frac{1+D}{1-(-9)}\sin 3x$$

$$= \frac{1}{20} (1 + D) \operatorname{Sin} 3x$$

$$= \frac{1}{20} (\operatorname{Sin} 3x + 3 \operatorname{Cos} 3x)$$

3. $f(x) = e^{ax} . v(x)$

Misalkan $Z = e^{ax} u$

Maka $DZ = e^{ax} Du + a e^{ax} = e^{ax} (Du + au)$

$= e^{ax} (D + a) u$

$= e^{ax} [D^2 + 2aD + a^2] u$

$= e^{ax} (D + a)^2 u$

$D^r Z = e^{ax} (D + a)^r u$

Sehingga

$$F(D) Z = \sum_r P_r Z = \sum_r p_r e^{ax} (D + a)^r u$$

$$F(D) e^{ax} u = e^{ax} F(D + a) u$$

Misalkan $V = F(D + a) u$

Maka :

$$U = \frac{1}{F(D + a)} V$$

$$F(D) e^{ax} \frac{1}{F(D+a)} V = e^{ax} V$$

$$e^{ax} \frac{1}{F(D + a)} V = \frac{1}{F(D)} e^{ax} . V$$

Atau :

$$\boxed{Y_k = \frac{1}{F(D)} e^{ax} . V = e^{ax} \frac{1}{F(D + a)} . V}$$

Contoh 17 : Tentukan Y_k dari $(D^2 - 6D + 5) y = e^{2x} \operatorname{Sin} 3x$

Jawab : $Y_k = \dfrac{1}{D^2 - 6D + 5} e^{2x} \operatorname{Sin} 3x$

$$= e^{2x} \frac{1}{(D + 2)^2 - 6(D + 2) + 5} \operatorname{Sin} 3x$$

$$= e^{2x} \frac{1}{D^2 - 2D - 3} \text{ Sin } 3x$$

$$= e^{2x} \frac{1}{-9 - 2D - 3} \text{Sin } 3x$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{-1}{2} \frac{1}{D+6} \text{ Sin } 3x$$

$$= -\frac{1}{2} e^{2x} \frac{D-6}{D^2-36} \text{ Sin } 3x$$

$$= -\frac{1}{2} e^{2x} \frac{D-6}{-9-36} \text{ Sin } 3x$$

$$= \frac{e^{2x}}{90} (D-6) \text{ Sin } 3x$$

$$= \frac{e^{2x}}{90} (3 \text{ Cos } 3x - 6 \text{ Sin } 3x)$$

$$= \frac{e^{2x}}{30} (\text{Cos } 3x - 2 \text{ Sin } 3x)$$

4. $f(x) = x \cdot v(x)$

Misalkan $Z = x u$

Maka $DZ = U + DU$

$$D^2 Z = DU + DU + D^2U = xD^2 U + DU$$

$$= x D^2U + \left(\frac{d}{dp} D^2\right)^{11}$$

$$D^rZ = xD^rU + rD^{r-1} U = x D^r U + \left(\frac{d}{dD} D^r\right) U$$

Sehingga :

$$F(D) Z = \sum_r P_r D^r Z = \sum_r P_r [x D^r U + \left(\frac{d}{dD} D^r\right) U$$

$$= x \sum_r Pr\ D^r U + \sum_r Pr\left[\frac{d}{dD} D^r\right] U$$

$F(D) \times U = X\, F(D)\, U + F^1(D)\, U$

Misalkan $V = F(D)\, U$

Maka $U = \dfrac{1}{F(D)}$

$$F(D) \times \frac{V}{F(D)} = x V + \frac{F^1(D)}{F(D)}$$

$$x V = F(D) \times \frac{V}{F(D)} - \frac{F^1(D)}{F(D)} V$$

$$\frac{1}{F(D)} X . V = X \frac{V}{F(D)} - \frac{F^1(D)}{\{F(D)\}^2}$$

Atau :

$$\boxed{Y_k = \frac{1}{F(D)} X . V = X \frac{V}{F(D)} - \frac{F^1(D)}{\{F(D)\}^2} V}$$

Contoh 18 : Tentukan jawab khusus dari :
$(D^2 + 2D + 3)\, y = 8 \times \operatorname{Sin} x$

Jawab :

$$Y_k = \frac{1}{D^2 + 2D + 3} 8 \times \operatorname{Sin} x$$

$$= 8 \left\{ X \frac{1}{D^2 + 2D + 3} \operatorname{Sin} X - \frac{2D + 2}{(D^2 + 2D + 3)^2} \operatorname{Sin} x \right\}$$

$$= 8\left\{x \frac{1}{-1 + 2D + 3} \text{Sin } x - \frac{2D + 2}{(-1 + 2D + 3)^2} \text{Sin } x\right\}$$

$$= 8\left\{\frac{x}{2} \frac{1}{D + 1} \text{Sin } x - \frac{2D + 2}{(2D + 2)^2} \text{Sin } x\right\}$$

$$= 8\left\{\frac{x}{2} \frac{D - 1}{D^2 - 1} \text{Sin } x - \frac{1}{2(D + 1)} \text{Sin } x\right\}$$

$$= 8\left\{\frac{x}{2} \frac{D - 1}{-1 - 1} \text{Sin } x - \frac{D - 1}{2(D^2 - 1)} \text{Sin } x\right\}$$

$$= 8\left\{\frac{-x}{4} (D - 1) \text{Sin } x - \frac{D - 1}{2(-1 - 1)} \text{Sin } x\right\}$$

$$= 8\left\{\frac{-x}{4} (\text{Cos } x - \text{Sin } x) + \frac{1}{4}(D - 1) \text{Sin } x\right\}$$

$$= 8\left\{\frac{-x}{4}(\text{Cos } x - \text{Sin } x) + \frac{1}{4}(\text{Cos } x - \text{Sin } x)\right\}$$

$$= 2(x - 1)(\text{Sin } x - \text{Cos } x)$$

5. f (x) Berbentuk polinomial

Untuk mencari solusi khusus, uraikan $\frac{1}{F(D)}$ menjadi deret mac laurin

Jika $\frac{1}{F(D)} = G(D)$

Deret Maclaurin :

$$G(D) = G(D) + \frac{D}{1!} G^1(D) + \frac{D^2}{2!} G^{11}(D) + \ldots + \frac{D^m}{m!} G(D)$$

Contoh 19 : Tentukan Y_k dari $(D^2 - 1)\, y = X^2$

Jawab : $G(D) = \dfrac{1}{D^2 - 1} = (D^2 - 1)^{-1} \implies G(0) = -1$

$$G^1(D) = -(D^2 - 1)^{-2} . 2D$$
$$= -2D\,(D^2 - 1)^{-2} \implies G^1(0) = 0$$
$$G^{11}(D) = -2\,(D^2 - 1)^{-2} - 2D(-2)(D^2 - 1)^{-3} . 2D$$
$$= -2\,(D^2 - 1)^{-2} + 8r^2 (D^2 - 1)^{-3}$$
$$\implies G^{11}(0) = -2$$

Deret mac laurin :

$$G(D) = G(0) + \frac{D}{1!} G^1(0) + \frac{D^2}{2!} G^{11}(0) + \ldots\ldots + \frac{D^m}{m!} G^{(m)}(0)$$

$$\frac{1}{D^2 - 1} = -1 + 0 - \frac{2}{2!} D^2 + \ldots\ldots$$

$$= -1 - D^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Maka :

$$Y_k = \frac{1}{D^2 - 1} x^2$$
$$= (-1 - D^2 + \ldots\ldots)\; x^2$$
$$= -x^2 - 2$$

<u>Atau dengan cara berikut ini</u>

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{D^2 - 1} = \frac{-1}{1 - D^2}$$

$$= -\{1 + D^2 + D^4 + D^6 + \ldots\ldots\}$$
$$= -1 - D^2 - D^4 - D^6 - \ldots\ldots\}$$

Sehingga :

$$Y_k = \frac{1}{D^2 - 1} x^2$$
$$= (-1 - D^2 - D^4 - D^6 - \ldots\ldots)\, x^2$$
$$= -x^2 - 2$$

Contoh 20 : Tentukan jawab khusus $(D^2 - 11D + 30)\,y = 54\,e^{3x}(x^2 + x - 2)$
Jawab :

$$Y_k = \frac{1}{D^2 - 11\,D + 30}\,54\,e^{3x}(x^2 + x - 2)$$

$$= 54\,e^{3x}\,\frac{1}{D^2 - 5D + 6}\,(x^2 + x - 2)$$

$$G(D) = (D^2 - 5\,D + 6)^{-1} \implies G(0) = \frac{1}{6}$$

$$G^1(D) = -(D^2 - 5D + 6)^{-2}\,(2D - 5) \quad \implies G^1(0) = \frac{5}{36}$$

$$G^{11}(D) = 2(D^2 - 5D + 6)^{-3}\,(2D - 5)^2 - (D^2 - 5D + 6)^{-2}.2$$

$$\implies G^{11}(0) = \frac{38}{216}$$

$$\frac{1}{D^2 - 5\,D + 6} = \frac{1}{6} + \frac{5}{36}D\,\frac{19}{216}D^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_k = 54\,e^{3x}\left\{\frac{1}{6} + \frac{5}{36}D + \frac{14}{216}D^2 + \ldots\ldots\ldots\right\}(x^2 + x - 2)$$

$$= 54\;e^{3x}\left\{\frac{1}{6}(x^2 + x - 2) + \frac{5}{36}(2x + 1) + \frac{38}{216}\right\}$$

$$= e^{3x}\,(9\,x^2 + 24\,x - 1)$$

Lampiran 10

ANGKET PENELITIAN TINDAKAN 'MODEL BELAJAR KONSTRUKTIVIS'

Petunjuk : Berilah tanda silang (x) pada huruf jawaban pilihan anda.

1. Penghargaan yang diberikan oleh dosen terhadap ide atau gagasan yang dikemukakan oleh mahasiswa dalam proses pembelajaran
   a. sangat dihargai
   b. dihargai
   c. cukup dihargai
   d. tidak dihargai
   e. sangat tidak dihargai

2. Apakah ide atau gagasan yang dikemukakan mahasiswa (anda maupun teman anda) diperhatikan atau digunakan oleh dosen sebagai acuan dalam proses pembelajaran ?
   a. Ya, selalu
   b. Ya, sering
   c. Ya, kadang-kadang
   d. jarang
   e. tidak pernah

3. Dengan model belajar konstruktivis yang diterapkan dalam mata kuliah kalkulus III ini, maka kesempatan untuk saling tukar pendapat dengan teman sejawat tentang materi perkuliahan yang sedang anda pelajari menjadi
   a. sangat banyak
   b. banyak
   c. cukup
   d. kurang
   e. sangat kurang

4. Dengan diterapkannya model belajar konstruktivis dalam semester ini, maka minat dan rasa ingin tahu anda dalam belajar kalkulus dibandingkan masa sebelumnya
   a. sangat lebih tinggi
   b. lebih tinggi
   c. sama saja
   d. lebih rendah
   e. sangat lebih rendah

5. Dengan diterapkannya model belajar konstruktivis selama semester ini, maka motivasi belajar anda dalam belajar kalkulus III menjadi
   a. sangat tinggi
   b. tinggi
   c. biasa saja
   d. rendah
   e. sangat rendah

6. Melalui model belajar konstruktivis seperti yang anda alami selama semester ini, maka konsep-konsep dan prinsip-prinsip kalkulus III dapat anda pahami dengan
   a. sangat lebih mudah
   b. lebih mudah
   c. biasa saja
   d. lebih sulit
   e. sangat lebih sulit

7. Melalui model belajar konstruktivis seperti yang telah anda alami selama semester ini, maka konsep-konsep dan prinsip-prinsip kalkulus III yang sudah anda pahami dan anda kuasai menjadi
   a. sangat lebih tahan lama
   b. lebih tahan lama
   c. biasa saja
   d. lebih cepat dilupakan
   e. sangat lebih cepat dilupakan

8. Apakah anda senang jika diberi kesempatan untuk merumuskan sendiri konsep-konsep dan prinsip-prinsip kalkulus III yang sedang anda pelajari ?
   a. sangat senang
   b. senang
   c. cukup senang
   d. tidak senang
   e. sangat tidak senang

9. Melalui model belajar konstruktivis seperti yang telah anda alami dalam semester ini, dalam belajar apakah anda rasakan lebih bermakna ?
   a. ya, sangat bermakna
   b. ya, bermakna
   c. biasa saja
   d. kurang bermakna
   e. tidak bermakna

10. Model belajar konstruktivis dalam kalkulus III seperti yang anda alami selama semester ini, memberi peluang dan iklim yang subur bagi tumbuh dan berkembangnya kreatifitas mahasiswa. Apakah anda setuju dengan pernyataan tersebut ?
    a. sangat setuju
    b. setuju
    c. netral
    d. tidak setuju
    e. sangat tidak setuju

11. Dalam belajar kalkulus III selama penelitian ini dibandingkan dengan sebelum penelitian diadakan, aktifitas anda di kelas anda rasakan
    a. jauh lebih aktif setelah diadakan penelitian
    b. lebih aktif setelah diadakan penelitian
    c. sama saja
    d. lebih aktif sebelum diadakan penelitian
    e. jauh lebih aktif sebelum diadakan penelitian