


MAKALAH

TINJAUAN TENTANG PERSAMAAN DIFFERENSIAL DAN PENERAPANNYA DALAM FISIKA



MILIK PERPUSTAKAAN UNIV. NEGERI PADANG
DITERIMA TGL. : 27-12-2001
SUMBER / MARGA : <i>Hodiah</i>
KOLEKSI : <i>K</i>
NO. INVENTARIS : <i>703/K/2001-t1/2</i>
KLASIFIKASI : <i>515.3 ASR-t</i>

Drs. A SRIZAL, M.Si

Disampaikan Dalam Lokakarya Analisis Matematika Terhadap Penguasaan Fisika
Untuk Meningkatkan Perkuliahan di Jurusan Fisika FMIPA Universitas Negeri Padang
pada Tanggal (8-9) dan (15-16) September 2000.

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2000

MILIK PERPUSTAKAAN
UNIV. NEGERI PADANG

TINJAUAN TENTANG PERSAMAAN DIFFERENSIAL DAN PENERAPANNYA DALAM FISIKA

Drs. Asrizal, M.Si **

A. Pendahuluan

Hukum alam sebagian besar ditulis dalam bahasa matematika. Begitu banyak fenomena yang menarik menyangkut tentang perubahan dilukiskan sangat baik oleh persamaan yang menghubungkan perubahan antara besaran. Suatu persamaan yang menyangkut turunan satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan differensial. Ditinjau dari segi fungsi, persamaan differensial dapat didefinisikan sebagai suatu persamaan yang menyangkut suatu fungsi yang tidak diketahui dari satu atau lebih turunannya.

Persamaan differensial tidak hanya penting dalam bidang matematika murni saja, tetapi terjadi dalam hubungan dengan banyak problem yang ditemukan dalam variasi cabang ilmu pengetahuan seperti fisika, rekayasa (Engineering), sosial dan sebagainya. Secara historis persamaan differensial biasa dibuat untuk keperluan menjelaskan masalah gerak dalam fisika. Begitulah mula-mula bidang penerapannya adalah fisika yang diikuti oleh ilmu rekayasa. Pada masa sekarang persamaan differensial sudah merasuk ke bidang ilmu hayati dan sosial dan sebagainya. Persamaan differensial sangat penting di dalam fisika dan rekayasa, sebab banyak hukum-hukum dan relasi-relasi fisik dapat dilukiskan dengan baik secara matematis dalam bentuk persamaan differensial. Beberapa contoh problem yang ditemukan antara lain :

1. Penentuan gerak dari suatu projektil, roket, satelit, atau planet.
2. Penentuan vibrasi dari suatu kawat atau membran.
3. Penentuan muatan atau kuat arus dalam suatu rangkaian listrik.

4. Studi tentang laju peluruhan dari suatu zat radioaktif atau laju pertumbuhan dari suatu populasi.
5. Studi tentang reaksi kimia.
6. Penentuan kurva yang mempunyai sifat geometri tertentu.

Masing-masing problem yang telah dikemukakan merupakan hukum ilmiah tertentu. Hukum-hukum ini menyangkut variasi laju perubahan dari satu atau lebih kuantitas terhadap kuantitas yang lain. Dalam formulasi matematika dari masing-masing variasi tersebut, variasi laju perubahan diekspresikan dengan variasi turunan dan hukum-hukum ilmiah menjadi persamaan yang dikenal dengan persamaan differensial.

Disadari dalam ilmu fisika begitu banyak kuantitas yang berubah sebagai akibat perubahan kuantitas yang lain. Beberapa contoh diantaranya adalah : perubahan posisi dan kecepatan terhadap waktu, perubahan muatan dan arus pada pengisian dan pengosongan kapasitor, perubahan jumlah inti yang meluruh terhadap waktu, simpangan pegas atau ayunan bandul terhadap waktu, pergeseran gelombang terhadap posisi dan waktu dan sebagainya. Persamaan differensial menjadi sangat penting untuk melukiskan perubahan kuantitas terhadap kuantitas yang lain. Karena itu studi dari persamaan differensial mempunyai dua tujuan utama yaitu : 1. untuk menemukan persamaan differensial yang melukiskan suatu situasi ilmiah tertentu, 2. untuk menemukan solusi pendekatan dari persamaan differensial tersebut.

Secara umum persamaan differensial dapat dibagi atas dua bagian yaitu persamaan differensial biasa (ordinary differential equation) dan persamaan differensial parsial (partial differential equation). Suatu persamaan differensial yang menyangkut turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat terhadap suatu variabel bebas disebut persamaan differensial biasa. Kata biasa membedakan persamaan semacam itu dengan persamaan differensial parsial. Disisi lain, suatu persamaan differensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas disebut suatu persamaan differensial parsial.

Persamaan differensial biasa dapat pula dibedakan atas dua bagian yaitu persamaan linear dan tak linear (non linear). Suatu persamaan differensial berorde n jika turunan ke n fungsi y terhadap x merupakan turunan tertinggi didalam persamaan tersebut. Secara umum persamaan differensial biasa linear orde n dalam variabel terikat y dan variabel bebas x dapat diekspresikan dalam bentuk :

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (1)$$

Suatu persamaan differensial orde pertama mengandung y^1 , dan mungkin mengandung y serta fungsi dari x , sedangkan persamaan differensial orde kedua mengandung y^{11} .

Sebagai contoh dari persamaan differensial linear ini adalah :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (2)$$

Persamaan lain dikenal dengan persamaan differensial tak linear. Sebagai contoh dari persamaan ini adalah :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0 \quad (3)$$

Sifat tak linear dari variabel terikat y terletak pada bentuk $6y^2$. Ditinjau dari segi ordenya, persamaan differensial biasa dapat pula dibedakan atas persamaan differensial orde pertama, orde kedua, orde ketiga dan seterusnya. Sasaran utama didalam persamaan differensial dan penerapannya adalah menemukan semua solusi persamaan tersebut dan menyelidiki sifat-sifatnya.

B. Persamaan Differensial Orde Pertama

Persamaan yang paling sederhana bentuknya adalah persamaan differensial orde pertama sebab hanya melibatkan turunan pertama fungsi yang belum diketahui. Sebagai contoh dari persamaan ini adalah :

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (4)$$

Berbagai variasi dari persamaan differensial orde pertama ditemukan baik dalam matematika, fisika, rekayasa dan berbagai cabang ilmu lainnya. Untuk menyelesaikan persamaan differensial tersebut diperlukan metoda tertentu yang lebih sesuai dengan bentuk persamaan. Ada beberapa metoda yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan differensial orde pertama yaitu : solusi dengan integrasi langsung, pemisahan persamaan, persamaan linear tingkat I umum, persamaan Bernoulli, persamaan eksak dan faktor integrasi serta metoda substitusi atau perubahan variabel.

1. Solusi dengan Integrasi Langsung

Persamaan differensial orde I $y' = f(x,y)$ yang mempunyai bentuk sederhana jika fungsi f adalah variabel bebas dari variabel terikat y dapat ditulis seperti :

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (5)$$

Dalam kasus khusus solusi umum dari persamaan dapat ditentukan dengan mengintegrasikan secara langsung persamaan pada kedua sisi sehingga diperoleh hasil :

$$y = \int f(x) dx + C = G(x) + C \quad (6)$$

Disini C merupakan suatu konstanta integrasi yang nilainya dapat ditentukan dari kondisi awal yang ditetapkan.

2. Pemisahan Persamaan

Persamaan differensial orde I disebut separabel bila $H(x,y)$ dapat ditulis sebagai perkalian dari suatu fungsi x dan fungsi y . Dalam kasus ini variabel x dan y dapat dipisahkan pada sisi yang berlawanan dari suatu persamaan dan dapat dituliskan seperti $f(y) dy = f(x) dx$. Penyelesaian dari persamaan differensial tipe khusus ini adalah dengan mengintegrasikan kedua sisi dari persamaan.

$$\int f(y) dy = \int f(x) dx \text{ atau } F(y) = G(x) + C \quad (7)$$

3. Persamaan Linear Orde I Umum

Suatu persamaan differensial biasa orde pertama adalah linear dalam variabel terikat y dan variabel bebas x jika ditulis dalam bentuk :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (8)$$

Disini koefisien fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah kontinu. Teknik standar untuk menyelesaikan persamaan ini adalah :

$$y = e^{-I} \int Q e^I dx + C e^{-I}, \quad \text{dimana } I = \int P dx \quad (9)$$

4. Persamaan Bernoulli

Ada tipe khusus dari persamaan differensial yang dapat diturunkan menjadi suatu persamaan linear dengan suatu pendekatan transformasi. Ini disebut persamaan Bernoulli yang ditulis seperti :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (10)$$

Cara penyelesaian dari persamaan adalah dengan mereduksi persamaan Bernoulli kedalam bentuk persamaan linear umum :

$$P_1(x) = (1 - n) P(x) \quad (11a)$$

$$Q_1(x) = (1 - n) Q(x) \quad (11b)$$

$$\text{dimana } v = y^{1-n}$$

Melalui transformasi ini , persamaan yang tidak linear dapat dituliskan kedalam bentuk linear seperti :

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x) \quad (12)$$

Dengan demikian persamaan ini dapat diselesaikan menggunakan persamaan linear umum dan pada hasil akhir bentuk v disubstitusikan kembali kedalam bentuk y .

5. Persamaan Eksak dan Faktor Integrasi

Pada beberapa persamaan differensial orde I ditemukan pola persamaan seperti :

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \quad (13)$$

Sebagai contoh dari persamaan adalah :

$$y dx + 2x dy = 0 \quad (14)$$

Disini M dan N mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada semua titik (x,y).

Persamaan dikatakan eksak jika turunan parsial pertama M terhadap y sama dengan turunan parsial pertama N terhadap x.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad (15)$$

Solusi dari persamaan differensial eksak diberikan dalam bentuk umum :

$$F(x,y) = \int M(x,y) \partial x + \phi(y) \quad (16)$$

Fungsi sembarang dari y atau $\phi(y)$ didapat dengan melakukan differensiasi fungsi F(x,y) terhadap y sehingga :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) \partial x + \frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) \quad (17a)$$

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) \partial x \quad (17b)$$

Dengan mengintegalkan fungsi $\phi(y)$ terhadap y, maka fungsi sembarang dapat ditentukan sehingga persamaan differensial eksak dapat diselesaikan.

Apabila persamaan (13) tidak eksak , maka persamaan harus dikalikan dengan sesuatu $\mu(x,y)$ sehingga persamaan differensial menjadi eksak. Faktor pengali $\mu(x,y)$ disebut faktor integrasi.

$$\mu(x,y) M(x,y) dx + \mu(x,y) N(x,y) dy = 0 \quad (18)$$

Dengan mengalikan persamaan dengan faktor integrasi $\mu(x,y)$ maka persamaan menjadi persamaan eksak sehingga dapat diselesaikan seperti penyelesaian persamaan eksak. Nilai dari faktor integrasi $\mu(x,y)$ dapat ditentukan :

Jika $U = \frac{1}{N(x,y)} \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right]$, hanya tergantung kepada x maka (19a)

$$\mu(x) = e^{\int U dx}$$

Jika $V = \frac{1}{M(x,y)} \left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right]$, hanya tergantung kepada y maka (19b)

$$\mu(y) = e^{\int V dy}$$

6. Metoda Substitusi

Metoda substitusi kadang-kadang dapat digunakan untuk menstransformasi suatu bentuk persamaan differensial yang diberikan kedalam suatu bentuk yang telah diketahui pemecahannya. Sebagai ilustrasi persamaan differensial dinyatakan dalam bentuk :

$$\frac{dy}{dx} = F(ax + by + c) \quad (20)$$

Persamaan dapat ditransformasikan kedalam suatu pemisahan persamaan dengan melakukan substitusi $v = (ax + by + c)$

C. Aplikasi Persamaan Differensial Orde Pertama

Persamaan differensial sangat penting didalam fisika dan rekayasa, sebab banyak hukum-hukum fisik dan relasi-relasi fisik muncul secara matematis dalam bentuk persamaan differensial. Gambaran langkah-langkah untuk memperoleh gagasan tentang sifat ilmiah dan tujuan dari persamaan differensial berikut terapannya. Secara umum terdapat empat langkah yaitu : Langkah pertama adalah melukiskan situasi fisika (sistem fisik). Langkah kedua pemodelan matematis yaitu menterjemahkan informasi dan data fisik kedalam bentuk matematis, yaitu suatu model matematis (suatu persamaan differensial) bagi proses fisik tersebut. Transisi dari masalah fisis ke model matematisnya disebut pemodelan. Hal ini sangat berguna bagi insinyur dan fisikawan. Langkah ketiga

adalah penentuan solusi yaitu menentukan jawabannya melalui pemilihan dan penerapan metode matematis yang cocok, dan banyak hal mengerjakan perhitungan numerik dengan komputer. Langkah keempat adalah penafsiran, yaitu memahami makna dan implikasi jawaban matematis bagi masalah semula dalam pengertian fisika atau dalam bidang apapun masalah tersebut berasal.

Solusi persamaan differensial dapat dinyatakan dalam bentuk solusi umum dan solusi khusus. Suatu persamaan differensial orde pertama mungkin memiliki lebih dari satu solusi (dan kenyataannya memang demikian), bahkan tak hingga banyaknya solusi yang dapat dinyatakan cukup dengan satu rumus yang mengandung sembarang konstanta c . Sudah menjadi kelaziman untuk menyebut fungsi semacam itu, yang mengandung konstanta sembarang sebagai solusi umum bagi persamaan differensial orde pertama bersangkutan. Bila konstanta itu diberi suatu nilai tertentu berdasarkan pada kondisi awal dari sistem tersebut, maka solusi yang dihasilkan disebut solusi khusus. Langkah keempat adalah penafsiran yaitu memahami makna dan implikasi jawaban matematis bagi masalah semula dalam pengertian fisika atau dalam bidang apapun masalah itu berasal.

Proses fisika dapat diterangkan secara matematis oleh sebuah persamaan differensial orde pertama. Ini berarti bahwa persamaan ini adalah model matematis bagi proses fisik tersebut. Bila suatu hukum fisik mencakup laju perubahan suatu fungsi, misalnya kecepatan, percepatan, dan lain sebagainya, hukum itu akan menghasilkan suatu persamaan differensial. Karena alasan inilah persamaan differensial sering dijumpai di dalam fisika dan rekayasa. Kebanyakan sistem fisik yang sederhana dapat dimodelkan dengan persamaan differensial biasa. Beberapa sistem fisik tersebut antara lain : gerak dari suatu partikel, hukum Boyle dan Torricelly, peluruhan zat radioaktif, gerak jatuh bebas tanpa gesekan dan dengan gesekan, tekanan udara dalam atmosfer bumi, pemanasan dan pendinginan, rangkaian listrik seperti pada rangkaian RC dan RL, penggerak roket dan sebagainya.

1. Gerak dari Suatu Partikel

Metoda integrasi langsung cukup efektif dalam memecahkan persoalan gerak partikel baik gerak horizontal maupun gerak vertikal. Gerak dari partikel meliputi posisi, kecepatan dan percepatan. Kecepatan $v(t)$ dari partikel didefinisikan sebagai :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (21)$$

Disisi lain percepatan partikel dapat ditulis seperti :

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (22)$$

Dalam kasus percepatan konstan , kecepatan awal pada saat $t = 0$ adalah v_0 dan posisi awal partikel di x_0 , maka dengan mengintegrasikan persamaan secara langsung didapat kecepatan dan posisi partikel pada waktu t dt masing-masing dalam bentuk :

$$v = at + v_0 \quad (23a)$$

$$x = 1/2 at^2 + v_0 t + x_0 \quad (23b)$$

Ternyata hubungan antara kecepatan partikel dengan waktu berbentuk linear dengan kemiringan garis a dan kecepatan pada saat $t = 0$ adalah v_0 , sedangkan hubungan antara posisi dengan waktu berbentuk parabola dengan posisi partikel pada $t = 0$ berada di x_0 .

2. Peluruhan Zat Radioaktif

Dengan memandang suatu sampel dari material yang berisi $N(t)$ atom dari suatu isotop radioaktif tertentu pada waktu t dt. Atom-atom ini akan meluruh secara spontan dalam waktu tertentu. Persamaan differensial untuk melukiskan tentang peluruhan atom sebagai akibat perubahan waktu adalah :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (24)$$

Melalui pemisahan persamaan dan dengan mengintegrasikan kedua suku dari persamaan pada kondisi awal pada saat $t = 0$, jumlah atom adalah N_0 , maka jumlah atom yang tinggal dalam waktu t detik adalah :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (25)$$

Pada persamaan N_0 menyatakan jumlah zat radioaktif mula-mula dan λ adalah konstanta peluruhan (desintegrasi).

3. Hukum Boyle

Hukum Boyle menyangkut tentang perubahan volume sebagai akibat perubahan tekanan. Didalam bentuk persamaan differensial hukum Boyle ditulis seperti :

$$\frac{dV}{dP} = - \frac{V}{P} \quad (26)$$

Disini V menunjukkan volume dari gas pada tekanan P pada temperatur konstan. Tanda negatif pada persamaan menyatakan volume gas berkurang dengan penambahan tekanan. Dengan menggunakan pemisahan persamaan, maka integrasi dapat dilakukan terhadap terhadap volume dan tekanan pada kedua sisi dari persamaan.

$$\int \frac{dV}{V} = - \int \frac{dP}{P} \quad (27a)$$

$$\ln V = -\ln P + C \quad (27b)$$

$$P V = k \quad (27c)$$

Pada persamaan dapat diperhatikan perkalian antara volume dengan tekanan adalah konstan dan volume dari suatu gas berbanding terbalik dengan tekanan.

4. Gerak Jatuh Bebas dengan Gaya Gesekan

Kecepatan suatu benda jatuh bebas dilukiskan dengan persamaan differensial orde I yang disusun berdasarkan gaya-gaya yang bekerja pada benda yaitu gaya pemercepat benda, gaya berat dan gaya gesekan. Arah dari gaya gesekan berlawanan dengan arah gerak benda. Persamaan gaya pada benda menggunakan hukum II Newton dan dilukiskan dalam bentuk persamaan differensial seperti :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - cv \quad (28)$$

Disini c menyatakan koefisien gesekan udara dengan gaya gesekan adalah cv . Persamaan differensial ini dapat diselesaikan melalui dua cara yaitu menggunakan pemisahan persamaan atau persamaan differensial linear orde I. Melalui teknik pemisahan persamaan didapatkan persamaan differensial dalam bentuk :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v \quad (29a)$$

$$\int \frac{d\left(g - \frac{c}{m} v\right)}{\left(g - \frac{c}{m} v\right)} = \frac{c}{m} \int dt \quad (29b)$$

Dengan melakukan integrasi pada kedua sisi dari persamaan dan menerapkan kondisi awal pada saat $t = 0$ dt , kecepatan benda nol $v(t=0) = 0$, maka didapatkan solusi dari persamaan dalam bentuk :

$$v = \frac{mg}{c} \left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) \quad (30)$$

Metode persamaan differensial linear orde I dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan differensial tersebut. Caranya adalah dengan memodifikasi persamaan ke dalam bentuk persamaan differensial linear orde I :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m} v = g \rightarrow \frac{dv}{dt} + P v = Q \quad (31)$$

dengan $P = (c/m)$ dan $Q = g$.

$$I = \int P dt = \frac{c}{m} \int dt = \frac{ct}{m}$$

Solusi umum persamaan dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$v = \frac{mg}{c} + C e^{-\frac{ct}{m}} \quad (32)$$

Nilai konstanta sembarang C dapat ditentukan dari syarat awal yaitu pada saat $t = 0$ detik , maka kecepatan benda adalah nol.

5. Rangkaian Listrik RC dan RL

Bila suatu rangkaian RC dihubungkan dengan suatu sumber tegangan DC akan menyebabkan terjadinya pengisian kapasitor melalui tahanan R. Pada pengisian kapasitor tidak langsung penuh, tetapi bertambah dengan pertambahan waktu. Persamaan differensial yang melukiskan fenomena ini didapat dari persamaan tegangan pada suatu loop tertutup menggunakan hukum Kirchoff II yaitu :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad (33)$$

Persamaan differensial ini juga dapat diselesaikan melalui dua cara yaitu pemisahan persamaan dan persamaan differensial linear orde I. Persamaan dapat dipisahkan menjadi

$$\frac{dq}{CE - q} = \frac{1}{RC} dt \quad (34a)$$

$$\int \frac{d(CE - q)}{(CE - q)} = -\frac{1}{RC} \int dt \quad (34b)$$

Dengan melakukan integrasi terhadap kedua sisi dari persamaan dan menerapkan kondisi awal pada saat $t = 0$ dt muatan yang tersimpan pada kapasitor nol atau $q(t=0) = 0$, maka didapat muatan yang tersimpan pada kapasitor dalam waktu t detik adalah :

$$q = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (35)$$

Berdasarkan hubungan antara muatan, kuat arus dan tegangan pada kapasitor maka kuat arus dan tegangan pada kapasitor dalam waktu t detik dapat ditentukan.

Persamaan differensial pada pengisian kapasitor juga dapat dimodifikasi kedalam bentuk persamaan differensial linear orde I seperti

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R} \quad (36)$$

dengan $P = 1/RC$ dan $Q = E/R$. Persamaan differensial linear orde I ini dapat diselesaikan.

Begitu pula pada kasus rangkaian RL yang dihubungkan dengan suatu sumber tegangan DC , maka kuat arus dan tegangan pada induktor berubah dengan waktu. Persamaan differensial yang melukiskan fenomena ini diturunkan dari hukum Kirchoff II

$$L \frac{dI}{dt} + R I = E \quad (37)$$

Dengan menggunakan teknik pemisahan persamaan atau persamaan differensial linear orde I dan menerapkan kondisi awal , kuat arus dan tegangan pada induktor dalam waktu dapat ditentukan.

6. Tekanan Udara di Atmosfir pada Ketinggian Tertentu

Tekanan udara di atmosfer berubah terhadap ketinggian tempat di permukaan laut. Terjadinya perubahan tekanan ini disebabkan oleh perubahan kerapatan udara sebagai akibat perubahan ketinggian. Semakin tinggi posisi suatu tempat kerapatan udara semakin renggang. Jika diasumsikan kerapatan udara berbanding lurus dengan tekanan , maka persamaan differensial yang untuk melukiskan gejala ini adalah

$$\frac{dP}{dy} = - \rho g = - g \frac{\rho_0}{P_0} P \quad (37)$$

Tanda negatif pada persamaan berarti tekanan udara berkurang dengan bertambahnya ketinggian. Dengan melakukan pemisahan persamaan dan menerapkan kondisi awal pada permukaan laut tekanan udara $P(y=0) = P_0$, maka tekanan udara pada suatu ketinggian y dapat ditentukan menggunakan persamaan berikut ini :

$$P = P_0 e^{-\frac{g \rho_0}{P_0} y} \quad (38)$$

Disini ρ_0 dan P_0 masing-masing menyatakan kerapatan udara dan tekanan udara pada permukaan laut.

7. Hukum Newton Tentang Pendinginan dan Pemanasan

Bila temperatur suatu benda berbeda dengan temperatur disekitarnya akan menyebabkan terjadinya pendinginan atau pemanasan benda tergantung kepada keadaan

temperatur benda tersebut dan temperatur di sekitarnya. Hukum Newton tentang pendinginan dapat dinyatakan sebagai laju perubahan temperatur T terhadap waktu t dari suatu benda adalah sebanding dengan perbedaan temperatur benda (T) dengan temperatur medium di sekitarnya (T_A). Hukum fisika ini dapat ditransfer kedalam persamaan differensial dalam bentuk :

$$\frac{dT}{dt} = k (T_A - T) \quad (38)$$

Pada persamaan k adalah suatu konstanta positif. Jika $T > T_A$ sehingga $dT/dt < 0$, maka temperatur $T(t)$ berkurang sebagai fungsi dari waktu t dan terjadi pendinginan benda. Sebaliknya jika $T < T_A$ sehingga $dT/dt > 0$ maka temperatur T akan bertambah sebagai fungsi dari waktu t dan terjadi pemanasan benda.

D. Persamaan Differensial Orde Lebih Tinggi

Persamaan differensial berorde n jika turunan ke n dari fungsi y terhadap x merupakan turunan tertinggi didalam persamaan tersebut seperti dilukiskan persamaan (1). Jika $n = 2$ disebut persamaan diferensial orde kedua, jika $n = 3$ disebut persamaan differensial orde ketiga dan seterusnya. Solusi umum dari persamaan diferensial orde ke n adalah suatu kombinasi linear dari solusi masing-masing fungsi $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ yaitu:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n \quad (39)$$

1. Persamaan Differensial Linear Orde II Homogen

Bentuk umum dari persamaan differensial linear orde II homogen diberikan :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0 \quad (40)$$

Penyelesaian umum dari persamaan differensial ini adalah menggunakan prinsip superposisi. Jika y_1 dan y_2 merupakan solusi dari persamaan linear homogen pada interval, dan jika c_1 dan c_2 adalah konstan maka kombinasi linear dari fungsi y_1 dan y_2 :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (41)$$

Jika akar dari persamaan nyata dan berbeda masing-masing a dan b , maka persamaan dalam bentuk operator differensial dan solusinya adalah :

$$(D - a)(D - b)y = 0, \quad y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} \quad (42a)$$

Jika kedua akar dari persamaan sama yaitu a , maka solusi dari persamaan menjadi :

$$(D - a)(D - a)y = 0, \quad y = (A x + B) e^{ax} \quad (42b)$$

Jika akar dari persamaan berbentuk kompleks konjugate ($\alpha \pm i\beta$) maka solusi dari persamaan dapat dinyatakan dalam tiga bentuk :

$$y = e^{\alpha x} (A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x})$$

$$y = e^{\alpha x} (A_3 \sin \beta x + A_4 \cos \beta x) = C e^{\alpha x} \sin(\beta x + \varphi) \quad (42c)$$

Jika akar dari persamaan hanya mengandung bagian imajiner dari kompleks konjugate atau $\alpha = 0$ maka penyelesaian umum dari persamaan dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$y = A e^{iax} + B e^{-iax} = C \sin(\beta x + \varphi) \quad (42d)$$

2. Persamaan Differensial Linear Orde II Tidak Homogen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = r(x) \quad (43)$$

Fungsi $F(x)$ disebut fungsi aksi (gaya) yang melukiskan gaya yang diberikan. Solusi dari persamaan terdiri dari dua bagian yaitu solusi dari persamaan differensial II homogen dan fungsi pelengkap (complementary function). Solusi umum dari persamaan differensial bentuk ini adalah :

$$\dot{y} = y_c + y_p \quad (44)$$

dimana y_c adalah solusi umum dari persamaan differensial homogen orde II dan y_p adalah suatu solusi khusus. Salah satu metode untuk menentukan solusi khusus dari persamaan differensial tidak homogen adalah pemecahan dengan metode koefisien yang belum ditentukan dan metode kompleks untuk solusi khusus. Koefisien tersebut dapat ditentukan kemudian dengan cara mensubstitusikan turunan pertama, turunan

kedua dan fungsi tersebut ke dalam persamaan tergantung kepada bentuk dari persamaan diferensial. Ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk menemukan solusi khusus dari persamaan diferensial orde II tidak homogen yaitu : pemeriksaan, integrasi berturut-turut dari dua persamaan orde pertama, bentuk eksponensial pada sisi kanan, menggunakan eksponensial kompleks , metoda koefisien tak tentu, prinsip superposisi dan sebagainya.

E. Aplikasi Persamaan Diferensial Orde Kedua

Persamaan differensial orde II yang telah dilukiskan sebelumnya merupakan persamaan yang penting karena mempunyai banyak aplikasi dalam fisika dan rekayasa. Dalam hal khusus, persamaan diferensial linear orde II dengan koefisien konstan mempunyai aplikasi yang cukup banyak fisika, listrik dan rekayasa mekanik. Banyak ditemukan dalam fisika persamaan differensial linear orde II untuk melukiskan gerak dari beberapa sistem mekanik sederhana dan rangkaian listrik. Suatu sistem mekanik mempunyai manfaat praktis yang besar. Suatu sistem listrik juga tidak kalah pentingnya karena dapat dipandang sebagai suatu penyusun dasar di dalam jaringan listrik. Kenyataan penting menunjukkan bahwa dua sistem fisik yang sama sekali berbeda mungkin saja dapat dijelaskan oleh model matematis yang sama oleh persamaan diferensial yang sama. Ini akan mengilustrasikan peran yang dimainkan oleh matematika dalam menyatukan berbagai fenomena fisik yang sekali berbeda. Beberapa diantaranya adalah gerak bebas (free motion) dari suatu massa pada pegas tanpa gaya eksternal, gerak ayunan bandul sederhana, rangkaian listrik RLC tanpa tegangan sumber, masalah titik akhir dan nilai eigen. Sementara itu beberapa aplikasi dari persamaan differensial orde II tidak homogen dalam fisika adalah pemodelan dari osilasi terpaksa (forced motion), fenomena resonansi, problem pada rangkaian RLC dengan tegangan sumber.

1. Gerak Bebas dari Suatu Massa pada Pegas

Pada ujung bawah suatu pegas dengan konstanta k digantung sebuah benda dengan massa m . Diasumsikan massa pegas jauh lebih kecil dibandingkan dengan massa benda sehingga dapat diabaikan. Kalau benda tersebut ditarik sampai jarak tertentu dan kemudian dilepaskan maka pegas akan mengalami suatu gerakan vertikal. Persamaan gaya pada pegas didapat dari hukum Newton dan hukum Hooke :

$$m \frac{d^2y}{dx^2} = -ky \quad (45a)$$

Gerak dari sistem ini mengikuti persamaan diferensial linear orde II dengan koefisien konstanta m dan k yaitu

$$m \frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 \quad (45b)$$

Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk operator diferensial D seperti :

$$D^2y + \omega^2 y = 0 \rightarrow (D^2 + \omega^2) y = 0$$

$$(D - i\omega)(D + i\omega) y = 0 \quad (45c)$$

Akar-akar dari persamaan berbentuk kompleks yaitu $\pm i \omega$ sehingga solusi umum dari persamaan diferensial merupakan kombinasi linear dari y_1 dan y_2 .

$$y = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \quad (46a)$$

Dengan menggunakan teorema Euler pergeseran pegas dari posisi kesetimbangannya dapat dinyatakan seperti :

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (46b)$$

Jika dimisalkan $A = C \cos \phi$ dan $B = C \sin \phi$, maka pergeseran pegas dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$y = C \cos (\omega t - \phi) \quad (46c)$$

Gerak yang mengikuti persamaan ini disebut osilasi selaras (harmonic oscillation).

2. Gerak Terpaksa

Bila massa benda yang digantungkan pada pegas dihubungkan dengan suatu peredam, maka gerak dari sistem akan dipengaruhi oleh gaya peredam. Dalam hal ini gaya peredam mempunyai arah berlawanan dengan arah gerak saat itu. Bila diasumsikan gaya peredam sebanding dengan perubahan pergeseran pegas terhadap waktu dengan suatu konstanta peredaman r maka persamaan gaya pada sistem menjadi :

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - r \frac{dy}{dt} \quad (47a)$$

Dapat diperhatikan bahwa gerak sistem mekanis teredam ditentukan oleh persamaan differensial linear yang memiliki koefisien konstan yaitu massa benda, konstanta pegas dan konstanta redaman.

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + r \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (47b)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \quad (47c)$$

Dalam bentuk operator diferensial, persamaan dapat ditulis seperti :

$$(D^2 + 2bD + \omega^2) y = 0 \quad (48a)$$

Secara umum akar dari persamaan dari persamaan dapat ditentukan dari rumus abc

$$D = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2} \quad (49)$$

Berdasarkan akar persamaan ada tiga kemungkinan solusi dari persamaan tergantung kepada nilai b^2 dan ω^2 .

a. Gerak peredaman lebih (overdamped)

Bila konstanta peredaman r begitu besar sehingga $b^2 > \omega^2$ maka persamaan akan memiliki dua akar nyata yaitu a_1 dan a_2 yang berbeda. Solusi umum dari persamaan dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$y = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t} \quad (50)$$

dimana masing-masing akar nyata tersebut adalah :

$$a_1 = b + \sqrt{b^2 - \omega^2} \quad \text{dan} \quad a_2 = b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

Solusi umum dari persamaan (50) berarti benda tersebut tidak berosilasi.

b. Gerak peredaman kurang (under damped)

Bila konstanta peredaman begitu kecil sehingga $b^2 < \omega^2$ akibatnya akar dari persamaan imajiner. Solusi dari persamaan adalah :

$$y = e^{-bt} (A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t) = C e^{-bt} \sin(\beta t + \gamma) \quad (51)$$

Solusi dari persamaan menggambarkan osilasi teredam.

c. Gerak peredaman kritis (critical damped)

Gerak teredam kritis atau gerak osilasi teredam terjadi jika $b^2 = \omega^2$ atau $b = \omega$ maka persamaan akan mempunyai akar yang sama $a_1 = a_2 = a$. Solusi umum dari persamaan menjadi

$$y = (A + Bt) e^{-at} \quad (52)$$

3. Rangkaian RLC Tanpa Tegangan Sumber

Suatu rangkaian listrik terdiri dari komponen resistor, induktor dan kapasitor membentuk rangkaian RLC. Persamaan tegangan pada loop tertutup dari rangkaian RLC dengan sumber tegangan dihubungkan singkat diberikan dalam bentuk :

$$iR + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (53a)$$

Dengan melakukan diferensiasi terhadap waktu persamaan diferensial menjadi :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + L \frac{d^2 i}{dt^2} = 0 \rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (53b)$$

Dalam bentuk operator diferensial persamaan diferensial dapat ditulis seperti;

$$(D^2 + 2b + \omega_0^2)I = 0 \quad (54)$$

Persamaan ini menunjukkan persamaan dari osilator harmonik teredam. Solusi dari persamaan tergantung kepada akar-akar dari persamaan yang dapat ditentukan melalui rumus abc sehingga ada tiga kemungkinan yang akan terjadi. Jika didapatkan dua akar nyata dan berbeda maka osilator dikatakan teredam lebih, jika didapatkan kedua akar sama maka osilator dikatakan teredam kritis dan jika didapatkan akar imajiner maka osilator dikatakan teredam kurang.

4. Osilasi Terpaksa dari Suatu Massa pada Pegas

$$m \frac{d^2y}{dx^2} + r \frac{dy}{dt} + ky = r(t) \quad (55)$$

disini $r(t)$ disebut masukan (input) atau gaya penggerak (driving forced) dan solusi dari persamaan disebut keluaran (output) atau respons fungsi itu terhadap gaya penggerak tersebut. Gerak yang dihasilkan disebut suatu gerak terpaksa (forced motion). Jika diasumsikan masukan adalah fungsi periodik $r(t) = F_0 \cos \omega t$, maka persamaan differensial untuk gerak ini dapat dinyatakan seperti :

$$m \frac{d^2y}{dx^2} + r \frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t \quad (56a)$$

Solusi dari persamaan terdiri dari solusi umum dan solusi khusus.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{r}{m} \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (56b)$$

a. Gaya osilasi teredam

Persamaan (1) melukiskan persamaan differensial untuk gaya osilasi teredam.

Solusi khusus dari persamaan dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (57)$$

Langkah-langkah dalam menentukan solusi dari fungsi khusus adalah tentukan fungsi gaya aksi yang diberikan, tentukan turunan pertama dan turunan kedua dari fungsi

tersebut, substitusikan turunan kedua, turunan pertama dan fungsi khusus dalam bentuk konstanta, konstanta A dan B dapat ditentukan sehingga solusi khusus dapat ditentukan.

Turunan pertama dan turunan dari fungsi khusus terhadap waktu masing-masing didapatkan dalam bentuk :

$$\frac{dy_p}{dt} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \quad (58a)$$

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t \quad (58b)$$

Konstanta A dan B didapat dengan mensubstitusikan turunan pertama dan kedua ke dalam persamaan diferensial sehingga

$$A = \frac{F_o m(\omega_o^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2} \quad (59a)$$

$$B = \frac{F_o \omega r}{m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2} \quad (59b)$$

Solusi khusus dari persamaan dapat ditulis dalam bentuk :

$$y(t) = Ce^{-bt} \cos(\omega_o t - \phi) + \frac{F_o}{m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2} [m(\omega_o^2 - \omega^2) \cos \omega t + \omega r \sin \omega t] \quad (60)$$

b. Gaya osilasi tanpa peredaman

Bila konstanta peredaman $r = 0$ sehingga tidak ada efek peredaman terhadap gerak pegas. Persamaan diferensial yang melukiskan gaya osilasi tanpa peredaman dinyatakan seperti :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = \frac{F_o}{m} \cos \omega t \quad (61)$$

Solusi khusus dari persamaan dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen kompleks

$$y_p = Ae^{i\omega t} \quad (62a)$$

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} = -\omega^2 A e^{i\omega t} \quad (62b)$$

Dengan mensubstitusikan fungsi khusus dan turunan keduanya kedalam persamaan diferensial gaya osilasi tanpa redaman didapatkan konstanta A dalam bentuk :

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (63a)$$

$$y_p(\text{real}) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \quad (63b)$$

Karena itu solusi dari persamaan gaya osilasi tanpa teredam adalah :

$$y(t) = C \cos(\omega t - \phi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \quad (63c)$$

c. Kasus terjadi resonansi

Peristiwa resonansi akan terjadi apabila frekuensi sudut sumber dengan frekuensi sudut gerak ($\omega = \omega_0$). Persamaan differensial dalam kondisi terjadi resonansi dapat dinyatakan seperti :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t \quad (64)$$

Solusi khusus dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$y_p(t) = t (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \quad (65)$$

Dengan mencari turunan kedua dari fungsi khusus dan turunan kedua dan fungsi tersebut disubstitusikan kedalam persamaan diferensial sehingga didapat konstanta A dan B masing-masing.

$$A = 0 \text{ dan } B = \frac{F_0}{2 m \omega_0} \quad (66a)$$

Fungsi khusus dari persamaan dapat ditentukan dan ditulis seperti :

$$y_{p(t)} = \frac{F_0}{2 m \omega_0} t \sin \omega t \quad (66b)$$

Dengan demikian solusi dari persamaan dalam kasus terjadi resonansi adalah :

$$y(t) = C \cos(\omega t - \phi) + \frac{F_0}{2 m \omega_0} t \sin \omega t \quad (66c)$$

Gejala resonansi karena kesamaan antara frekuensi sistem dengan frekuensi yang digunakan.

Persamaan diferensial orde II tidak homogen dengan suatu gaya aksi juga ditemukan pada rangkaian listrik RLC dengan suatu sumber tegangan sebagai fungsi waktu. Jika diasumsikan sumber tegangan sebagai fungsi waktu dinyatakan dengan $E(t) = E_0 \sin \omega t$ dan dengan dengan melakukan diferensiasi kedua sisi dari persamaan didapatkan persamaan diferensial dari rangkaian RLC seperti :

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{E_0}{L} \cos \omega t \quad (67)$$

Dapat diperhatikan bahwa persamaan diferensial untuk rangkaian RLC dengan sumber tegangan identik dengan sistem mekanis dengan suatu gaya aksi.

F. Persamaan Differensial Parsial

Persamaan differensial parsial dijumpai dalam kaitan dengan berbagai masalah fisik dan geometris bila fungsi yang terlibat tergantung pada dua atau lebih peubah bebas. Mekanika fluida dan mekanika padat , transfer panas , teori elektromagnetik dan berbagai bidang fisika lainnya penuh dengan masalah-masalah yang harus dimodelkan dengan persamaan differensial parsial. Sesungguhnya kisaran penerapan dari persamaan differensial parsial sangat besar, bila dibandingkan dengan kisaran penerapan persamaan differensial biasa. Perubah-peubah bebasnya dapat berupa waktu dan satu atau lebih koordinat didalam ruang. Hampir semua bagian dari fisika teoritis diformulasikan dalam bentuk persamaan differensial parsial.

1. Persamaan Laplace

Persamaan Laplace merupakan persamaan differensial parsial yang penting dalam mempelajari fenomena elektromagnetik, hidrodinamik, aliran panas, grafitasi dan sebagainya. Persamaan Laplace dinyatakan dalam bentuk : $\nabla^2 \psi = 0$ (68)

2. Persamaan Poisson

Persamaan Poisson adalah persamaan tidak homogen dengan suatu bentuk sumber.

Bentuk dari persamaan Poisson adalah : $\nabla^2\psi = -\rho/\epsilon_0$ (69)

3. Persamaan gelombang (Helmholtz) dan difusi tidak bergantung waktu

Persamaan ini digunakan untuk mempelajari fenomena gelombang elastik dalam zat padat, suara atau akustik, gelombang elektromagnetik, reaktor inti. Persamaan

Helmholtz ditulis seperti : $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$ (70)

4. Persamaan difusi bergantung waktu

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (71)$$

6. Persamaan gelombang Schrodinger bebas waktu dan bergantung waktu

Persamaan Scrodinger bergantung waktu

$$-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2\psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (72a)$$

dan persamaan Schrodinger bebas waktu dinyatakan dalam bentuk :

$$-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2\psi + V\psi = E\psi \quad (72b)$$

7. Persamaan diferensial parsial lain seperti persamaan potensial skalar, persamaan Klein-Gordon dan sebagainya.

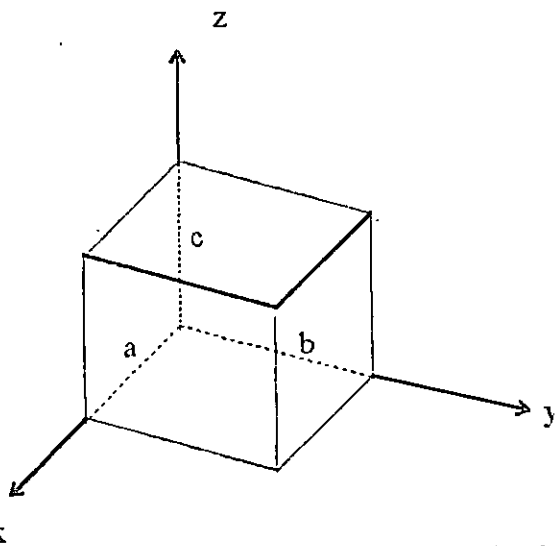
G. Aplikasi Dari Persamaan Diferensial Parsial

Aplikasi dari persamaan diferensial ini cukup banyak dalam fisika antara lain kasus partikel terperangkap dalam kotak dua dan tiga dimensi, osilator harmonik tiga dimensi, persamaan gelombang dari getaran pegas, penentuan fungsi distribusi laju suatu gas dan sebagainya. Dalam kasus kotak tiga dimensi partikel bergerak dalam ruang. Berarti disini partikel bergerak dalam koordinat ruang (x,y,z). Semua asumsi yang digunakan dalam partikel terperangkap dalam suatu kotak satu dimensi digunakan dalam kotak tiga

dimensi. Di sini partikel dipandang terperangkap dalam ruang berupa balok dengan masing-masing sisi a, b, dan c. Di dalam kotak atau dalam range koordinat (0,0,0) dan (a,b,c) partikel bergerak secara bebas karena potensial nol, dan tidak dapat keluar dari kotak karena dinding-dinding kotak keras sekali. Karena itu diagram energi potensial secara aljabar dapat dilukiskan seperti :

$$\begin{array}{lll}
 V(x) = \infty & , x < 0 & V(y) = \infty & , y < 0 & V(z) = \infty & , z < 0 \\
 V(x) = 0 & , 0 < x < a & V(y) = 0 & , 0 < y < b & V(z) = 0 & , 0 < z < c \\
 V(x) = \infty & , x > 0 & V(y) = \infty & , y > 0 & V(z) = \infty & , z > 0
 \end{array}$$

Secara gambar diagram energi potensial di atas dapat dilukiskan :



Gambar 5. Kotak potensial tiga dimensi dengan sisi a, b, c

Konfigurasi diagram energi potensial seperti ini dikenal sebagai kotak tiga dimensi. Energi total dari partikel yang terperangkap dalam suatu kotak tiga dimensi hanya terdiri dari energi kinetik. Karena itu persamaan Schrodinger bebas waktu dalam kasus ini dilukiskan :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial z^2} \right) = E \psi(x, y, z) \quad (73a)$$

Partikel dalam kotak dua dimensi bergerak dalam arah x dan y atau dalam koordinat (x,y). Berarti energi total dari partikel merupakan penjumlahan dari komponen-komponen energi dalam arah x dan y seperti :

$$E = E_x + E_y + E_z \quad (73b)$$

Sedangkan fungsi gelombang dari partikel sebagai fungsi posisi juga terdiri dari komponen-komponen fungsi gelombang dalam arah x dan y. Melalui teknik pemisahan variabel fungsi gelombang dalam kasus kotak tiga dimensi dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\psi(x, y, z) = \psi(x) \psi(y) \psi(z) \quad (74)$$

Dengan mensubstitusikan fungsi gelombang pada persamaan (74) ke dalam persamaan (73a) didapat persamaan berikut :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\psi(y) \psi(z) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi(x) \psi(z) \frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} + \psi(x) \psi(y) \frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} \right) = (E_x + E_y + E_z) \psi(x) \psi(y) \psi(z) \quad (75)$$

Melalui teknik pemisahan variabel persamaan Schrodinger bebas waktu untuk masing-masing komponen dalam arah x dan y dapat dipisahkan seperti berikut ini :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(y)\psi(z) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} - E_x \psi(x) \psi(y)\psi(z) \right] + \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x)\psi(z) \frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} - E_y \psi(x) \psi(y)\psi(z) \right] + \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x)\psi(y) \frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} - E_z \psi(x) \psi(y)\psi(z) \right] = 0 \quad (76)$$

Persamaan (76) akan terpenuhi jika masing-masing suku bernilai nol. Untuk itu persamaan differensial orde dua dari masing-masing komponen diberikan.

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + k_x^2 \psi(x) = 0 \quad (77a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} + k_y^2 \psi(y) = 0 \quad (77b)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} + k_z^2 \psi(z) = 0 \quad (77c)$$

dimana komponen-komponen vektor gelombang adalah

$$k_x = \sqrt{\frac{2mE_x}{\hbar^2}}, \quad k_y = \sqrt{\frac{2mE_y}{\hbar^2}}, \quad \text{dan} \quad k_z = \sqrt{\frac{2mE_z}{\hbar^2}}$$

Melalui prosedur yang sama dengan kotak satu dimensi maka solusi persamaan Schrodinger bebas waktu dari masing-masing komponen didapatkan :

$$\psi(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x} \quad (78a)$$

$$\psi(y) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y} \quad (78b)$$

$$\psi(z) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z} \quad (78c)$$

Bila fungsi gelombang dalam bentuk eksponensial dikonversi ke dalam bentuk fungsi trigonometri menghasilkan bentuk :

$$\psi(x) = A_I \cos(k_x x) + A_{II} \sin(k_x x) \quad (80a)$$

$$\psi(y) = B_I \cos(k_y y) + B_{II} \sin(k_y y) \quad (80b)$$

$$\psi(z) = C_I \cos(k_z z) + C_{II} \sin(k_z z) \quad (80c)$$

Dinding-dinding kotak merupakan antar muka dari perbedaan dua potensial. Secara kuantum pada antar muka berlaku hukum kontinuitas dimana fungsi gelombang dan turunan pertamanya di dalam kotak dan di luar kotak pada antar muka atau dinding kotak harus sama. Karena partikel tidak dapat menembus dinding kotak sehingga fungsi gelombang di luar kotak nol sehingga tidak ada probabilitas untuk menemukan partikel

di luar kotak. Berdasarkan syarat kontinu dari fungsi gelombang tersebut pada dinding kotak berlaku syarat batas berikut :

Syarat batas di $x=0$ dan $x = a$

$$\psi(x=0) = 0 , \quad \psi(x=a) = 0 \quad (81a)$$

Syarat batas di $y=0$ dan $y = b$

$$\psi(y=0) = 0 , \quad \psi(y=b) = 0 \quad (81b)$$

Sedangkan syarat batas di $z=0$ dan $z = c$

$$\psi(z=0) = 0 , \quad \psi(z=c) = 0 \quad (81c)$$

Melalui penerapan syarat batas pada dinding kotak di $x = 0$ dan $y = 0$ didapatkan amplitudo gelombang :

$$A_I = 0 , \quad B_I = 0 , \quad \text{dan} \quad C_I = 0 \quad (82a)$$

Masing-masing komponen fungsi gelombang sekarang dapat dinyatakan :

$$\psi(x) = A_{II} \sin(k_x x) , \quad \psi(y) = B_{II} \sin(k_y y) , \quad \psi(z) = C_{II} \sin(k_z z) \quad (82b)$$

Karena itu fungsi gelombang sebagai fungsi posisi dalam arah x dan y dan z diberikan :

$$\psi(x, y, z) = D \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (83)$$

Melalui penerapan syarat batas pada dinding kotak pada $x = a$ dan $y = b$ dan $z = c$ fungsi gelombang nol. Kuantitas D dari persamaan dapat diinterpretasikan sebagai amplitudo gelombang yang tidak nol. Kondisi fungsi gelombang bernilai nol pada antar muka hanya akan terpenuhi hanya jika :

$$\sin(k_x a) = 0 , \quad \sin(k_y b) = 0 , \quad \sin(k_z c) = 0 \quad (84a)$$

Komponen-komponen vektor gelombang dalam arah x , y , dan z didapatkan :

$$k_x = \frac{n_x \pi}{a} , \quad k_y = \frac{n_y \pi}{b} , \quad \text{dan} \quad k_z = \frac{n_z \pi}{c} \quad (84b)$$

Energi total dari partikel terperangkap dalam suatu kotak tiga dimensi dinyatakan dalam persamaan dispersi berikut ini :

$$E = E_x + E_y + E_z = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (85a)$$

Energi total dari partikel diperoleh dengan jalan mensubstitusikan masing-masing komponen vektor gelombang ke dalam persamaan dispersi di atas. Karena itu nilai eigen untuk kasus ini adalah :

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \quad (85b)$$

Sedangkan fungsi eigen dapat dilukiskan dalam bentuk :

$$\psi(x, y, z) = D \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right) \quad (86)$$

Solusi persamaan Scrodinger bebas waktu dalam kasus kotak tiga dimensi belumlah lengkap karena nilai amplitudo gelombang belum ditentukan. Disini amplitudo D dapat berharga sembarang. Dalam kasus kotak tiga dimensi gerakan partikel terbatas dengan batas yang dapat ditentukan melalui ukuran kotak yang meliputi panjang, lebar dan tinggi dari kotak. Amplitudo gelombang dapat ditentukan melalui syarat normalisasi berikut :

$$\iiint_V |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 \quad (87a)$$

Bila rapat probabilitas untuk menemukan partikel disubstitusikan kedalam persamaan didapatkan :

$$D^2 \iiint_V \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right) dx dy dz = 0 \quad (87b)$$

Gerakan partikel hanya terbatas dalam ruang sepanjang panjang, lebar dan tinggi kotak. Untuk itu batas integrasi yang digunakan adalah dalam arah x dari 0 sampai a dan dalam arah y dari 0 sampai b serta dalam arah z dari 0 sampai c.

$$D^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^a dx + \frac{1}{2} \int_0^a \cos\left(\frac{2n_x \pi}{a} x\right) dx \right) \left(\frac{1}{2} \int_0^b dy + \frac{1}{2} \int_0^b \cos\left(\frac{2n_y \pi}{a} y\right) dy \right) \left(\frac{1}{2} \int_0^c dz + \frac{1}{2} \int_0^c \cos\left(\frac{2n_z \pi}{c} z\right) dz \right) = 1 \quad (87c)$$

Melalui penerapan batas integrasi pada integral di atas menghasilkan amplitudo gelombang sebesar :

$$D = \frac{2}{\sqrt{abc}} \quad (87d)$$

Ternyata amplitudo gelombang tergantung kepada ukuran kotak yang meliputi panjang, lebar dan tinggi dari kotak.

Dengan demikian fungsi eigen dalam kasus kotak tiga dimensi didapatkan :

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right) \quad (88)$$

Pada kotak tiga dimensi untuk satu nilai eigen ternyata mempunyai beberapa fungsi eigen. Karena itu partikel terperangkap dalam kotak tiga dimensi juga termasuk ke dalam kasus berdegenerasi.

Dalam kasus kotak berupa kubus dengan sisi $a = b = c$ maka fungsi eigen dan nilai eigen masing-masing diberikan :

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right) \quad (89)$$

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (90)$$

Keadaan nilai eigen pada beberapa tingkat dalam kotak berupa kubus, kombinasi komponen bilangan kuantum, dan degenerasi terlihat pada tabel berikut ini :

Tabel 2. Tingkat energi dan degenerasi dalam suatu kotak berbentuk kubus

Energi	Kombinasi dari n_x, n_y, n_z	Degenerasi g
$3 E_1$	(1,1,1)	1
$6 E_1$	(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)	3
$9 E_1$	(2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)	3
$11 E_1$	(3,1,1), (1,3,1), (1,1,3)	3
$12 E_1$	(2,2,2)	1
$14 E_1$	(1,2,3), (3,2,1), (2,3,1)	6
	(1,3,2), (2,1,3), (3,1,2)	
$17 E_1$	(2,2,3), (2,3,2), (3,2,2)	3

Pada tingkat pertama tidak terjadi degenerasi karena energi $3E_1$ hanya mempunyai satu fungsi gelombang $\psi(1,1,1)$, tingkat kedua mempunyai tiga derajat degenerasi karena untuk energi $6E_1$ mempunyai tiga fungsi gelombang yang berbeda yaitu $\psi(2,1,1)$, $\psi(1,2,1)$, $\psi(1,1,2)$. Untuk energi $9E_1$ mempunyai tiga derajat degenerasi dengan tiga fungsi gelombang $\psi(2,2,1)$, $\psi(2,1,2)$, $\psi(1,2,2)$. Demikian seterusnya untuk beberapa tingkat energi dapat ditentukan fungsi gelombang yang dimiliki oleh satu energi beserta derajat degenerasinya.

DAFTAR PUSTAKA

- Asrizal dan Gusnedi, (1996). Analisis Partikel Dalam Kotak Dari Berbagai Aspek dan Penerapannya Dalam Phenomena Fisika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Padang
- Asrizal dan Murtiani Kari, (1996). Tinjauan Tentang Osilator Harmonik Secara Klasik dan Kuantum. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Padang
- C.H. Edwards, David E. Penney, (1989). Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems. Prentice-Hall, Inc.
- Erwin Kreyszig alih bahasa oleh Bambang Sumantri, (1993). Matematika Teknik Lanjutan. Edisi ke-6. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.
- George Arfken, (1985). Mathematical Methods for Physicists. Third Edition, Academic Press, Inc.
- Gusnedi dan Asrizal, (1996). Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya. Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan Padang.
- Mary L. Boas, (1983). Mathematical Methods in The Physical Sciences. Second Edition, John Wiley & Sons.
- Shepley L. Ross, (1989). Introduction to Ordinary Differential Equations. Fourth Edition, John Wiley & Sons.
- Widiarti Santosa dan R.J. Pamantjak, (). Persamaan Diferensial Biasa. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Jakarta.