

# KEKUATAN BAHAN

MILIK PERPUSTAKAAN IKIP PADANG	
DITERIMA TGL. :	
SUMBER / HARGA :	H. 1
KOLEKSI :	K
NO. INVENTARIS :	757/K/97-K, (2)
ASPEKSI :	620.103 MUK



Drs. Muhakir, M.P.

FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI  
DAN KEJURUAN- IKIP PADANG  
1997

MILIK UPT PERPUSTAKAAN  
IKIP PADANG

## KATA PENGANTAR

Utama sekali penulis ucapkan syukur ke hadirat Tuhan Raja Langit Dan Bumi, atas kasih dan sayang-Nya buku ini dapat terselesaikan.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang secara langsung ataupun tidak langsung telah membantu dalam penyusunan buku ini.

Buku yang berjudul "Kekuatan Bahan " yang dalam bahasa Inggrisnya "*Strength Of Materials*" adalah buku yang didalamnya membahas mekanika dari aspek kekuatan pada material yang dipakai dalam aplikasi teknik. Asumsi penakai buku ini adalah pembaca yang sudah memahami statika, yang khususnya dalam kaitannya dengan diagram benda bebas.

Penulis menyadari akan kekurang-sempurnaan buku ini, oleh sebab itu besar harapan penulis agar supaya mendapatkan kritikan sehat dari para pembaca.

Padang; 1 Januari 1997.

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . .	i
KATA PENGANTAR . . . . .	ii
DAFTAR ISI . . . . .	iii
BAB I. TEGANGAN, BEBAN AKSIAL DAN BEBAN GESER . . . . .	1
A. PENDAHULUAN . . . . .	1
B. TEGANGAN . . . . .	1
C. TEGANGAN IJIN . . . . .	4
BAB II. BEBAN PUNTIRAN . . . . .	7
A. DISTRIBUSI TEGANGAN PUNTIR . . . . .	7
B. MOMEN TAHAN PUNTIR . . . . .	8
C. MOMEN POLAR KEDUA DARI SUATU LUASAN . . . . .	10
D. TRANSMISI DAYA PADA POROS . . . . .	10
BAB III. BEBAN BENGKOK MURNI . . . . .	16
A. DISTRIBUSI TEGANGAN . . . . .	16
B. MOMEN TAHAN BENGKOK . . . . .	18
C. MOMEN LUASAN KEDUA . . . . .	19
D. MODULUS IRISAN . . . . .	21
BAB IV. SISTEM PEMBEBANAN PADA BALOK . . . . .	26
A. KLASIFIKASI TUMPUAN PADA BALOK . . . . .	26
1. Tumpuan . . . . .	26
2. Balok . . . . .	28
B. REAKSI PADA TUMPUAN DAN BALOK . . . . .	29
C. GAYA AKSIAL PADA BALOK . . . . .	31
D. GAYA GESER PADA BALOK . . . . .	31
E. MOMEN LENTUR PADA BALOK . . . . .	33
F. DIAGRAM GAYA GESER, AKSIAL, MOMEN . . . . .	34
BAB V. DEFLEKSI PADA BALOK . . . . .	39
A. METODA INTEGRAL LIPAT . . . . .	40
1. Penentuan Nilai Batas . . . . .	43
2. Lendutan Pada Beban Merata . . . . .	44
3. Lendutan Pada Beban Terpusat . . . . .	48

B. METODA LUAS MOMEN . . . . .	54
C. METODA SUPERPOSISI . . . . .	59
BAB VI. TEGANGAN KOMBINASI . . . . .	66
A. BEBAN EKSENTERIK . . . . .	66
B. ANALISA TEGANGAN GANDA AKSIAL . . . . .	72
C. ANALISA TEGANGAN KOMPLEK . . . . .	77
1. Tegangan Utama . . . . .	80
2. Tegangan Maksimum . . . . .	84
D. LINGKARAN MOHR . . . . .	85
E. TEORI PATAH BAHAN . . . . .	92
1. Teori Rankine . . . . .	92
2. Teori Guest . . . . .	92
3. Teori Saint Venant . . . . .	93
4. Teori Haigh . . . . .	93
5. Teori Henky dan Mises . . . . .	94
BAB VII. BEBAN TEKUK . . . . .	97
A. ASUMSI KEBERLAKUAN KOLOM . . . . .	97
B. CARA PEMBEBANAN PADA KOLOM . . . . .	97
C. BEBAN KRITIS . . . . .	99
D. PENURUNAN RUMUS KOLOM . . . . .	100
E. BATASAN KEBERLAKUAN RUMUS EULER . . . . .	103
F. KESETARAAN PANJANG . . . . .	105
G. RUMUS EMPIRIS KOLOM . . . . .	105
1. Rumus Rankine . . . . .	105
2. Rumus Johnson . . . . .	107
a. Rumus Garis Lurus . . . . .	107
b. Rumus Parabolic . . . . .	108
H. BEBAN EKSENTRIK PADA KOLOM PANJANG . . . . .	110
BAB VIII. STATIKA TAK TENTU . . . . .	113
A. STATIKA TAK TENTU PADA BEBAN AKSIAL . . . . .	113
1. Beban F Ditahan Oleh Sejumlah Tali Dengan Variasi Pertambahan Panjang . . . . .	113
2. Beban F Ditahan Oleh Baha Komposit Dengan Prtambahan Panjang Yang Sama . . . . .	115

3. Beban F Ditahan Oleh Sejumlah Bahan  
Dengan arah Tegangan Berlawanan . . . . 117

B. STATIKA TAK TENTU PADA PEMBEBANAN BALOK . 119

DAFTAR PUSTAKA . . . . . 126

LAMPIRAN . . . . . 127

# BAB I

## TEGANGAN, BEBAN AKSIAL, DAN BEBAN GESER

### A. PENDAHULUAN

Dalam rancangan suatu konstruksi mesin terdapat bermacam-macam tinjauan dan analisa agar mendapatkan hasil yang optimal. Salah satu tinjauan yang tak bisa diabaikan adalah tinjauan kekuatan bahan (*strength of materials*). Tinjauan kekuatan bahan dalam suatu rancangan konstruksi pada dasarnya terdiri dari dua aspek yaitu kekuatan bahan yang diakibatkan oleh pengaruh lingkungan dalam kaitannya dengan waktu, yang biasa dibahas dalam ilmu pengetahuan bahan (metalurgi) dan aspek kekuatan bahan yang ditinjau akibat beban gaya yang bekerja, apakah beban statis ataupun dinamis. Dalam buku ini akan membahas aspek kekuatan bahan dalam menerima suatu beban yang khususnya banyak berkaitan dengan beban statis.

Fenomena pembebanan adalah suatu fenomena bekerjanya sejumlah vektor gaya pada bahan penahan. Oleh sebab itu pemahaman tentang karakteristik vektor seperti penjumlahan sejumlah gaya, tegasnya adalah pemahaman tentang diagram benda bebas (*free body diagram*) harus sudah dikuasai sebelum mengkaji kekuatan bahan dalam buku ini. Tanpa pemahaman diagram benda bebas, yang biasanya banyak dibahas dalam statika, kajian kekuatan bahan ini akan sering terbentur. Penulis mengasumsikan bahwa pembaca telah menguasai konsep ini

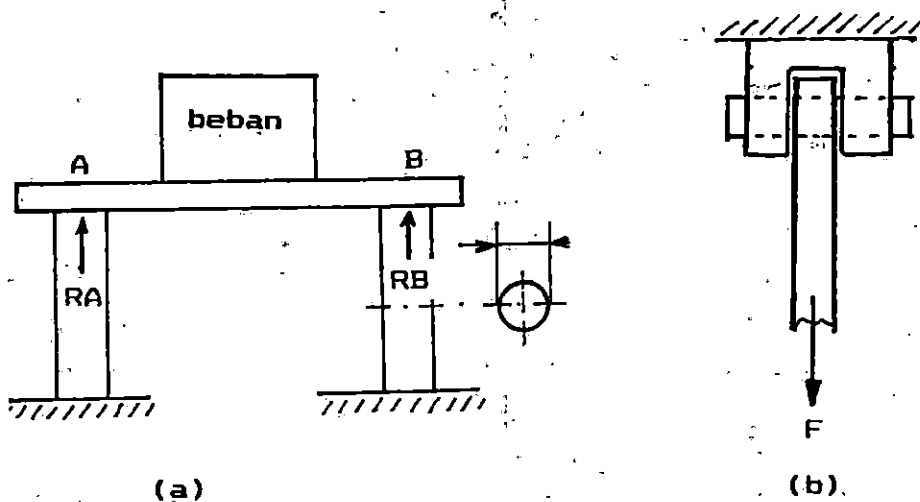
### B. TEGANGAN

Dalam pembahasan awal ini pengkajian tegangan dilibatkan dengan beban aksial oleh sebab pada dasarnya konsep tegangan lebih mudah didefinisikan pada kasus yang sederhana yaitu pada beban aksial yang berupa tarik ataupun tekan dan beban geser. Pada kasus

sistem pembebanan yang lain dapat ditransformasikan dari konsep tegangan yang didefinisikan disini.

Jika suatu bahan menerima beban yang berupa gaya seperti pada Gambar 1.1 (a), kemudian bahan tersebut dipotong pada arah yang tegak lurus terhadap arah gaya tersebut. Maka menghasilkan penampang potong normal, yang kemudian intensitas perlawanan bahan akibat gaya tersebut pada arah yang tegak lurus penampang normal tersebut disebut tegangan normal. Tegangan normal ini terdapat dua kemungkinan yaitu berupa tegangan tekan dan tegangan tarik.

Bila ditinjau secara elemeter yaitu bagian-bagian yang kecil tak berhingga sesungguhnya perlawanan partikel-partikel dalam bahan tersebut tidaklah sama, oleh sebab keberadaan partikel pada hakekatnya tidaklah homogen sempurna.



Gambar 1.1. Beban Aksial dan Geser

Tegangan adalah intensitas perlawanan bahan terhadap gaya yang bekerja dengan titik tangkap resultante gaya tersebut terletak pada titik berat bidang potong. Secara elementer didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Dengan mengambil asumsi keberadaan bahan tersebut homogen, maka tegangan tarik atau tekan biasa didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right] \dots \dots \dots (1.1)$$

Sedangkan gaya yang bekerja searah dengan penampang potong lihat Gambar 1.1 (b), disebut gaya geser. Gaya ini menghasilkan tegangan geser. Secara elementer didefinisikan:

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Dengan mengambil asumsi keberadaan bahan tersebut homogen, maka tegangan geser ( $\tau$ ) dengan dimensi gaya persatuan luas, memiliki rumus:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right] \dots \dots \dots (1.2)$$

( Popov, 1993)

Definisi tegangan ini sangat perlu untuk dipahami oleh sebab pada sistem pembebanan yang akan dibahas lebih lanjut fenomenanya lebih rumit, namun pada dasarnya merupakan aplikasi yang unik dari konsep tegangan disini.

Keterangan:

$\sigma$  = tegangan tarik / tekan...  $N/m^2$

$\tau$  = tegangan geser ... $N/m^2$

F = Gaya yang bekerja... N

A = Luas penampang potong... $M^2$

MILIK UPT PERPUSTAKAAN  
IKIP PADANG



### C. TEGANGAN IJIN

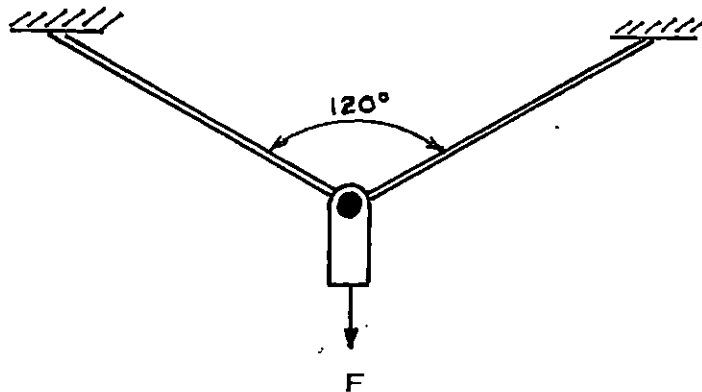
Dalam suatu eksperimen laboratorium pembebanan aksial dilakukan pada suatu bahan ukuran tertentu. Pembebanan aksial ini dilakukan secara berangsur-angsur dari beban yang rendah hingga mencapai beban maksimum yaitu ketika bahan tersebut putus. Beban maksimum ini disebut ultimat (*ultimate load*) (Popov, 1993). Ternyata pembebanan ini sebelum mencapai putus dilakukan secara berulang-ulang, membuktikan bahwa jumlah siklus pengulangan ini dapat menurunkan nilai tegangan putusnya. Artinya jika suatu bahan harus putus dalam sekali pembebanan nilai tegangan putusnya lebih tinggi dibandingkan dengan nilai tegangan putus yang dilakukan secara berulang dengan sejumlah kali ulangan. Dengan alasan inilah suatu komponen yang bekerja secara dinamis perlu adanya penggunaan bahan yang opsirakan harus dibawah tegangan putusnya. Tegangan ini disebut tegangan ijin. ( $\bar{\sigma}$  dan  $\bar{\tau}$ ). Perlunya tegangan ijin ini tidak hanya pada beban dinamis tetapi dalam kondisi beban statis pun juga perlu oleh sebab suatu bahan dapat rusak akibat pengaruh lingkungan dalam kaitanya dengan waktu.

Suatu perbandingan antara tegangan putus terhadap tegangan ijin disebut faktor keamanan, yang biasa didefinisikan sebagai

$$v = \frac{\text{tegangan putus}}{\text{tegangan ijin}}$$

Dalam suatu perencanaan tegangan ijin ini dipakai sebagai batas maksimum tegangan operasi, artinya tegangan yang terjadi akibat beban dikala sistem bekerja tidak boleh lebih dari tegangan ijin ini.

Suatu sistem pembebanan yang diikat pada dua buah tali kawat, pada simpul sambungan titik O dipasang pen seperti Gambar 1.2. Jika besar beban  $F$  N dan kawat gantungan terbuat dari bahan dengan tegangan patah tarik  $1000 \text{ N/cm}^2$ , sedangkan pen terbuat dari bahan tegangan patah geser  $800 \text{ N/cm}^2$ . Faktor keamanan 5. Tentukan diameter kawat dan diameter pen.



Gambar 1.2. Sistem Pembebanan Tarik Dan Geser

#### Penyelesaian

Tegangan yang terjadi pada batang penahan 1 sama dengan tegangan pada batang penahan 2, yang masing-masing sebesar:

$$\sigma = \frac{1/2 F}{A \sin 30^\circ} \text{ dimana } A = \pi/4 d^2 = \text{luas penampang pada kedua batang sama.}$$

Nilai tegangan yang dipergunakan adalah tegangan ijin yaitu :  $\bar{\sigma} = \sigma/5$ , diperoleh:  $\bar{\sigma} = 200 \text{ N/cm}^2$ .

$$d = \sqrt{\frac{1/2 \times F}{\pi/4 \times \bar{\sigma} \times 0.5}} \quad (\text{cm})$$

Dengan memasukkan nilai  $F$  dan  $\bar{\sigma}$  pada rumus tersebut akhirnya dapat diperoleh diameter tali.

Sedangkan tegangan ijin geser pada pen juga

dihitung dengan rumus  $\bar{\sigma}_g = \sigma_g / 5$ . Diperoleh tegangan geser ijin pada pen  $\bar{\sigma}_g = 150 \text{ N/cm}^2$ . Diameter pen dihitung dengan rumus:

$$D = \sqrt{\frac{F}{\pi/4 \cdot \bar{\sigma}_g}} \quad (\text{cm})$$

Dengan memasukkan nilai  $F$  dan tegangan geser ijin maka diameter pen dapat diperoleh.

Analisa ini juga bisa dtinjau secara kebalikannya, dalam arti jika telah diketahui diameter pen dan batang penahan serta tegangan ijinnya, maka dapat menentukan nilai beban maksimumnya.

**BAB II**  
**BEBAN PUNTIRAN**

**A. DISTRIBUSI TEGANGAN PUNTIR**

Suatu poros pejal berpenampang lingkaran, menerima beban puntiran, yang berupa torsi (T). Lihat Gambar 2.1. Sebelum terjadi tarikan garis AB sejajar sumbu. Setelah menerima torsi posisi titik B pindah menjadi B', sehingga terbentuklah sudut  $\gamma$  yang dibatasi oleh garis AB dan AB', serta sudut  $\theta$  yang dibentuk oleh garis Ob dan OB'.

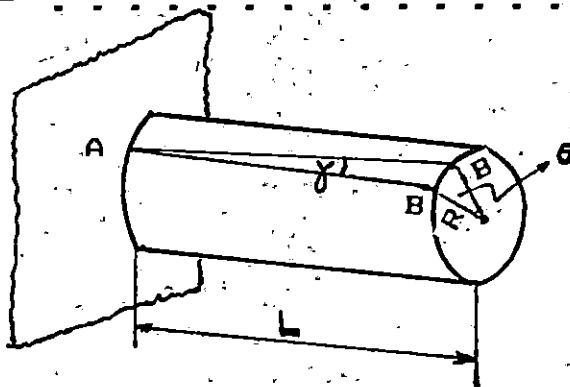
Perpindahan titik B menjadi B' berarti pada poros tersebut terjadi tegangan gelincir atau tegangan geser, dengan regangan geser =  $\gamma$ . Oleh sebab sudut ini dalam prakteknya sangat kecil maka dapat didekati dengan:

$$\text{Regangan geser } \gamma = \frac{BB'}{AB}$$

$$BB' = R.\theta, \text{ maka } \gamma = \frac{R.\theta}{L}$$

Tegangan Geser pada permukaan poros  $\tau_R = \text{modulus ketegaran} \times \text{regangan geser}$ . Atau:

$$\tau_R = \frac{GR\theta}{L} \dots \dots \dots (2.1)$$

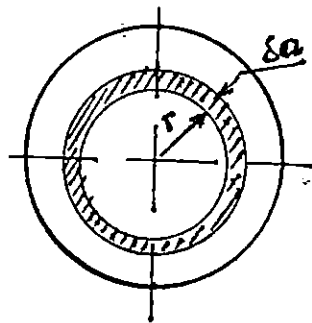


**Gambar 2.1. Puntiran Pada Poros**  
**(Titherington & Rimmer, 1984)**

Nilai  $\tau R$  menyatakan tegangan geser pada bidang yang melingkar sejauh  $R$  dari titik pusat poros  $O$ . Nilai tegangan geser ini paling besar terletak pada bidang terluar, sedangkan pada titik  $O$  tidak terjadi tegangan. Atau dengan kata lain besar tegangan geser ini sebanding dengan jari-jari  $r$ .

#### B. MOMEN TAHANAN PUNTIR

Poros dapat dianggap sebagai sejumlah lapisan tipis yang berjari-jari  $r$ , dengan luas penampang  $\delta a$  yang terbentuk dari lebar  $\delta r \times 2\pi r$ . Lihat Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Momen Tahanan  
(Titherington & Rimmer, 1984)

Tegangan geser pada lapisan ini adalah:

$$\tau = \frac{(G\theta)}{L} \times r$$

$$\frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{L} \dots \dots \dots (2.2)$$

Gaya yang bekerja pada bidang transversal =  $\tau \times \delta a$

$$= \frac{(G\theta)}{L} \times r \cdot \delta a$$

$$\begin{aligned} \text{Momen gaya ini terhadap sumbu poros} &= \frac{(G\theta)}{L} \times r \cdot \delta a \cdot r \\ &= \frac{(G\theta)}{L} \times \delta a \cdot r^2 \end{aligned}$$

Momen tersebut secara elementer seluas  $\delta a$ . Pada dasarnya untuk seluruh permukaan/ lapisan gaya ini bekerja secara merata sekeliling lapisan. Momen hambatan adalah jumlah semua momen lapisan tersebut, yang secara seimbang harus sama dengan torsi yang bekerja. Sehingga:

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{(G\theta)}{L} \times r^2 \delta a \\ &= \frac{(G\theta)}{L} \times \sum r^2 \delta a \end{aligned}$$

Nilai  $\sum r^2 \delta a$  adalah momen polar kedua luasan dari penampang melintang poros terhadap sumbunya. dan diberi simbol J, sehingga :

$$\begin{aligned} T &= \frac{(G\theta)}{L} \times J \\ \frac{T}{J} &= \frac{G\theta}{L} \dots \dots \dots (2.3) \end{aligned}$$

Jika digabungkan dengan rumus (2.2) diatas maka:

$$\frac{\tau}{r} = \frac{T}{J} = \frac{G\theta}{L} \dots \dots \dots (2.4)$$

Nilai  $\tau$  disesuaikan dengan jarak  $r$  yang dipakai. Untuk  $\tau$  maksimum terjadi pada jari-jari R, yaitu disekeliling permukaan luar poros.

### C. MOMEN POLAR KEDUA DARI SUATU LUASAN

Sebagaimana diterangkan diatas bahwa momen kedua luasan yang diukur pada suatu titik netral yaitu pusat. Maka momen tersebut merupakan momen titik dalam bidang kutub, yang selanjutnya disebut momen polar keda luasan dengan simbol  $J = \sum r^2 \delta a$

Elemen  $\delta a$  sesungguhnya merupakan hasil kali dari pita selebar  $\delta r$  terhadap panjangnya, yaitu keliling lingkaran =  $2\pi r$ , sehingga:  $J = \sum 2\pi r^3 \delta r$ .

Untuk poros pejal diperoleh:

$$J = \int_0^R 2\pi r^3 \delta r$$

$$= \frac{\pi D^4}{32} \dots \dots \dots (2.5)$$

Untuk poros berlobang diperoleh:

$$J = \int_{d/2}^{D/2} 2\pi r^3 \delta r$$

$$= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \dots \dots \dots (2.6)$$

(Titherington & Rimmer, 1984)

### D. TRANSMISI DAYA PADA POROS

Dalam bagian ini akan menjelaskan kemampuan poros dalam mentransmisikan daya, yang hanya menerima beban puntiran saja. (Khurmi, 1982)

Dengan mensubtitusikan nilai  $J$  dari rumus 2.5. kedalam rumus 2.4. maka torsi yang dapat di transmisikan ialah:

$$T = \tau \frac{\pi d^4}{32} \times \frac{1}{r}$$

$$T = \frac{\pi}{16} \tau d^3 \quad \text{Nm} \quad \dots \dots \dots (2.7)$$

Jadi torsi yang dapat ditransmisikan maksimum oleh poros dinyatakan pada rumus (2.7) dengan mengambil  $\tau$  adalah nilai tegangan geser maksimum yang diijinkan dari bahan poros.

Untuk poros berlobang maka rumus torsi diperoleh dari substitusi rumus (2.6) dengan rumus (2.4) maka:

$$T = \frac{\pi}{16} (D^4 - d^4) \times \tau \times \frac{2}{D}$$

$$T = \frac{\pi}{16} \tau \left( \frac{D^3 - d^3}{D} \right) \dots \dots \dots (2.8)$$

Keterangan:

- T : torsi yang dapat ditransmisikan . . .Nm
- $\tau$  : nilai tegangan yang diijinkan dari bahan poros  $\frac{N}{m^2}$
- D : diameter luar poros m
- d : diameter dalam poros m

Jika poros tersebut mentransmisikan dalam bentuk daya :

Daya = usaha setiap satuan waktu.

Usaha untuk satu putaran poros = gaya tangensial (Ft) x keliling lingkaran poros ( $2\pi r$ ). Atau:

$$U = Ft \cdot 2\pi r$$

Sedangkan usaha yang dilakukan selama n putaran:

$$U = Ft \cdot 2\pi r n, \text{ padahal } Ft \cdot r = \text{torsi.}$$

Jika poros tersebut mentransmisikan daya:

Daya = usaha setiap satuan waktu.

Usaha untuk satu putaran poros = gaya tangensial (Ft) x keliling lingkaran poros ( $2\pi r$ ). Atau:

$$U = Ft \cdot 2\pi r$$



Sedangkan usaha yang dilakukan selama  $n$  putaran:

$U = Ft \cdot 2\pi rn$ , padahal  $Ft \cdot r = \text{torsi}$ . Maka Daya:

$$P = \frac{Ft \cdot 2\pi rn}{60}$$

$$= \frac{T \cdot 2\pi n}{60}$$

$$P = T \cdot \omega$$

Dimana  $\omega$  adalah kecepatan sudut rad/det.  $P$  adalah daya dalam satuan Nm/det = Watt, jika torsi dalam satuan Nm.  $P$  dalam satuan kgm/det, jika torsi dalam satuan kgm. Dan  $P$  dalam satuan pk atau Hp jika rumus tersebut dalam bentuk:

$$P = \frac{T \cdot 2 \pi n}{60 \cdot 75} \dots \dots \dots (2.9)$$

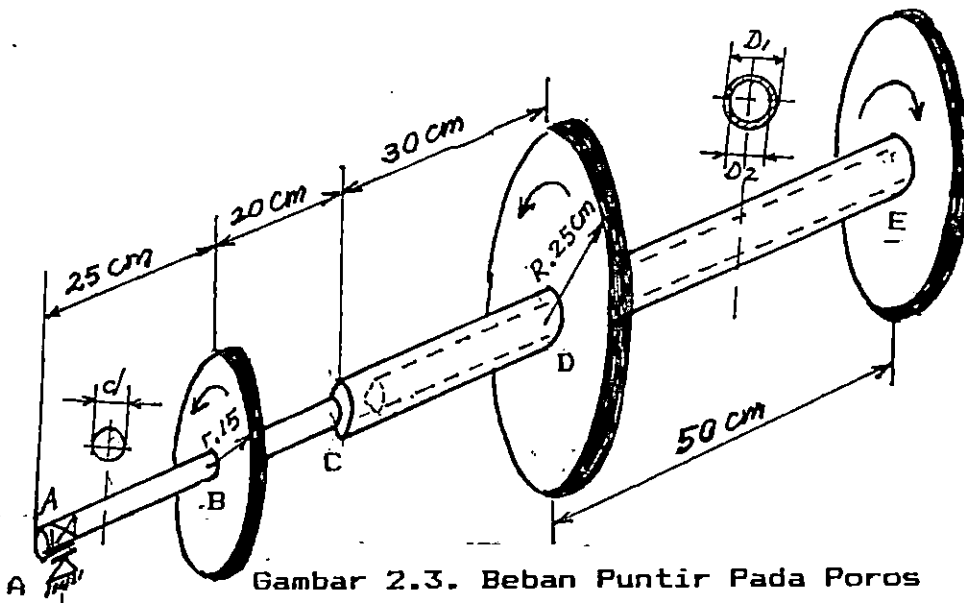
Yang perlu dicatat bahwa nilai torsi tersebut adalah torsi rata-rata, sehingga dalam perhitungan perlu diperhatikan faktor keselamatan dengan melihat fluktuasi torsi tertinggi. (Khurmi, 1982, h.107)

#### Contoh 1.2

Suatu poros yang berbentuk pejal di bagian ujung dan poros berlobang di bagian pangkal, menahan beban puntir seperti pada Gambar 2.4. Puli pada bagian E berfungsi sebagai transmisi daya dari sumber, puli pada bagian D dan B sebagai transmisi ke alat dan mesin yang digerakkan. Ukuran poros tersebut dapat dilihat pada gambar. Tentukan sudut puntiran yang terbentuk akibat beban tersebut.

#### Penyelesaian

Dalam menyelesaikan permasalahan ini yang terpenting adalah menghitung torsi pada masing-masing bagian/ potongan pada poros dengan memperhatikan arah dan besar gaya pada puli sepanjang poros AE.



Gambar 2.3. Beban Puntir Pada Poros

Puli B dan puli D berfungsi sama sebagai penerus daya dengan arah yang sama pula. Sehingga jumlah torsi akibat dua puli ini akan seimbang dengan satu puli E dalam membentuk momen puntir pada poros. Sehingga persamaan torsi sebagai berikut:

$$\text{Torsi AE} = F_1 \cdot r + F_2 \cdot R$$

Torsi AB = 0, torsi BC = torsi CD = torsi BD =  $F_1 \cdot r = 1000 \times 0.15 = 150$  Nm. Torsi DE =  $F_1 \cdot r + F_2 \cdot R = 150 + 4000 \times 0.25 = 1150$  Nm.

Untuk lebih mudahnya perlu dijelaskan simbol-simbol yang akan dipakai, sebagai berikut:

$\theta_{AE}$  : sudut puntir total sepanjang AE

$\theta_{BC}$  : sudut puntir sepanjang BC

$\theta_{CD}$  : sudut puntir sepanjang CD

$\theta_{DE}$  : sudut puntir sepanjang DE

Rumus yang digunakan untuk menghitung sudut puntir ialah:

$$\theta_{BC} = \frac{T_{BC} \cdot BC}{I_d \cdot G} = \frac{150 \times 0.2}{\frac{\pi}{32} (0.025)^4 \times 80 \cdot 10^9} = 0.0098$$

$$\theta_{CD} = \frac{T_{CD} \cdot CD}{I_D \cdot G} = \frac{150 \times 0.3}{\frac{\pi}{32}(0.050^4 - 0.025^4) \times 80 \times 10^9} = 0.001$$

$$\theta_{DE} = \frac{T_{DE} \cdot DE}{I_D \cdot G} = \frac{1150 \times 0.5}{\frac{\pi}{32}(0.050^4 - 0.025^4) \times 80 \times 10^9} = 0.0125$$

Sudut puntir pada ujung poros, yaitu pada titik A adalah  $\theta_{AE} = 0.0098 + 0.001 + 0.0125 = 0.0233$  radian, atau  $1.38^\circ$ .

Perhitungan kekuatan poros yang ditinjau dari tegangan puntir atau torsi saja, pada kenyataannya tidak pernah ditemui oleh sebab dalam transformasi daya selalu ditemui bengkokan sehingga tinjauan kekuatan harus mengkombinasi dari bentuk tegangan yang lain. Pembahasan ini akan ditemui pada bab tegangan gabungan.

### Contoh 1.3.

Suatu poros berputar dengan rotasi 200 Rpm, digunakan untuk memindahkan daya sebesar 25 tk. Poros terbuat dari mild steel dengan tegangan putus geser =  $1100 \text{ kg/cm}^2$ , dengan faktor keamanan 5. Tentukan diameter poros untuk memindahkan daya tersebut. Jika momen bengkok dan fluktuasi getaran diabaikan.

### Penyelesaian

Dari rumus 2.9, dijelaskan hubungan torsi dengan daya sebagai berikut:

$$P = \frac{T \cdot 2 \pi \cdot n}{60.75} \quad \text{atau} \quad T = \frac{P \cdot 4500}{2\pi n}$$

Dari soal diketahui ;  $P = 25 \text{ tk}$ ,  $n = 200 \text{ rpm}$ , Tegangan geser ijin  $\bar{\tau} = 1100/5 = 420 \text{ kg/cm}^2$ , Sehingga:

$$T = \frac{25 \times 4500}{2 \times 3.14 \times 200} = 89.5 \text{ kgm.}$$

Dari rumus 2.7, dituliskan :  $T = \frac{\pi}{16} \tau d^3$ , jika bermaksud menghitung d maka:

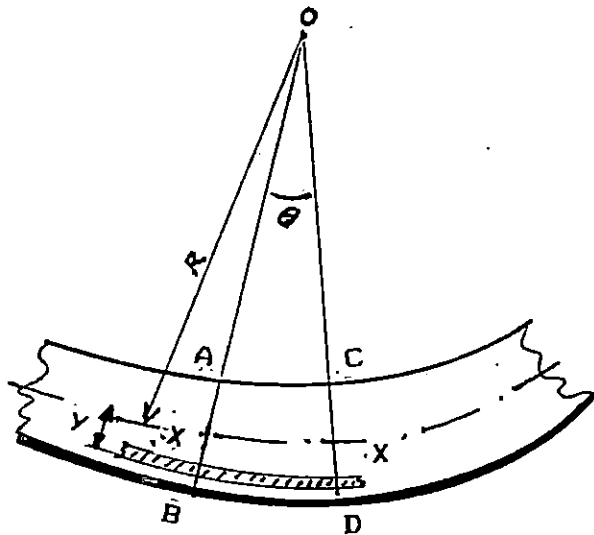
$$d = \sqrt[3]{\frac{16 T}{\pi \tau}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 89.5 \times 10^2}{3.14 \times 420}}$$

diperoleh diameter poros  $d = 4.77$  cm.

### BAB III BEBAN BENGKOK MURNI

#### A. Distribusi Tegangan

Uraian tentang beban aksial apakah bersifat tekan ataupun tarik sebagaimana telah dibahas sebelumnya, adalah beban yang titik tangkap gayanya terletak pada titik berat penampang potong dan arahnya tegak lurus terhadap penampang potong tersebut. Sedangkan pada beban bengkok arah beban tersebut tegak lurus terhadap sumbu batang dan batang tersebut ditumpu dengan jarak tertentu dari beban tersebut.



Gambar 3.1. Beban Bengkok

Jika suatu batang menerima beban yang arahnya tegak lurus terhadap sumbu batang seperti pada Gambar 3.1, maka terjadi pemebngkokan atau pelenturan, yang semula lurus menjadi lengkung. Jika ditarik garis melintang terhadap sumbu maka diperoleh titik A, titik B yang masing-masing pada sisi terluar bawah dan atas. Sedangkan X terletak pada sumbu. Perpotongan dua garis melintang yang diperpanjang AB dan CD diperoleh titik O, sebagai titik pusat juring lingkaran dengan jari-jari OX.

757/K/97-K1(2)

K1  
620.103  
17 MUH

Ketika pembebanan terjadi dan batang jadi lengkung, pada sisi terluar AC terjadi pembebanan tekan. Pada sisi terluar BD terjadi pembebanan tarik dan pada sumbu X-X merupakan sisi netral. Grafik distribusi tegangan tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.1 (b).

Pada sisi yang terjadi penekanan ataupun penarikan maka terjadi regangan pula. Untuk melihat regangan yang terjadi, dapat dilihat serat batang PQ sejauh y dari sumbu X-X. Regangan yang terjadi ialah:

$$\epsilon = \frac{PQ - XX}{XX}$$

Dimana :  $XX = R\theta$

$$PQ = (R+y)\theta$$

$$\text{Maka : } \epsilon = \frac{(R+y)\theta - R\theta}{R\theta}$$

$$\epsilon = \frac{y}{R} \dots \dots \dots (3.1)$$

Tegangan adalah modulus kenyal (E) x regangan ( $\epsilon$ ) maka tegangan pada lapisan PQ, yaitu sejauh y dari sumbu XX ialah

$$\sigma = E \epsilon$$

$$= E \frac{y}{R}$$

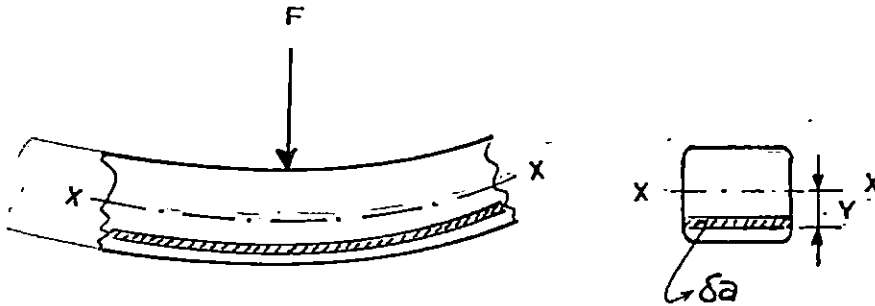
$$\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \dots \dots \dots (3.2)$$

MILIK UPT PERPUSTAKAAN  
IKIP PADANG

Besar tegangan tersebut berbanding lurus terhadap y, dimana pada  $y=0$  yaitu pada sumbu netral nilai tegangan = 0, dan tegangan maksimum terletak pada y maksimum sampai sisi terluar.

## B. MOMEN TAHANAN BENGKOK

Akibat pembebanan maka terjadi pembengkokan. Berapakah besar momen bengkok yang terjadi?.... Dipandang suatu elemen luas  $\delta a$  sejauh  $y$  dari sumbu netral.



Gambar 3.2. Momen Tahanan Bengkok

Lihat Gambar 3.2. Pada elemen  $\delta a$  tersebut terhadap sumbu netral terjadi momen sebesar gaya seluas  $\delta a$  dikalikan dengan  $y$ . Sehingga besar momen:

$$m = \sigma \cdot \delta a \cdot y \quad \text{Dimana } \sigma = \frac{E}{R} y$$

$$= \frac{E}{R} \delta a y^2$$

Momen total sama dengan momen tahanan yang dilakukan oleh batang akibat bengkok, yang besarnya sama dengan jumlah dari serat-serat momen, yaitu:

$$M = \sum \frac{E}{R} \delta a y^2$$

$$= \frac{E}{R} \sum \delta a y^2$$

Nilai dari  $\int \delta a y^2$  disebut momen luasan kedua, sering disebut dengan I. Sehingga rumus umum momen ini dalam kaitannya dengan rumus (3.2):

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y} \dots \dots \dots (3.3)$$

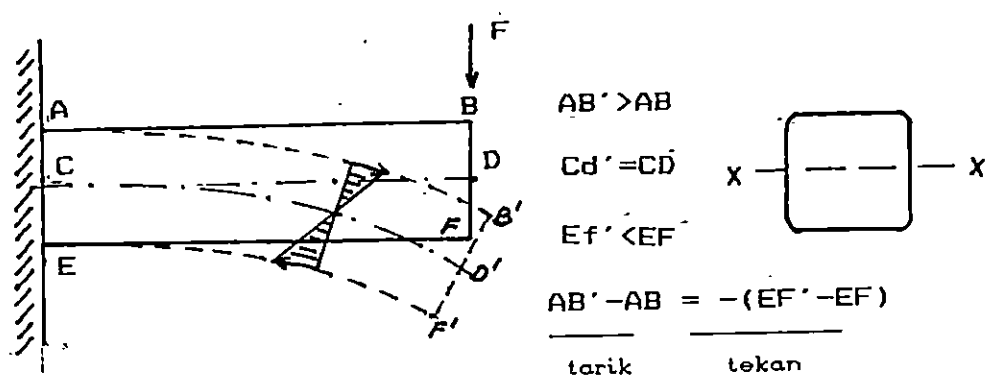
Tegangan maksimum terjadi pada y maksimum yaitu pada sisi terluar batang penahan bengkokan. Untuk batang penampang lingkaran maka y maksimum adalah jari-jari lingkarannya.

**Keterangan:**

- M : momen bengkok Nm
  - I : Momen luasan kedua m<sup>4</sup>
  - E : Modulus kenyal N/m<sup>2</sup>
  - R : Jari-jari kelengkungan batang bengkok m
  - $\sigma$  : Tegangan bengkok N/m<sup>2</sup> pada posisi sejauh y
  - y : jarak sumbu netral terhadap suatu elemen gaya tertentu.
- (Rimmer, 1981)

**C. MOMEN LUASAN KEDUA**

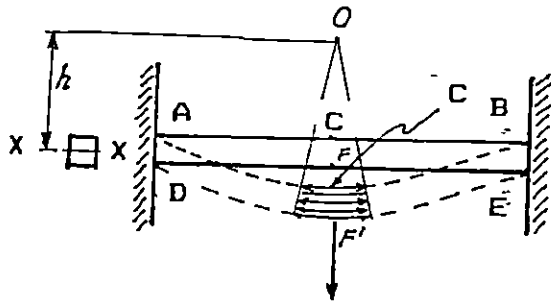
Momen luasan ini terdiri dari dua kondisi yaitu pembebanan yang menghasilkan garis netral terletak



**Gambar 3.3. Sistem Pembebanan Yang Menghasilkan Garis Netral Berimpit Dengan Titik Beratnya**



pada titik berat penampang potong (centroid) seperti pada Gambar 3.2, dan pembebanan yang garis netralnya tergeser sejauh h dari centroidnya, lihat Gambar 3.4.



AC'B > ACB : tegangan tarik sisi atas  
 -----  
 DF'E > DFE : tegangan tarik sisi bawah

Gambar 3.4. Sistem Pembebanan Yang Menghasilkan Garis Netralnya Tergeser

Rumus untuk menurunkan momen luasan terhadap sumbu sebagai berikut:

1. Momen luasan terhadap sumbu, Lihat Gambar 3.3.

$$I_{xx} = \int_{-d/2}^{d/2} b x^2 dx = \frac{1}{12} b d^3 \dots \dots \dots (3.4)$$

2. Momen luasan terhadap garis yang tergeser, lihat Gambar 3.4.

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_A (h+y)^2 \delta A \\ &= h^2 \int_A \delta A + 2h \int_A y \delta A + \int_A y^2 \delta A \\ &= I_O + Ah^2 \dots \dots \dots (3.5) \end{aligned}$$

Dimana nilai  $I_O$  sama dengan nilai rumus (16). Untuk berbagai bentuk penampang dapat dilihat pada lampiran 1:

(Popov, 1993, h.140)

#### D. MODULUS IRISAN

Rumus 3.3 menyatakan  $\sigma/y$ , nilai  $\sigma$  tersebut berbanding lurus dengan  $y$ . Untuk tagangan maksimum terletak pada  $y$  maksimum yaitu jarak dari sumbu netral terhadap sisi terluar dari penampang potong. Sehingga dapat ditulis:

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma_{\text{maks}}}{y_{\text{maks}}}$$

$$\sigma = \frac{M}{I/y_{\text{maks}}}$$

Tegangan tersebut adalah tegangan bengkok maksimum, dan nilai  $I/y_{\text{maks}}$  selanjutnya disebut modulus irisan, dengan simbol  $Z$ . Sehingga diperoleh tegangan maksimum

$$\sigma_{\text{maks}} = \frac{M}{Z} \dots \dots \dots (18)$$

Sebagai contoh untuk baja berpenampang potong irisan berbentuk persegi panjang, dengan ukuran lebar  $b$  dan tinggi  $h$ , beban bengkok dari searah dengan sisi  $h$ . Maka diperoleh :  $I = bh^3/12$ ,  $y_{\text{maks}} = h/2$ . Sehingga modulus irisan :

$$z = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bd^2}{6}$$

Untuk bahan berpenampang padat lingkaran:

$$z = \frac{\pi D^4/64}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}$$

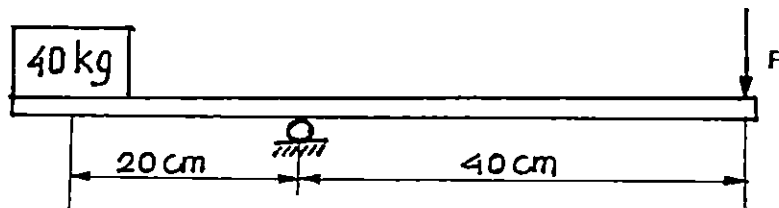
Berbagai nilai  $z$  untuk bermacam-macam bentuk penampang dapat dilihat pada Tabel 1.

(Rimmer, 1981)

### Contoh 3.1.

Suatu batang pengungkit seperti Gambar 3.5, digunakan untuk mengungkit beban 40 kg. Tentukan ukuran penampang potong irisan berupa segi empat dengan ukuran  $b$  dan  $h$  dengan perbandingan  $b=2h$ . Jika bahan terbuat dari baja dengan tegangan maksimum yang diijinkan  $=500 \text{ kg/cm}^2$ .

### Penyelesaian



Gambar 3.5. Peristiwa Beban Bengkok

Berdasarkan konstruksi tersebut, sebelum menentukan ukuran batang pengungkit terlebih dahulu harus menghitung letak momen terbesar di sepanjang batang AB. Panjang AC = 0.5 x panjang CB, maka  $F = 20 \text{ kg}$ . Momen terbesar terletak di titik C yaitu:

$$M_c = 20 \times 40 = 800 \text{ kgcm.}$$

Rumus untuk menghitung tegangan bengkok yang terjadi:

$$\sigma_b = \frac{M_c}{Z} \quad \text{dimana} \quad Z = \frac{bh^2}{6}, \quad \text{oleh sebab } b=2h$$

$$\text{maka } z = \frac{2h \cdot h^3}{6} = \frac{h^4}{3}$$

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{M_c}{\sigma_b} \quad \longrightarrow \quad h = \sqrt[4]{\frac{M_c \cdot 3}{\sigma_b}} = \sqrt[4]{\frac{800 \times 3}{500}}$$

Diperoleh  $h =$             cm dan  $b =$             cm.

### Contoh 3.2.

Suatu poros panjang 1 m, ditumpu dikedua ujungnya dengan menggunakan bearing. Di tengah-tengah poros terletak beban melalui puli sebesar 30 KN. Jika bahan poros tersebut bertegangan bengkok tidak boleh lebih dari  $60 \text{ N/mm}^2$ . Tentukan diameter poros tersebut.

Gambar 3.6. Poros Dengan Beban Bengkok

#### Penyelesaian

Poros tersebut diasumsikan hanya menerima beban bengkok saja, artinya puntiran poros diabaikan. Tegangan bengkok yang terjadi:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{Z} \quad \text{Dimana } Z = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 M_b}{\sigma_b \pi}}$$

Momen bengkok maksimum terletak ditengah yaitu reaksi pada titik A kali  $0.5 \times L$ . atau:

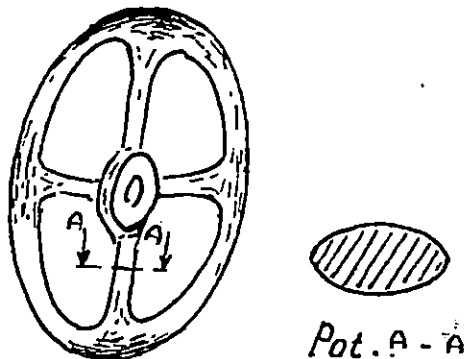
$$M_b = \frac{30000}{2} \times 0.5 = 7500 \text{ Nm} = 75 \times 10^6 \text{ Nmm.}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \times 75 \times 10^6}{\pi \times 60}} = 108.2 \text{ mm}$$

(Khurmi, 1982)

### Contoh 3.3.

Suatu puli digunakan untuk mentransmisi daya 10 tk, lihat Gambar 3.4. Bekerja pada putaran 400 rpm. Puli tersebut berdiameter 1.2 m yang ditahan oleh 4 lengan yang berpenampang elip dengan diameter panjang =  $2 \times$  diameter pendek. Bahan puli memiliki tegangan ijin =  $150 \text{ kg/cm}^2$ .



Gambar 3.4. Pembebanan Pada Puli

Penyelesaian

Rumus yang berkenaan dengan daya dan torsi ialah

$$P = \frac{2\pi nT}{4500}, \text{ atau Torsi} = \frac{4500}{2 \times \pi \times 400 \times 2} = 17.9 \text{ kgm}$$

Gaya tangensial yang terjadi pada lengan ialah :

$$F_t = \frac{T}{R} = \frac{1790}{120/2} = 29.83 \text{ kg}$$

Gaya tersebut ditumpu oleh empat lengan. Untuk satu lengan gaya tangensial  $F_{t1} = F_t/4 = 7.4575 \text{ kg}$ .

Momen bengkok yang terjadi pada satu lengan tersebut:  $M_b = F_{t1} \times R$ .

$$M_b = 7.4575 \times 120/2 = 447.45 \text{ kg-cm.}$$

Modulus irisan suatu penampang berbentuk elip ialah :

$$Z = \frac{\pi}{4} a^2 b$$

Dimana :

$a = 1/2$ . diameter panjang

$b = 1/2$ . diameter pendek

Dalam soal tersebut dijelaskan bahwa diameter panjang = 2x diameter pendek.

Sehingga  $Z = \frac{\pi}{4} 4 b^2 \cdot b = \pi b^3$ .

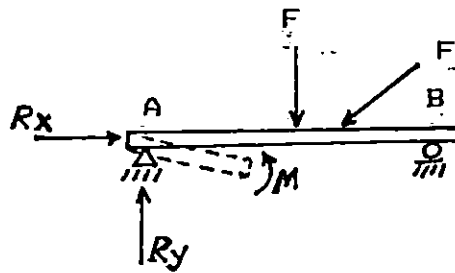
Tegangan bengkok  $\sigma_b = \frac{Mb}{Z}$  atau:

$$\pi b^3 = \frac{447.45}{150}, \text{ Akhirnya diperoleh } b=0.983 \text{ cm.}$$

Jadi diameter pendek elip =  $2xb = 1.966$  cm, dan  
diameter panjang elip =  $2x2b = 3.95$  cm

## BAB IV SISTEM PEMBEBANAN PADA BALOK

Ruang lingkup pembahasan bab ini dibatasi oleh pembebanan dalam "aplikasinya pada balok", dan terdapat tiga pokok bahasan yaitu ; gaya aksial pada balok, gaya melintang pada balok dan momen lentur pada balok, lihat Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Pembebanan Pada Balok

Ketiga pokok bahasan yang tertulis pada bab ini memiliki pengertian sebagai berikut:

- \*. Gaya aksial ialah gaya yang searah dengan arah memanjang batang / gaya searah sumbu x.
- \*. Gaya geser ialah gaya yang melintang terhadap arah memanjang balok / gaya seraha sumbu y.
- \*. Momen lentur ialah momen yang terjadi pada balok akibat gaya melintang.

Untuk membahas beberapa macam gaya tersebut terlebih dahulu perlu dijelaskan klasifikasi tumpuan dan balok.

### A. KLASIFIKASI TUMPUAN DAN BALOK

Dalam sistem pembebanan pada balok terdapat dua macam pengetahuan dasar yang harus dikuasai terlebih dahulu yaitu macam tumpuan dan macam pembebanan balok.

#### 1. Tumpuan

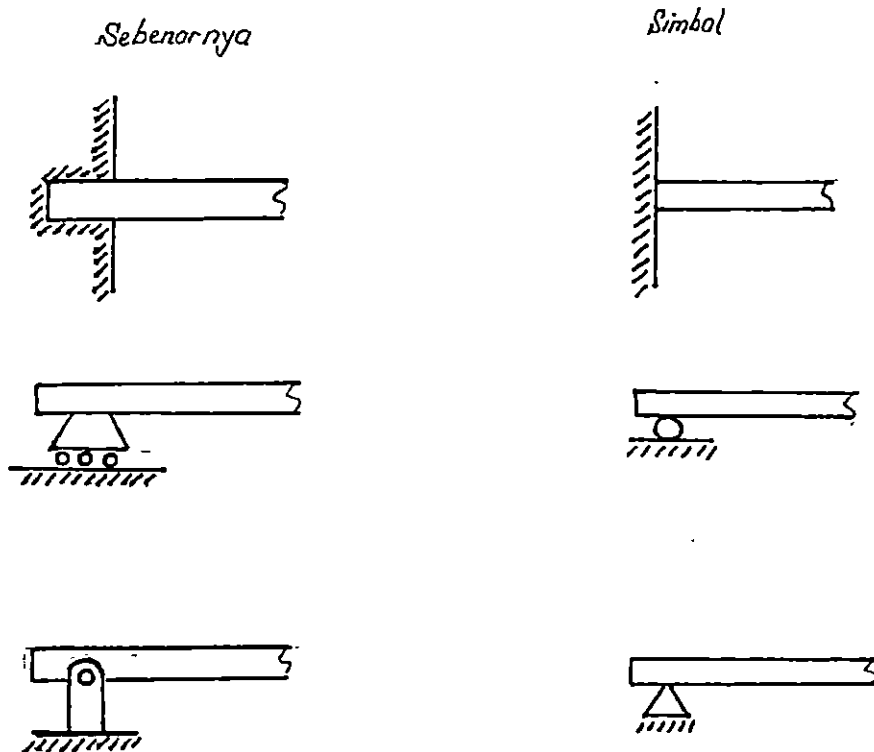
Pemabahasan jenis tumpuan sangat penting oleh sebab jenis tumpuan ini akan menentukan rekasi

serta besar momen sepanjang balok.

Jenis tumpuan yang sering dipakai ialah :

- a. tumpuan jepit
- b. tumpuan rol
- c. tumpuan pasak

ketiga macam tumpuan tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.2. Masing-masing sebelah kiri adalah gambar yang sebenarnya dan sebelah kanan adalah gambar simbol yang digunakan dalam mekanika.



Gambar 4.2. Jenis Tumpuan Pada Balok

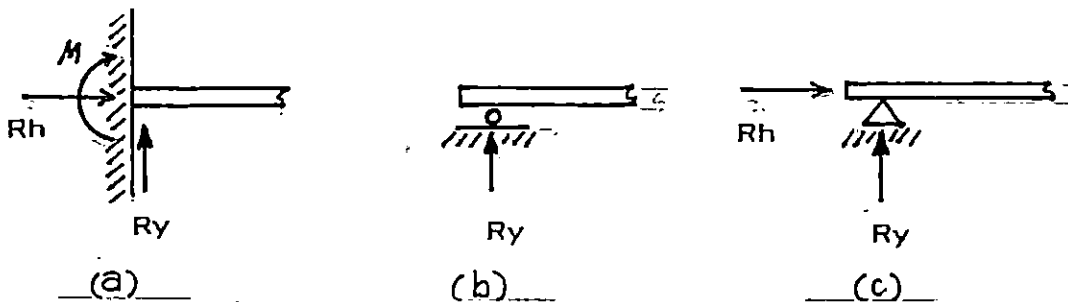
Yang perlu diketahui dari macam-macam tumpuan ialah adanya karakteristik yang berbeda, sebagaimana dijelaskan pada Gambar 4.3. a s/d c.

Gambar 4.3. (a) adalah tumpuan jepit. Pada titik ini akibat beban dapat terjadi rekasi yang berbentuk momen ( $M$ ), reaksi gaya horisontal ( $R_h$ ) dan reaksi gaya vertikal ( $R_v$ ).



Gambar 4.3. (b) adalah tumpuan rol. Pada titik ini akibat beban dapat terjadi reaksi yang berbentuk gaya vertikal ( $R_v$ ), momen ( $M$ ). Sedangkan reaksi gaya horisontal ( $R_h$ ) selalu nol.

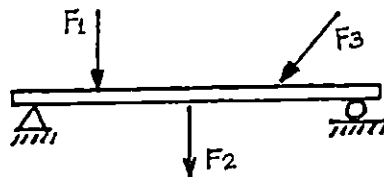
Gambar 4.3. (c) adalah tumpuan pasak. Pada titik ini akibat beban dapat terjadi reaksi yang reaksi gaya horisontal ( $R_h$ ) dan reaksi gaya vertikal ( $R_v$ ). Sedangkan momen ( $M$ ) selalu nol.



Gambar 4.3. Reaksi Pada Berbagai Jenis Tumpuan

## 2. Balok

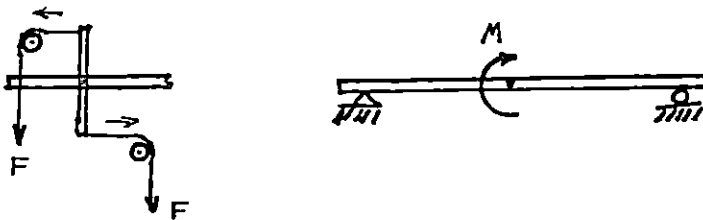
Balok adalah suatu penyangga beban untuk diteruskan kepada tumpuan. Terdapat dua macam balok atau sistem pembebanan pada balok yaitu beban terpusat dan beban merata. Dua jenis sistem pembebanan ini dapat dilihat pada Gambar 4.4, dimana (a) adalah beban yang sebenarnya dan (b) adalah beban yang diidealisasikan / simbol.



(a) Beban Terpusat



(b) Beban Merata



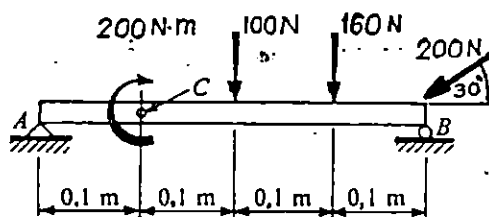
(c) Beban Berbentuk Momen Kopel

Gambar 4.4. Jenis Pembebanan Pada Balok

## B. REAKSI PADA TUMPUAN DAN BALOK

Berikut ini aplikasinya dari sejumlah kaidah yang telah dibahas dalam klasifikasi tumpuan dan pembebanan pada balok.

Gambar 4.5, adalah sistem pembebanan dimana tumpuan A berupa tumpuan pasak, tumpuan B berupa tumpuan rol dan dua buah beban terpusat serta satu buah beban berbentuk momen kopel.



Gambar 4.5. Pembebanan Pada Balok

(Popov, 1993)

Kaidah yang perlu diketahui dalam menghitung reaksi titik tumpuan ialah kaidah statika, yaitu sistem dalam keseimbangan yang harus memenuhi syarat kesimbangan:  $\sum F \text{ horizontal} = 0$ ,  $\sum F \text{ vertikal} = 0$  dan  $\sum \text{momen} = 0$ .

Akibat pembebanan tersebut diasumsikan terjadi reaksi pada titik A adalah tumpuan pasak maka terjadi reaksi yang berupa gaya vertikal  $R_{ay}$ , dan reaksi horizontal  $R_{ax}$ . Sedangkan pada titik B adalah tumpuan rol maka hanya terjadi reaksi vertikal  $R_{by}$ .

Untuk menghitung reaksi ini maka dilakukan perhitungan sebagai berikut:

$$\sum F_x = 0, \text{ diperoleh } R_{ax} = F_3 \sin 30^\circ \\ = 200 \times 0.866 = 173.2 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 +, \\ M_k + 0.2F_1 + 0.3F_2 - 0.4R_{by} + 0.4F_3(\sin 30^\circ) = 0 \\ 200 + 0.2 \times 100 + 0.3 \times 160 - 0.4 \times R_{by} + 0.4 \times 100 = 0. \\ \text{diperoleh } R_{by} = +770 \text{ N.}$$

$$\sum M_B = 0 +, \\ R_{ay}(0.4) - 0.3 F_1 - 0.2 F_2 + 0 \times F_3 = 0 \\ R_{ay}(0.4) - 0.3 \times 100 - 0.2 \times 160 = \\ \text{diperoleh } R_{ay} = -410 \text{ N.}$$

Tanda + pada  $R_{by}$  yaitu +670N menyatakan bahwa asumsi arah reaksi yang telah digambar pada Gambar 4.5 sudah sama. Sedangkan tanda - pada  $R_{ay}$  yaitu -410 N, menyatakan arah yang telah tergambar pada Gambar 4.5 tersebut ternyata berlawanan, arah  $R_{ay}$  yang sebenarnya adalah kebawah.

Untuk memeriksa kebenaran tersebut dapat dicek dengan menghitung jumlah gaya vertikal = 0. Yaitu:  $-410 - 100 - 160 - 100 + 770 = 0$ . Jumlah gaya horizontal = 0, yaitu  $F_3 \sin 30^\circ - R_{ax} = 0$ , yaitu :  $173.2 - 173.2 = 0$ . Ternyata keseimbangan gaya tersebut telah tepat.

### C. GAYA AKSIAL PADA BALOK

Gaya aksial pada balok adalah gaya yang arahnya sejajar dengan sumbu x. Cara perhitungan gaya aksial ini seperti pada perhitungan reaksi titik tumpuan khususnya pada arah horisontal. Secara konsisten arah positif dan negatifnya gaya aksial ini disesuaikan dengan koordinat cartesian, yaitu kekanan positif dan sebaliknya.

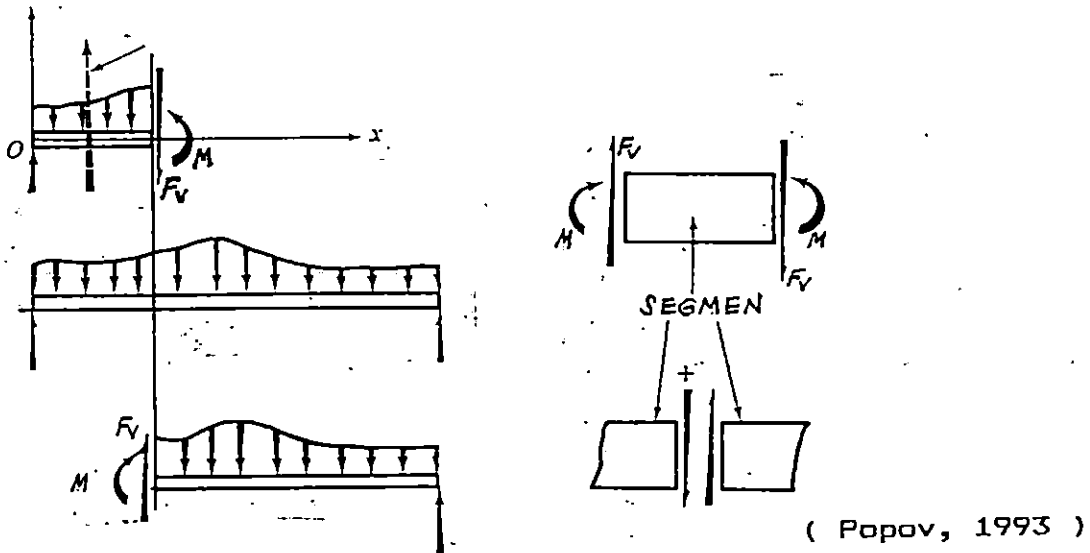
Untuk menghitung gaya aksial ini ialah dengan jalan memproyeksikan semua gaya yang terdapat pada sistem pembebanan pada arah horisontal, kemudian melihat jenis tumpuan yang dipakai untuk menentukan arah serta karakteristiknya dalam menerima gaya horisontal. Yang perlu diperhatikan bahwa untuk jenis pembebanan yang berbentuk momen kopel, beban ini tidak menimbulkan gaya horisontal. Sebagai contoh Gambar 4.5, besar gaya aksial yang terjadi pada titik tumpuan A adalah  $R_{ax}$  yaitu sebesar 173.2 N. Sedangkan momen kopel yang sebesar 200 Nm tidak berpengaruh terhadap gaya aksial ini.

### D. GAYA GESER PADA BALOK

Seperti yang telah dibahas pada bab yang sebelumnya bahwa suatu bahan terjadi kerusakan dari tinjauan mekanika, diakibatkan oleh beban langsung dan momen. Salah satu bentuk beban langsung ialah adanya gaya geser, yaitu kerusakan bahan dengan *bidang penampang potong patahan yang searah dan terletak pada gaya tersebut*. Oleh sebab itu besar gaya geser ini sama dengan resultan gaya vertikal sepanjang batang tersebut. Sebagai contoh lihat Gambar 4.6.

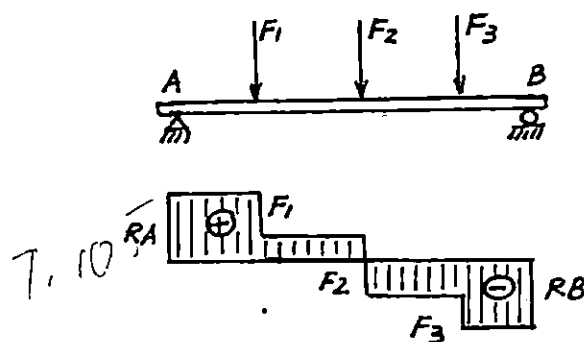
Suatu balok dengan beban merata yang bervariasi sepanjang balok, dipotong pada titik C untuk melihat elemen terkecil pada potongan tersebut akibat beban yang terjadi. Jika elemen tersebut dilihat arah

geseran gaya yang terjadi lihat gambar (b), maka terdapat gaya vertikal dengan arah keatas sebelah kiri elemen dan gaya vertikal arah ke bawah disebelah kanan. Perlu diingat bahwa elemen tersebut sangat kecil sehingga seakan-akan gaya tersebut bersinggungan, yang berarti jumlah gaya tersebut sama dengan nol. Hal ini memenuhi syarat keseimbangan.



Gambar 4.5. Gaya Geser Pada Balok

Variasi gaya geser atau gaya melintang ini pada sepanjang balok dengan sistem pembebanan seperti pada Gambar 4.6, dapat dilihat pada gambar (b).



Gambar 4.6. Gaya Geser Sepanjang Balok

## E. MOMEN LENTUR PADA BALOK

Salah satu syarat keseimbangan ialah jumlah momen dalam sistem sama ,dengan nol. Momen yang terjadi dalam balok adalah perkalian antara gaya melintang terhadap jarak tertentu. Bila dalam sistem terjadi keseimbangan maka sesungguhnya setiap elemen-elemen yang kecil disepanjang balok juga terdapat keseimbangan.

Sebagaimana diterangkan dalam pokok bahasan gaya aksial bahwa keseimbangan terjadi dalam balok yang berarti adanya gaya aksial yang mengarah kekanan sama dengan gaya aksial yang mengarah kekiri, disetiap elemen terkecil pada balok tersebut. Begitu pula keseimbangan gaya vertikal terjadi dimana disetiap elemen balok terdapat gaya vertikal keatas yang besarnya sama dengan gaya vertikal yang mengarah ke bawah. Dalam pembicaraan momen ini, bahwa keseimbangan terjadi bila disetiap elemen terkecil balok terdapat momen yang searah jarum jam yang besarnya sama dengan momen yang berlawanan dengan jarum jam.

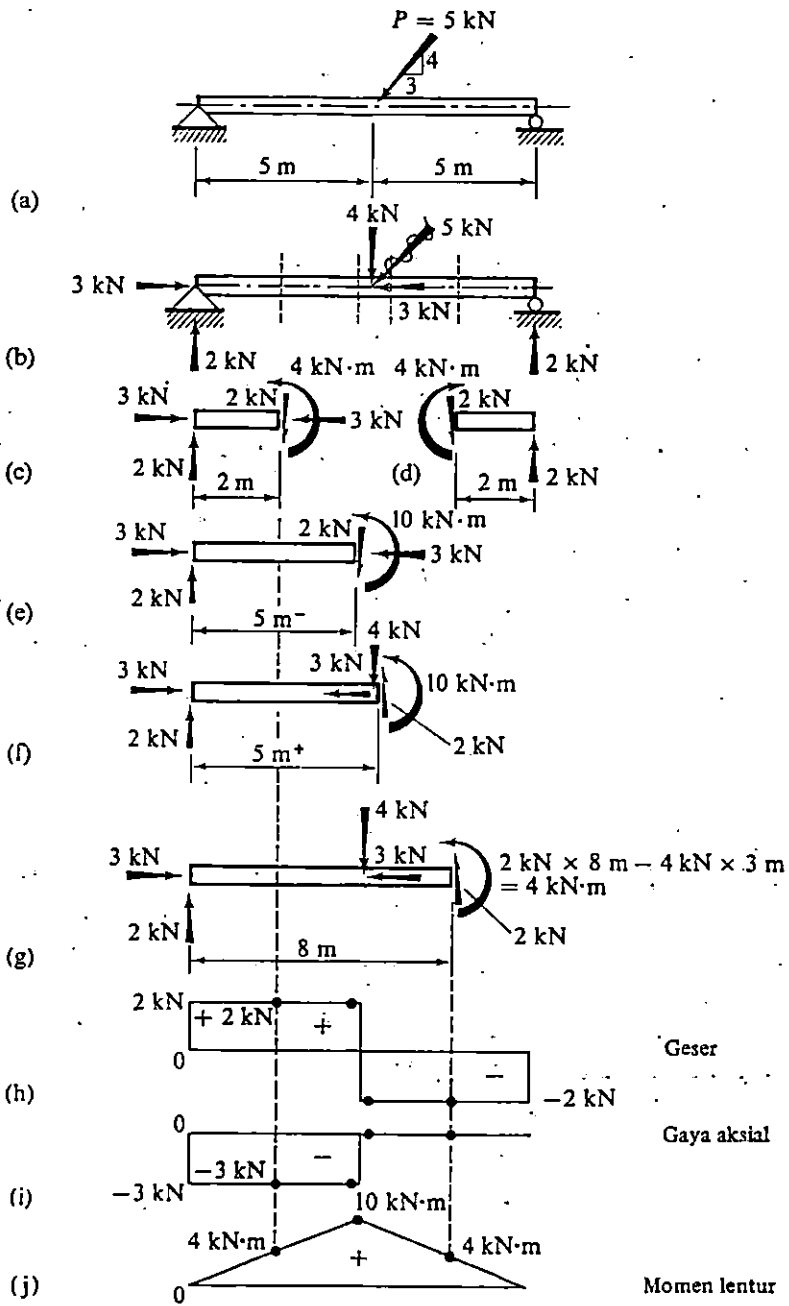
Lihat Gambar 4.7. Suatu sistem kesimbangan yang diakibatkan oleh beban momen dari tiga buah gaya  $F$  yang bekerja pada balok tertumpu dikedua ujungnya. Jika dipotong pada titik C maka akan diperoleh suatu irisan, dimana penampang potong sebelah kiri adanya gaya vertikal ke bawah menghasilkan momen  $M$  yang berlawanan jarum jam. Pada penampang potong yang sebelah kanan untuk mewujudkan keseimbangan maka terdapat gaya vertikal ke atas, yang menghasilkan momen searah jarum jam. Demikian juga terjadi jika diambil suatu segmen balok, lihat gambar (b). Kesimbangan terjadi jika segmen balok tersebut mendapatkan momen yang sama besar yang berlawanan arah.

## F. DIAGRAM GESER, GAYA AKSIAL DAN MOMEN LENTUR

Berikut ini adalah suatu contoh diagram gaya geser, gaya aksial dan momen lentur yang bekerja pada suatu sistem pembebanan oleh satu gaya  $F$  sebesar 5 kN dengan posisi miring. (Popov, 1993, h.118)

Gambar 4.8. dari a s/d j memiliki arti sebagai berikut:

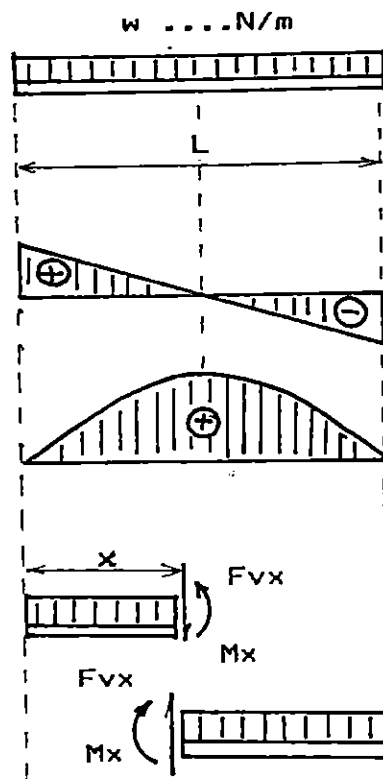
- \* Gambar 4.8.a. suatu sistem pembebanan oleh satu gaya  $F$ , dengan diasumsikan balok tidak berpengaruh oleh beban merata.
- \* Gambar 4.8.b ialah penguraian gaya yang miring tersebut menjadi gaya vertikal dan gaya horisontal. Akibat penguraian ini untuk mencapai keseimbangan maka diperoleh gaya reaksi pada titik A dan titik B yang masing-masing 2 kN dan gaya aksial pada titi, A sebesar 3 kN.
- \* Gambar 4.8.c s/d f adalah gambar keseimbangan arah gaya vertikal, aksial dan momen, yang masing-masing memperlihatkan jumlah gaya-gaya dan momen tersebut adalah nol. Tinjauan tersebut dilakukan pada berbagai jarak  $X$ .
- \* Gambar 4.8.g adalah diagram gaya geser, dimana sebelah kiri mengarah ke atas, sebagai keseimbangan sebelah kanan mengarah ke bawah.
- \* Gambar 4.8.h adalah diagram gaya aksial, dimana gaya aksial hanya terjadi disebelah kiri dari titik pembebanan. Sedangkan sebelah kanan tidak terjadi gaya aksial oleh sebab tumpuan kanan terbuat dari tumpuan rol.
- \* Gambar 4.8.j adalah momen lentur yang terjadi disepanjang balok. Dimana momen terbesar terletak pada titik pembebanan.



Gambar 4.8. Diagram Gaya Geser Dan Momen Lentur Pada Balok Dengan Beban Terpusat ( Popov, 1993 )



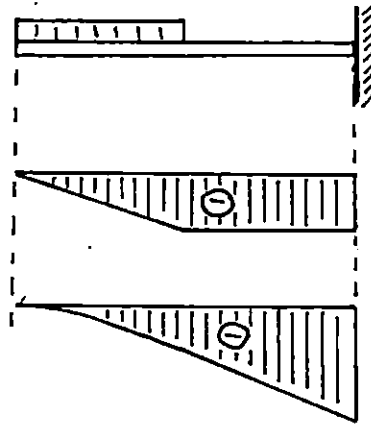
Gambar 4.9, adalah diagram gaya geser dan momen lentur untuk beban merata. (Timoshenko, h. 97 dan 107)



Gambar 4.9. Diagram Gaya Geser Untuk Beban Merata

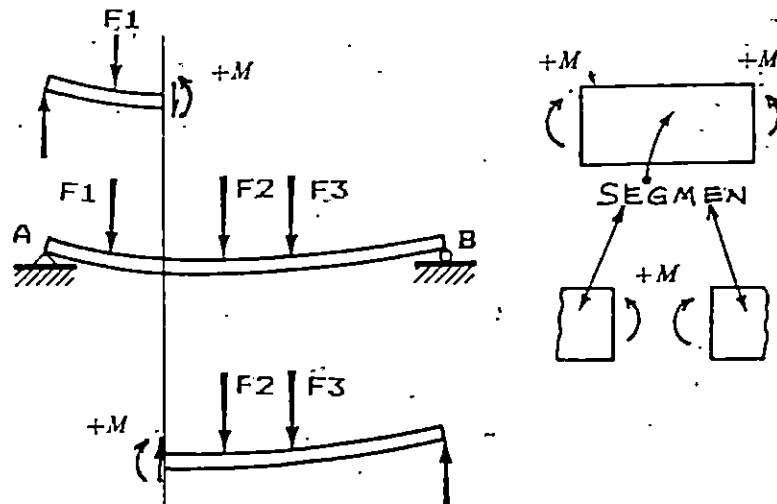
Pada beban merata momen lentur memiliki kelengkungan yang berbeda dengan beban terpusat, oleh sebab kelengkungan tersebut mengikuti berat balok yang kontinyus disepanjang tumpuan.

Gambar 4.10, adalah Diagram Gaya Geser untuk beban merata yang dtumpu oleh kantilever. (Timoshenko, h.108)



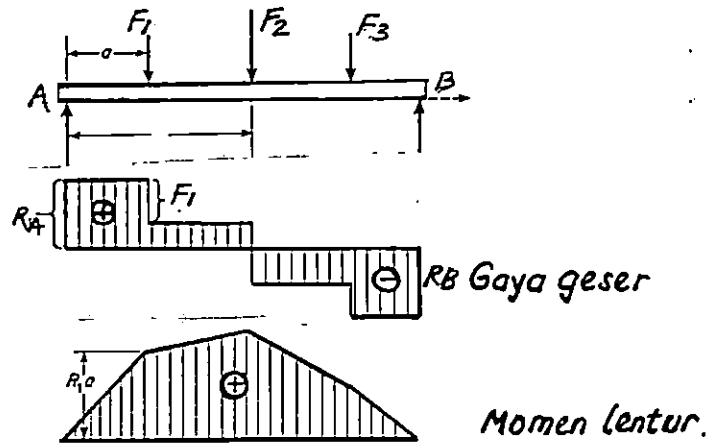
Gambar 4.10. Diagram Gaya Geser Dan Momen Lentur

Gambar 4.11. (a) adalah suatu balok dengan vertikal yang menghasilkan keseimbangan momen. Gambar atas menghasilkan gaya geser kebawah dan momen berlawanan jarum jam. Sebagai keseimbangan gambar bawah menghasilkan gaya geser keatas dan momen searah jarum jam. Gambar 4.11(b) adalah suatu segmen balok dalam keseimbangan antara dua momen yang sama dan berlawanan arah.



Gambar 4.11. Idealisasi Gaya Geser Dan Momen Lentur

Gambar 4.11, adalah diagram gaya geser dan momen lentur untuk sejumlah gaya terpusat yang ditumpu oleh kedua ujungnya. (Timoshenko, h.105)



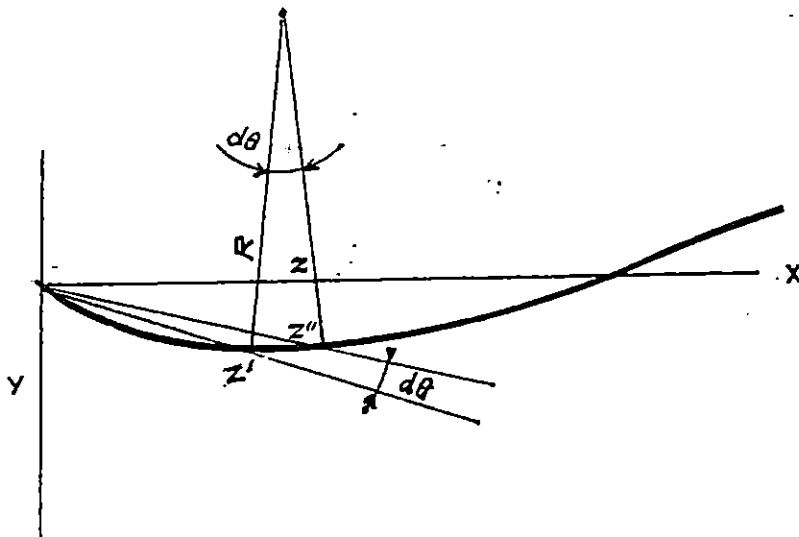
Gambar 4.12. Diagram Gaya Geser Dan Momen Lentur

**BAB V**  
**DEFLEKSI PADA BALOK**

Sebagaimana telah diterangkan pada pembahasan momen bengkok murni pada bab III telah diperoleh rumus:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \dots \dots \dots (5.1)$$

Dalam rumus tersebut diasumsikan bahwa M adalah momen bengkok yang nilainya merata disepanjang batang, yang dalam hal ini hanya berlaku pada beban merata. Lengkungan garis batang yang membengkok tersebut disebut garis elastis atau kurva defleksi. Untuk beban yang tidak merata maka pembahasan garis elastis akan lebih rumit. Berikut ini akan menurunkan rumus yang berkaitan defleksi, atau pelendutan batang akibat beban. Lihat Gambar 5.1.



Gambar 5.1. Garis Elastis

Garis tersebut adalah garis elastis yang dibentuk oleh batang yang mendapatkan beban. Sudut  $d\theta$  adalah sudut yang dibentuk oleh penggeseran titik  $z$  ke  $z'$ , yaitu penggeseran titik akibat pembebanan sebagaimana

analogi dalam pembahasan bengkok murni. R adalah jari-jari pada sudut  $d\theta$ .

Dengan menggunakan koordinat X-Y, sumbu X searah dengan memanjang batang dan sumbu Y pada arah melintang yang membentuk defleksi. Pangjang busur didepan  $d\theta$  adalah ds yaitu sepanjang  $z-z'$ . Sehingga terjadi hubungan:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$$

selanjutnya untuk membahas defleksi terlebih dahulu perlu memahami tiga macam metoda, yaitu; metoda integral, metoda superposisi dan metoda luas momen.

#### A. METODA INTEGRAL

Dengan metoda ilmu ukur analitik pada koordinat cartesius X-Y, nilai R adalah:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \dots \dots \dots (5.2)$$

(William, h.35)

Dalam kenyataan, fenomena defleksi yang dibahas dalam hal ini sangat kecil sehingga nilai penyebut dari persamaan (2) dapat dianggap 1. Sehingga persamaan tersebut dapat ditulis:

$$R = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Dikaitkan dengan rumus (1) menjadi:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M \dots \dots \dots (5.3)$$

SECRET  
NOFORN  
CONFIDENTIAL

Oleh sebab arah defleksi dan sudut kemiringan selalu berlawanan dengan arah momen maka rumus umum menjadi:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \dots \dots \dots (5.4)$$

(Timoshenko, 1964)

Namun beberapa buku memiliki argumen yang berbeda, yaitu untuk menyesuaikan konsekwensinya dengan koordinat cartesian maka cenderung menggunakan + pada nilai M dari rumus (5.4) tersebut.

Untuk menguraikan pemahaman rumus (5.4) lihat Gambar 5.2 yaitu suatu sistim pembebanan merata. Jika ditinjau suatu titik C maka momen M dapat dianalogikan sebagai berikut. Momen pada titik C yaitu  $M_c$  jika dibagi dengan AC atau X maka diperoleh gaya melintang (F) yaitu berat batang sepanjang X. Sehingga defrensial dari persamaan (3) diperoleh:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = EI \frac{dM}{dx} = EI \frac{d^3 y}{dx^3} = F : \text{ gaya melintang} \dots \dots \dots (5.5)$$

Jika gaya melintang dibagi dengan X maka diperoleh berat batang setiap satuan panjang yaitu w. Sehingga:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = EI \frac{dF}{dx} = EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w : \text{ berat persatuan panjang} \dots \dots \dots (5.6)$$

Jika persmaan defrensial ordo 2 pada rumus (5.5) diintegrasikan maka diperoleh persmaan defrensial ordo 1, yang dalam hal ini menggambarkan tangen atau kemiri-

MILIK UPT PERPUSTAKAAN  
IKIP PADANG

ngan garis elastis atau menyatakan sudut  $\theta$  pada suatu titik yang ditinjau.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \cdot dx$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} dx = M \cdot dx$$

$$\int_y EI \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int_x M \cdot dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = M \cdot x + c_1 \dots \dots \dots (5.7)$$

$\frac{dy}{dx}$  : merupakan sudut kemiringan ( $\theta$ ) dari garis elastis pada suatu titik yang ditinjau.

Jika persamaan diferensial (5.7) dikalikan dengan dx kemudian diintegrasikan maka diperoleh:

$$EI y = \frac{M x^2}{2} + c_1 \cdot x + c_2 \dots \dots \dots (5.8)$$

y : adalah besar defleksi pada suatu titik yang ditinjau yaitu pada titik sejauh x.

(Popov, h.395)

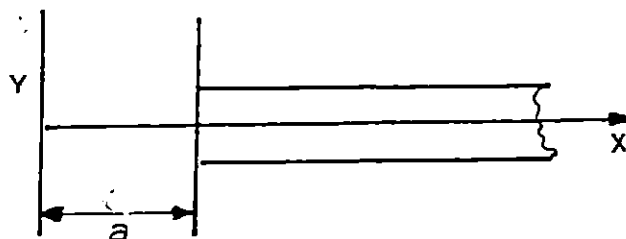
Persamaan (5.3) s/d (5.8) masing-masing adalah persamaan yang menggambarkan ; persamaan momen, persamaan gaya melintang, persamaan berat persatuan panjang, persamaan kemiringan garis elastis dan persamaan akhir yang dicari yaitu defleksi. Semua persamaan



tersebut dapat digunakan untuk mencari defleksi, tinggal memilih persamaan manakah kira-kira yang paling mudah untuk dikerjakan.

a. Penentuan Nilai Batas

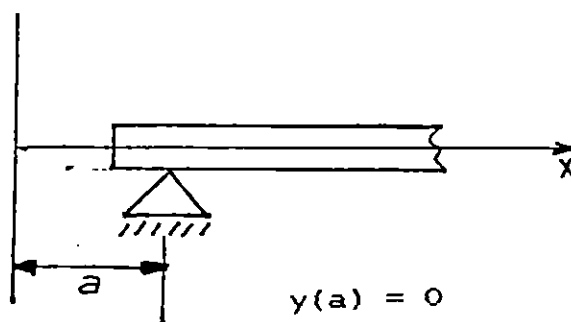
Untuk menyelesaikan persamaan defrenensial hingga mendapatkan defleksi ( $y$ ) harus dilakukan pengintegralan sehingga terdapat konstanta-konstanta yang jumlahnya sesuai dengan ordo defrenensialnya. Untuk menghitung konstanta tersebut diperlukan nilai batas yang harus disubtitusikan dalam persamaan tersebut. Nilai batas tersebut dapat dilihat pada Gambar 5.2. (Popov, 1993, h.392)



$$y(a) = 0$$

$$\theta(a) = \frac{dy}{dx} \text{ pada titik } a = 0.$$

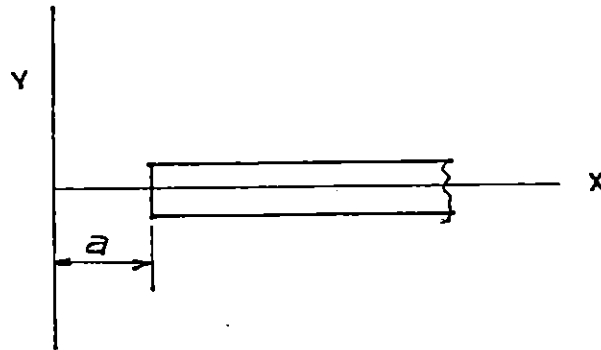
(a) Tumpuan Jepit



$$y(a) = 0$$

$$M(a) = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ pada } a = 0$$

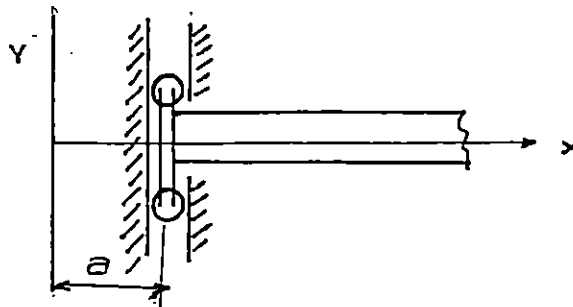
(b) Tumpuan Sederhana



$$M(a) = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ pada titik } a = 0$$

$$F(a) = EI \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ pada titik } a = 0$$

(c) Ujung



$$\theta(a) = \frac{dy}{dx} \text{ pada titik } a = 0.$$

$$F(a) = EI \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ pada titik } a = 0$$

(d) Tumpuan Kendali

Gambar 5.2. Beberapa Kondisi Nilai Batas  
(Popov, 1993, h.392)

Keterangan:

$y(a)$ : defleksi pada titik  $a$

$M(a)$ : Momen pada titik  $a$

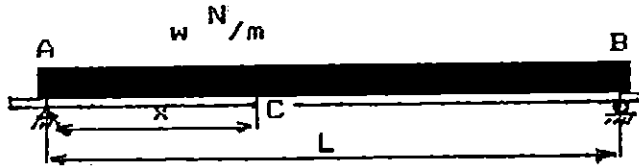
$\theta(a)$ : sudut kemiringan garis elastis pada titik  $a$

$F(a)$ : gaya melintang pada titik  $a$

Contoh 5.1.

Suatu sistem pembebanan dengan dengan distribusi

merata, ditumpu di titik A dan B. Turunkan persamaan defleksi balok tersebut. Lihat Gambar 5.3.



Gambar 5.3. Sistem Pembebanan Distribusi Merata

Ambil jarak  $x$  dari A pada titik C. Reaksi pada A dan B

$$R_a = R_b = \frac{1}{2}wL$$

Momen pada titik C yaitu sejauh  $x = M_x$

$$M_x = R_a \cdot x - F \cdot \frac{1}{2}x$$

Dimana  $F = w \cdot x$

Sehingga:

$$M_x = \frac{1}{2}wLx - w \cdot x \cdot \frac{1}{2}x$$

Rumus umum defleksi:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M_x$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{1}{2}wLx - w \cdot x \cdot \frac{1}{2}x\right)$$

Dikalikan dengan  $dx$  pada ruas kanan dan kiri, kemudian diintegrasikan menjadi:

$$\int_y EI \frac{d^2y}{dx} = -\int_x \frac{1}{2}wLx \, dx + \int_x \frac{1}{2}w \cdot x^2 \cdot dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4} wLx^2 + \frac{1}{6} wx^3 + C1 \dots \dots \dots (5.9)$$

Konstanta C1 dapat dicari dengan jalan memasukkan nilai batas  $\frac{dy}{dx} = 0$ , yaitu disaat puncak lengkungan garis elastis, dimana  $x = L/2$ . Sehingga:

$$EI \cdot 0 = -\frac{wL(L/2)^2}{4} + \frac{w(L/2)^3}{6} + C1$$

Setelah diselesaikan diperoleh nilai  $C1 = \frac{wL^2}{24}$  kemudian dimasukkan kedalam persamaan (8) sehingga menjadi:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4} wLx^2 + \frac{1}{6} wx^3 + \frac{wL^2}{24} \dots \dots \dots (5.10)$$

Persamaan tersebut dikalikan dengan dx pada ruas kanan dan kiri, kemudian diintegrasikan lagi yaitu:

$$\int EI \frac{dy}{dx} dx = \int -\frac{1}{4} wLx^2 dx + \int \frac{1}{6} wx^3 dx + \int \frac{wL^2}{24}$$

$$EI y = -\frac{wL x^3}{12} + \frac{w x^4}{24} + \frac{wL^3 x}{24} + C2 \dots \dots \dots (5.11)$$

Konstanta C2 dicari dengan memasukkan nilai batas yaitu  $y = 0$ , disaat  $x = 0$ . Sehingga diperoleh  $C2 = 0$ . Akhirnya persamaan defleksi menjadi:

$$EI y = - \frac{wL x^3}{12} + \frac{w x^4}{24} + \frac{wL^3 x}{24} + 0$$

$$= \frac{w x}{24} (- 2Lx^2 + x^3 + L^3)$$

Sehingga persamaan defleksi untuk beban merata ditumpu dua ujung dengan tumpuan sederhana ialah :

$$y = \frac{w x}{24 EI} ( L^3 + x^3 - 2L x^2) \dots \dots \dots (5.12)$$

Defleksi terbesar terletak ditengah batang yaitu di saat  $x = L/2$ , yaitu:

$$y \text{ maks} = \delta = \frac{w \cdot L/2}{24 EI} [L^3 + (L/2)^3 - 2L(L/2)^2]$$

$$\delta = \frac{5 w L^4}{384 EI} \dots \dots \dots (5.13)$$

Defleksi  $\delta$  adalah defleksi maksimum yang terletak ditengah batang.

Kemiringan garis elastis pada ujung titik A adalah slope  $\theta_A$ . setara dengan dengan  $dy/dx$  pada titik A, yaitu ketika  $x=0$ , substitusikan dalam persamaan 8a.

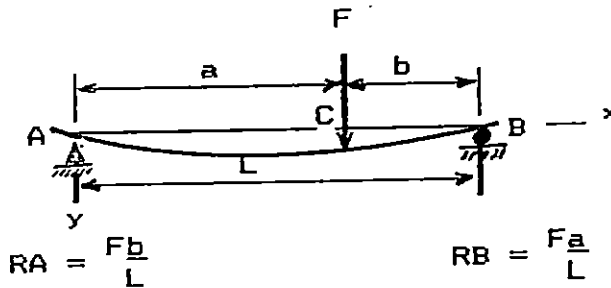
$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wL^2}{24}$$

$$dy/dx \text{ pada titik A} = \theta_A = \frac{wL^2}{24 EI} \text{ radian.} \dots \dots (5.14)$$

Sedangkan slope pada titik B yaitu  $\theta_B$  dapat dihitung

dengan memasukkan nilai  $x = L$ . Dalam hal ini untuk beban merata  $\theta_A = \theta_B$ .

## 2. Lendutan Pada Beban Terpusat (Timoshenko, h.200)



Gambar 5.3. Beban Terpusat

Untuk menurunkan rumus defleksi terlebih dahulu dipandang dua segmen AC dan CB. Sistem tersebut dibuat koordinat X-Y dimana sumbu X searah dengan arah memanjang batang dan sumbu Y arah vertikal pada titik A.

### \* Pada Segmen AC ( $0 < x < a$ )

Momen sejauh  $x$  pada yag terletak antara titik A dan C. Sehingga diperoleh persamaan momen:

$$M_x = RA \cdot x = \frac{Fbx}{L}$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = - M_x = - \frac{Fbx}{L}$$

Persamaan tersebut dikalikan dengan  $dx$  pada ruas kanan dan ruas kiri, kemudian diintegrasikan maka:

$$\int y EI \frac{d^2 y}{dx^2} dx = - \int \frac{Fbx}{L} dx$$

Sehingga diperoleh persamaan kurva slope:

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = -\frac{Fbx^2}{2L} + C_1 \dots \dots \dots (5.15)$$

Dengan cara yang sama persamaan tersebut dikalikan dengan dx dan diintegrasikan, sehingga diperoleh persamaan kurva defleksi:

$$EIy = -\frac{Fbx^3}{6L} + C_1x + C_2 \dots \dots \dots (5.16)$$

\* Pada segmen CB

Momen sejauh x antara titik C dan B ialah:

$$\begin{aligned} M_x &= RA \cdot x - F(x-a) \\ &= \frac{Fbx}{L} - P(x-a) \end{aligned}$$

Persamaan kurva momen:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M_x = -\frac{Fbx}{L} + F(x-a)$$

Persamaan tersebut dikalikan dengan dx kemudian diintegrasikan:

$$\int EI \frac{d^2y}{dx^2} dx = - \int \frac{Fbx}{L} dx + \int F(x-a) dx$$

Sehingga diperoleh persamaan kurva slope:

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = -\frac{Fbx^2}{2L} + \frac{F(x-a)^2}{2} + D_1 \dots \dots \dots (5.17)$$

Dengan cara yang sama persamaan tersebut dikalikan dengan dx kemudian diintegrasikan sehingga diperoleh persamaan defleksi:

$$EIy = -\frac{Fbx^3}{6L} + \frac{F(x-a)^3}{6} + D_1x + D_2 \dots \dots \dots (5.18)$$

Dari uraian integral di atas terdapat empat konstanta  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$  dan  $D_2$ . Untuk menghitung konstanta ini diperlukan nilai batas untuk disubstitusikan sebagai berikut:

- untuk segmen I: pada  $x=0$  ----  $y=0$  . . . . . (a)
- untuk segmen II: pada  $x=L$  ----  $y=0$  . . . . . (b)
- untuk segmen I dan II:
  - pada  $x=a$  -----  $\frac{dy}{dx}$  (segmen I) =  $\frac{dy}{dx}$  (segmen II). (c)
  - pada  $x=a$  -----  $y$  (segmen I) =  $y$  (segmen II). ..(d)

Perhitungan konstanta tersebut dengan jalan memasukkan nilai batas ke dalam persamaan sebagai berikut:

- \* Dengan menggunakan nilai batas (a) disubstitusikan ke persamaan 13 diperoleh  $C_2=0$ .
- \* Dengan menggunakan nilai batas (c) disubstitusikan pada persamaan (12) dan (14) dimana keduanya pada  $x=a$  memiliki  $\frac{dy}{dx}$  yang sama, sehingga diperoleh  $C_1=D_1$ .
- \* Dengan menggunakan nilai batas (d) disubstitusikan pada persamaan (13) dan (15) dimana keduanya pada  $x=a$  memiliki defleksi  $y$  yang sama, dengan catatan  $C_1=D_1$  dan  $C_2=0$ , sehingga diperoleh  $D_2=0$ .
- \* Dengan menggunakan nilai batas (b) disubstitusikan kedalam persamaan (15) dengan catatan  $D_2=0$  dan  $a=(L-b)$  sehingga diperoleh  $C_1 = D_1 = \frac{Fb}{6L}(L^2 - b^2)$

Dengan memasukkan konstanta-konstanta tersebut kedalam persamaan (13) dan (15) sehingga diperoleh persamaan kurva defleksi sebagai berikut:

Untuk segmen AC berlaku persamaan kurva



defleksi

$$y = \frac{Fbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2) \dots \dots \dots (5.19)$$

Untuk segmen CB berlaku persamaan kurva defleksi

$$y = \frac{Fb}{6EIL} \left[ \frac{1}{b}(x-a)^3 + (L^2 - b^2)x - x^3 \right] \dots \dots \dots (5.20)$$

(Tim.h.201)

Defleksi maksimum terletak pada segmen yang lebih panjang. Jika  $a > b$  maka defleksi maksimum berlaku pada rumus 16, yaitu pada segmen AC. Nilai tersebut dicari dengan cara mendefrensialkan persamaan tersebut terhadap  $x$  kemudian disamadengankan nol. Lebih lanjut nilai  $x$  yang diperoleh adalah menunjukkan letak defleksi maksimum.

$$y = \frac{Fbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2)$$

$$y = \frac{FbxL^2}{6EIL} - \frac{Fb^3x}{6EIL} - \frac{Fbx^3}{6EIL}$$

Persamaan tersebut didefrensialkan lalu disamadengankan nol, sehingga:

$$0 = \frac{FbL^2}{6EIL} - \frac{Fb^3}{6EIL} - \frac{3Fbx^2}{6EIL}$$

Lebih lanjut persamaan tersebut diselesaikan untuk mencari nilai  $x$ , sehingga diperoleh :

$$x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

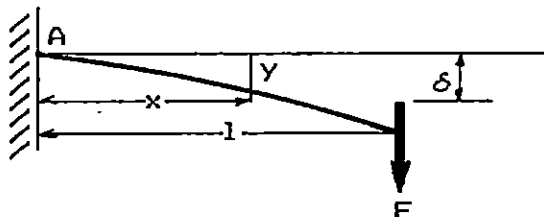
Kemudian nilai  $x$  tersebut dimasukkan kedalam persamaan

16, yaitu segmen yang panjang sehingga diperoleh nilai defleksi maksimum sebagai berikut:

$$y_{\text{maks}} = \delta_{\text{maks}} = \frac{Fb}{9 \sqrt{3}EI} / (L^2 - b^2)^{3/2} \dots \dots \dots (5.21)$$

Contoh 5.2.

Suatu batang seragam sebagai penahan ditumpu satu ujung (prismatic cantilever), panjang AB seperti pada Gambar (5.4). Diberi beban P pada ujung. Tentukan sudut kemiringan (slope) maksimum dan defleksi maksimum.



Beban F arah ke bawah sehingga persamaan momen sepanjang l yang merupakan fungsi x bernilai negatif.

$$M_x = -F(l-x)$$

Persamaan kurva momen

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M_x = -[-F(l-x)]$$

Persamaan tersebut dikalikan dengan dx kemudian diintegrasikan.

$$\int EI \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int_x F(l-x) dx$$

Diperoleh persamaan kurva kemiringan garis elastis (slope)

$$EI \frac{dy}{dx} = F_1x - \frac{F_2x^2}{2} + C_1 \dots \dots \dots (5.22)$$

Konstanta  $C_1$  dapat dihitng dengan mengambil slope  $dy/dx=0$ . Keadaan ini terjadi pada  $x=0$ , oleh sebab pada sistem kantilever batang ditumpu dalam bentuk jepit. Dengan memasukkan nilai  $x$  dan slope tersebut akhirnya diperoleh  $C_1=0$ . Persamaan kurva slope menjadi

$$EI \frac{dy}{dx} = F_1x - \frac{F_2x^2}{2} + 0 \dots \dots \dots (5.23)$$

Dengan cara yang sama persamaan tersebut dikalikan dengan  $dx$  pada ruas kanan dan kirinya, kemudian diintegrasikan, akhirnya diperoleh persamaan kurva defleksi sebagai berikut.

$$EIy = \frac{F_1x^2}{2} - \frac{F_2x^3}{6} + C_2$$

Konstanta  $C_2$  dihitng dengan mengambil defleksi  $y=0$ , yaitu saat  $x=0$ . Sehingga diperoleh  $C_2=0$  juga. Lebih lanjut persamaan kurva defleksi beikut.

$$EI\bar{y} = \frac{F_1x^2}{2} - \frac{F_2x^3}{6}$$

$$y = \frac{F_1x^2}{2EI} - \frac{F_2x^3}{6EI}$$

$$y = \frac{F_2x^2}{2EI} \left(1 - \frac{x}{3}\right) \dots \dots \dots (5.24)$$

Defleksi maksimum terjadi pada  $x=1$  sehingga:

$$y = \frac{F_1^2}{2EI} \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\delta_{\text{maks}} = \frac{Fl^3}{3EI} \dots \dots \dots (5.25)$$

Sudut kemiringan maksimum terjadi pada ujung batang yaitu pada  $x=l$ . Sudut ini dicari dengan mensubstitusikan  $x=l$  pada persamaan 19.

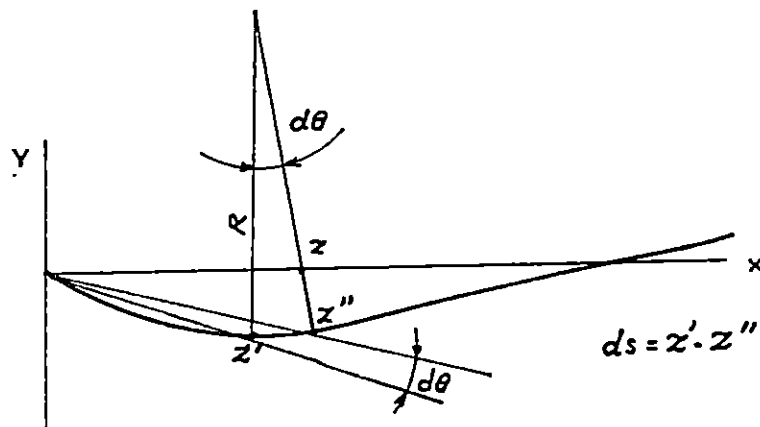
$$EI \frac{dy}{dx} = Flx - \frac{Fx^2}{2}$$

$$EI \cdot \theta = Fl^2 - \frac{Fl^2}{2}$$

$$\theta_{\text{maks}} = \frac{Fl^2}{2EI} \dots \dots \dots (5.26)$$

#### B. METODA LUAS MOMEN

Untuk menghitung defleksi selain menggunakan metoda konyugat, yaitu melalui persamaan defrensial ordo tinggi, juga dapat dihitung dengan moetoda luas momen. Sebagaimana diuraikan pada bab sebelumnya terdapat rumus umum berikut yang berkaitan dengan garis elstis lihat Gambar 5.5.



Gambar 5.5. Garis Elastis

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}, \quad ds = R \cdot d\theta \quad \text{atau} \quad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} \quad \text{sehingga:}$$

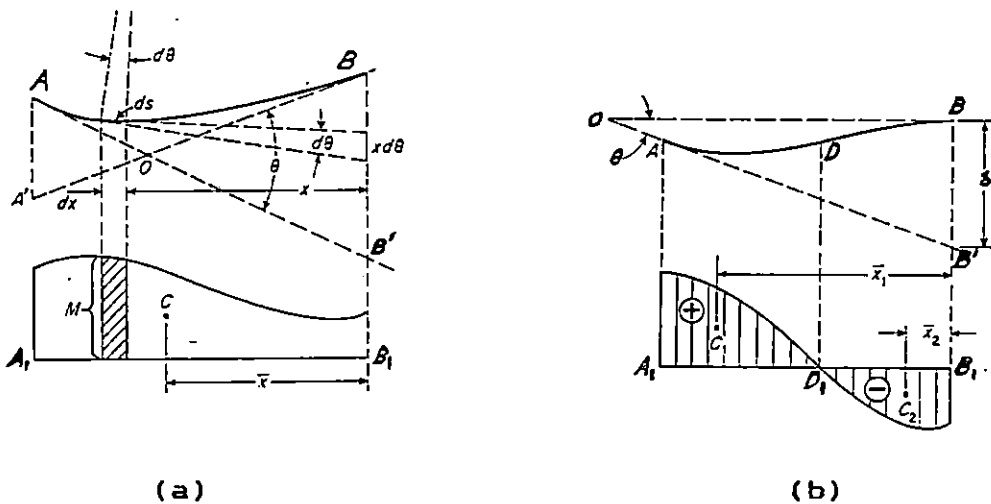
$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} \quad \text{atau} \quad d\theta = \frac{Mds}{EI}$$

Dalam pembahasan defleksi ini garis kelengkungan sangatlah kecil untuk sudut  $d\theta$ , sehingga nilai  $ds$  dapat didekati dengan  $dx$ . Sehingga rumus defleksi menjadi:

$$\int d\theta = \int_A^B \frac{Mds}{EI}$$

$$\theta = \int_A^B \frac{Mdx}{EI} \dots \dots \dots (5.27)$$

Lihat Gambar 5.6.(a), bahwa  $\theta$  adalah sudut yang dibentuk oleh persilangan antara garis singgung dari titik A dan titik B, yang menghasilkan  $BB'$  didepan  $\theta$ .



Gambar 5.6. Sistem Defleksi Metoda Luas Momen  
( Timoshenko, 1964 )

Gambar 5.6(b), terlihat bahwa  $\delta = BB'$ . merupakan panjang sisi didepan  $\theta A$ . Jika mengambil elemen sudut  $\delta\theta$  maka panjang sisi didepannya merupakan elemen dari  $\delta$ , atau  $d\delta = x.d\theta$ , seperti pada Gambar 5.6 (a).

$$d\delta = \frac{x \cdot M \cdot dx}{EI}$$

$$\delta = \int_A^B \frac{M \cdot x \cdot dx}{EI} \dots \dots \dots (5.28)$$

Dalam aplikasinya rumus 5.28 tersebut tidak sesederhana itu oleh sebab luas momen yang dibentuk bisa positif dan bisa negatif, seperti pada Gambar 5.6 (b).

Titik D adalah titik perbatasan antara momen positif dan negatif. Perbedaan arah momen ini akan menentukan arah sudut kemiringan garis elastis. Sehingga sudut  $\theta$  yang dibentuk sepanjang AB adalah selisih antara sudut yang dibentuk oleh luas momen AD (positif) terhadap luas momen DB (negatif).

$$\theta = \int_A^D \frac{M \cdot dx}{EI} - \int_D^B \frac{M \cdot dx}{EI}$$

Defleksi untuk batang sepanjang AB menjadi:

$$\delta = \int_A^D \frac{M \cdot dx \cdot x}{EI} - \int_D^B \frac{M \cdot dx \cdot x}{EI}$$

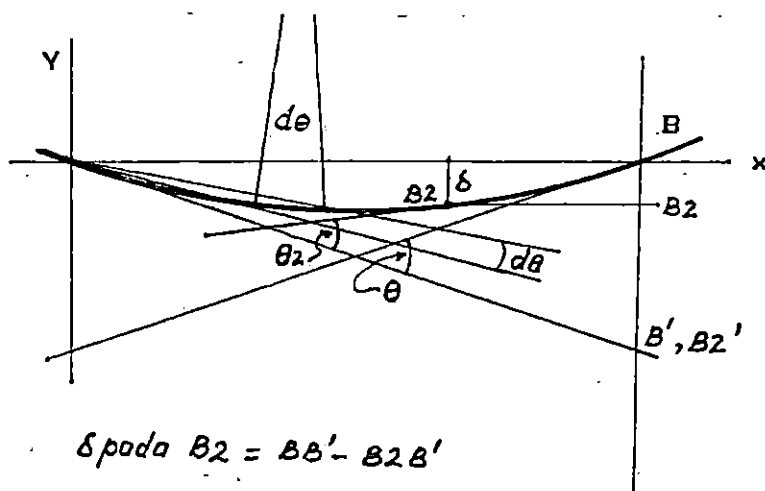
$$\delta = \left| \frac{\text{luas bidang momen}}{EI} \right|_{\bar{x}_1}^A - \left| \frac{\text{luas bidang momen}}{EI} \right|_{\bar{x}_2}^B \dots \dots \dots (5.29)$$

Variabel  $\bar{x}_1$  dan  $\bar{x}_2$  adalah jarak antara titik pusat bidang momen (centroid) terhadap suatu titik acuan yang letaknya didepan sudut tangen yang sedang ditinjau.

MILIK UPT PERPUSTAKAAN  
IKIP PADANG

Dua komponen luas bidang momen AD dan DB tersebut dijumlahkan secara negatif atau dikurangkan. Pada kasus yang lain jika pembebanan memiliki arah yang menghasilkan luas momen yang sama-sama positif, maka kedua komponen tersebut dijumlahkan.

Lihat Gambar 5.7. Jika titik B digeser mengikuti garis elastis sampai tidak berimpit dengan sumbu x, misal menjadi B<sub>2</sub>, maka garis singgung yang dibentuk juga terletak pada titik B<sub>2</sub> tersebut dan menghasilkan sudut  $\theta_2$  dan sisi didepannya sepanjang B<sub>2</sub>-B<sub>2</sub>'. Selisih antara BB' terhadap B<sub>2</sub>-B<sub>2</sub>' adalah defleksi  $\delta$  pada titik B<sub>2</sub>.



Gambar 5.7. Defleksi Dengan Metoda Luas Momen

### Contoh 5.3

Suatu sistem kantilever, lihat Gambar 5.8. dengan beban di ujung P sejauh l dari tumpuan jepit. Tentukan defleksi maksimum dan sudut kemiringan garis elastis.

$$= b + \frac{1}{3}(1-b)$$

$$= \frac{2b+1}{3}$$

Luas segitiga pada segmen DB =  $\frac{Pab^2}{21}$ . Jarak titik berat segitiga tersebut terhadap titik B adalah  $\bar{x}_1$ . Yaitu:

$$\bar{x}_2 = \frac{2}{3} b$$

Sedangkan jarak titik berat gabungan kedua segitiga tersebut terhadap titik B ialah  $\bar{x}$ .

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\text{luas } \wedge \text{ segmen AD} \times \bar{x}_1 + \text{luas } \wedge \text{ segmen DB} \times \bar{x}_2}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} \\ &= \frac{\left[ \frac{Pba^2}{21} \times \frac{2b+1}{3} + \frac{Pab^2}{21} \times \frac{2}{3} b \right]}{\frac{Pba^2}{21} + \frac{Pab^2}{21}} \quad \begin{array}{l} \text{pembilang dan pen-} \\ \text{yebut dibagi } \frac{Pab}{21} \end{array} \end{aligned}$$

$$= \frac{a(2b+1)+2b^2}{3(a+b)} \quad \text{subtitusikan } a=1-b$$

$$\bar{x} = \frac{1+b}{3} \quad (\text{tim h.207})$$

Cara menghitung defleksi pada titik D, yaitu sebesar  $DD''$ , merupakan selisih antara  $D'D''$  terhadap  $DD'$ .  $D'D''$  diperoleh dari segitiga yang dihasilkan oleh  $BB'$  dengan sudut tangen  $\theta$ .

$$BB' = \frac{\text{luas bidang momen sepanjang AB}}{EI} \cdot \bar{x}$$

$$\theta = BB'/AB \quad \text{dan } D'D'' = \theta \cdot a$$

$$DD' = \frac{\text{luas bidang momen sepanjang AD}}{EI} \cdot \bar{x}$$



$$DD'' = \delta = D'D'' - DD'.$$

Dalam perhitungan sebagai berikut:

$$BB' = \frac{Pab}{2EI} \times \frac{(1+b)}{3}$$

$$\theta = BB'/l = \frac{Pab(1+b)}{6EI}$$

$$DD' = \frac{Pa^2b}{2EI} \times \frac{2}{3} a$$

$$DD'' = \delta = D'D'' - DD'.$$

$$= \frac{Pa^2b}{6EI}(1+b) - \frac{Pa^3b}{6EI}$$

$$\delta = \frac{Pa^2b^2}{3EI} : \text{defleksi pada titik D}$$

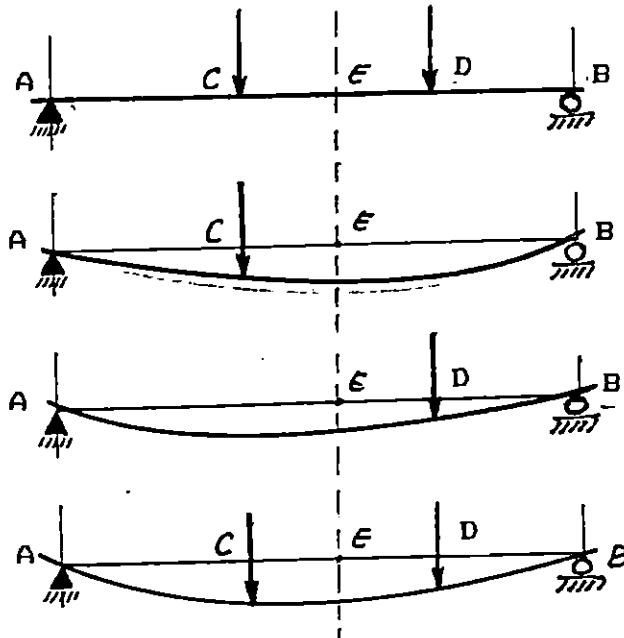
Defleksi maksimum terjadi pada segmen yang panjang yaitu pada segmen AD. Defleksi maksimum ini memiliki garis singgung yang sejajar dengan sumbu x, sehingga sudut tangen yang dibentuk oleh sisi BB' pada segmen AB, sama dengan sudut yang dibentuk oleh CC' pada segmen AC yaitu  $\theta_{AB} = \theta_{AC} = \theta$ .

Beberapa rumus defleksi untuk bermacam-macam kondisi dapat dilihat pada Tabel . DSEjumlah rumus ini sangat berguna untuk menghitung defleksi dengan metoda superposisi.

### C. METODA SUPER POSISI

Semua yang dibahas pada metoda integral dan metoda luas momen tersebut baru menjelaskan pad kasus yang sederhana, yaitu pada kasus satu pembebanan. Sedangkan untuk kasus yang lebih dari satu beban yang bekerja secara bersamaan terdapat suatu metoda yang akan dibahas dalam bab ini yaitu metoda superposisi. Seperti pada pembahasan tentang superposisi tegangan yaitu menjumlahkan beberapa tegangan sehingga

diperoleh tegangan total. Dalam hal ini superposisi yang dilakukan ialah superposisi atau menjumlahkan defleksi-defleksi yang telah dihitung satu persatu untuk masing-masing beban sehingga diperoleh defleksi total. Sebagai contoh lihat pada Gambar 5.8.



Gambar 5.8 . Defleksi Metoda Superposisi

Dua buah beban terpusat  $F_1$  dan  $F_2$  yang ditumpu di A dan B. Untuk menghitung defleksi yang diakibatkan oleh dua beban ini, dapat dilakukan dengan metoda superposisi yaitu pertama menghitung defleksi yang diakibatkan oleh  $F_1$ , kemudian menghitung defleksi yang diakibatkan oleh  $F_2$ . selanjutnya menjumlahkan kedua defleksi tersebut maka diperoleh defleksi total. Sebagai contoh menghitung defleksi pada titik E pada Gambar 5.8..

Titik E jika ditinjau terhadap  $F_1$  terletak disebelah kanan dengan demikian untuk menghitung  $y_1$  harus menggunakan rumus defleksi segmen kanan seperti pada rumus 5.20. yaitu:

$$y_1 = \frac{Fb}{6EIL} \left[ \frac{1}{b}(x-a)^3 + (L^2 - b^2)x - x^3 \right]$$

dengan memasukkan nilai  $x$  sejauh  $AE$  dengan beban  $F_1$  diperoleh  $y_1$  yaitu defleksi yang diakibatkan oleh  $F_1$ . Selanjutnya menghitung  $y_2$  yaitu defleksi yang diakibatkan oleh  $F_2$ . Titik E terhadap  $F_2$  terletak diebelah kiri sehingga harus menggunakan segmen kiri seperti pada rumus 5.19, yaitu:

$$y_2 = \frac{Fbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2).$$

dengan memasukkan nilai  $X = AE$  dan  $F_2$  sebagai beban akhirnya diperoleh  $y_2$ . Untuk seterusnya defleksi total adalah

$$\delta_{total} = y_1 + y_2.$$

Kaidah metoda superposisi ini dapat diaplikasikan pada bermacam-macam kasus, dengan catatan harus menempatkan segmen yang benar dalam menentukan masing-masing defleksi yang diakibatkan oleh masing-masing-masing beban.

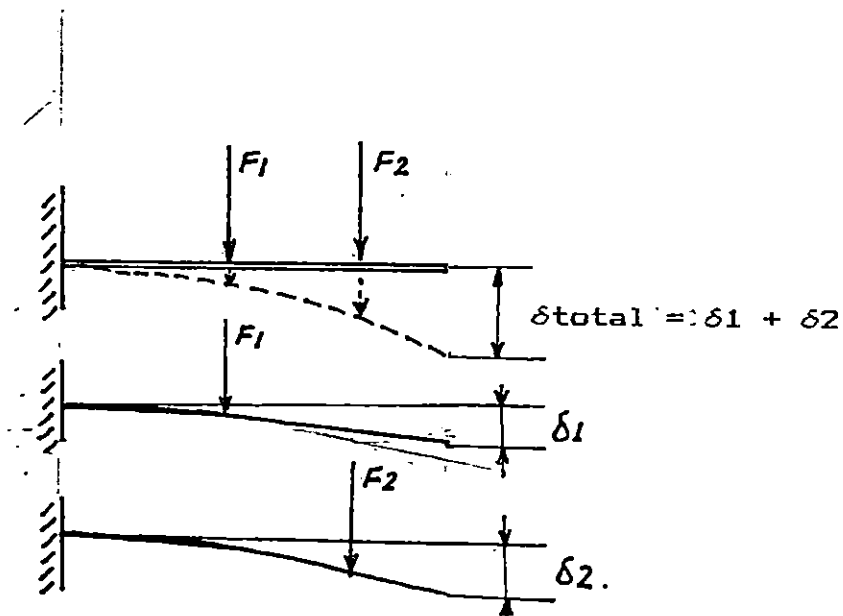
Perhitungan superposisi ini juga dapat berlaku untuk menghitung sudut kemiringan total. Suatu misal kembali pada Gambar 5.8, jika bermaksud untuk menghitung sudut kemiringan pada titik A yaitu  $\theta_A$ . Maka sudut ini adalah penjumlahan sudut yang dibentuk akibat  $F_1$  yaitu sebesar  $\theta_A'$  dan sudut yang diakibatkan oleh  $F_2$  yaitu  $\theta_A''$ . Sudut kemiringan total ialah:

$$\theta_A = \theta_A' + \theta_A''.$$

Untuk menghitung sudut  $\theta$  ini dengan jalan kembali pada rumus defleksi metoda integral dimana  $\theta = \frac{dy}{dx}$ .

Untuk menghitung  $dy/dx$  ini dalam metoda superposisi yang paling gampang ialah mengambil rumus defleksi sesuai dengan segmen yang benar kemudian menjumlahkan kedua rumus defleksi tersebut, lalu mendefrensialkannya. Akhirnya diperoleh  $dy/dx = \theta A$ .

Berikut adalah contoh defleksi metoda superposisi dari suatu kantilever dengan dua beban searah, tempat yang berbeda. Lihat Gambar 5.9.



Gambar 5.9. Metoda Superposisi Pada Kantilever

Beban  $F_1$  dan  $F_2$  masing-masing dari tumpuan jepit berjarak  $a$  dan  $b$ . Menurut lampiran 2, baris ke-2, untuk menghitung defleksi dari satu beban terdapat dua segmen yaitu segmen sebelah pangkal dan segmen sebelah ujung yang dibatasi oleh letak beban. Untuk menghitung

defleksi dari Gambar 5.9, terdiri dari dua beban. Defleksi maksimum dari dua beban tersebut tergolong dalam rumus defleksi sebelah ujung.

Rumus defleksi maksimum untuk beban F1 ialah

$$\delta_{\text{maksf1}} = \frac{Pa^2}{6EI}(3l-a)$$

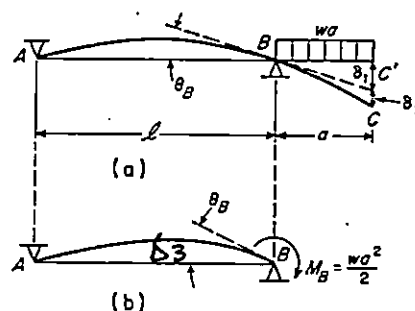
Rumus defleksi maksimum untuk beban F2 ialah

$$\delta_{\text{maksf}} = \frac{Pb^2}{6EI}(3l-b)$$

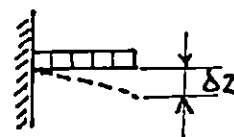
Defleksi total akibat dua beban adalah jumlah dari dua defleksi tersebut.

$$\delta_{\text{maks}} = \frac{Pa^2}{6EI}(3l-a) + \frac{Pb^2}{6EI}(3l-b)$$

Contoh berikutnya lihat Gambar 5.10. Suatu bahan yang ditumpu pada A dari atas dan B dari bawah, disebelah kanan B diberi beban merata. Berapakan defleksi maksimum pada titik C.



( Timoshenko, 1964 )



Gambar 5.10. Defleksi Metoda Superposisi

Untuk mendapatkan defleksi pada titik C berarti harus menghitung dengan tahapan sebagai berikut:

- a. menghitung  $\delta_1$  akibat momen pada titik B
- b. menghitung  $\delta_2$  akibat defleksi beban merata yang seakan-akan seperti kantilever beban merata yang dijepit pada B.
- c. defleksi total  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ .

Lihat lampiran 2. baris ke-10. besar sudut pada titik B

$$\theta_B = \frac{M_B \cdot L}{3EI} \quad \text{Dimana } M_B = \frac{w a^2}{2}$$

$$= \frac{w a^2 L}{3EI} \quad \text{radian}$$

$\delta_1 = a \cdot \theta_B$  : untuk sudut kecil  $\delta_1$  dianggap sebagai busur didepan  $\theta_B$ .

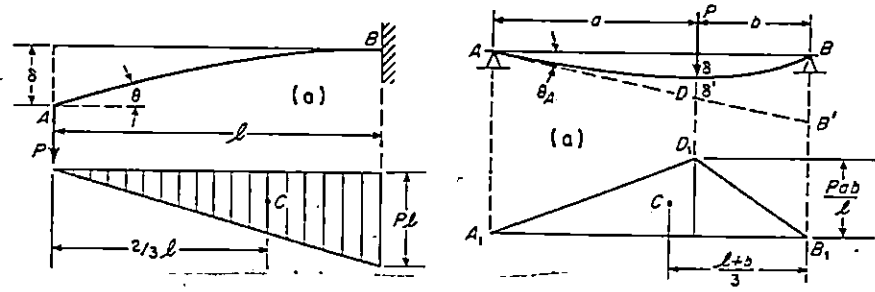
$$\delta_1 = \frac{w a^3 L}{3EI}$$

Lihat lampiran 2. baris ke-3, besar defleksi akibat momen lihat gambar 5.33 b. ialah

$$\delta_2 = \frac{w a^4}{8EI}$$

Defleksi total pada titik C adalah penjumlahan dari  $\delta_1$  dan  $\delta_2$ .

$$\delta_{\text{total}} = \frac{w a^3 L}{3EI} + \frac{w a^4}{8EI}$$



Gambar 5.8. Defleksi Pada Kantilever ( Timoshenko, 1964 )

Penyelesaian.

Gambar (a) adalah sistem defleksi, sedangkan (b) luas bidang momen, dengan sisi vertikalnya (tinggi) adalah momen = Pl, dan sisi horisontalnya (lebar) adalah l.

Luas bidang momen = tinggi x lebar.

$$= Pl \times \frac{1}{2} l = \frac{Pl^2}{2}$$

$$\text{Defleksi} = \delta = \frac{Pl^2}{2EI} \cdot \bar{x}$$

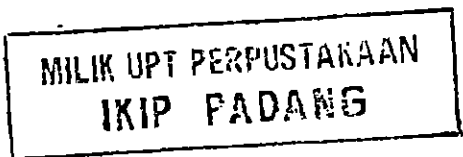
Rumus (5.30) tersebut secara otomatis sebagai defleksi sebab dalam kasus kantilever garis singgung pada tumpuan merupakan garis horisontal yang berimpit terhadap sumbu x.

Jarak titik berat luas bidang tersebut terhadap titik defleksi maksimum yaitu  $\bar{x}$ , sebesar  $\frac{2}{3}l$ . Sehingga defleksi

$$\delta = \frac{Pl^2}{2EI} \cdot \frac{2}{3}l = \frac{Pl^3}{3EI} \dots \dots \dots (5.30)$$

Sedangkan sudut kemiringan pada titik defleksi maksimum tersebut ialah:

$$\theta = \frac{Pl^2}{2EI}$$

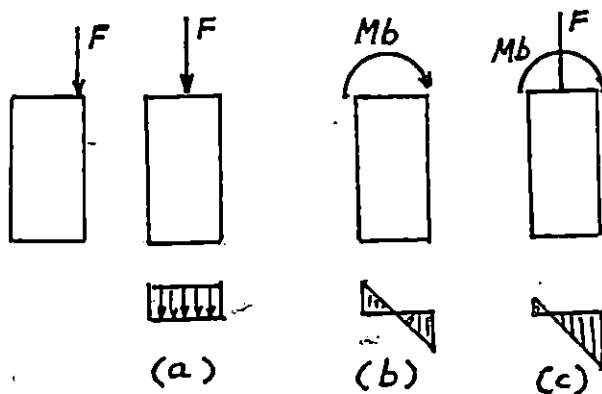


## BAB VI TEGANGAN KOMBINASI

Tegangan kombinasi dalam bab ini adalah suatu material yang mendapatkan satu beban atau lebih, menghasilkan lebih dari satu macam tegangan murni. Sebagai contoh akibat suatu beban maka material secara serempak pada material tersebut terjadi tegangan aksial dengan bengkok, atau aksial dengan geser atau bengkok dengan geser atau ketiganya.

### A. BEBAN EKSENTRIK

Sebagaimana yang telah dibahas pada beban langsung apakah beban tarik ataupun tekan, dimana titik tangkap pembebanan terletak pada titik pusat penampang potongnya (centroid) dan searah dengan sumbu pada batang tersebut. Dalam beban eksentrik titik tangkap gaya tidak terletak pada titik pusat luasan penampang potong bahan. Lihat Gambar 6.1 dari bagian a s/d c.



Gambar 8. Distribusi Tegangan Akibat Beban Eksentrik  
(khurni, 1982)

Bagian (a) menjelaskan beban langsung aksial berbentuk tekan. Akibat beban ini menghasilkan tegangan pada bahan yang digambarkan dengan diagram tegangan



yang bersifat merata. Besar tegangan tersebut ialah:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Dimana F adalah besar beban tegangan langsung yang dalam hal ini berupa tekan, dan A adalah luas penampang potong normal bahan.

Bagian (b) menjelaskan bahwa dengan adanya beban eksentrik akhirnya menimbulkan tegangan bengkok, yaitu:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{z}$$

Dimana  $\sigma_b$  adalah tegangan bengkok yang pada dasarnya berupa tegangan tarik pada bagian yang mendekati titik p dan berupa tegangan tekan pada bagian yang mendekati titik q, dengan sumbu netral bertegangan nol. Momen bengkok ( $M_b$ ) dan tahanan bengkok ( $z$ ) dicari sebagai berikut:

$$M_b = F \cdot e$$

$$z = \frac{I}{y}$$

Dimana :

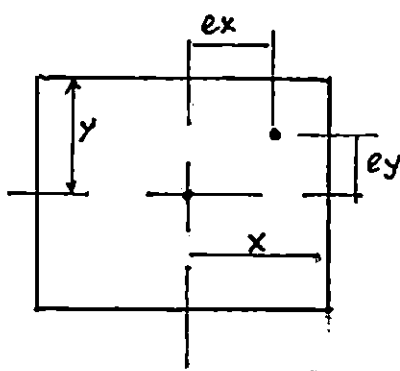
I: momen luasan kedua

y: jarak antara sumbu netral terhadap tegangan maksimumnya.

Bagian (c) adalah kombinasi tegangan langsung dengan tegangan bengkok. Pada titik p diperoleh tegangan gabungan yang kecil, sebab tegangan langsung berupa tegangan tekan dan tegangan bengkok berupa tegangan tarik. Sedangkan pada titik q tegangan ga-

bungan semakin besar sebab tegangan langsung dan bengkok keduanya berupa tegangan tekan.

Kasus yang lebih rumit jika bentuk eksentrik tidak hanya pada satu arah dari sumbu netralnya, tetapi eksentrik tersebut pada arah  $x$  dan pada arah  $y$ , sebagaimana pada Gambar 6.2.



Gambar 6.2. Beban Eksentrik Dua Dimensi

Gambar 6.2. bagian bawah terlihat sistem penbebanan memiliki eksentrik pada arah  $X$  dengan jarak  $e_x$ , dan eksentrik pada arah  $y$  dengan jarak  $e_y$ . Dengan logika yang sama seperti di atas maka dapat diuraikan distribusi tegangan sebagai berikut.

Akibat beban langsung diperoleh tegangan tekan sebesar:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Akibat beban eksentrik pada arah  $X$  menghasilkan tegangan bengkok:

$$\sigma_{b_x} = \frac{M_{b_x}}{z_x}$$

Dimana :

$$M_{b_x} = F \cdot e_x \quad \text{dan} \quad z_x = \frac{I}{x'}$$

Akibat beban eksentrik pada arah Y menghasilkan tegangan bengkok:

$$\sigma_{b_y} = \frac{M_{b_y}}{z_y}$$

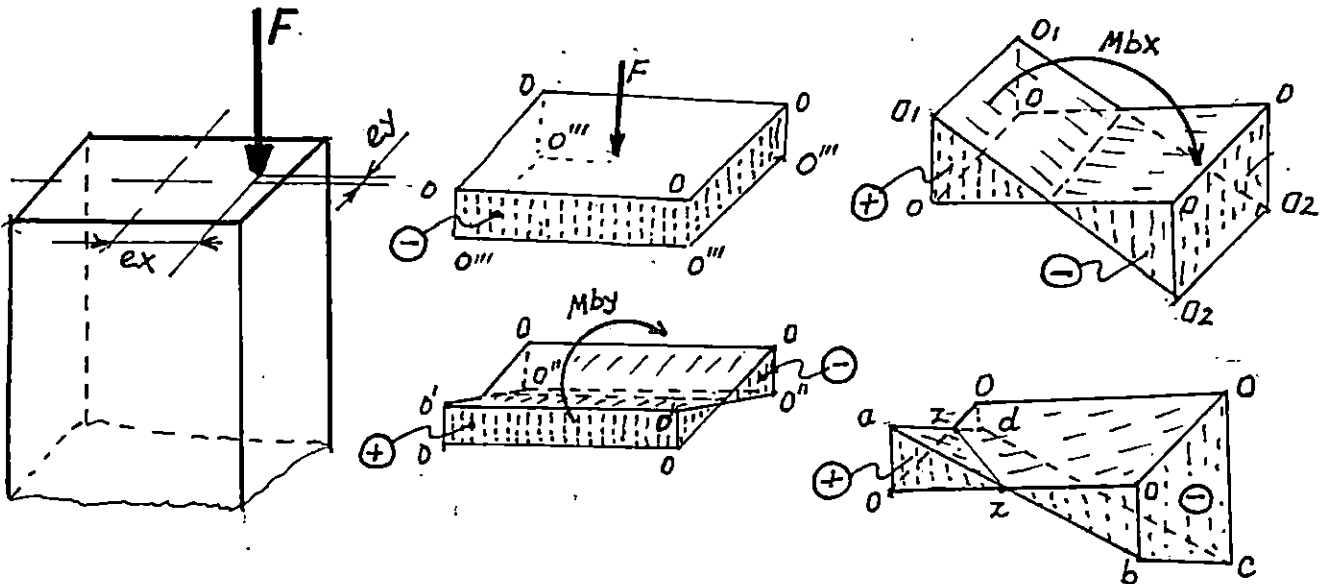
Dimana:

$$M_{b_y} = F \cdot e_y \quad \text{dan} \quad z_y = \frac{I}{y'}$$

Kombinasi dari ketiga tegangan tersebut ialah:

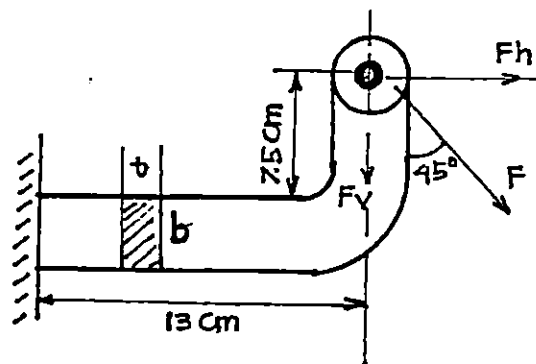
$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M_{b_x}}{z_x} \pm \frac{M_{b_y}}{z_y}$$

Nilai positif dan negatif tersebut disesuaikan dengan sifat tegangan yang terjadi, jika arahnya sama maka tegangan dijumlahkan dan jika arah berlawanan maka tegangan dihitung selisihnya. Distribusi tegangan gabungan dapat dilihat pada Gambar 6.3.



Gambar 6.3. Distribusi Tegangan Gabungan

beban miring  $45^\circ$  dengan besar beban 600 kg. Penampang potong bahan dengan ketebalan  $t$  dan lebar  $b$ , dengan perbandingan  $t = 0.5 b$ . Bahan tersebut memiliki tegangan patah  $3000 \text{ kg/cm}^2$ . Tentukan ukuran penampang tersebut agar keanaman terjamin dengan faktor keamanan (*safety factor*)  $v = 5$ .



Gambar 6.4. Beban Eksentrik

Tegangan eksentrik tersebut terlebih dahulu diuraian pada arah vertikal menjadi gaya  $F_v$  dan gaya horizontal  $F_h$ .

$$F_v = 600 \sin 45 = 600 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 425 \text{ kg}$$

$$F_h = 600 \cos 45 = 600 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 425 \text{ kg}$$

Akibat gaya vertikal  $F_v$  mengakibatkan momen bengkok pada batang sebesar

$$M_v = F_v \times 13 = 425 \times 13 = 5525 \text{ kg-cm}$$

Tegangan bengkok yang terjadi, dengan sisi bawah berupa tekan dan sisi atas berupa tarik sebesar

$$\sigma_{bv} = \frac{M_v}{Z}, \text{ dimana } Z = \frac{tb^2}{6} = \frac{4t^3}{6}$$

$$\sigma_{bv} = \frac{5525}{4t^3} = \frac{8287.5}{t^3}$$

Gaya vertikal ini tidak menimbulkan tegangan langsung tetapi hanya tegangan bengkok.

Gaya horisontal  $F_h$  menghasilkan dua macam gaya yaitu tegangan tarik langsung dan tegangan bengkok. Tegangan tarik langsung sebesar

$$\sigma_{th} = \frac{F_h}{A} = \frac{425}{bt} = \frac{425}{2t^2}$$

Sedangkan tegangan bengkok yang dihasilkan searah dengan gaya vertikal, yaitu sisi bawah berupa tegangan tekan dan sisi atas berupa tegangan tarik, yaitu

$$\sigma_{bh} = \frac{M_h}{Z}, \text{ dimana } M_h = F_h \times 7.5 = 3180 \text{ kg-cm}$$

$$Z = \frac{4t^3}{6}$$

$$\sigma_{bh} = \frac{3180}{4t^3/6} = \frac{4770}{t^3}$$

Tegangan total akibat gaya-gaya tersebut adalah superposisi atau penjumlahan dari tegangan-tegangan yang ada sesuai dengan arahnya.

Untuk sisi atas :

$$\sigma_{total} = \sigma_{th} + \sigma_{bv} + \sigma_{bh}$$

Untuk sisi bawah

$$\sigma_{total} = \sigma_{th} - \sigma_{bv} - \sigma_{bh}$$

72

Dengan memperhatikan tanda positif dan negatifnya tegangan total tersebut maka dapat menentukan dimana tegangan yang terbesar, yaitu pada sisi atas, karena semua tanda positif. Selanjutnya rumus ini digunakan untuk menghitung ukuran penampang batang.

$$\sigma_{total} = \frac{425}{2t^2} + \frac{8287.5}{t^3} + \frac{4770}{t^3}$$

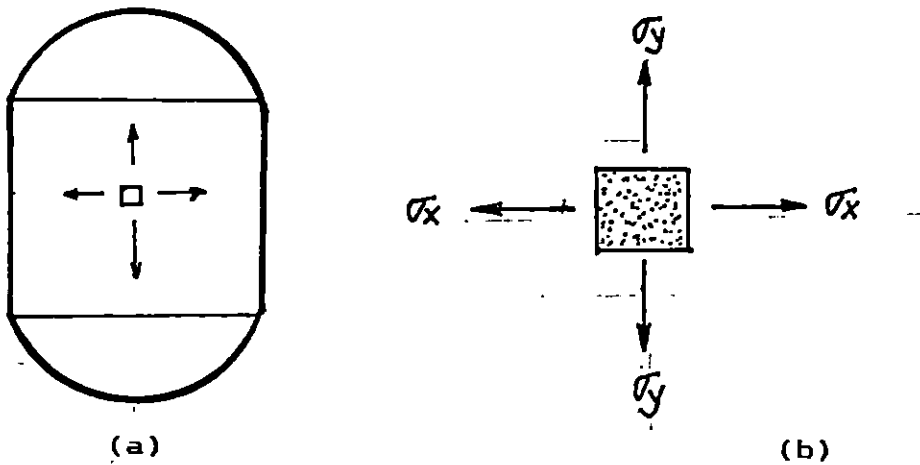
Dengan memasukkan nilai tegangan maksimum ijin yaitu sama dengan tegangan patah dibagi faktor keamanan, diperoleh tegangan ijin =  $600 \text{ kg/cm}^2$ , kemudian menyelesaikan nilai  $t$ , akhirnya diperoleh

$$t = 2.84 \text{ cm dan } b = 5.68 \text{ cm}$$

Banyak kasus yang dapat ditemukan dalam beban eksentrik ini namun boleh dikatakan dapat didekati dengan metoda seperti pada soal ini. Yang perlu dicatat bahwa dalam kasus yang lebih rumit bisa ditemukan penampang potong yang tidak hanya segi empat tetapi berbentuk baja U, baja T dll, namun semua itu dapat didekati dengan metoda superposisi.

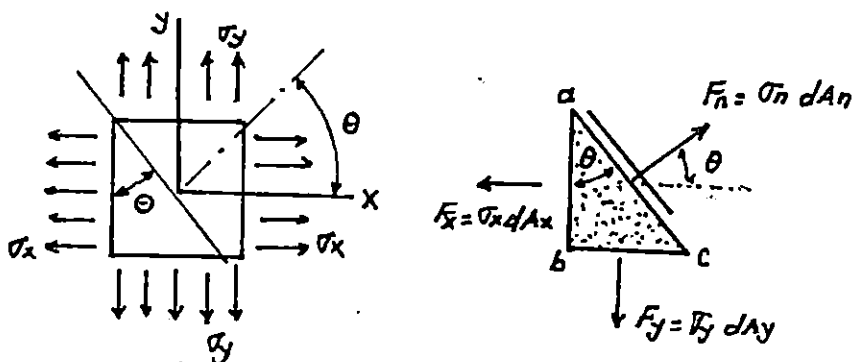
## B. ANALISA TEGANGAN GANDA AKSIAL

Suatu bejana bertekanan ditinjau gaya-gaya yang bekerja pada arah  $x$  sebagai  $F_x$  dan gaya pada arah  $y$  sebagai  $F_y$ . Akibat gaya  $F_x$  menghasilkan tegangan  $\sigma_x$  dan akibat  $F_y$  menghasilkan  $\sigma_y$ . Tinjauan tegangan pada arah  $x$  dan  $y$  tersebut dikatakan sebagai tegangan ganda (biaxial stress). Jika diambil suatu elemen yang sangat kecil maka dapat digambarkan arah-arah tegangan



Gambar 6.5. Distribusi Tegangan Ganda  
(Tim. )

Jika elemen tersebut diambil suatu bidang normal yang terletak pada sudut  $\theta$  terhadap sumbu Y, akhirnya diperoleh suatu bidang yang berbentuk segitiga abc, seperti pada Gambar 6.6. Pada bidang ab bekerja gaya normal  $F_n$  dengan tegangan  $\sigma_n$ , dan pada bidang normal tersebut tegak lurus terhadap tegangan normal terjadi tegangan geser  $\tau_n$ . Bidang bc bekerja gaya  $F_y$  dengan tegangan  $\sigma_y$  dan pada bidang ac bekerja gaya  $F_x$  dengan tegangan  $\sigma_x$ .



Gambar 6.6. Distribusi Tegangan

Sudut  $\theta$  adalah sudut yang dibentuk antara bidang  $y$  terhadap suatu sudut yang didefinisikan. Berdasarkan Gambar 6.6. (b) keseimbangan statis terjadi, dengan hubungan masing-masing gaya yang ditransformasikan terhadap sumbu / arah normal.

$$F_n = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta + \tau \sin 90^\circ \dots (6.6)$$

tentu  $\sin 90^\circ$  bernilai nol, sehingga tegangan geser tersebut tak berpengaruh terhadap rumus keseimbangan tersebut.

Selanjutnya nilai gaya-gaya tersebut diubah dalam bentuk tegangan, sesuai dengan hubungan  $F = \sigma \times A$ . Nilai  $A$  yaitu luas sebagai berikut:

$dA_x =$  elemen luas pada bidang  $ab$

$dA_y =$  elemen luas pada bidang  $bc$

$dA_n =$  elemen luas pada bidang normal.

Berdasarkan segitiga  $abc$  terdapat hubungan elemen luas tersebut terhadap sudut  $\theta$  sebagai berikut:

$$dA_x = dA_n \cos \theta \quad \text{dan} \quad dA_y = dA_n \sin \theta.$$

$$F_x = \sigma_x dA_x = \sigma_x dA_n \cos \theta$$

$$F_y = \sigma_y dA_y = \sigma_y dA_n \sin \theta$$

Keseimbangan gaya sebagaimana tertulis pada rumus 6.6. diubah dalam nilai tegangan sebagai berikut:

$$\sigma_n dA_n = \sigma_x (dA_n \cos \theta) \cos \theta + \sigma_y (dA_n \sin \theta) \sin \theta.$$

masing-masing ruas dibagi dengan  $dA_n$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta. \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)}_A + \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta}_B \dots (6.7) \end{aligned}$$

dengan cara yang sama diproyeksikan semua gaya searah dengan tegangan geser normal  $\tau_n$ , yaitu tegak lurus



terhadap  $on$ , sehingga keseimbangan gaya terjadi sebagai berikut:

$$\tau dA_n = \sigma_x(dA_n \cos\theta)\sin\theta - \sigma_y(dA_n \sin\theta)\cos\theta.$$

$$\tau = \underbrace{(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta \cos\theta}_{D} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin^2\theta. \quad (6.8)$$

Rumus 6.7 dan 6.8 adalah rumus yang berlaku pada bidang normal yaitu tegangan utama normal bisa berupa tarik atau tekan dan tegangan geser yang tegak lurus terhadap tegangan normal.

Apa bila sudut yang didefinisikan diubah dari sudut  $\theta$  menjadi  $\theta'$ , dengan mengambil nilai  $\theta' = 90^\circ + \theta$ , maka terjadilah hubungan goneometri;  $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$ , dan  $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$ . Sehingga persamaan tegangan dari rumus 6.7 dan 6.8, dengan mendefinisikan  $\theta$  menjadi  $\theta'$  ialah:

$$\begin{aligned} \sigma_n' &= \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)}_A - \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta}_C \dots \dots \dots (6.9) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \tau' &= -(\sigma_x - \sigma_y)\cos\theta \sin\theta \\ &= -\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta}_E \dots \dots \dots (6.10) \end{aligned}$$

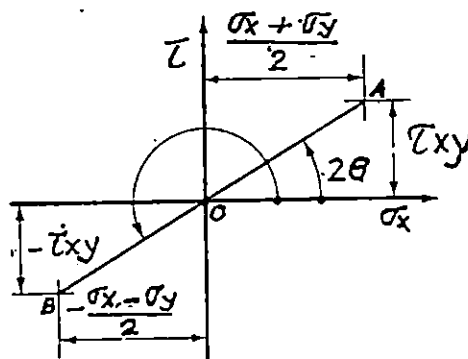
Perhatikan rumus 6.7 dan 6.9, masing-masing terdapat komponen A, B dan C. Jika  $\sigma_x$  dan  $\sigma_y$  merupakan variabel yang nilainya sama atau juga bisa tidak sama, maka komponen A merupakan nilai rata-ratanya. Jika  $\sigma_x$  dan  $\sigma_y$  tersebut digambarkan pada suatu suatu garis berskala yaitu pada sumbu X, maka nilai pada komponen A adalah titik tengah antara  $\sigma_x$  dan  $\sigma_y$ .

Mengkombinasikan rumus 6.7 dan 6.9 masing-masing memiliki komponen A yang merupakan titik tengah.

Komponen B dan C memiliki bentuk yang sama hanya tanda yang berbeda. Ternyata titik komponen A yang merupakan rata-rata dari  $\sigma_x$  dan  $\sigma_y$  juga merupakan rata-rata dari komponen B dan C. Dengan mengambil nilai  $\cos 2\theta = 0$ , diperoleh nilai rata-rata komponen A tersebut juga sekaligus merupakan nilai  $\sigma_n$ . Nilai  $\sigma_n$  ini bervariasi naik turun yang ditentukan oleh nilai  $\cos 2\theta$  mulai dari 0 ke -1 dan dari 0 ke +1. Variasi nilai  $\sigma_n$  ini tentu difungsikan oleh sudut  $\theta$ .

Dengan logika yang sama yaitu adanya nilai rata-rata dan adanya nilai positif dari rata-rata dan negatif dari rata-rata, maka untuk rumus 6.8 dan 6.10, ternyata memiliki bentuk yang sama hanya tanda yang berbeda. Nilai rata-rata ini diperoleh ketika  $\sin 2\theta = 0$ , sehingga  $\tau = 0$ . Nilai  $\tau$  ketika  $\sin 2\theta = 1$ . dan nilai minimum ketika  $\sin 2\theta = -1$ . Variasi nilai  $\tau$  ini tentu difungsikan oleh  $\theta$ .

Jika variasi nilai  $\tau$  ini diplotkan pada sumbu y dan variasi nilai  $\sigma_n$  diplotkan pada sumbu x, dimana keduanya difungsikan oleh  $\theta$ , gabungan titik-titik  $\sigma_n$  sebagai sumbu x dan  $\tau$  sebagai sumbu y diperoleh suatu bentuk lingkaran. Untuk selanjutnya lingkaran ini disebut dengan lingkaran Mohr. Lihat Gambar 6.7.



Gambar 6.7. Lingkaran Mohr

### C. ANALISA TEGANGAN KOMPLEK

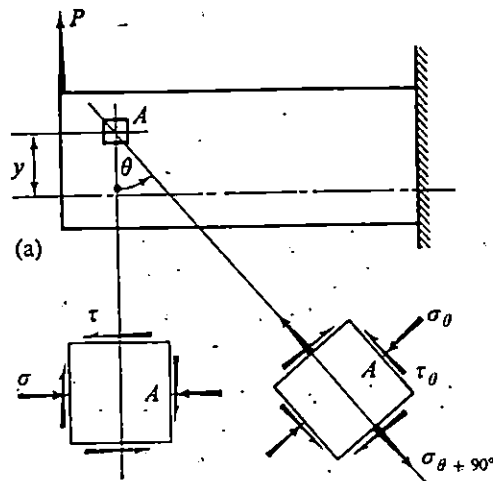
Analisa yang telah diturunkan pada fenomena tegangan ganda sehingga diperoleh lingkaran Mohr, sebagaimana diterangkan di atas diawali dengan adanya tegangan aksial ganda yang saling tegak lurus yaitu  $\sigma_x$  dan  $\sigma_y$ . Saat itu tidak terdapat tegangan geser yang terjadi pada posisi tersebut. Lihat Gambar 6.5. Setelah dilukiskan kedalam lingkaran Mohr, dimana variasi tegangan tersebut ditentukan posisi definisi sudut  $\theta$ , akhirnya diperoleh juga nilai tegangan geser yang terjadi yang terletak diantara arah  $x$  dan arah  $y$ .

Dalam kajian tegangan kompleks pada dasarnya memiliki logika yang sama dengan apa yang telah dirumuskan pada tegangan ganda, hanya saja definisi penurunan rumus diawali dari kondisi tegangan ganda plus tegangan geser yang tidak nol. Pembahasan yang diawali dari tegangan geser yang tidak nol ini sangat penting oleh sebab dalam kenyataan kasus keteknikan banyak ditemukan suatu material yang menderita tegangan gabungan antara tegangan aksial dengan tegangan geser, sebagai contoh suatu poros yang berputar dengan dibebani oleh beban bengkok puli. Definisi tegangan bengkok adalah tegangan aksial yang berbentuk tarik dan tekan yang nilainya bervariasi menurut arah tarikan dan penekanan tersebut. Sedangkan tegangan puntir adalah tegangan geser yang nilainya bervariasi dari sumbu netaral yaitu nol hingga nilai maksimumnya terletak paling luar permukaan poros. Fenomena ini lebih lanjut akan dibahas dalam kajian tegangan kompleks.

Untuk menurunkan rumus tegangan kompleks diawali dari suatu contoh kasus batang yang mendapatkan beban bengkok seperti pada Gambar 6.8. Sebagai gambaran batang tersebut jika dilakukan pembebanan sesuai dengan arah tersebut hingga mencapai

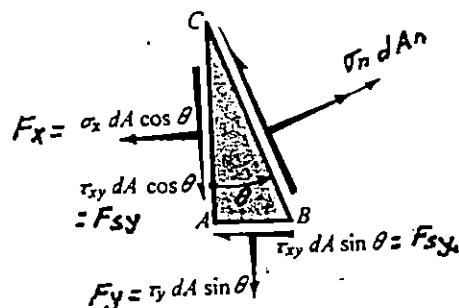
patah maka garis "-----" pada batang tersebut merupakan letak patahannya. Letak patahan adalah sesuai dengan letak dan arah tegangan maksimumnya. Gambar (a) adalah elemen posisi elemen dengan sudut  $\theta = 0$ , yaitu sudut terhadap arah F. Gambar (b) elemen yang sama dengan definisi sudut  $\theta > 0$ .

(Popov, 1994 dan Rimmer, 1986)



Gambar 6.8. Fenomena Tegangan Komplek  
( Popov, 1993 )

Jika gambar (b) yang didefinisikan oleh sudut  $\theta$  tersebut diperbesar dan dilihat penampang normal yang terletak pada definisi  $\alpha$  diperoleh Gambar 6.9.



Gambar 6.9. Analisa arah Tegangan Pada Elemen Bertegangan

( Popov, 1993 )

Elemen tersebut dalam keadaan statis dengan keseimbangan gaya yang terjadi, lihat Gambar 6.9 (c). Semua gaya ditransformasikan pada arah normal.

$$F_n = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta + F_{sx} \cos \theta + F_{sy} \sin \theta.$$

Dimana :  $F_n = \sigma_n \delta A$  : gaya normal

$F_x = \sigma_x \delta A \cos \theta$  : gaya tarik / tekan searah sumbu X.

$F_y = \sigma_y \delta A \sin \theta$  : gaya tarik/tekan searah sumbu Y.

$F_{sx} = \tau_{xy} \delta A \sin \theta$  : gaya geser searah sumbu X

$F_{sy} = \tau_{yx} \delta A \cos \theta$  : gaya geser searah sumbu Y

Keseimbangan gaya tersebut jika di transformasikan dalam bentuk tegangan sebagai berikut:

$$\sigma_n \delta A = \sigma_x \delta A \cos \theta \cos \theta + \sigma_y \delta A \sin \theta \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \tau_{yx} \delta A \sin \theta \cos \theta.$$

Kedua ruas dibagi dengan  $\delta A$  menjadi:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta. \\ &= \sigma_x \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} + \sigma_y \frac{(1 - \cos^2 \theta)}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \dots (6.11) \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama memproyeksikan semua gaya pada arah  $\tau_{xy}$ , kemudian mentransformasikan gaya dalam bentuk tegangan diperoleh:

$$\tau_{xy} = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \dots (6.12)$$

Bandingkan rumus (6.9) dengan (6.11), juga bandingkan pula rumus (6.10) dengan (6.12). Ternyata perbedaan rumus-rumus tersebut hanya terletak pada nilai geser ( $\tau_{xy} \dots$ ). Dengan demikian ternyata penurunan rumus-rumus tegangan kompleks ini juga dapat diaplikasikan ke dalam lingkaran Mohr sebagaimana pada tegangan ganda. Pada pembahasan ini bidang yang sedang ditinjau pada arah sumbu X dan sumbu Y sudah memiliki nilai tegangan geser. Sedangkan pada pembahasan tegangan ganda hanya terdapat dua tegangan aksial yang saling tegak lurus sedangkan pada bidang tersebut tidak terdapat tegangan geser.

### 1. Tegangan Utama

Dari pembahasan di atas jika nilai  $\theta$  dijalan-kan sejah 0 s/d  $\pi$ , maka nilai  $\sigma$  dan  $\tau$  pun juga ikut bervariasi. Semua variasi ini dapat dirumuskan kedalam lingkaran Mohr. Suatu saat variasi ini pada  $\theta'$  tertentu akan ditemukan nilai  $\tau$  (tegangan geser) = 0, disaat tegangan aksial maksimum. Dengan memutar definisi sudut  $\theta'' = 90 + \theta$  diperoleh tegangan aksial minimum. Kondisi ini disebut tegangan utama (*principal stress*). Kemudian dengan memutar definisi sudut  $\theta''' = 45 + \theta$ , diperoleh nilai tegangan rata-rata antara tegangan aksial maksimum dengan tegangan aksial minimum. Saat ini diperoleh tegangan geser maksimum.

Untuk mendapatkan posisi/bidang terjadi tegangan utama ialah dengan jalan mendefrensialkan persamaan (6.11) terhadap  $\theta$  kemudian disamadengankan nol.

Akhirnya diperoleh:

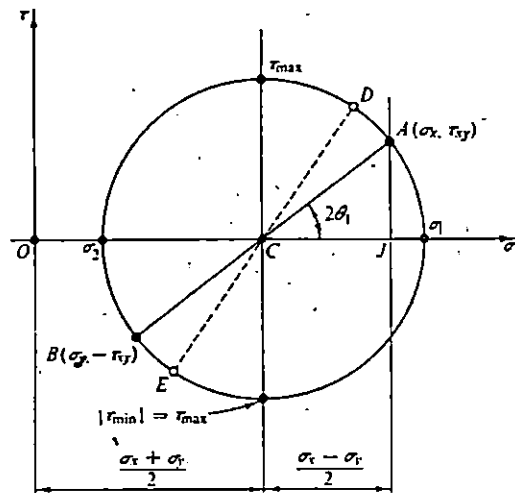
$$\frac{d\sigma}{d\theta} = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

dibagi dengan  $\cos 2\theta$

$$\tan 2\theta'' = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \dots \dots \dots (6.13)$$

Sudut  $\theta''$  tersebut adalah letak bidang utama, yaitu terjadi tegangan aksial maksimum dan sudut  $\theta''+90^\circ$  terjadi tegangan aksial minimum. Sudut  $\theta''+45^\circ$  terjadi tegangan geser maksimum. (Popov, 1993)

Hubungan antara nilai-nilai tersebut jika diwujudkan dalam bentuk terigonometri melalui kaidah lingkaran Mohr seperti pada Gambar 6.10. Lingkaran tersebut dilukiskan dalam bentuk sudut  $2\theta$ . Hal ini bertujuan dimana pendefinisian sudut  $\theta$  dalam aplikasinya hanya antara 0 s/d  $\pi$ . Sedangkan dalam lingkaran harus terpenuhi  $2\pi$ .



( Popov, 1993 )

Gambar 6.10. Hubungan Nilai Tegangan Dalam Lingkaran Mohr

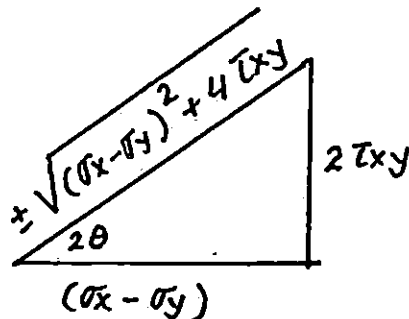
Tegangan geser  $\tau_{xy}$  terletak pada sumbu Y dan tegangan aksial  $\sigma$  terletak pada sumbu X. Berdasarkan gambar tersebut tegangan utama terbuksi:

$$\begin{array}{l} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{ maksimum} \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{ minimum} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{ketika } \tau_{xy} = 0 \end{array} \right.$$

Untuk menghitung besar nilai tegangan utama tersebut terlebih dahulu perlu diturunkan berdasarkan hubungan geometri yang didasarkan pada rumus 6.13, tentang letak bidang utama.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

Nilai tangen tersebut dapat diwujudkan dalam bentuk segitiga dimana  $2\theta$  sebagai sudut tangen,  $2\tau_{xy}$  sebagai proyektor dan  $(\sigma_x - \sigma_y)$  sebagai proyektum, seperti pada Gambar 6.11.



Gambar 6.11. Hubungan Tegangan Aksial dan Tegangan Geser (Khurmi, 1982)

Sebagaimana lukisan dalam lingkaran Mohr bahwa tegangan aksial ataupun tegangan geser memiliki nilai maksimum dan minimum, dalam lingkaran tersebut nilai maks dan min berselisih  $180^\circ$ . Sehingga nilai bilangan yang terletak pada garis



miring segitiga Gambar 6.11 memiliki harga plus dan minus.

$$\sin 2\theta = \pm \frac{2 \tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

untuk selanjutnya  $\theta_1$  menunjukkan posisi maksimum dan  $\theta_2$  menunjukkan posisi minimum. Berdasarkan segitiga gambar 6.11:

$$\sin 2\theta_1 = + \frac{2 \tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\sin 2\theta_2 = - \frac{2 \tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_1 = + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_2 = - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Dengan memasukkan harga  $\sin 2\theta$  dan  $\cos 2\theta$  untuk maksimum dan minimum akhirnya diperoleh nilai tegangan utama sebagai berikut:

Tegangan utama maksimum:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Tegangan utama minimum:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

## 2. Tegangan Geser Maksimum

Berdasarkan variasi tegangan yang terlukir pada lingkaran Mohr terlihat adanya nilai tegangan geser maksimum dan minimum. Posisi sudut bidang ini dapat diturunkan melalui rumus 6.12. Metode penurunannya sama seperti menghitung posisi sudut tegangan utama. Rumus tersebut dideferensialkan terhadap  $\theta$  kemudian disama-dengankan nol. Akhirnya diperoleh posisi sudut bidang terjadinya tegangan geser maksimum ialah:

$$\tan 2\theta_2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

angka "2" sebagai koefisien dari  $\theta$  menyatakan adanya nilai maksimum dan minimum dari tegangan geser. Posisi sudut bidang maksimum dan minimum tegangan geser ini selalu berselisih  $45^\circ$  terhadap bidang utama.

Dengan memasukkan nilai  $\sin 2\theta$  dan  $\cos 2\theta$  ke dalam rumus 6.13, akhirnya diperoleh nilai tegangan geser maksimum dan minimum:

$$\tau_{\text{mak}} = + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\text{min}} = - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

pada tegangan utama maksimum selalu terjadi pada tegangan geser = 0. Berbeda dengan tegangan geser maksimum ini, dimana pada posisi tersebut tidak bernilai tegangan aksial = 0, tetapi terletak pada tegangan rata-rata aksial yang saling tegak lurus.

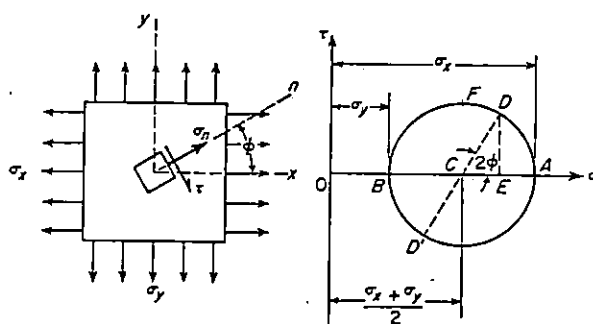
#### D. LINGKARAN MOHR

Lingkaran Mohr adalah suatu diagram yang sepanjang lingkaran tersebut menggambarkan jenis dan besar tegangan yang terjadi pada suatu titik tertentu yang ditinjau dari segala macam arah. Jenis tegangan tersebut adalah tegangan tarik / tekan pada arah X dan arah Y, serta tegangan geser pada bidang tersebut.

Tegangan aksial arah X dan arah Y keduanya dilukiskan pada sumbu X. Sedangkan tegangan geser dilukiskan pada sumbu Y. Pelukisan besar sudut pada lingkaran Mohr tersebut dua kali besar sudut yang didefinisikan dari bidang yang sedang ditinjau.

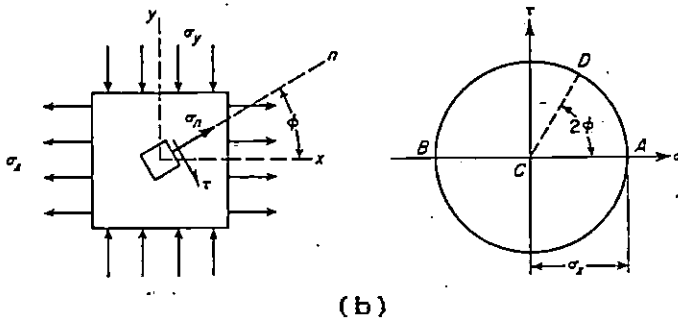
Ketika gaya geser berharga nol bertepatan dengan tegangan utama, yaitu letak tegangan aksial dalam kondisi maksimum dan minimum. Ketika tegangan geser maksimum bertepatan dengan nilai rata-rata antara tegangan aksial maksimum dan minimum.

Gambar 6.12. adalah beberapa contoh lingkaran Mohr, yang menggambarkan berbagai variasi tegangan ganda aksial. (Timoshenko, 1964)

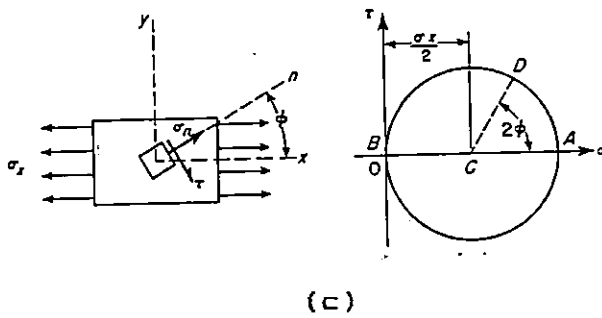


(a)

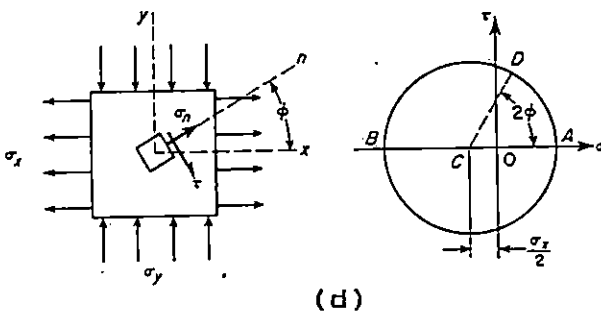
Tegangan  $\sigma_x$  berupa tarik dan  $\sigma_y$  juga tarik dengan nilai  $\sigma_x > \sigma_y$ .



Tegangan  $\sigma_x$  tarik dan  $\sigma_y$  tekan dengan harga mutlak  $|\sigma_x| = |\sigma_y|$



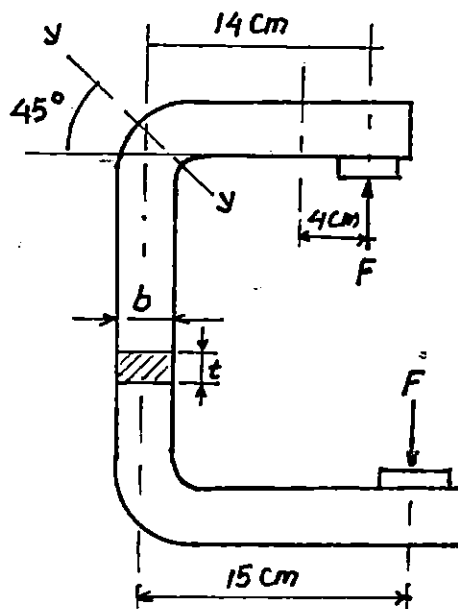
Tegangan  $\sigma_x$  berupa tarik dan  $\sigma_y = 0$ .



Tegangan  $\sigma_x$  tarik dan  $\sigma_y$  tekan dengan harga mutlak  $|\sigma_y| = 2|\sigma_x|$

Contoh 6.2.

Suatu klem C. lihat Gambar 6.12. terjadi pembebanan  $F = 2500 \text{ kg}$ . Panampang potong x-x berbentuk segi empat dengan lebar  $b$  dan tebal  $t$  dengan perbandingan  $b=2t$ . Jika bahan tersebut terbuat dari baja yang tegangan ijin =  $1000 \text{ kg/cm}^2$ , tentukan ukuran dari penampang tersebut. Juga tentukan tegangan yang terjadi pada potongan y-y dan penampang z-z. Bagaimana pula jika penampang tersebut terbuat dari poros berlobang.



Gambar 6.12. Klem Bertegangan

Penyelesaian

Tinjauan Pada Potongan X-X.

Akibat beban  $P$  pada potongan x-x terjadi pembebanan eksentrik, dengan jarak keeksentrikan 12 cm. Sehingga tegangan yang terjadi pada panampang ini ialah tegangan langsung berupa tarik dan tegangan bengkok

penampang segiempat hanya mengubah nilai A yaitu luas penampang dan Z yaitu momen tahanan.

Potongan Y-Y.

Akibat gaya F menimbulkan dua macam gaya terhadap penampang potong Y-Y, yaitu gaya sejajar terhadap penampang potong dan gaya tegak lurus terhadap penampang potong.

Luas penampang potong tersebut pada posisi miring sebesar :  $A_m = b \sec 45^\circ \times t = 41.92 \text{ cm}^2$

Gaya sejajar :  $F_s = F \sin 45^\circ = 1768 \text{ kg}$

Gaya tegak lurus :  $F_t = F \cos 45^\circ = 1768 \text{ kg}$

Gaya sejajar menimbulkan tegangan geser  $\tau = \frac{F_s}{A_m}$ .

Setelah dimasukkan nilai  $F_s$  dan  $A_m$  diperoleh tegangan geser  $\tau = 42.16 \text{ kg/cm}^2$ .

Gaya yang tegak lurus penampang potong merupakan beban aksial eksentrik, sehingga menimbulkan dua macam tegangan yaitu tegangan langsung aksial tarik dan tegangan bengkok.

Tegangan langsung tarik  $\sigma_y = \frac{F_t}{A_m}$ . Dengan memasukkan nilai  $F_t$  dan  $A_m$  diperoleh tegangan langsung aksial tarik pada potongan y-y :  $\sigma_y = 42.16 \text{ kg/cm}^2$ .

Tegangan bengkok yang terjadi pada potongan y-y ialah:

$$\sigma_{by} = \frac{M_y}{Z_y}, \text{ dimana } Z_y = \frac{t(b \sec^2 45^\circ)}{6}$$

$$= 76 \text{ cm}^2$$

$$M_y = F \cdot e = 2500 \times 14$$

$$= 3500 \text{ kg-cm}$$

Dengan memasukkan nilai  $Z_y$  dan  $M_y$  diperoleh tegangan bengkok pada penampang  $y-y$  :  $\sigma_{by} = 460.6 \text{ kg/cm}^2$

Tegangan tarik maksimum pada penampang potong  $y-y$  adalah penjumlahan dari tegangan bengkok sisi dalam yang bersifat tarik dengan tegangan langsung yang berupa tarik, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\sigma_{tmaks} &= \sigma_y + \sigma_{by} \\ &= 42.16 + 460.6 = 502.76 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

Tegangan tekan maksimum terletak pada sisi luar yaitu

$$\sigma_{dmaks} = 460.16 - 42.16 = 418.44 \text{ kg/cm}^2$$

Pada penampang potong  $y-y$  tersebut juga terjadi tegangan geser sebagaimana telah dihitung di atas yaitu  $\tau = 42.16 \text{ kg/cm}^2$

Berdasarkan teori tegangan utama, pada penampang tersebut pada sisi dalam memiliki tegangan utama maksimum yang berupa tegangan tarik dan geser:

$$\begin{aligned}\sigma_{1t} &= \frac{\sigma_{tmaks}}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma_{tmaks}}{2}\right]^2 + \tau^2} \\ &= \frac{502.76}{2} + \sqrt{\left[\frac{502.76}{2}\right]^2 + 42.16^2} \\ &= 506.28 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

Sedangkan pada sisi luar terjadi tegangan utama maksimum yang berupa kombinasi tekan dan geser:

$$\sigma_{1d} = \frac{\sigma_{dmaks}}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma_{dmaks}}{2}\right]^2 + \tau^2}$$

diperoleh nilai tegangan maksimum =  $460.6 \text{ kg/cm}^2$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_{\text{maks}}}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma_{\text{maks}}}{2}\right]^2 + \tau^2} \\ &= \frac{418.44}{2} + \sqrt{\left[\frac{418.44}{2}\right]^2 + 42.16^2} \\ &= 422.52 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

Tegangan geser maksimum yang terjadi:

$$\tau = \sqrt{\left[\frac{\sigma_{\text{maks}}}{2}\right]^2 + \tau^2}$$

diperoleh  $\tau = 254.9 \text{ kg/cm}^2$ .

Potongan Z-Z

Pada potongan z-z akibat gaya F menimbulkan gaya bengkok  $\sigma_{bz}$ , sebesar:

$$\sigma_{bz} = \frac{M_{bz}}{Z_z}$$

Dimana :  $M_{bz} = F \times 4 = 2500 \times 4 = 10000 \text{ kg-cm}$

$$Z_z = \frac{tb^2}{6} = 38 \text{ cm}^3$$

setelah dimasukkan nilai momen bengkok dan tahanan bengkok diperoleh tegangan bengkok pada potongan zz:  $\sigma_{bz} = 263 \text{ kg/cm}^2$ . Tegangan tersebut adalah tegangan bengkok yang pada dasarnya adalah tegangan tarik pada sisi dalam secara berangsur-angsur nilai mengecil hingga pada sumbu batang terjadi sumbu netral, yaitu tegangan nol. Selanjutnya menuju sisi luar berangsur-angsur tegangan tekan hingga maksimum sampai permukaan sisi luar. Pada potongan z-z ini tegangan didominasi oleh tegangan bengkok, sedangkan tegangan geser dapat dianggap tak berpengaruh.



## E. TEORI PATAH BAHAN

Suatu benda menerima beban ganda (biaksial), jika ditinjau bagian elemen yang sangat kecil dari benda tersebut, maka hubungan antara elemen-elemen tersebut ada yang bersifat tarik menarik atau tekan menekan sebagai tegangan normal, dan sekaligus elemen-elemen tersebut menderita beban geser. Oleh sebab itu pada teori ini akan mengungkapkan kemampuan benda melakukan perlawanan terhadap beban tersebut, apakah kemampuan tersebut didominasi oleh kemampuan terhadap geser atautkah didominasi oleh beban normal.

Terdapat lima teori yang membahas tegangan ganda ini yaitu:

### 1. Tegangan utama maksimum (teori Rankine)

Menurut teori ini suatu benda patah bila benda tersebut telah menderita tegangan normal maksimum, yang bersifat tarik ataupun tekan sesuai dengan bahan tersebut. Rumus tersebut ialah :

$$\sigma_{(el)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4\tau^2}$$

Teori ini lebih tepat digunakan untuk benda yang elastis dan kurang sesuai untuk benda yang rapuh.

Dimana :

$\sigma_{(el)}$  : tegangan utama /normal maksimum yang diperoleh dari percobaan bahan hingga pada batas elastisnya.

$\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  : tegangan aksial tarik atau tekan masing saling tegak lurus.

$\tau$  : Tegangan geser

### 2. Tegangan geser maksimum (teori Guest)

Menurut teori ini suatu bahan patah ketika bahan tersebut telah menderita beban geser yang

mencapai nilai beban geser maksimumnya, yaitu:

$$\tau_{\text{maks}} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4\tau^2}$$

Nilai  $\tau_{\text{maks}}$  ini diperoleh dari hasil percobaan bahan dari sifat gesernya, atau jika data ini tidak diperoleh dapat mengambil :  $\tau_{\text{maks}} = 0.5$  s/d  $0.8 \times \sigma_{\text{maks}}$ . Bahan yang elastis  $\tau_{\text{maks}}$  yang cenderung tinggi dan sebaliknya untuk bahan rapuh.

### 3. Regangan utama maksimum (teori Saint Venant)

Menurut teori ini suatu bahan akan gagal dalam mempertahankan beban yang diderita jika beban tersebut telah menimbulkan nilai regangan utama maksimum, yaitu:

$$\epsilon_{\text{maks}} = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{E\mu}$$

Nilai  $\epsilon_{\text{maks}}$  ini dapat diambil dari tegangan maksimum hasil percobaan ( $\sigma(e_1)$ ) dibagi dengan E. Sedangkan  $\mu$  adalah perbandingan poisson, yaitu suatu perbandingan antara regangan lateral terhadap regangan aksial, yang dalam prakteknya dapat dilihat dalam tabel untuk kebanyakan bahan.

### 4. Energi Regangan maksimum (teori Haigh)

Menurut teori ini bahwa suatu bahan akan gagal dalam mempertahankan pembebanan apabila energi regangan persatuan volume telah mencapai nilai batas maksimumnya. Secara matematik dituliskan:

$$\frac{1}{2E} \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2\sigma_1 \cdot \sigma_2}{m} \right\} = \sigma(e_1)^2$$

$\sigma(e1)$  tersebut berdasarkan hasil percobaan, yaitu tegangan maksimum hingga pada batas elastis.

#### 5. Perubahan energi maksimum (teori Hencky dan Mises)

Menurut teori ini bahwa suatu bahan akan patah akibat pembebanan apabila telah beban tersebut telah mengakibatkan perubahan energi maksimum. Perubahan energi tersebut adalah perubahan energi pada batas elastisnya untuk setiap satuan volume berdasarkan percobaan tegangan aksial sederhana. (Khurmi, h.124)

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma(e1)^2$$

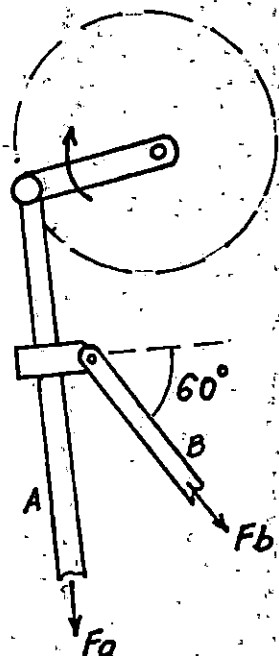
$\sigma(e1)$  tersebut berdasarkan hasil percobaan, yaitu tegangan maksimum hingga pada batas elastis.

#### Contoh 6.3.

Suatu sistem pergerakan batang engkol, lihat Gambar 6.13. Pada posisi tersebut batang A menderita gaya tarik sebesar 10 kN. Dengan sudut  $60^\circ$  batang B menderita beban tarik 10 kN. Jika batang engkol A tersebut berbentuk lingkaran, terbuat dari baja dengan tegangan tarik yang diijinkan sampai batas elastis sebesar  $100 \text{ N/mm}^2$ , perbandingan poisson  $1/m = 0.3$ .

Tentukan diameter batang A tersebut sesuai dengan teori:

1. Teori Tegangan Utama maksimum
2. Teori tegangan geser maksimum.
3. Teori regangan utama maksimum.
4. Teori energi regangan maksimum



Gambar 6.13. Batang Engkol Bertegangan.

Pada batang A terjadi tegangan aksial tarik  $F = 10000$  kN dan tegangan geser  $F_s = F_b \times \sin 30^\circ = 5$  kN.

$$\text{Tegangan tarik akibat } F : \sigma_t = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{10000}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{40000}{\pi d^2}$$

$$\text{Tegangan geser akibat } F_b = \frac{F_s}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{5000}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{20000}{\pi d^2}$$

1. Sesuai dengan teori tegangan utama maksimum:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Dalam hal ini tegangan aksial yang terjadi pada batang A hanya satu arah yaitu akibat  $F$ , menghasilkan tegangan  $\sigma_x$  atau  $\sigma_t$ . Sedangkan  $\sigma_y = 0$ . Tegangan geser  $\sigma_{xy}$  adalah berupa tegangan geser akibat gaya  $F_s$  dengan

menghasilkan  $\tau$ . Sehingga tegangan utama maksimum terjadi ialah:

$$\sigma_{\text{maks}} = \frac{40000}{\pi d^2 \cdot 2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{40000}{\pi d^2}\right)^2 + \left(\frac{20000}{\pi d^2}\right)^2}$$

setelah diuraikan diperoleh  $\sigma_{\text{maks}} = 15370/d^2 \text{ N/mm}^2$ .

Sesuai dengan teori tegangan utama maksimum bahwa suatu bahan akan patah akibat tegangan yang terjadi akibat tegangan utama tersebut telah mencapai tegangan maksimum berdasarkan percobaan sampai batas elastis, yaitu mencapai  $f_t(e1)$ , sebesar  $100 \text{ N/mm}^2$ .

$$\frac{15370}{d^2} = 100 \implies \text{akhirnya diperoleh } d = 12.4 \text{ mm.}$$

2. Berdasarkan teori tegangan geser maksimum bahwa

$$\tau_{\text{maks}} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1)^2 + 4\tau^2} \quad \sigma_2 = 0$$

dengan memasukkan nilai tegangan tarik dan tegangan geser diperoleh tegangan geser maksimum  $\tau_{\text{maks}} = \frac{8997}{d^2} \text{ N/mm}^2$

Berdasarkan teori tegangan geser maksimum bahwa suatu bahan akan patah apabila bahan tersebut telah menderita tegangan geser yang mencapai tegangan geser patah berdasarkan percobaan sampai batas elastis, dalam hal ini diasumsikan tegangan geser patah elastis =  $0.5 \times f_t(e1)$

$$\frac{8997}{d^2} = \frac{100}{2} \quad \text{diperoleh } d = 13.42 \text{ mm.}$$

## BAB IV BEBAN TEKUK

Sebagaimana telah dipelajari dalam bab terdahulu tentang beban eksnetrik, telah dijelaskan bahwa beban eksentrik mengkaji suatu beban aksial yang titik tangkap gaya tidak terletak pada titik pusat luas penampang potong melintang bahan dan fenomena ini berlaku pada bahan yang pendek sehingga beban tersebut tidak menimbulkan defleksi pada arah melintang.

Tekukan adalah fenomena pembebanan aksial (tekan) dimana bahan memiliki ukuran panjang yang jauh lebih besar dibandingkan terhadap diameternya, sehingga beban ini dapat menimbulkan defleksi pada arah melintang. Bahan yang memiliki dimensi sedemikian ini dikenal dengan istilah kolom.

### A. ASUMSI KEBERLAKUAN KOLOM

Kajian tentang tekukan ini banyak dipelajari dalam rumus Euler, yaitu seorang bangsa Swiss yang telah mendalami fenomena tekukan pada abad ke-17. Asumsi yang berlaku dalam tekukan ialah:

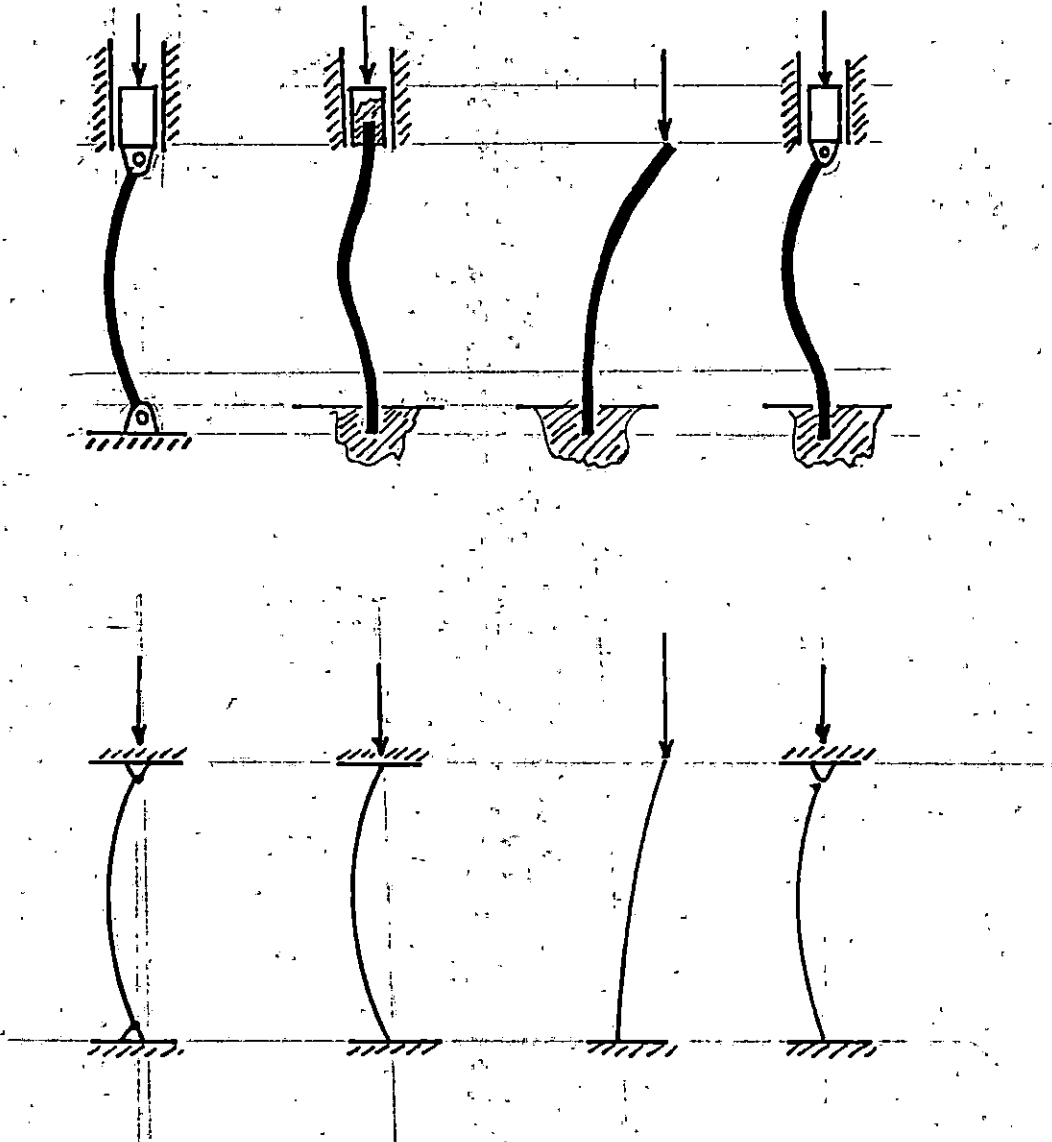
1. Kolom terbuat dari bahan yang seragan (homogen) disepanjang bahan, dan pada mulanya mendapatkan beban aksial yang lurus.
2. Bahan dari kolom elastis sempurna mengikuti hukum Hooke.
3. Ukuran panjang jauh lebih besar dibandingkan dengan ukuran diameternya.
4. Akibat ukuran yang panjang maka beban aksial menimbulkan defleksi pada arah melintang, sekaligus mengabaikan fenomena tegangan tekan.

### B. CARA PEMBEBANAN PADA KOLOM

Pembebanan pada kolom dikelompokkan menjadi empat

macam, yang dibedakan berdasarkan cara tumpuannya. Yaitu:

1. Kedua ujung kolom diberi tumpuan pasak/engsel (Gambar a)
2. Satu ujung tumpuan tetap dan ujung yang lain diberi tumpuan jepit yang bebas aksial. (Gambar b)
3. Satu ujung diberi tumpuan tetap dan ujung yang lain bebas aksial maupun radial. (Gambar c)
4. Satu ujung diberi tumpuan tetap dan ujung yang lain diberi tumpuan engsel. (Gambar d)



Gambar 6.1. Kondisi Pembebanan Kolom

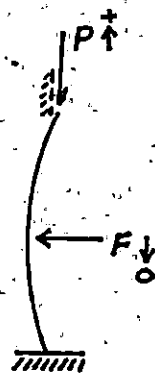
Kesepakatan, dalam penandaan arah momen bengkok mengikuti kaidag seperti pada Gambar 6.2.



Gambar 6.2. Arah Pembengkokan

### C. BEBAN KRITIS

Jika suatu kolom ditahan bagian ujung bawah dan ujung atasnya. Kemudian diberi gaya dari arah horisontal, sehingga kolom tersebut melendut/ tertekuk. Kemudian secara bersamaan kolom tersebut diberi gaya aksial tekan dari atas sedikit demi sedikit dan gaya horisontal yang telah ada sedikit demi sedikit dikurangi, dengan mengontrol kolom tersebut selalu dalam terdefleksi/ tertekuk sekecil mungkin. Suatu saat akan diperoleh kondisi dimana gaya horisontal habis (nol) dan kolom masih tertekuk dengan hanya dipertahankan oleh gaya vertikal. Gaya vertikal tersebut dinamakan beban / gaya kritis kolom. Lihat Gambar 6.3.



Gambar 6.3. Kolom Dengan Beban Kritis



#### D. PENURUNAN RUMUS-RUMUS KOLOM

Sebagai contoh analogi penurunan rumus kolom dengan pendekatan teori Euler berikut akan diturunkan rumus pada kolom dengan kedua ujungnya ditumpu oleh engsel.



Gambar 6.3. Kolom Kedua Ujung Ditumpu Oleh Engsel

Kaidah penurunan rumus tekukan menggunakan kaidah defleksi, dimana pelendutan disimbolkan dengan  $y$  dan letak titik yang ditinjau dari suatu tumpuan tertentu disimbolkan oleh  $x$ . Rumus momen yang mengakibatkan defleksi / tekuk sama seperti rumus yang berlaku pada kajian defleksi, lihat rumus 5.1 dan 5.2. yaitu:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \bar{M}_x$$

Momen yang terjadi pada titik  $x$  ialah :  $M_x = - P \cdot y$

Sehingga

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = - P \cdot y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0.$$

Persamaan diferensial tersebut dengan koefisien dari  $y$  berupa  $P/EI$ , setelah diselesaikan diperoleh :

$$y = A \cos x \sqrt{P/EI} + B \sin x \sqrt{P/EI} \quad (6.1)$$

$A$  dan  $B$  adalah konstanta yang diperoleh dari integral. Dengan menggunakan kaidah defleksi nilai  $x$  dihitung dari titik tumpuan. Jika diambil  $x=0$ , berseuaian dengan  $y=0$ . Diperoleh  $A=0$ . Jika diambil  $x=l$ , yaitu sepanjang kolom, berseuaian dengan  $y=0$ , sehingga persamaan 6.1 menjadi

$$0 = B \sin l \sqrt{P/EI}$$

dengan membagi ruas kanan dan kiri dengan  $B$  diperoleh

$$0 = \sin l \sqrt{P/EI}$$

Jika  $l \sqrt{P/EI}$  dimisalkan sebagai  $c$  maka nilai  $\sin c = 0$  yang memenuhi adalah  $c = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$  dst. mengambil  $c$  yang sesuai dalam kasus ini yaitu  $c = \pi$ . sehingga

$$l \sqrt{P/EI} = \pi$$

atau

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Akhirnya diperoleh bahwa beban kritis yang berlaku untuk kolom yang kedua ujungnya ditumpu oleh rol adalah

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Dengan analogi yang sama, pada kasus kondisi kolom yang lain yang hanya dibedakan oleh cara tumpuannya akhirnya diperoleh rumus sebagai berikut:

1. Kolom dengan kedua ujungnya ditumpu oleh engsel

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

2. Kolom dengan satu ujung ditumpu jepit (tetap) dan satu ujungnya bebas

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

3. Kolom dengan kedua ujungnya ditumpu jepit/tetap

$$P = \frac{4 \pi^2 EI}{l^2}$$

4. Kolom dengan satu ujung jepit dan ujung lain diengsel

$$P = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

Keempat rumus tersebut memiliki bentuk yang sama hanya terdapat konstanta yang berbeda. Sehingga rumus umum menjadi:

$$P = \frac{C \pi^2 EI}{l^2} \dots \dots \dots (6.2)$$

Untuk menyesuaikan rumus tersebut dengan berbagai kondisi kolom maka diperoleh nilai C, suatu konstanta dari rumus Euler yang nilainya tergantung pada sistem penumpuan (*fixity coefficient*) sebagai berikut:

1. Kolom dengan kedua ujungnya ditumpu oleh engsel, C=1.
2. Kolom dengan satu ujung ditumpu jepit (tetap) dan satu ujungnya bebas, C=0.25.
3. Kolom dengan kedua ujungnya ditumpu jepit/tetap, C=4.
4. Kolom dengan satu ujung jepit dan ujung lain diengsel C=2.

### E. BATASAN KEBERLAKUAN RUMUS EULER

Rumus 6.2. adalah rumus umum yang menyatakan besarnya gaya kritis tekuk, artinya pada beban tersebut terjadi tekukan benda. Pada kondisi lain material tersebut dengan dimensi yang sama juga akan terjadi kerusakan akibat beban tekan /tegangan tekan. Berlakunya rumus yang berkenaan dengan beban tekuk selalu pada kondisi di bawah beban maksimum tekan. Artinya rumus 6.2. yang merupakan beban kritis tekuk  $P$  fungsi dari  $(E, I, l)$  dengan berbagai variasi nilai  $(E, I, l)$  dapat terjadi berbagai nilai  $P$ , namun jika nilai  $P$  tersebut sudah melewati beban tekan maksimum maka rumus 6.2. tersebut tidak dapat berlaku. Keberlakuan rumus Euler tersebut dapat ditinjau sebagai berikut.

$$P = \frac{C \pi^2 EI}{l^2}$$

Dimana  $I$  adalah momen kelembaman, dengan  $I_x$  berarti terhadap sumbu  $X$  dan  $I_y$  terhadap sumbu  $Y$ . Konsentrasi momen kelembaman tersebut yang dibayangkan terhadap luasan  $A$  memiliki hubungan sebagai berikut

$$I_x = k_x^2 \cdot A \quad \text{dan} \quad I_y = k_y^2 \cdot A$$

Atau

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

konstanta  $k$  tersebut dikenal dengan jari-jari girasi.

Sehingga rumus 6.2. dapat diubah menjadi

$$P = \frac{\pi^2 E A}{\left(\frac{l}{k}\right)^2}$$

Perbandingan  $\frac{l}{k}$  tersebut dikenal sebagai perbandingan kerampingan (*slenderness ratio*): (RS).

Beban maksimum yang berdasarkan beban tekan berbentuk

$$\sigma_c = \frac{P}{A} \quad \text{atau} \quad P = \sigma_c \cdot A$$

Jika nilai P akibat beban tekan tersebut dikaitkan dengan nilai P akibat tekukan maka

$$\sigma_c \cdot A = \frac{\pi^2 E A}{\left(\frac{l}{k}\right)^2}$$

Atau

$$\frac{l}{k} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_c}}$$

Sebagaimana diterangkan di atas bahwa berlakunya rumus Euler hanya jika P akibat tekuk lebih kecil dari P akibat beban tekan maksimum.

Sebagai contoh ambil baja yang memiliki elastisitas  $E = 200 \text{ GPa}$ , dengan tegangan maksimum tekan  $\sigma_c = 320 \text{ MN/m}^2$ .

Maka berlakunya Rumus Euler berdasarkan perbandingan kerampingannya ialah:

$$\begin{aligned} \frac{l}{k} &= \sqrt{\frac{3.14^2 \times 200 \times 10^9}{320 \times 10^6}} \\ &= 79.49 \quad \curvearrowright \quad 80 \end{aligned}$$

Kesimpulannya bahwa Rumus Euler berlaku jika material tersebut berada dalam kondisi perbandingan kerampingan (RS)  $< 80$ , khusus untuk baja dengan E tersebut di atas.

## F. KESETARAAN PANJANG

Dalam bentuk lain penulisan rumus Euler lebih lazim berbentuk:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Dimana  $L$  adalah kesetaraan panjang yang memiliki harga terhadap panjang kolom yang sebenarnya  $l$  sebagai berikut:

1. Kolom dengan kedua ujungnya ditumpu oleh engsel,  $L=l$ .
2. Kolom dengan satu ujung ditumpu jepit (tetap) dan satu ujungnya bebas,  $L = 2l$
3. Kolom dengan kedua ujungnya ditumpu jepit/tetap  $L = \frac{l}{2}$
4. Kolom dengan satu ujung jepit dan ujung lain diengsel  $L = l/\sqrt{2}$ .

## G. RUMUS EMPIRIS KOLOM

Sebagaimana telah diterangkan dalam teori Euler bahwa teori tersebut hanya sesuai untuk kolom yang sangat panjang, yang hanya benar-benar mengabaikan adanya tegangan tekan pada material. Lebih lanjut Prof. Rankine melakukan eksperimen yang berkenaan dengan mempertimbangkan adanya defleksi sekaligus adanya tegangan tekan, sehingga rumus ini lebih tepat bila digunakan untuk kolom yang relatif pendek. Rumus empiris tersebut ialah;

- a. Rumus Rankine
- b. Rumus Johnson

### 1. Rumus Rankine

Rumus Rankine mempelajari karakteristik kolom dengan dua pertimbangan, yaitu berdasarkan kekuatan bahan terhadap beban langsung aksial dan beban

tekuk. Penurunan rumus tersebut sebagai berikut.

$$\frac{1}{P_r} = \frac{1}{P_c} + \frac{1}{P_e}$$

Dimana:  $P_r$  : beban kritis menurut Rankine

$P_c$  : Beban tekan maksimum =  $\sigma_c \cdot A$

$P_e$  : Beban kritis menurut Euler

$P_c$  adalah beban maksimum yang berupa tekan langsung, dan bernilai konstan untuk kolom yang panjang ataupun yang pendek. Sedangkan  $P_e$  adalah beban maksimum / kritis tekuk menurut Euler, yang apabila kolom pendek maka nilai  $P_e$  besar, sehingga nilai  $1/P_e$  semakin kecil, yang pada akhirnya jika kolom semakin pendek berarti  $1/P_e$  dapat diabaikan, berarti sesuai teori ini jika kolom panjang berlaku perhitungan kekuatan bahan yang didominasi oleh sifat tekuk, jika kolom pendek perhitungan kekuatan didominasi oleh sifat beban langsung, dan jika kolom sedang maka sifat tekuk/ lendut dan sifat tegangan langsung keduanya dipertimbangkan. Sehingga teori Rankine sesuai untuk kolom yang panjang ataupun yang pendek.

$$\frac{1}{P_r} = \frac{1}{P_c} + \frac{1}{P_e} = \frac{P_c + P_e}{P_c \cdot P_e}$$

$$P_r = \frac{P_c}{1 + \frac{P_c}{P_e}}$$

dengan menggantikan  $P_c = \sigma_c \cdot A$ , dan  $I = Ak^2$ , serta memasukkan konstanta Rankine  $a = \sigma_c / (\pi^2 E)$ , akhirnya diperoleh rumus Rankine

$$P_r = \frac{P_c}{1 + a \left( \frac{L}{k} \right)^2}$$

Dimana:

$P_c$  : .Beban langsung maksimum =  $\sigma_c \cdot A$

$a$  : konstanta Rankine =  $\sigma_c / (\pi^2 E)$

$L$  : kesetaraan panjang kolom

$k$  : jari-jari girasi terkecil

Berikut ini tabel empiris konstanta Rankine dari berbagai macam bahan

No	Jenis bahan	Teg. tekan Maks. ( $\sigma_c$ :...kg/cm <sup>2</sup> )	$a = 1/(\pi^2 E)$
1	besi kelabu	2500	1/9000
2	besi tuang	5500	1/16000
3	baja lunak	3200	1/7500
4	timah	500	1/750

## 2. Rumus Johnson

Prof. J.B. Johnson mendapatkan dua teori untuk kolom pendek.

a. Rumus Garis Lurus.

b. Rumus Parabolic

### a. Rumus Garis Lurus

Rumus empiris Johnson menurut garis lurus berbentuk

$$P = A \left[ \sigma_y - C_1 \left( \frac{L}{k} \right) \right]$$

Dimana:  $A$  : penampang potong kolom

$\sigma_y$ : tegangan luluh (*yield point stress*)

$$C_1 = \frac{2\sigma_y}{3\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{3CE}} \quad \text{Dimana } C : \text{konstanta Euler}$$



$C_1$  = konstanta tergantung pada jenis bahan dan cara penumpuan.

$\frac{L}{k}$  : rasio kerampingan.

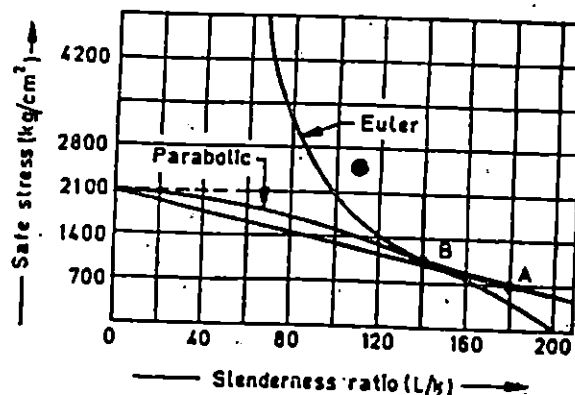
#### b. Rumus Parabolic

Setelah mendapatkan rumus garis lurus Johnson mendapatkan rumus yang lebih tepat, yang dikenal dengan rumus parabolic. Rumus tersebut sebagai berikut

$$P = A \sigma_y \left[ 1 - \frac{\sigma_y}{4CE} \pi^2 \left( \frac{L}{k} \right)^2 \right]$$

semua simbol tersebut sama seperti pada teori Garis Lurus.

Ketiga teori yaitu Euler, Garis lurus dan Parabolic jika digambarkan dalam grafik " Tegangan kritis terhadap Rasio kerampingan " dapat dilihat pada Gambar 6.4, dengan mengambil sampel bahan mild steel pada kedua ujungnya ditumpu oleh engsel.



Gambar 6.4. Grfaik Perbedaan Tiga Teori Kolom

## Keterangan:

- P : beban pada kolom  
 A : penampang potong kolom  
 e : keeksentrisan  
 Z : modulus irisan  
 yc: jarak serat yang menderita tegangan maksimum akibat bengkok terhadap sumbu.  
 k : jari-jari girasi terkecil  
 I : momen inersia =  $A k^2$   
 E : modulus elastis  
 l : panjang kolom

Rumus yang berkenaan dengan kolom dengan beban eksentrik menggunakan kaidah penjumlahan beban langsung yang berupa  $P/A$  dengan beban bengkok yang berupa  $M/Z$ .

$$\sigma_{maks} = \frac{P}{A} + \frac{M}{Z}$$

Setelah dimodifikasi rumus Secan menjadi:

$$\sigma_{maks} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{e \cdot y}{k^2} \sec \frac{L}{2k} \sqrt{\frac{P}{E A}} \right]$$

## Contoh 6.1.

Suatu pipa panjang 5 m, diameter luar 4 cm dan diameter dalam 2.5 cm. Akibat pembebanan langsung aksial sebesar 6 ton, terjadi perpendekan 6.4 mm. Tentukan besar beban yang dapat menimbulkan tekukan (beban kritis tekuk) .

## Penyelesaian

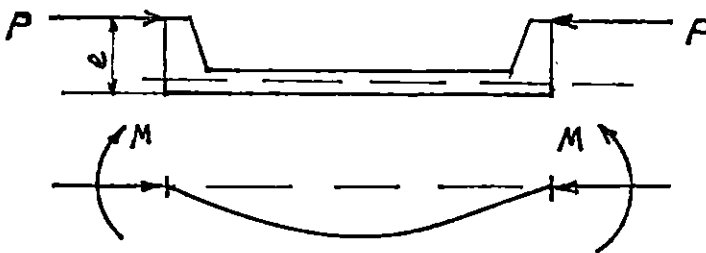
$$\text{Regangan } \epsilon = \frac{\delta l}{l} = \frac{0.64}{500} = 0.00128$$

Berdasarkan Gambar 6.4. terlihat adanya arah grafik yang berbeda anatar ketiga teori kolom, dimana Euler untuk rasio kerampingan ( $l/k$ ) yang rendah memiliki harga tegangan kritis yang tinggi. Teori tersebut dibenahi oleh Johnson melalui Teori Garis Lurus dan lebih lanjut teori Parabolic. Toeri Garis Lurus dengan Teori Parabolic tidak jauh berbeda.

Titik A adalah perpotongan antara teori Garis Lurus dengan Teori Euler, titik B perpotongan antara Teori Parabolic dengan Teori Euler. Untuk bahan tersebut penggunaan rumus Euler dan Toeri Garis Lurus lebih tepat pada  $l/k > 140$ . Sedangkkn untuk  $l/k < 140$  lebih tepat menggunakan teori Parabolic.

#### H. BEBAN EKSENTRIK PADA KOLOM PANJANG

Rumus yang berlaku pada beban eksentrik dengan kolom panjang dikenal dengan rumus Sekan. Dalam aplikasinya kasus yang berkenaan dengan beban eksentrik sering ditemukan. Pada bab terdahulu telah membahas beban eksentrik pada kolm pendek yang hanya mempertimbangkan tegangan tekan langsung. Pada topik ini beban eksenetrik yang berlaku pada kolom yang panjang, sehingga pertimbangan defleksi melintang lebih memungkinkan. Lihat Gambar 6.5.



Gambar 6.5. Beban Eksentrik Pada Kolom Panjang.

$$I = \frac{\pi}{64} (4^4 - 2.5^4) = 10.65 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} \text{Modulus elastis } E &= \frac{P}{A \cdot \varepsilon} = \frac{6000}{\frac{\pi}{4} (4^2 - 2.5^2) \times 0.00128} \\ &= 6.127 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Untuk kolom yang kedua ujungnya menggunakan engsel/  
bukan jepit, maka  $L = l = 500$ .

$$\text{Beban kritis kolom } P = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$$

Setelah nilai-nilai tersebut dimasukkan diperoleh  
beban kritis tekuk  $P = 257.6 \text{ kg}$ .

Catatan

- \* Nilai beban kritis tersebut akan berubah jika menggunakan cara tumpuan yang berbeda.
- \* Jika penampang potong kolom tersebut berbentuk segiempat persegi panjang maka nilai momen inersia terhadap x ( $I_x$ ) dan terhadap y ( $I_y$ ) diambil nilai yang kecil.

#### Contoh 6.2.

Suatu cincin baja tuang diameter luar 8 cm dan diameter dalam 6 cm. Digunakan sebagai kolom sepanjang 200 cm. Kedua ujung ditumpu dengan jepit / tetap. Gunakan teori Rankine untuk menghitung beban kritis tekuk. Tegangan tekan maksimum =  $6000 \text{ kg/cm}^2$ .

Luas penampang potongan antara kedua diameter kecil dan besar tersebut setelah dihitung diperoleh  $A = 7 \pi \text{ cm}^2$ , sedangkan momen inersia diperoleh  $I = 43.75 \text{ cm}^4$ .  
(cara perhitungan lihat contoh 6.1)

$$\text{Jari-jari girasi } k = \sqrt{\frac{I}{A}} = 2.5 \text{ cm}$$

Dari Tabel 6.1. konstanta Rankine diperoleh  $a = 1/1600$   
Kesetaraan panjang  $L = 1/2 = 100 \text{ cm}$

$$\text{Beban kritis Rankine: } P = \frac{\sigma \text{ ijin}}{1 + a \left(\frac{L}{k}\right)^2}$$

dengan memasukkan nilai tegangan ijin  $= 6000 \text{ kg/cm}^2$ , dan sekaligus nilai  $a, L, K$  akhirnya diperoleh beban kritis tekuk menurut Rankine  $P = 66000 \text{ kg}$ .

### Contoh 6.3.

Suatu pipa dengan diameter luar 200 mm, diameter dalam 160 mm, panjang 4 m. Kedua ujungnya dijepit dengan beban eksentrik 150 kN. Modulus elastis  $E = 94 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ . Tentukan eksentrisitas maksimum agar tidak terjadi tegangan pada bahan.

Kedua ujung kolom dijepit sehingga  $L = 1/2 = 2000 \text{ mm}$ .

$$\begin{aligned} \text{Luas penampang potong } A &= \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \\ &= 11320 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Momen inersia } I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

$$\begin{aligned} \text{Modulus irisan } Z &= \frac{I}{y} \quad \text{Dimana } y = D/2 = 100 \text{ mm} \\ \text{sehingga diperoleh } Z &= 463.6 \times 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Agar diperoleh kolom tidak bertegangan maka besar tegangan akibat beban langsung tekan sama dengan tegangan tarik akibat bengkok. Sehingga persamaan:

$$\frac{P}{A} = \frac{P \cdot e \cdot \text{Sec} \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}}{Z} \dots \dots \dots A$$

terlebih dahulu menghitung  $\text{Sec} \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$ , setelah dimasukkan nilai  $L, P, E$  dan  $I$  diperoleh

## BAB VII

### STATIKA TAK TENTU

Dalam kajian kekuatan bahan yang berkenaan dengan statika tak tentu, bab ini akan membahas menjadi dua pokok bahasan yaitu statika tak tentu pada fenomena gaya aksial, apakah berupa tarik ataupun tekan. Kemudian pada pokok bahasan yang berikutnya ialah berkenaan dengan statika tak tentu dalam fenomena pada tumpuan balok.

#### A. STATIKA TAK TENTU PADA BEBAN AKSIAL

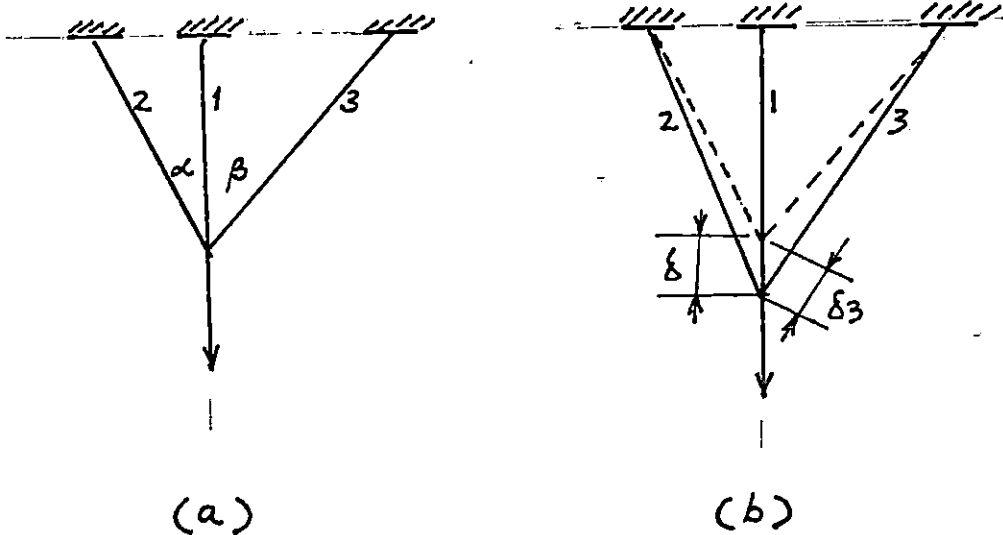
Dalam statika tak tentu yang berkaitan dengan beban tarik / tekan, keberlakuan hukum Hooke pada masing-masing batang penahan tidak sepenuhnya dapat diberlakukan secara sederhana oleh sebab masing-masing bekerja secara bersamaan, sehingga saling berpengaruh secara kompleks.

##### 1. Beban $F$ Ditahan Oleh Sejumlah Tali Dengan Variasi Pertambahan Panjang.

Dalam fenomena ini beban  $F$  ditahan oleh tiga tali dimana yang menentukan hubungan beban dengan variabel yang lain ditentukan oleh pertambahan panjang ( $\delta$ ) yang bervariasi sesuai dengan sudut kemiringannya.

Seperti pada Gambar 7.1, beban  $F$  ditahan oleh tali 1, 2 dan 3 secara bersamaan dengan membentuk sudut  $\alpha$  dan  $\beta$ . Gambar (a) adalah pembebanan ketika sistem mulai dibebani dan (b) setelah sistem dibebani dan terjadilah perpanjangan secara vertikal sebesar  $\delta_1$ , searah dengan tali 1. Sedangkan searah dengan tali 2 menghasilkan perpanjangan  $\delta_2$ , begitu pula pada tali 3 menghasilkan  $\delta_3$ .

Dalam kasus ini perubahan panjang masing-masing delta tersebut harus dikaitkan dengan hukum Hooke, yaitu :  $\delta = PL/AE$ . Rumus tersebut beban  $F$  menghasilkan perpanjangan  $\delta$  dalam arah yang sama.



Gambar 7.1. Sistem Pembebanan Tak Tentu

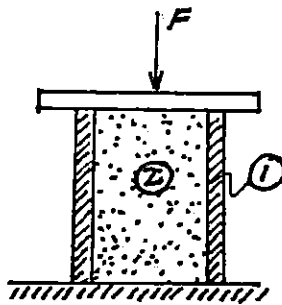
Oleh sebab itu pada kasus pembebanan tersebut, arah beban  $F$  harus disesuaikan dengan arah  $\delta$ , masing-masing tali. Sehingga kunci dari soal ini ialah harus memproyeksikan komponen dari  $F$  yang searah dengan  $\delta_1$  serta menghasilkan  $\delta_1$ , juga memproyeksikan komponen dari  $F$  yang searah dengan  $\delta_2$  dan menghasilkan  $\delta_2$ . Harus diperhatikan tidak boleh membalik pemahaman ini, dengan menyatakan "memproyeksikan  $\delta_1$  atau  $\delta_2$  ke arah  $F$ " oleh sebab pernyataan ini tidak sesuai dengan penampang potong normal dari pembebanan tersebut.

Sebagaimana dijelaskan di atas bahwa gaya  $F$  ditahan oleh tiga tali, yang dalam hal ini komponen dari  $F$  yang searah dengan tali 1, menghasilkan  $\delta_1$  dimisalkan sebagai  $x$ . Komponen dari  $F$  yang diproyeksikan ke arah tali 2, menghasilkan  $\delta_2$  dimisalkan  $y_1$ , begitu pula untuk tali 3 dimisalkan  $y_2$ . Sesuai dengan arah sudutnya secara bersamaan berlaku:

$$y_1 + y_2 \cos \alpha + y_3 \cos \beta = F$$

2. Beban  $F$  Ditahan Oleh Bahan Komposit Dengan Pertambahan Panjang Yang Sama.

Lihat Gambar 7.2, beban  $F$  ditahan oleh bahan yang bersifat komposit, dimana sesuai dengan sistem tersebut bahwa antara bahan 1 dan bahan 2 yang



Gambar 7.2. Beban Pada Bahan Komposit

masing-masing bertegangan  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  dan keduanya memiliki pertambahan panjang yang sama, keduanya menahan beban tekan. Dari sistem ini ada dua catatan penting, yaitu:

$$F_1 + F_2 = F \quad \text{dan} \quad \epsilon_1 = \epsilon_2. \quad \text{Atau :}$$

$$\sigma_1 \cdot A_1 + \sigma_2 \cdot A_2 = F \quad \text{dan} \quad \delta_1 = \delta_2.$$

Rumus ini merupakan dasar penyelesaian kasus pada sistem ini. Lebih lanjut dari sini dapat menurunkan rumus, dengan menggantikan nilai tegangan dalam kaitannya dengan modulus kenyal dan pertambahan panjangnya.

$$E_1 \cdot \frac{\delta_1}{L} A_1 + E_2 \cdot \frac{\delta_2}{L} A_2 = F$$

Dalam hal ini  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , maka lebih lanjut diperoleh rumus berikut:



Secara umum berlaku gaya = tegangan x luas penampang, sehingga persamaan tersebut menjadi:

$$\sigma_1.A_1 + \sigma_2.A_2.\cos \alpha + \sigma_3.A_3.\cos \beta = F$$

Dalam hal ini  $A_1 = A_2 = A_3 = A$ , sehingga

$$A(\sigma_1 + \sigma_2.\cos \alpha + \sigma_3.\cos \beta) = F$$

Dengan menggantikan nilai  $\sigma = E.\epsilon$ , dimana  $\epsilon = \frac{\delta}{L}$

$$AE \left( \frac{\delta_1}{L_1} + \frac{\delta_2}{L_2}.\cos \alpha + \frac{\delta_3}{L_3}.\cos \beta \right) = F$$

Memproyeksikan  $\delta_2$  dan  $\delta_3$  terhadap arah sudutnya, maka:

$$AE \left( \frac{\delta_1}{L_1} + \frac{\delta_1.\cos \alpha}{L_1/\cos \alpha} + \frac{\delta_2.\cos \beta}{L_1/\cos \beta} \right) = F$$

$$AE \frac{\delta_1}{L_1} (1 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta) = F$$

$$\delta_1 = \frac{FL_1}{AE} \left( \frac{1}{1 + \cos^3 \alpha + \cos^3 \beta} \right) \dots \dots \dots (7.1)$$

Jika sudut  $\alpha = \beta$  maka:

$$\delta_1 = \frac{FL_1}{AE} \left( \frac{1}{1 + 2\cos^3 \alpha} \right) \dots \dots \dots (7.2)$$

Dengan sudah diketahuinya  $\delta_1$  maka dapat menghitung  $\delta_2$  dan  $\delta_3$  sesuai dengan arah sudutnya. Kemudian jika bermaksud untuk mengetahui tegangan yang terjadi pada masing-masing tali dapat menghitung sebagai berikut:

$$\sigma_1 = E.\frac{\delta_1}{L_1}, \quad \sigma_2 = E.\frac{\delta_2}{L_2}, \quad \sigma_3 = E.\frac{\delta_3}{L_3} \dots \dots \dots (7.3)$$

$$\delta = \frac{FL}{E_1.A_1 + E_2.A_2} \dots \dots \dots (7.4)$$

mengetahui nilai  $\delta$  ini penting oleh sebab dalam kasus aplikasinya perubahan panjang ini sering diperhitungkan dalam kaitannya dengan sistem yang terkait. Variabel yang penting pula adalah tegangan ( $\sigma$ ), dimana nilai ini perlu diketahui mengingat kemampuan beban maksimum diturunkan dari sini.

$$\sigma_1 = E_1 \frac{\delta}{L} \quad \text{dan} \quad \sigma_2 = E_2 \frac{\delta}{L}$$

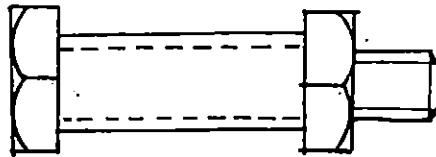
Jika rumus ini nilai  $\delta$  ditukar dengan variabel yang berbeda, dari rumus 7.4, maka terjadilah:

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{L} \left( \frac{FL}{E_1.A_1 + E_2.A_2} \right), \quad \sigma_2 = \frac{E_2}{L} \left( \frac{FL}{E_1.A_1 + E_2.A_2} \right)$$

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2} \qquad \sigma_2 = \frac{F}{\frac{E_1}{E_2} A_1 + A_2}$$

3. Beban F Ditahan Oleh Sejumlah Bahan Dengan Arah Tegangan Berlawanan

Pada Gambar 7.3, memperlihatkan bahwa beban F ditahan oleh baut dan cincin. Pada baut terjadi tegangan tekan sedangkan pada cincin terjadi tegangan tarik. Kasus ini berbeda dengan pembahasan sebelumnya, dimana nilai pertambahan panjang pada masing-masing bahan tidak menjadi kunci penyelesaian soal, tetapi kuncinya adalah adanya persamaan gaya yang bekerja. Yaitu gaya tekan yang diberikan oleh mur, diterima menjadi beban tekan oleh cincin, yang besarnya sama dengan beban tarik pada baut. Selain itu jika mur diputar sejauh sejauh  $\Delta$  maka  $\Delta = \delta_1 + \delta_2$ .



Gambar 7.3. Beban Komposit Pada Mur dan Baut

Sebagai contoh jika pitch dari ulir pada baut tersebut  $p$  dan diputar  $n$  putaran yang dimulai dari posisi dua bahan bersentuhan tanpa tegangan, maka perubahan panjang

$$\delta l = p.n. \text{ Dimana } \delta l = \delta l_{\text{cincin}} + \delta l_{\text{baut}}$$

$\delta l_{\text{cincin}}$  bersifat tekan (memendek) dan  $\delta l_{\text{baut}}$  bersifat tarik (memanjang).

$$\delta l_{\text{cincin}} = \frac{F L}{A_c \cdot E_c}, \quad \delta l_{\text{baut}} = \frac{F L}{A_b \cdot E_b}$$

Dimana  $A_c$  = luas penampang cincin

$E_c$  = modulus elastis cincin

$A_b$  = luas penampang baut

$E_b$  = modulus elastis baut

$F$  = besar gaya yang bekerja pada baut sama dengan besar gaya yang bekerja pada cincin.

$L$  = panjang baut = panjang cincin.

Kembali pada  $\delta l = p.n$ , maka

$$\delta l = \frac{F L}{A_c \cdot E_c} + \frac{F L}{A_b \cdot E_b} = p.n$$

$$\frac{\sigma_c}{E_c} + \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{p \cdot n}{L} \dots \dots \dots (7.5)$$

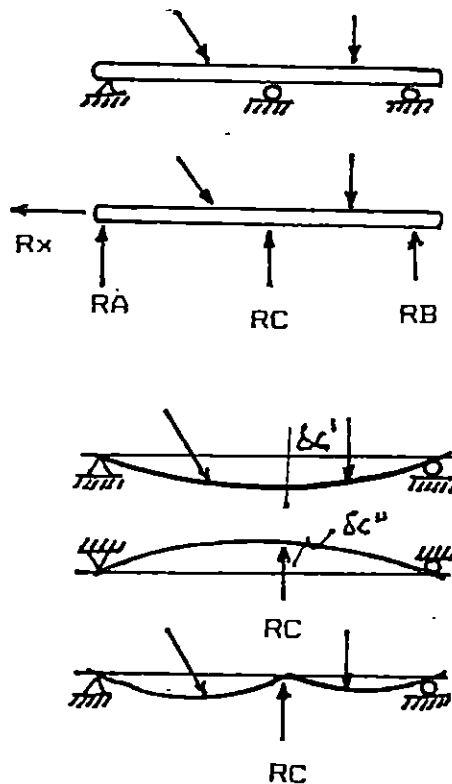
Persamaan tersebut merupakan persamaan yang dapat digunakan untuk mempertimbangkan kekuatan bahan antara baut dan cincin.

**B. STATIKA TAK TENTU PADA PEMBEBANAN BALOK**

Fenomena pembebanan pada balok akan mendapatkan keseimbangan harus memenuhi syarat:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M = 0. \dots \dots \dots (7.6)$$

Metoda yang digunakan pada pembahasan ini adalah metoda superposisi. Sebagai contoh lihat Gambar 7.4.



Gambar 7.4. Metoda Superposisi Pada Statika Tak Tentu Pembebanan Balok

MILIK UPT PERPUSTAKAAN IKIP PADANG

Metoda superposisi dapat melakukan penjumlahan defleksi:

$$\delta_{c'} - \delta_{c''} = 0 \dots \dots \dots (7.7)$$

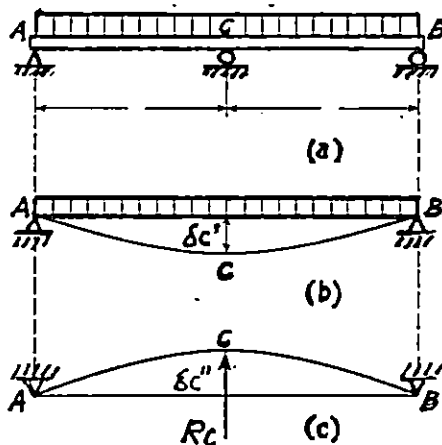
dengan membuat ruas kanan " $= 0$ " pada rumus (7.7) tersebut dapat dimanfaatkan untuk mencari besar reaksi pada titik c yaitu  $R_c$ . Sementara reaksi pada titik A dan B yaitu  $R_a$  dan  $R_b$  dapat dicari

$$R_a = R_a' - R_a'' \quad \text{dan} \quad R_b = R_b' - R_b''$$

Dimana:  $R_a'$  dan  $R_b'$  diperoleh dari gambar (a)

$R_a''$  dan  $R_b''$  diperoleh dari gambar-(b)

Sebagai contoh lihat Gambar 7.5. Suatu sistem pembebanan merata yang ditumpu oleh tiga tumpuan A, B dan C.



Gambar 7.5. Beban Merata Ditumpu Oleh Tiga Tumpuan

Lihat tabel lampiran 2. baris ke 8. seakan-akan tumpuan C tidak ada, dan lihat gambar (b)

$$\delta_{c'} = \frac{5w(2l)^4}{38EI} = \frac{5wl^4}{38EI}$$

dari tabel 7.1 baris ke-6, dan lihat gambar (c). Seakan-akan seperti bukan beban merata tetapi hanya beban sesaat yang berasal dari bawah  $R_c$ .

$$\delta_c'' = \frac{R_c(2l)^3}{48 EI} = \frac{R_c \cdot l^3}{6 EI}$$

dengan mengurangi defleksi :  $\delta_c' + \delta_c'' = 0$  maka

$$\frac{5wl^4}{384EI} - \frac{R_c \cdot l^3}{6EI} = 0.$$

setelah diselesaikan diperoleh  $R_c = \frac{5}{4} w l$ .

Dengan ditemukannya  $R_c$  seakan-akan seperti beban dari bawah maka dapat menghitung  $R_a''$  dan  $R_b''$  melalui keseimbangan rumus (7.6). Dalam hal ini oleh karena titik C ditengah-tengah maka  $R_a'' = R_b'' = \frac{1}{2} R_c$ . Sedangkan  $R_a'$  dan  $R_b' = \frac{1}{2} wl$ . Sehingga reaksi pada A dan B

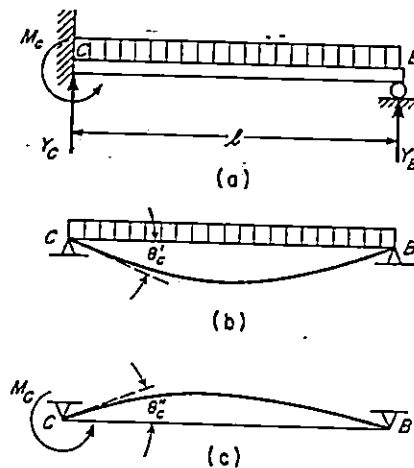
$$R_b = R_a = R_a' - R_a'' = (wl) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} wl\right) = \frac{3}{8} wl$$

Kebenaran nilai ini dapat dicek dari jumlah gaya vertikal = 0. Yaitu  $R_a + R_b + R_c = 2 wl$ .

$$\frac{3}{8} wl + \frac{3}{8} wl + \frac{5}{4} wl = \frac{16}{8} wl \quad (\text{benar})$$

Yang perlu dicatat bahwa jika beban tersebut tidak ditengah maka perhitungan  $R_a'$ ,  $R_b'$ ,  $R_a''$  dan  $R_b''$  dilakukan sesuai dengan kaidah keseimbangan Rumus (7.6), dan pengurangan defleksi  $\delta_c'$  terhadap  $\delta_c''$  selalu sama dengan nol dalam rangka menghitung  $R_c$ .

Perhitungan  $R_c$  dapat pula dihitung melalui sudut kemiringan pada titik C, dengan menganggap titik C sebagai tumpuan jepit dan CB sebagai kantilever yang dibebani B. Pada titik C terjadi momen  $M_c$ . Lihat Gambar 7.7.



Gambar 7.7. Separoh Balok Dari Gambar 7.6  
Dianggap Sebagai Tumpuan Jepit

Gamabr (a) adalah separoh balok dari gambar 7.6. dengan menganggap sebagai kentilever. Gambar (b) dan Gambar (c) adalah keduanya merupakan penyelesaian dari Gambar (a). Gambar (b) dianggap sebagai beban merata yang ditumpu pada C dan B, menghasilkan sudut kemiringan pada C berupa  $\theta_c$ , lihat tabel , baris 8.

$$\theta_c = \frac{wl^3}{24EI}$$

Gambar (c) adalah suatu balok dengan beban momen pada c, yaitu  $M_c$ , dengan beasr sudut lihat tabel , baris 9.

$$\theta_c'' = \frac{Mc \cdot l}{3EI}$$

Oleh sebab pada titik C tersebut dianggap sebagai tumpuan jepit maka pada titik C tersebut sesungguhnya memiliki kemiringan  $\theta_c = 0$ . Sehingga

$$\theta_c = 0 = \theta_c' - \theta_c''$$

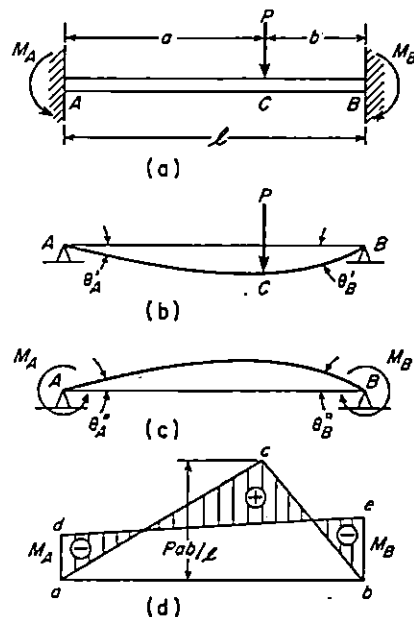
$$\frac{wl^3}{24EI} - \frac{Mc \cdot l}{3EI} = 0.$$

dengan menyelesaikan persamaan tersebut diperoleh  $Mc = \frac{wl^2}{8}$   
Melalui keseimbangan

$$R_b \cdot l - \frac{wl^2}{2} + Mc = 0.$$

dengan memasukkan nilai Mc sebagaimana di atas, kemudian diselesaikan akhirnya diperoleh  $R_b = \frac{3}{8} wl$ .

Sebagai contoh metoda superposisi untuk mengerjakan soal defleksi seperti pada Gambar 7.8. Suatu sistem pembebanan yang ditumpu oleh tumpuan jepit di kedua ujungnya. Beban terletak sejauh a dari tumpuan A dan b dari tumpuan B.



Gambar 7.8. Metoda Superposisi Pada Tumpuan Jepit Kedua Ujungnya.



Untuk menyelesaikan soal tersebut dengan metoda superposisi maka harus dibayangkan sistem tersebut seakan-akan sebagai dua tahapan, yaitu gambar (a) suatu tumpuan sederhana dengan beban  $F$ . Gambar (c) suatu tumpuan yang kedua ujungnya terdapat momen.

Dari gambar (b) besar sudut  $\theta \dots$  lihat tabel baris ke-7.

$$\theta_{a'} = \frac{Pb(1^2 - b^2)}{6EI} \quad \text{dan} \quad \theta_{b'} = \frac{Pab(2l - b)}{6EI}$$

lebih lanjut gambar (c) akibat momen pada A dan B maka terjadilah persamaan momen berikut

$$\theta_{a''} = \frac{Ma \cdot l}{3EI} + \frac{Mb \cdot l}{6EI}, \quad \theta_{b''} = \frac{Mb \cdot l}{3EI} + \frac{Ma \cdot l}{6EI}$$

dari kedua persamaan di atas akhirnya dapat diturunkan hubungan  $\theta_{a'} - \theta_{a''} = 0$  dan  $\theta_{b'} - \theta_{b''} = 0$ . Hal ini bisa terjadi oleh sebab pada jenis tumpuan jepit pada titik tumpuan memiliki sudut kemiringan  $= 0$ . Lebih lanjut terjadilah

$$\frac{Pb(1^2 - b^2)}{6EI} - \frac{Ma \cdot l}{3EI} + \frac{Mb \cdot l}{6EI} = 0,$$

$$\frac{Pab(2l - b)}{6EI} - \frac{Mb \cdot l}{3EI} + \frac{Ma \cdot l}{6EI} = 0.$$

berdasarkan dua persamaan tersebut akhirnya diperoleh besar momen

$$Ma = \frac{Fab^2}{l^2} \quad \text{dan} \quad Mb = \frac{Fa^2b}{l^2}$$

Gambar (d) adalah gabungan momen pada sistem gambar (b) dan gambar (c). Gambar (b) momen yang dibentuk adalah abc, sedangkan gambar (c) momen yang dibentuk adalah abed. Setelah kedua momen tersebut diperkurangkan maka bagian yang tidak diarsir adalah bagian bidang momen

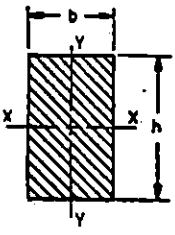
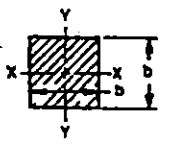
yang berimpit. Bagian yang diarsir adalah besar momen yang sesungguhnya sepanjang AB. Momen pada C adalah  $M_c$  adalah  $M_c = g_c - g_f$ . panjang  $g_c = Pab/l$  sedangkan  $g_f$  dapat diambil nilai rata-rata  $M_a$  dan  $M_b$ , jika  $a=b$  maka maka panjang  $g_f = (M_a + M_b)/2$ . Sehingga

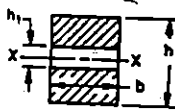
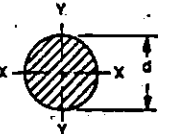
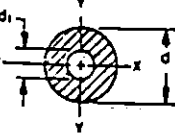
$$M_c = \frac{Fab}{l} - \frac{(M_a + M_b)}{2} = \frac{(Fab)}{2l}$$

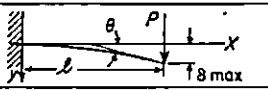
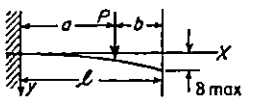
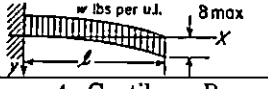

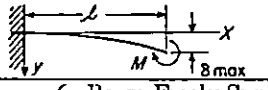
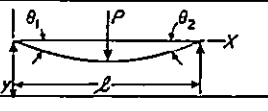
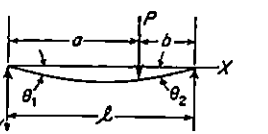
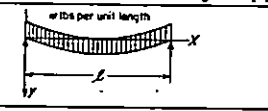
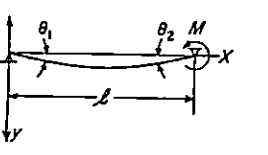
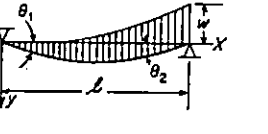
## DAFTAR PUSTAKA

- Iremonger, M.J., Dalam Sardy, S., Dasar Analisis Tegangan, Depdikbud, 1990.
- Khurmi, R.S. & Gupta, J.K., A Text Book Of Machine Design, Euresia Publishing House, New Delhi, 1980.
- Popov, E.P., Dalam Astamar, Z., Mekanika Teknik, Erlangga, Jakarta, 1993.
- Timoshenko, S. & Young, D.H., Strength Of Materials, Van Nostrand Company, Newyork, 1964.
- Titherington & Rimmer, Dalam Prasetyo, L., Mekanika Terapan, Erlangga, Jakarta, 1984.
- William, G. & Busby, H.R., Introductory Engineering Modeling, John Willy & Sons, New York, 1986.

Lampiran

Section	Area (A)	Moment of Inertia (I)	Section modulus $[Z = \frac{I}{y}]$	Radius of gyration $[k = \sqrt{\frac{I}{A}}]$
	$bh$	$I_{xx} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$	$Z_{xx} = \frac{bh^2}{6}$ $Z_{yy} = \frac{hb^2}{6}$	$k_{xx} = 0.289h$ $k_{yy} = 0.289b$
	$b^2$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{b^4}{12}$	$Z_{xx} = Z_{yy} = \frac{b^3}{6}$	$k_{xx} = k_{yy} = 0.289b$

Section	Area (A)	Moment of Inertia (I)	Section modulus $[Z = \frac{I}{y}]$	Radius of gyration $[k = \sqrt{\frac{I}{A}}]$
	$b(h-h_1)$	$I_{xx} = \frac{b}{12}(h^3 - h_1^3)$	$Z_{xx} = \frac{b}{6} \left( \frac{h^3 - h_1^3}{h} \right)$	$k_{xx} = 0.289 \sqrt{\frac{h^3 - h_1^3}{h - h_1}}$
	$\frac{\pi}{4}d^2$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi d^4}{64}$	$Z_{xx} = Z_{yy} = \frac{\pi d^3}{32}$	$k_{xx} = k_{yy} = \frac{d}{2}$
	$\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)$	$Z_{xx} = Z_{yy} = \frac{\pi}{32} \left( \frac{d^4 - d_1^4}{d} \right)$	$k_{xx} = k_{yy} = \sqrt{\frac{d^4 - d_1^4}{d^2 + d_1^2}}$

BEAM TYPE	SLOPE AT FREE END	DEFLECTION AT ANY SECTION IN TERMS OF $x$ : $y$ IS POSITIVE DOWNWARD	MAXIMUM DEFLECTION
1. Cantilever Beam — Concentrated load $P$ at the free end		$\theta = \frac{Pl^2}{2EI}$	$y = \frac{Px^2}{6EI} (3l - x)$ $\delta_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$
2. Cantilever Beam — Concentrated load $P$ at any point		$\theta = \frac{Pa^2}{2EI}$	$y = \frac{Px^2}{6EI} (3a - x)$ for $0 < x < a$ $y = \frac{Pa^2}{6EI} (3x - a)$ for $a < x < l$ $\delta_{\max} = \frac{Pa^2}{6EI} (3l - a)$
3. Cantilever Beam — Uniformly distributed load of $w$ lb per unit length		$\theta = \frac{wl^3}{6EI}$	$y = \frac{wx^2}{24EI} (x^2 + 6l^2 - 4lx)$ $\delta_{\max} = \frac{wl^4}{8EI}$
4. Cantilever Beam — Uniformly varying load; maximum intensity $w$ lb per unit length		$\theta = \frac{wl^3}{24EI}$	$y = \frac{wx^2}{120EI} (10l^3 - 10l^2x + 5lx^2 - x^3)$ $\delta_{\max} = \frac{wl^4}{30EI}$
5. Cantilever Beam — Couple $M$ applied at the free end		$\theta = \frac{Ml}{EI}$	$y = \frac{Mx^2}{2EI}$ $\delta_{\max} = \frac{Ml^2}{2EI}$
6. Beam Freely Supported at Ends — Concentrated load $P$ at the center		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$	$y = \frac{Px}{12EI} \left( \frac{3l^2}{4} - x^2 \right)$ for $0 < x < \frac{l}{2}$ $\delta_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}$
		Left End. $\theta_1 = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EI}$ Right End. $\theta_2 = \frac{Pab(2l - b)}{6EI}$	$y = \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - x^2 - b^2)$ [ $0 < x < a$ ] $y = \frac{Pb}{6EI} \left[ \frac{l}{b}(x - a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3 \right]$ [ $a < x < l$ ] $\delta_{\max} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}lEI}$ $at\ x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$ At center, if $a > b$ $\delta = \frac{Pb}{48EI} (3l^2 - 4b^2)$
8. Beam Freely Supported at Ends — Uniformly distributed load of $w$ lb per unit length		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{wl^3}{24EI}$	$y = \frac{wx}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$ $\delta_{\max} = \frac{5wl^4}{384EI}$
9. Beam Freely Supported at Ends — Couple $M$ at the right end		$\theta_1 = \frac{Ml}{6EI}$ $\theta_2 = \frac{Ml}{3EI}$	$y = \frac{Mlx}{6EI} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$ $\delta_{\max} = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $at\ x = l/\sqrt{3}$ At center $\delta = \frac{Ml^2}{16EI}$
10. Beam Freely Supported at Ends — Uniformly varying load: max. intensity $w$		$\theta_1 = \frac{7wl^3}{360EI}$ $\theta_2 = \frac{wl^3}{45EI}$	$y = \frac{wx}{360EI} (7l^4 - 10l^2x^2 + 3x^4)$ $\delta_{\max} = .00652 \frac{wl^4}{EI}$ $at\ x = 0.519l$ At center $\delta = .00651 \frac{wl^4}{EI}$