PENGANTAR MATRIK

OLEH

1. Dra. Sri Elniati
2. Dra. Isna Maizurna

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PADANG

1995

KATA PENGANTAR

Matriks aljabar elementer sekarang telah menjadi bagian terpenting dari latar belakang matematika yang diperlukan untuk memperdalam cabang-cabang matematika murni, terapan, teknik, fisika, biologi dan ilmu sosial. Misalnya invers matriks, solusi sistem persamaan linier, adalah hal-hal yang umum dijumpai pada bidang teknik dan sosial.

Buku "Pengantar Matriks",ini menyajikan pembahasan mendasar nengenai konsep matriks,yang sangat sesuai untuk para mahasiswa tahun pertama dan tahun kedua di tingkat perguruan tinggi.Mahasiswa yang baru belajar matriks segera menemukan bahwa penyelesaian soal-soal numeris ternyata cukup sederhana.Kesulitan-kesulitan mungkin timbul pada pembuktian teorema-teorema.Untuk mengatasi hal ini,didalam membuktikan teorema-teorema penulis memberikan ilustrasi terlebih dahulu kemudian bukti dan contoh (penerapan) dari teoma tersebut.

Buku ini terdiri dari tiga bab,yaitu:

1. Bab I,membahas tentang pengertian matriks,dan jenis-jenis matriks.
2. Bab II,membahas tentang operasi hitung pada matriks dan sifat-sifatnya.
3. Bab III,membicarakan determinan dan invers matriks bujursangkar,beberapa cara untuk menentukan determinan dan invers serta sifat-sifat determinan.

Setiap bab memuat definisi-definisi,prinsip-prinsip dan orema-teorema yang dilengkapi dengan contoh-contoh soal yang selesaikan, dan diakhiri dengan soal-soal latihan agar pembaca pat bekerja mandiri.

Penulis menyadari bahwa buku ini jauh dari kesempurnaan, dalam ti masih ada kekurangan-kekurangan serta kesalahan-kesalahan ng disebabkan oleh keterbasan kemampuan penulis dalam bidang tematika,serta kelalaian penulis sebagai manusia biasa.

Oleh sebab itu penulis sangat mengharapkan saran dan kritik ri para pembaca untuk melengkapi dan menyempurnakan buku ini.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

MATRIKS DAN JENIS JENIS MATRIKS

A. Pengertian Matriks.

Suatu matriks adalah himpunan unsur-unsur yang disusun berdasarkan penggolongan terhadap dua sifat, yaitu baris dan lajur (kolom). Sebuah matriks adalah sebuah susunan segi empat siku-siku dari bilangan - bilangan. Bilangan - bilangan di dalam susunan tersebut dinamakan <u>entri</u> (elemen) di dalam matriks.

Berikut ini diberikan beberapa contoh matriks

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Beberapa penulis menggunakan kurung biasa untuk menghimpun unsur - unsur (entri) suatu matriks. Jadi matriks-matriks pada contoh di atas dapat juga dituliskan dalam bentuk berikut :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Untuk menyatakan suatu matriks selalu digunakan huruf - huruf besar dan menggunakan huruf-huruf kecil untuk menyatakan elemennya .

Jadi kita dapat menuliskan :

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ atau $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

B. Ordo (Ukuran) Matriks

Ukuran (ordo) sebuah matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat pada matriks tersebut.

Matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Mempunyai 3 baris dan 4 kolom, sehingga ukuran (ordo) dari matriks A adalah 3 kali 4 (ditulis 3 x 4). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi matriks (2) dan (3) pada contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran 4 x 2 dan 4 x 4.

Secara umum, Jika suatu matriks A mengandung m baris dan n kolom, sehingga berukuran (berordo) m x n, maka matriks itu bentuknya adalah sebagai berikut :

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jadi jika A suatu matriks, maka kita dapat menggunakan a_{ij} untuk menyatakan elemen yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari matriks A.

Jadi pada matriks A di atas a_{11} berarti unsur (elemen) yang terletak pada baris pertama dan kolom pertama, dan a_{23} adalah elemen yang terletak pada baris 2 dan kolom 3.

C. Matriks Bujur Sangkar

Definisi 2

Matriks bujur sangkar (matriks kuadrat) adalah suatu matriks yang memiliki banyak baris yang sama dengan banyaknya

Contoh :

(1) $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(2) $B_{3x3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

Pada contoh (1) di atas elemen - elemen 1 dan 4 dikatakan berada pada diagonal utama, sedamgkan pada contoh (2) elemen - elemen pada diagonal utamanya adalah b_{11}, b_{22} dan b_{33}. Jadi jika A adalah matriks bujur sangkar seperti berikut :

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka : a_{11}, a_{22}, a_{33}, . . . , a_{nn} dikatakan berada pada diagonal utama

). Kesamaan Dua Matriks

Jeanne L. Agnew dan Robert C. Knopp (1989, hal. 3) mengemukakan kesamaan matriks sebagai berikut:

> The matrices A = $[a_{ij}]$ and B = $[b_{ij}]$ are equal if they are the same size and $a_{ij} = b_{ij}$ for each i and j.

Jadi dua matriks A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ dikatakan sama jika dan hanya jika A dan B berukuran sama dan setiap elemen yang seletak sama.

Contoh :(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -6/3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks A = B karena A berordo 2 x 2 dan B juga berordo 2 x 2 dan elemen yang seletak sama.

(2) $P = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 1 & -6/3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Pada contoh (2) ini P $\neq$ Q, karena tidak semua elemen yang seletak sama, meskipun Pberukuran sama.

Jenis jenis Matriks

1. Matriks Nol.

Definisi

Matriks nol adalah matriks yang semua unsur - unsurnya bernilai nol.

Contoh:

$$O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan } O_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Identitas.

> An nxn matrix with the property that $a_{ii} = 1$ and $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$ is called an identity matrix. When the context makes the size of I clear, the subscript is ommited.

(Jeanne L. Agnew and Robert C Knopp, 1989 hal 22)

Jadi suatu matriks kuadrat (matriks bujur sangkar) yang mempunyai elemen 1 pada diagonal utama disebut matriks identitas (matriks satuan), yang dinyatakan dengan I. Jika ukurannya penting untuk ditekankan, maka untuk matriks satuan nxn, dituliskan dengan I_n .

Contoh :

(1). $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2). $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3). $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

3. Matriks Diagonal.

Definisi 4

> Jika $A = [a_{ij}]$ suatu matriks bujur sangkar dengan $a_{ij}=0$ untuk $i \neq j$, maka A disebut matriks diagonal.

Ini berarti elemen-elemen yang tidak berada pada diagonal utama matriks A harus bernilai nol.

Contoh :

(1). $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2). $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(3). $C = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Pada contoh (1) unsur-unsur diagonal utama 4, 0 dan 1; dan unsur yang lain semuanya 0 (nol). Contoh (2) adalah bentuk khusus dari matriks diagonal yang dinamakan <u>matriks - skalar</u>, karena elemen - elemen pada diagonal utamanya bernilai sama. Pada bab II dari buku ini akan dijelaskan hubungan matriks skalar dengan matriks identitas (I) pada operasi perkalian, jadi B = 4 I

4. <u>Matriks Tridiagonal</u>.

<u>Definisi 5</u>

Suatu matriks bujur sangkar $A_{n \times n} = [\, a_{ij} \,]$ dengan $n \geq 3$ adalah tridiagonal jika $a_{ij} = 0$, untuk $i > j + 1$ atau $j > i + 1$.

Dengan kata lain matriks $A_{n \times n} = [a_{ij}]$, $n \geq 3$ tridiagonal jika $| i - j | > 1$ maka $a_{ij} = 0$.

Berdasarkan definisi di atas, maka matriks

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

adalah matriks tridiagonal jika a_{13}, a_{14}, a_{24}, a_{31}, a_{41} dan a_{42} bernilai 0 (nol).

Berikut ini diberikan contoh matriks tridiagonal 4 x 4

(1). $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (2). $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

Pembaca diharapkan dapat memahami, hubungan antara matriks diagonal dengan tridiagonal. Apakah semua matriks diagonal juga tridiagonal ?

5. Matrik Segitiga Atas dan Segitiga Bawah.

Definisi 6.

Matriks bujur sangkar $A = [\ a_{ij}\ ]$ disebut segitiga atas (upper triangular) bila $a_{ij} = 0$, untuk $i > j$ Dan matriks $A_{nxn} = [\ a_{ij}\ ]$ disebut segitiga bawah (lower triangular) bila $a_{ij} = 0$, untuk $i < j$.

Jadi untuk matriks segitiga atas, semua elemen di bawah diagonal utamanya adalah nol dan untuk matriks segitiga bawah, semua semua elemen di atas diagonal utamanya adalah nol.

Secara umum bentuk matriks segitiga atas dan segitiga bawah dapat digambarkan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Gambar 1 : Matriks segitiga bawah
(lower trianguler matriks)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Gambar 2: Matriks segitiga atas
(Upper trianguler matrix)

Selanjutnya dapat dilihat contoh-contoh matriks segitiga atas dan segitiga bawah.

a. Contoh matriks segitiga atas

(i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $C = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. Contoh matriks segi tiga bawah

(i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix}$

(iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 0 \\ -1 & 11 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

6. Matriks Transpose

Definisi 7

Transpose dari suatu matriks A_{mxn} adalah (ditulis A^T), yaitu suatu matriks berukuran nxm, yang diperoleh dari penukaran baris dan kolom matriks A.

Contoh :

Tentukan transpose untuk setiap matriks berikut ini :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ dengan $i = \sqrt{-1}$

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -7 & \pi & 3 \end{bmatrix}$

3. $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

Berdasarkan definisi, kita dapat menentukan transpose dari A (A^T) dengan menempatkan baris pertama matriks A menjadi kolom pertama pada A^T, baris kedua pada A menjadi kolom kedua pada A^T dan seterusnya.

Jadi untuk soal 1. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 6 \end{bmatrix}$

2. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ -2 & 0 & \pi \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

3. $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Pada contoh 3 ini terlihat matriks $A_{2\times3}$, maka transpose A (A^T)$_{3\times2}$

Teorema 1.

Misalkan A dan B matriks-matrik dengan ukuran tertentu sedemikian sehingga operasi - operasi a terhadap f berlaku. Maka pernyataan berikut ini adalah benar :

a. $(A^T)^T = A$

b. $(A + B)^T = A^T + B^T$

c. $(k\,A)^T = k\,A^T$

d. $(AB)^T = B^T\,A^T$

e. Jika A matriks segitiga atas maka A^T adalah segitiga bawah.

f. Jika A matriks segitiga bawah maka A^T adalah segitiga atas

Pembuktian teorema 1

Pada bahagian ini yang akan dibuktikan hanya teorema 1 a. Untuk bahagian b, c dan d akan dijelaskan pada bab II, sedangkan bahagian e dan f akan diberikan ilustrasi dengan contoh. Pembuktian secara umum diserahkan pada pembaca untuk latihan.

Bukti 1a

Ambil $A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari $[\ A^T\ ]^T$, yaitu :

$$[A^T]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jadi : $[A^T]^T = A$

<u>Contoh</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A adalah matriks segi tiga atas, maka :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A^T adalah matriks segi tiga bawah, karena elemen di atas diagonal utama semuanya nol.

<u>Contoh :</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

A adalah matriks segitiga bawah

Maka $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

A^T adalah matriks segitiga atas, karena elemen-elemendi bawah elemen utamanya nol.

7. <u>Matriks Simetri</u>

<u>Definisi 8</u>

Suatu matriks bujur sangkar A disebut matriks simetri jika $A^T = A$.

Jadi $A_{nxn} = [a_{ij}]$ matriks simetri bila $a_{ij} = a_{ij}$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots n$ dan $j = 1, 2, \ldots n$.

Contoh

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ adalah simetri

   sebab $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ yang sama dengan A.

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

   B juga matriks simetri sebab $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ dan $a_{23} = a_{32}$. Jadi $B = B^T$.

3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   C bukan matriks simetri, karena $a_{31} \neq a_{13}$.

8. Matriks Simetri Miring

Definisi

Suatu matriks bujur sangkar A disebut matriks miring jika $A^T = -A$.

Jadi matriks bujur sangkar $a = [a_{ij}]$ simetri miring jika $a_{ij} = -a_{ij}$ untuk setiap nilai i dan j.

Contoh :

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Pada contoh 1 A adalah matriks simetri miring sebab : $a_{12} = -a_{21}$, $a_{13} = -a_{31}$, $a_{23} = -a_{32}$ untuk $i = j$. $a_{ij} = -a_{ji} = 0$.

Selanjutnya pada contoh 2 terlihat $a_{12} = -a_{21}$, $a_{13} = -a_{31}$ dan $a_{23} = -a_{32}$.

Pembaca diharapkan dapat memahami, bahwa bila A matriks simetri miring, maka elemen-elemen pada diagonal utamanya selalu bernilai nol.

9. Matriks Konyugat

Definisi 10

Jika $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ konyugat dari A, ditulis $\bar{A}$ dan dide - finisikan sebagai $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{m\times n}$.

Perhatikan bilangan kompleks $Z = a + bi$, dengan a dan b $\in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

Bilangan kompleks $a + bi$ dan $a - bi$, masing - masing meru - pakan konyugat dari yang lainnya.

Jika $Z = a + bi$, maka konyugatnya dinyatakan oleh : $\bar{Z} = \overline{a + bi}$. Selanjutnya pada bilangan kompleks ini kita mengenal sifat-sifat sebagai berikut :

"Jika $Z_1 = a + bi$ dan $Z_2 = c + di$, maka" :

A. $Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)i$

B. $\overline{Z_1 + Z_2} = (a + c) - (b + d) = (a + bi) + (c - di)$

$= \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

C. $Z_1 \cdot Z_2 = (ac - bd) - (ad + bc)i$

D. $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di)$

$= \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$

Sifat-sifat di atas bermamfaat untuk menyelesaikan soal - soal yang berhubungan dengan matriks yang mempunyai elemen bilangan kompleks.

Berikut ini diberikan contoh-contoh konyugat dari suatu matriks :

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$ maka $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$ maka $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$

<u>Teorema 2 :</u>

Jika $\overline{A}$ dan $\overline{B}$ masing-masing konyugat dari matriks A dan B dan $h \in \mathbb{R}$ (h skalar riel), maka pernyataan-pernyataan berikut ini benar :

a. $(\overline{A}) = A$

b. $(\overline{kA}) = k (\overline{A})$

c. $(\overline{A + B}) = \overline{A} + \overline{B}$

d. $(\overline{AB}) = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Pembuktian sifat-sifat diatas (terutama b, c, d) dijelaskan pada bab II mengenai operasi- operasi pada matriks.

Transpose dari konyugate A, yaitu $\overline{A}^T$ dinyatakan dengan A^*.

Jadi $\overline{A}^T = A^*$.

Contoh

Dari contoh 1 di atas, diperoleh $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$

maka $A^* = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix}$

10. Matrik Hermite

Definisi 11

Matriks bujur sangkar $A = [a_{ij}]$ disebut hermite jika $\bar{A}^T = A$ atau $A^* = A$.

Lebih jelas lagi dapat dikatakan $A = (a_{ij})$ hermite bila $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ untuk setiap nilai i dan j.

Contoh

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$

adalah matriks hermite karena memenuhi definisi $\bar{A}^T = A$ dan $A^* = A$.

Perhatikan : $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$

$$\overline{A}^{T} = A^{*} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} = A$$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks hermite.

Pembaca diharapkan memeriksa keberlakuan sifat $\overline{A}^{T} = A$ pada contoh b ini.

Jika matriks bujur sangkar $A = [a_{ij}]$ memenuhi sifat $\overline{A}^{T} = -A$, maka matriks A disebut **"Hermite Miring"**. Jadi $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ hermite miring jika $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$ untuk semua nilai i dan j.

<u>Contoh</u>

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

adalah matriks hermite miring, sebab $\overline{A}^{T} = -A$. (periksa !).

SOAL-SOAL

1. Tentukanlah jenis-jenis matriks berikut :

a. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -4 & 6 \\ 1 & -4 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ f. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} 2 & 1-i & 3 \\ 1+i & -4 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}$ h. $\begin{bmatrix} i & 2+3i & 4 \\ -2-3i & 2i & i \\ -4 & i & 0 \end{bmatrix}$

2. Diketahui $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

Susunlah matriks A yang memenuhi syarat-syarat di bawah ini dan tentukan jenisnya (namanya) :

a. $m = n$

b. $m = n, \quad a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall\ i, j.$

c. $m = n, \quad a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

d. $m = n, \quad a_{ij} = \overline{a}_{ji} \quad \forall$ i dan j.

e. $m = n, \ a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall$ i dan j

f. $m = n, \ a_{ij} = 0$ jika $|i - j| > 1$ dan $n = m = 4$.

3. Buktikan bahwa elemen - elemen diagonal utama dari matriks hermite adalah bilangan riel. 17

Apa yang dapat anda katakan tentang elemen-elemen diagonal utama matriks " Hermite Miring "?

Perlihatkan bahwa :

(a).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix} \text{ adalah hermite}$$

(b).

$$B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ adalah hermite miring}$$

(c) $\bar{A}$ hermite

(d) $\bar{B}$ hermite miring

(e) Perlihatkan bahwa setiap matriks simetri riel adalah hermite

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

(a). Tentukan konyugat dari A

(b). Tentukan transpose dari konyugat A atau $(\bar{A})^T$

BAB II

OPERASI MATRIKS

A. Penjumlahan Matriks

Definisi

Jika A dan B sepasang, dua matriks yang berordo sama, maka "jumlah" A + B adalah suatu matriks yang didapatkan dengan menambahkan bersama - sama elemen - elemen yang bersangkutan di dalam kedua matriks tersebut. Matriks - matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan.

Misalkan A dan B dua matriks bentuk m×n sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

maka :

$$
A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{32} \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{23} & a_{33} + b_{33} \cdots & a_{3n} + b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}
$$

Perhatikan bahwa selisih A dan B ($A - B$) didefinisikan dengan cara yang sama seperti penjumlahan , dengan mengganti kata penjumlahan (jumlah) dengan pengurangan (kurang).

<u>Contoh</u> :

Perhatikan matriks-matriks :

$$
A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 11 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}
$$

maka :

$$
A + B = \begin{bmatrix} -3+(-5) & 1+9 & 2+0 \\ 4+2 & 6+0 & -1+(-4 \\ 0+1 & 7+7 & 8+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 10 & 2 \\ 6 & 6 & -5 \\ 1 & 14 & 14 \end{bmatrix}
$$

Tetapi $A + C$ dan $B + C$ tidak didefinisikan, karena A dan C atau B dan C tidak berordo sama.

Perhatikan lagi teorama 1.b pada BAB I, yaitu :

$(A + B)^T = A^T + B^T$, dimana A dan B sepasang dua matriks yang berukuran sama ($m \times n$). Dengan menggunakan definisi transpose dan penjumlahan matriks kita dapat dengan mudah membuktikan teorema ini.

Misalkan $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ dan $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Elemen ke ij dari $(A+B)^T$ = elemen ke ji dari A + B = elemen ke ji dari A + elemen ke ji dari B = elemen ke ij dari A^T + elemen ke ij dari B^T = elemen ke ij dari $A^T + B^T$.

Untuk mengilustrasikan teoreama 1.b ini, perhatikan contoh berikut,

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ dan $(A+B)^T = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$

maka $A^T + B^T = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -10 & 7 \end{bmatrix} = (A+B)^T$

B. Perkalian Skalar Dengan Matriks

Definisi 2.

Jika $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ adalah suatu matriks dan k adalah suatu skalar riel, maka hasil kali (product) kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen dari A dengan k. Atau $kA = k\,[a_{ij}]_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}$.

Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \ldots ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \ldots ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \ldots ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Hitunglah : a. 2A   b. -3 A

c. iA.   d. 2A + 4B

Penyelesaian

a. $$2A = \begin{bmatrix} 2(-2) & 2(3) & 2(4) \\ 2(1) & 2(7) & 2(0) \\ 2(-5) & 2(-1) & 2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 2 & 14 & 0 \\ -10 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

b. $$-3A = \begin{bmatrix} -3(2) & -3(3) & -3(4) \\ -3(1) & -3(7) & -3(0) \\ -3(5) & -3(-1) & -3(3) \end{bmatrix}$$

$$-3A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & -12 \\ -3 & -21 & 0 \\ 15 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

c. $$iA = \begin{bmatrix} i(-2) & i(3) & i(4) \\ i(1) & i(7) & i(0) \\ i(-5) & i(-1) & i(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i & 3i & 4i \\ i & 7i & 0 \\ -5i & -i & 3i \end{bmatrix}$$

d.

$$2A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 2 & 14 & 0 \\ -10 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$ diperoleh dari jawaban a.

$$4B = \begin{bmatrix} 4(-1) & 4(1) & 4(0) \\ 4(1) & 4(4) & 4(3) \\ 4(5) & 4(2) & 4(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 16 & 12 \\ 20 & 8 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } 2A + 4B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 2 & 14 & 0 \\ -10 & -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & 16 & 12 \\ 20 & 8 & 24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 10 & 8 \\ 6 & 30 & 12 \\ 10 & 6 & 30 \end{bmatrix}$$

C. Perkalian Dua Matriks

Pada bahagian B diatas kita telah mendefinisikan perkalian sebuah matriks dengan sebuah skalar. Maka pertanyaan berikutnya adalah bagaimana kita mengenali dua matriks ? Uraian berikut ini akan menjelaskan hal tersebut.

Definisi 3

Jika A adalah sebuah matriks $m \times n$ dan B matriks $n \times r$, maka hasil kali AB adalah suatu matriks C dengan m baris dan r kolom, dimana setiap elemen C_{ij} merupakan perkalian skalar dari elemen baris ke i pada A dengan elemen kolom ke j pada B. PerkalianAB didefinisikan jika dan hanya jika banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B.

Contoh

1. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Hitunglah C = AB

b. Apakah BA didefinisikan ?

Penyelesaian

a. $C = AB$ terdefinisi, karena matriks A berordo 3 x 3 dan matriks B berordo 3 x 2. Sehingga jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris pada matriks B.

Hasil kali $AB = C$ berukuran 3 x 2.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2; \quad c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3$$

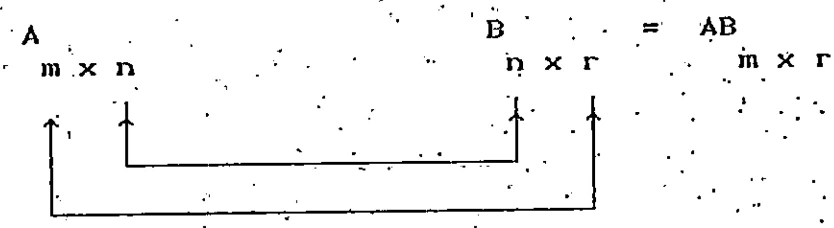
$$c_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0; \quad c_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 5$$

$$c_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -4; \quad c_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 12$$

Sehingga : $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$

b. BA tidak didefinisikan, karena banyak kolom matriks B tidak sama dengan banyaknya baris matriks A ($2 \neq 3$). Suatu cara yang mudah untuk menentukan apakah hasil perkalian dua matriks didefinisikan adalah dengan menuliskan ukuran matriks pertama (A) lebih dahulu kemudian di sebelah kanannya kita tuliskan ukuran matriks ke dua (B).

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 3.

Jika bilangan - bilangan yang di dalam sama, maka perkalian matrik A dan B didefinisikan. Bilangan - bilangan yang di sebelah luar merupakan ukuran (ordo) hasil perkalian matrik A dan B.

Misalkan A sebuah matrik 4 x 3, B matrik 3 x 5, dan C adalah matrik 5 x 4. Maka AB didefinisikan sebagai matriks 4 x 5 ; CA dedefinisikan sebagai matriks 5 x 3 ; BC didefinisikan sebagai matriks 3 x 4. Perkalian AC, CB dan BA semuanya tidak didefinisikan.

<u>Contoh 2</u>

Jika $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Hitunglah : a. DE b. ED

<u>Penyelesaian</u>

Perhatikan bahwa DE dan ED keduanya didefinisikan

a. $DE = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

b. $ED = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

Dari contoh ini terlihat bahwa perkalian matriks tidak komutatif. Bagaimanakah dengan sifat assosiatif ? Contoh 3 berikut ini memberikan ilustrasi bahwa hukum tersebut berlaku.

Assosiatif berlaku pada perkalian matriks. Jadi: $A(BC) = (AB)C$ asalkan $A(BC)$ dan $(AB)C$ keduanya didefinisikan.

Contoh 3

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Tentukanlah : a. $(AB)C$

b. $A(BC)$

Penyelesaian

a. AB didefinisikan, karena banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B. Hasil kali AB berukuran 2 x 2, karena A = 2 x 3 dan B = 3 x 2, maka AB = 2 x 2.

$$A\,B = \begin{bmatrix} (4.1)+(3.2)+(1.1) & (4.0)+(3.3)+(1.4) \\ (2.1)+(-1.2)+(5.1) & (2.0)+(-1.3)+(5.4) \end{bmatrix}$$

$$A\,B = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$$

(AB)C juga didefinisikan :

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 5 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 63 \\ -7 & 73 \end{bmatrix}$$

b. BC didefinisikan dan ordo BC = 3 x 2.

(Pembaca diharapkan memeriksa sendiri)

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1.2)+(0.-1 & (1.1)+(0.4) \\ (2.2)+(3.1) & (2.1)+(3.4) \\ (1.2)+(4.-1) & (1.1)+(4.4) \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 14 \\ -2 & 17 \end{bmatrix}$$

A(BC) juga didefinisikan dan hasil kalinya berukuran 2 x 2 (periksa).

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 14 \\ -2 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 63 \\ -7 & 73 \end{bmatrix}$$

Pada contoh ini terlihat (AB)C = A(BC). Secara umum sifat-sifat (hukum) yang berlaku pada operasi perkalian ini akan dijelaskan pada bahagian D dari BAB II ini.

Perkalian matriks mempunyai penerapan penting dalam sistem-sistem persamaan linear. Perhatikan sistem persamaan linear berikut, yang terdiri dari m persamaan linear dan n bilangan yang tidak diketahui.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{bmatrix}$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua matrik, yaitu dua matriks sama jika dan hanya jika elemen-elemen yang seletak sama. Maka sistem persamaan linear diatas dapat diganti sebuah persamaan matriks tunggal :

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Jika <u>matriks</u> <u>koefisien</u> dari sistem persamaan tersebut dimisalkan A dan <u>matriks</u> <u>kolom</u> pada ruas kanan adalah B, maka A berukuran m x n dan B berukuran m x 1.

Bila kita tuliskan bilangan yang tidak diketahui sebagai :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maka kita dapat menuliskan sistem persamaan linear diatas sebagai sebuah perkalian matriks A x X = B, yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dengan pendekatan matriks ini, kita akan mendapatkan metoda-metoda yang efektif untuk menyelesaikan sistim-sistim persamaan linier dan hal ini akan dibicarakan pada bahagian akhir dari buku ini.

D. Sifat-sifat Operasi Hitung Pada Matriks

Pada bahagian A, B, dan C dari bab ini, kita telah membahas operasi-operasi hitung pada matriks. Dari operasi-operasi hitung tersebut kita melihat bahwa beberapa sifat ilmu hitung pada bilangan riel berlaku juga untuk matriks. misalnya sifat komutatif penjumlahan, yaitu jika a,b bilangan riel maka a + b = b + a. Sifat ini juga berlaku pada penjumlahan matriks, yaitu jika A dan B sebarang 2 matriks yang dapat dijumlahkan maka A + B = B + A. Namun ada beberapa kekecualian. Salah satu dari kekecualian yang terpenting terjadi dalam perkalian matriks.

Untuk bilangan-bilangan riel a dan b selalu berlaku ab = ba (sifat komutatif perkalian). Pada perkalian matriks AB dan BA tidak perlu sama. Hal ini telah ditunjukkan pada Contoh 2 bahagian C, dimana DE ≠ ED.

Tidak berlakunya sifat komutatif pada perkalian matriks dapat kita jelaskan sebagai berikut :

1. A dan B dua matriks dengan AB didefinisikan, tetapi BA tidak didefinisikan. Misalkan : A matriks 2 x 3 dan B matriks 3 x 4.
2. A dan B dua matriks dengan AB dan BA keduanya didefinisikan, tetapi mempunyai ukuran berbeda. Misalnya A matriks 2 x 3 dan matriks 3 x 2.
3. A dan B dua matriks yang berukuran sama, AB dan BA didefinisikan, tetapi AB $\neq$ BA (lihat contoh 2 bahagian C).

Beberapa sifat operasi hitung pada matriks, akan dapat dilihat pada teorema-teorema berikut ini.

<u>Teorema 1</u>

Jika A, B dan C adalah matriks-matriks yang mempunyai ukuran tertentu sedemikian sehingga operasi-operasi yang diberikan didefinisikan dan misalkan r dan s adalah skalar bilangan riel. Maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah benar :

a. $A + B = B + A$ (kumutatif penjumlahan)

b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (assosiatif pejumlahan)

c. $A(B + C) = AB + AC$ (distributif perkalian terhadap penjumlahan)

d. $(B + C)A = BA + CA$ (distributif perkalian terhadap penjumlahan)

e. $(AB)C = A(BC)$ (assosiatif perkalian)

f. $r(A + B) = rA + rB$ (distributif perkalian dengan skalar terhadap penjumlahan)

g. $(r + s)A = rA + sA$ (distributif perkalian dengan skalar terhadap penjumlahan)

Note : "Penjelasan dalam tanda kurung adalah nama dari sifat (hukum) tersebut".

Bukti :

a. Misalkan $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dan $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ (definisi penjumlahan matriks)

$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n}$ (komutatif penjumlahan pada bil riel)

$= B + A$ (definisi penjumlahan matriks)

Jadi $A + B = B + A$.

b. Diserahkan pada pembaca sebagai latihan

c. Untuk membuktikan teorema ini, akan diberikaan ilustrasi khusus untuk matriks A yang berukuran 3 x 2 dan matriks B dan C 2 x 2. Pembuktian secara umum diserahkan pada pembaca.

Misalkan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

B dan C harus berukuran sama; agar penjumlahan didefinisikan.

$$B + C = \begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}+ c_{11}) + a_{12}(b_{21}+ c_{21}) & a_{11}(b_{12}+ c_{12}) + a_{21}(b_{22}+ c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}+ c_{11}) + a_{22}(b_{21}+ c_{21}) & a_{21}(b_{12}+ c_{12}) + a_{22}(b_{22}+ c_{22}) \\ a_{31}(b_{11}+ c_{11}) + a_{32}(b_{21}+ c_{21}) & a_{31}(b_{12}+ c_{12}) + a_{32}(b_{22}+ c_{22}) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} & a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} & a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} \\ a_{31}\, b_{11} + a_{32}\, b_{21} & a_{31}\, b_{12} + a_{32}\, b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\, c_{11} + a_{12}\, c_{21} & a_{11}\, c_{12} + a_{12}\, c_{22} \\ a_{21}\, c_{11} + a_{22}\, c_{21} & a_{21}\, c_{12} + a_{22}\, c_{22} \\ a_{31}\, c_{11} + a_{32}\, c_{21} & a_{31}\, c_{12} + a_{32}\, c_{22} \end{bmatrix}$$

Perhatikan elemen - elemen dari A(B + C) dan AB + AC . Jelas terlihat bahwa elemen - elemen AB + AC adalah sama bila dikorespondensikan dengan elemen -elemen A (B + C), sehingga A (B + C) = AB + AC.

d. Sama dengan bukti bahagian c.

e. Misalkan :

$A_{m\times n} = [\, a_{ij} \,]$, $B_{n\times q} = [\, b_{jk} \,]$ dan $C_{q\times r} = [\, c_{ks} \,]$.

AB didefinisikan dan mempunyai ukuran m × q, dan (AB)C juga didefinisikan dan mempunyai ukuran m×r. Selanjutnya BC juga terdefinisi dengan ukuran n×r daan A(BC) didefinisikan dan mempunyai ukuran m×r. Jelas terlihat (AB)C dan A (BC) mempunyai ukuran (ordo) yang sama yaitu m×r. Selanjutnya ditunjukkan elemen - elemen dari (AB)C sama dengan elemen - elemen A(BC).

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]$$

$$(AB)\,C = \left[\sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{ks} \right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \; c_{ks} \right] \qquad (1)$$

$$BC = \left[\sum_{k=1}^{q} b_{jk} c_{ks} \right]$$

$$A\,(BC) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{q} b_{jk} c_{ks} \right]$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} a_{ij} b_{jk} \; c_{ks} \right] \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) terlihat bahwa elemen-elemen (AB)C sama dengan elemen-elemen A (BC). Jadi (AB)C = A(BC)

f. Misalkan $A = [\,a_{ij}]_{mxn}$ dan $B = [\,b_{ij}\,]_{mxn}$

Ruas kiri :

$r\,(A+B) = r\left[\,[\,a_{ij}\,] + [b_{ij}\,]\,\right]$

$= r\,[a_{ij} + b_{ij}\,] = [\,ra_{ij} + rb_{ij}\,]$

Ruas kanan :

$rA + rB = r\,[\,a_{ij}\,] + r\,[\,b_{ij}]$

$= [\,ra_{ij}\,] + [\,rb_{ij}\,] = [\,ra_{ij} + rb_{ij}\,]$

Jadi $r\,(A+B) = rA + rB$

Bukti pada bahagian g dan h dapat dikerjakan dengan cara yang sama seperti pada f dan diserahkan pada pembaca sebagai latihan.

Perhatikan lagi teorema 1 pada BAB I bahagian b,c dan d yaitu

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(k\,A)^T = k\,(A)^T$

(iii) $(AB)^T = B^T A^T$

Bukti :

(i) Misalkan : $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ dan $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$

$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

$(A + B)^T = [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m}$

$A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$ dan $B^T = [b_{ji}]_{n\times m}$

$A^T + B^T = [a_{ji}]_{n\times m} + [b_{ji}]_{n\times m} = [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m}$

$\therefore (A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) Misalkan $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

$k.A = k[a_{ij}]_{m\times n}$

$kA = [k a_{ij}]$

$(kA)^T = [k a_{ji}]_{n\times m}$ ....(1)

$k(A)^T = k[a_{ji}]_{n\times m}$

$k(A)^T = [k a_{ji}]_{n\times m}$ ....(2)

dari (1) dan (2) terlihat $(kA)^T = k(A)^T$

Pembuktian (iii) diserahkan pada pembaca sebagai latihan.

Kita perhatikan kembali "Matriks Nol", yaitu matriks yang semua elemennya nol.

$$O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika A sebarang matriks dan O adalah matriks nol dengan ukuran yang sama dengan matrisk A, maka $A + O = A$. Jadi matriks O berperan sebagai elemen identitas penjumlahan dalam persamaan matriks $A + O = A$. Peranan ini persis sama dengan peranan bilangan 0 di dalam persamaan numerik $a + 0 = a$.

Tidak semua sifat-sifat aljabar bilangan riel dapat digunakan pada ilmu hitung matriks.

Misalnya : Untuk a, b, c, d bilangan riel berlaku :

a. Jika ab = ac dan $a \neq 0$ maka b = c (hukum penghapusan).

b. Jika ad = 0, maka a = 0 atau d = 0.

Sifat tersebut di atas tidak berlaku pada ilmu hitung matriks.

Untuk menunjukkannya perhatikan contoh berikut ini.

a. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 17 & 23 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \\ 0 & -4 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad AC = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 17 & 23 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \\ 0 & -4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Pada contoh di atas terlihat, walaupun $A \neq 0$ dan AB = AC tetapi $B \neq C$. Jadi hukum <u>penghapusan tidak berlaku pada operasi matriks.</u>

b. Misalkan : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada contoh ini $AB = O$, tetapi $A \neq O$ dan $B \neq O$.

Berikut ini diberikan sejumlah sifat bilangan riel 0 yang sudah lazim dikenal, yang dapat diberlakukan pada matriks.

Teorema 2.

Jika A adalah sebarang matriks dan O adalah matrik 0, dimana A dan O mempunyai ukuran tertentu, sehingga operasi-operasi yang diberikan didefinisikan, maka pernyataan-pernyataan berikut ini berlaku :

a. $A + O = O + A = A$

b. $A - A = O$

c. $O - A = -A$

d. $AO = O$; $OA = O$.

Selanjutnya kita buktikan bahagian a dari teorema 2 ini, bukti selebihnya diberikan sebagai latihan.

Bukti a

Misalkan $A = [a_{ij}]_{mxn}$ dan $O = [o_{ij}]_{mxn}$

$A + O = [a_{ij}]_{mxn} + [o_{ij}]_{mxn}$

$= [a_{ij} + o_{ij}]_{mxn}$ (definisi)

$A + O = [a_{ij}]_{mxn}$

Jadi $A + O = A$ ....(1)

$O + A = [o_{ij}]_{mxn} + [a_{ij}]_{mxn}$

$= [o_{ij} + a_{ij}]_{mxn}$ (definisi)

$O + A = [a_{ij}]_{mxn}$

$= A$

Jadi $O + A = A$ ....(2)

Dari (1) dan (2) jelas $A + O = O + A = A$.

Perhatikan kembali matriks identitas yang diberikan pada bab I

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks I_n ini mempunyai sifat yang mirip dengan sifat bilangan 1 di dalam hubungan numerik a . 1 = 1 . a = a untuk semua $a \in \mathbb{R}$.

Perhatikan contoh berikut ini :

a. Misalkan $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ dan $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$I_2 \; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Jadi $I_2 \; A = A$

b. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ dan $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \; I_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Jadi $A \; I_3 = A$

Sifat perkalian A_{mxn} dengan matriks identitas secara umum diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 3 :

Jika A adalah sebarang matriks dan I matriks identitas, yang mempunyai ukuran tertentu sehingga operasi-operasi berikut didefinisikan, maka berlaku :

a. $A\,I = A$

b. $I\,A = A$

c. $r\,(I\,A) = r\,A \quad (r \in \mathbb{R})$

d. $(A\,I)\,r = A\,r = rA \quad (r \in \mathbb{R})$

Pembuktian teorema 3 ini diberikan sebagai latihan.

Perkalian suatu matriks bujur sangkar A_{nxn} dengan dirinya sendiri dapat ditulis sebagai perpangkatan dari A. Jadi $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$, dan seterusnya.

Matriks bujur sangkar A disebut Idempoten jika $A^2 = A$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$ adalah idempoten

kita periksa :

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Jadi $A^2 = A$, maka A idempoten.

Matriks bujur sangkar A disebut Nilpoten, jika $A^p = O$ (p bilangan bulat positif) dan jika p bilangan bulat positif sehingga $A^p = O$, maka dikatakan A Nilpoten berindeks (berperingkat) p.

Contoh : Buktikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ adalah nilpoten berindeks 3

Bukti : $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Jadi $A^3 = A \times A \times A = O$, sehingga terbukti A nilpoten berindek 3

SOAL – SOAL

1. Diketahui : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

   a. Hitunglah 2A + 3B

   b. Hitunglah A – B

   c. Tentukan matriks C sehingga A – B + C = O

   d. Tentukan ukuran dari matriks C

2. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

   a. Tentukan A + B

   b. Tentukan A^T dan B^T

   c. Tentukan $A^T + B^T$

   d. Tentukan $(A + B)^T$

   e. Bandingkan $(A + B)^T$ dan $A^T + B^T$

3. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   a. Tunjukkaan bahwa AB = O

   b. Tentukan BA

   c. Bandingkan hasil a dengan b

4. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Buktikan AB = AC

Catatan : Disini terlihat AB = AC tidak perlu mengakibatkan B = C.

5. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

a. Tunjukkan (AB)C = A(BC)

b. Tunjukkan A(B + C) = AB + AC

c. Tunjukkan (A + B)C = AC + BC

6. Jika $A = [\,a_{ij}\,]_{2\times 2}$, $B = [\,b_{ij}\,]_{2\times 2}$ dan AB = BA. Hubungan apakah yang terdapat diantara unsur-unsur a_{ij} dan b_{ij} pada matriks-matriks A dan B.

7. Buktikan teorema 1 bahagian b, g, dan h.

8. Buktikaan teorema 2 bahagian b, c dan d

9. Buktikan teorema 3

10. Berikan contoh matriks $A_{3\times 3}$ dan $B_{3\times 3}$ sedemikian sehingga AB = BA

11. Buktikan jika A dan B matriks simetri dan AB = BA maka AB adalah matriks simetri.

2. a) Buktikan, jika A dan B matriks segitiga atas dan AB didefinisikan, maka AB juga matriks segitiga atas.

b) Buktikan, jika A dan B matriks segitiga bawah dan AB didefinisikan, maka AB juga matriks segitiga bawah.

3. Apakah jumlah matriks-matriks diagonal juga matriks diagonal ?.

4. Apakah jumlah matriks-matriks tridiagonal juga matriks tridiagonal ?.

5. Apakah jumlah matriks-matriks simetri juga matriks simetri ?.

6. Apakah jumlah matriks-matriks segitiga atas juga matriks segitiga atas ?.

7. Jawablah pertanyaan no 13 s/d 16 dengan mengganti operasi penjumlahan dengan operasi perkalian.

8. Diketahui : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Hitunglah : a) $(A + B)^2$

b) $A^2 + 2AB + B^2$

9. Buktikan bahwa, untuk sebarang matriks $A_{m \times n}$

a) $A^{**} = A$

b) $(A + B)^* = A^* + B^*$

c) $(AB)^* + B^* A^*$

0. Jika $A_{n \times n}$, buktikan $A^* A$ adalah matriks Hermite

1. Jika $A_{n \times n}$, buktikan bahwa $A + A^T$ adalah simetri

2. Jika $A_{n \times n}$, tunjukkan bahwa $A - A^T$ adalah simertri miring

3. Apakah jumlah matriks-matriks simetri miring juga simetri miring ?.

4. Tunjukkan, jika elemen-elemen dari suatu matriks semuanya bilangan riel, maka $A = A$

5. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Buktikan A adalah nilpoten berindeks 3

BAB III

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS BUJUR SANGKAR

A. DETERMINAN

Determinan dari suatu matriks bujur sangkar sangat banyak gunanya dalam berbagai cabang matematika. Misalnya determinan digunakan untuk mencari solusi n persamaan linier dengan n variabel. Dalam buku ini perhitungan determinan suatu matriks bujur sangkar dimulai dengan ukuran yang sederhana, yaitu matriks bujur sangkar 2 x 2 dan 3 x 3. Untuk matriks yang berukuran lebih besar digunakan perhitungan dengan metoda minor dan kofaktor.

1. Determinan Matriks bujur sangkar berukuran 2 x 2

Definisi 1

Determinan dari matriks $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ adalah suatu bilangan yang besarnya $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Determinan dari A dinotasikan dengan det A.

Contoh 1

Hitung determinan dari matriks berikut ini :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

a. det A = 1.3 - 2.0 = 3

b. det B = (-1)7 - (-1) (2) = -5

c. det C = 3 (-2) - 4.1 = - 10

<u>Contoh 2</u> : Hitung diterminan matriks-matriks berikut ini :

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Penyelesaian</u> :

a) det a = 0.2 - 0(-4) = 0

b) det b = 2.0 - (-7)0 = 0

Pada contoh 2 ini terlihat, bila unsur-unsur suatu baris atau suatu kolom semuanya nol, maka determinan dari matriks tersebut adalah nol.

Sifat ini akan kita pelajari lebih jauh pada bahagian akhir dari penjelasan tentang determinan ini.

2. Determinan Matriks Bujursangkar Berukuran 3x3

<u>Definisi 2</u>

Determinan dari matriks $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

dinyatakan dengan det A yaitu :

$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) -$

$(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$

Definisi tersebut diatas dapat digambarkan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Gambar 1.

Gambar tersebut diperoleh dengan menuliskan kembali kolom pertama dan kolom kedua dari matriks A di sebelah kanan. Determinan dari A dihitung dengan menjumlahkan hasil-hasil perkalian pada panah-panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil-hasil perkalian pada panah yang mengarah ke kiri. Cara ini akan lebih memudahkan kita dalam perhitungan. Notasi lain untuk menyatakan determinan matriks A adalah $|A|$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka det. } A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Selanjutnya kita perhatikan penggunaan definisi diatas untuk menghitung determinan dari matriks 3x3.

<u>Contoh</u> :

Hitunglah determinan dari matriks - matriks berikut ini :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Penyelesaian</u> :

a. Kita tuliskan dua kolom pertama dari A disebelah kanan matriks A .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{det } A &= \left[(1)(1)(2)+(2)(4)(-1)+(3)(2)(1)\right] - \left[(-1)(1)(3) + (1)(4)(1) + (2)(2)(2)\right] \\ &= \{ 2 - 8 + 6 \} - \{ -3 + 4 + 8 \} \\ &= -9 \end{aligned}$$

b. $|B| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}$

$= \left[(1)(1)(0) + (2)(0)(3) + (-1)(4)(-1) \right] - \left[(3)(1)(-1) + (-1)(0)(1) + (0)(4)(2) \right]$

$= \{ 0 + 0 + 4 \} - \{ -3 \}$

$= 7$

Jadi determinan B = $|B| = 7$.

Ingat !!, metoda menghitung determinan pada definisi di atas tidak berlaku untuk determinan matriks-matriks 4 × 4 atau yang berukuran lebih besar.

3. Minor dan Kofaktor

Pada bahagian ini kita akan mempelajari sebuah metoda yang lebih umum untuk menghitung determinan matriks yang mempunyai ukuran besar. Selanjutnya dengan menggunakan matriks kofaktor kita akan memperoleh rumus untuk invers dari sebuah matriks yang dapat dibalik.

Definisi 3

Jika A adalah sebuah matriks kuadrat, maka minor elemen a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tinggal setelah baris ke i dan kolom ke j di coret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dinamakan kofaktor elemen a_{ij}.

Perhatikan matriks = $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Maka : a) Minor dari $a_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$

kofaktor $a_{11} = C_{11} = (-1)^{1+1}\,(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$

$= (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$

Jadi minor a_{11} (M_{11}), kita dapat dengan menghitung determinan dari submatriks A, setelah elemen - elemen baris pertama dan kolom pertama dari A dihilangkan.

b) Minor dari $a_{12} = M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23}$

Kofaktor $a_{12} = C_{12} = (-1)^{1+2}\, M_{12}$

$= (-1)\; a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23}$

$= -(a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23})$

c) $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} == -(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$

$C_{13} = (-1)^{1+3}\, M_{13} = a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}$

d) M_{21} didapatkan dengan menghitung determinan dari submatriks A setelah elemen-elemen baris ke dua dan kolom pertama dihilangkan.

$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}\, a_{33} - a_{32}\, a_{13})$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -(a_{12}\, a_{33} - a_{32}\, a_{13})$$

dan seterusnya kita dapat menghitung sampai M_{33} dan C_{33}.

Perhatikan bahwa tanda dari C_{ij} selalu berganti-ganti, yaitu + dan −.

Jadi $C_{11} = + M_{11}$ $\quad C_{12} = - M_{12}$ $\quad C_{13} = + M_{13}$

$C_{21} = - M_{21}$ $\quad C_{22} = + M_{22}$ $\quad C_{23} = - M_{23}$

$C_{31} = + M_{31}$ $\quad C_{32} = - M_{32}$ $\quad C_{33} = + M_{33}$

Untuk $A_{3\times3}$, kita dapatkan tanda yang menghubungkan C_{ij} dan M_{ij} berada dalam baris ke i dan kolom ke j dalam bentuk berikut ini : $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Secara umum untuk matriks

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kita dapatkan tanda yang menghubungkan C_{ij} dan M_{ij} dalam baris ke i dan kolom ke j dalam bentuk berikut :

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Agar pembaca lebih memahami definisi 3 diatas, pelajarilah contoh berikut ini :

Contoh 1

Hitunglah minor dan kofaktor untuk setiap elemen dari

matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

a) $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-3) = 4$

$C_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = (-1)^2\ 4 = 4$

b) $M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10$

$C_{12} = (-1)^{1+2}\ M_{12} = (-1)^3\ 10 = -10$

c) $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 = 2$

$C_{13} = (-1)^{1+3}\ M_{13} = (-1)^4\ 2 = 2$

d) $M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 -2 = -4$

$C_{21} = (-1)^{1+2}\ M_{21} = (-1)^3\ (-4) = 4$

e) $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$C_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{22} = (-1)^4 \cdot (-3) = -3$

f) $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-4) = 5$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\ M_{23} = (-1)^5\ 5 = 5$$

g) $M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\ M_{31} = (-1)^4\ 4 = 4$$

h) $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\ M_{32} = (-1)^5\ (-11) = 11$$

i) $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-8) = 9$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\ M_{33} = (-1)^6\ 9 = 9$$

Contoh 2

Hitunglah minor dan kofaktor dari unsur-unsur sepanjang baris pertama dari matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

a) $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{matrix}$

$$= \{ 0 + 0 + 4 \} - \{ 0 + 0 + 24 \} = -20$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = (-1)^2\ (-20) = -20$$

Disini terlihat bahwa minor dari submatriks yang tinggal adalah determinan dari matriks yang berukuran 3×3. Untuk menghitungnya kita gunakan definisi 2.

b) $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 20$

$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{3} (20) = -20$

c) $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2$

$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{4}\, 2 = 2$

d) $M_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -18$

$C_{14} = (-1)^{1+4} M_{14} = (-1)^{5} (-18) = 18$

Selanjutnya kita sampai pada penggunaan minor dan kofaktor untuk menghitung deterninan suatu matriks n×n.

Perhatikan matriks $A_{3\times3}$ yang umum :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Pada definisi 2 kita ketahui bahwa :

$$\det A = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\} \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Bentuk ini dapat ditulis kembali sebagai :

$$\det A = a_{11}\{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\} + a_{12}\{a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}\}$$
$$+ a_{13}\{a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\}$$

Besaran-besaran di dalam tanda kurung adalah kofaktor-kofaktor C_{11}, C_{12} dan C_{23} yang telah kita hitung sebelum ini (lihat contoh setelah definisi 3). Selanjutnya kita dapatkan :

$$\det A = a_{11}\,C_{11} + a_{12}\,C_{12} + aa_{13}\,C_{13} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

Persamaan (**) memperlihatkan pada kita bahwa deterninan A dapat dihitung dengan mengalikan elemen-elemen di dalam baris pertama dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil-hasil perkalian yang dihasilkan. Metoda menghitung deterninan A atau det A ini disebut <u>"Ekspansi Kofaktor"</u> sepanjang baris pertama dari A.

<u>Contoh 3</u>

Hitunglah deterninan A dengan metoda ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama dari matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Penyelesaian</u>

Pada contoh 1, kita telah menghitung C_{11}, C_{12}dan C_{13}yaitu :

$C_{11} = 4$. $C_{12} = -10$ dan $C_{13} = 2$

Selanjutnya kita gunakan persamaan (**) untuk mnghitung deterninan A.

$$\det A = a_{11}\,C_{11} + a_{12}\,C_{12} + a_{13}\,C_{13}$$
$$= 1\,(4) + (-2)(-10) + 2(2) = 4 + 20 + 4 = 28$$

Jadi det A = 28.

Selanjutnya kita coba menhitung det (A) dengan menggunakan definisi 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \{(1)(1)(1) + (-2)(-3)(2) + (2)(4)(1)\} - \\ &\quad \{(2)(1)(2) + (1)(-3)(1) + (-2)(4)(1)\} \\ &= \{1 + 12 + 8\} - \{4 - 3 - 8\} \\ &= 21 + 7 = 28. \end{aligned}$$

Jadi det A = 28.

Ternyata kedua cara tersebut memberikan hasil yang sama.

Perhatikan kembali persamaan (*), yaitu :

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Kita dapat menyusun kembali suku-suku di dalam (*) ke dalam berbagai cara, sehingga diperoleh rumus-rumus lain seperti (**). Rumus-rumus tersebut adalah :

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(***) \end{aligned}$$

Penurunan rumus-rumus tersebut diberikan pada pembaca sebagai latihan.

Pada setiap persamaan (***) kita lihat elemen-elemen dan kofaktor-kofaktor semuanya berasal dari baris yang sama atau dari kolom yang sama.

Persamaan (***) ini disebut <u>"Ekspansi-ekspansi Kofaktor"</u>.

<u>Contoh 4</u>

Misalkan A adalah matriks seperti contoh 3. Hitunglah deterninan A dengan mengunakan -ekspansi kofaktor sepanjang kolom ketiga.

<u>Penyelesaian</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\, C_{13} + C_{23} + 1\, C_{33}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \quad ;$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\, M_{11} = (-1)^4\ (2) = 2$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-4) = 5 \quad ;$$

$$C_{23} = (-1)^{1+3}\, M_{23} = (-1)^5 (5) = -5$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-8) = 9 \quad ;$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 (9) = 9$$

Maka $\det A = 2\ (2) + (-3)\ (-5) + 1(9)$

$= 4 + 15 + 9 = 28$

Dengan metoda ekspansi kofaktor ini, kita dapat memilih unsur-unsur pada suatu baris atau suatu kolom menurut kehendak kita. Umumnya strategi terbaik untuk menghitung deterninan dengan metoda ini adalah dengan memilih suatu baris atau kolom yang mempunyai bilangan nol terbanyak.

Contoh 5

Misalkan $A_{4\times4}$ adalah matriks seperti cotoh 2. Hitunglah deterninan dari matriks A tesebut.

Penyesaian

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Kita pilih untuk melakukan ekspansi sepanjang baris ketiga, karena pada baris ini mempunyai bilangan nol yang paling banyak dibandingkan baris ataupun kolom yang lain.

$\det A = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}$

Karena $a_{33} = a_{34} = 0$, maka kita tidak perlu menghitung C_{33} dan C_{34}.

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 60$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Maka det $A = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}$

$= 1(60) + (-1)(0) + 0 \cdot C_{33} + 0 \cdot C_{34}$

$= 60$

Perhatikan !! Untuk matriks-matriks $A_{4\times4}$, jika kita melakukan ekspansi kofaktor sepanjang suatu baris atau suatu kolom tertentu, maka kita akan memperoleh minor submatriks yang berukuran 3×3. Untuk menghitungnya dapat digunakan metoda ekspansi kofaktor sekali lagi atau metoda yang ditunjukkan pada gambar 1 (definisi 2).

4. Sifat-sifat Determinan

Pada bahagian ini kita akan mengembangkan sifat-sifat fundamental dari deterninan. Sifat-sifat tersebut adalah :

a) Jika A adalah sebarang matrik kuadrat yang mengandung sebarisan bilangan nol, maka det (A) = 0.

Bukti :

Tanpa mengurangi sifat keumumannya, kita buktikan sifat ini dengan memperhatikan matriks $A_{3\times3}$ yang umum yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinan A dapat dihitung dengan ekspansi-ekspansi kofaktor, seperti yang telah ditunjukkan pada persamaan (***). Kita ambil elemen-elemen dan kofaktor-kofaktor yang berasal dari baris yang sama, maka :

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \end{aligned}$$

Misalkan elemen-elemen baris pertama semuanya nol, maka kita peroleh :

$\det A = 0\ C_{11} + 0\ C_{12} + 0\ C_{13} = 0$

Atau elemen-elemen baris kedua semuanya nol, diperoleh :

$\det A = 0\ C_{21} + 0\ C_{22} + 0\ C_{23} = 0$

Jika elemen-elemen baris ketiga semuanya sama dengan nol, didapatkan :

$\det A = C_{31}C_{31} + C_{32}C_{32} + C_{33}C_{33} = 0$

b) Jika A adalah sebuah matriks segitiga yang berukuran $n \times n$, maka det A adalah hasil perkalian elemen-elemen pada diagonal utama, $\det A = a_{11}a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{nn}$.

<u>Bukti</u> : Kita tinjau matriks segitiga atas 4×4 yang umum :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Kita pilih ekspansi sepanjang kolom pertama untuk menghitung deterninan A, maka :

$\det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41}$

Karena $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$, maka :

$$\det A = a_{11}C_{11} + 0\ C_{21} + 0\ C_{31} + 0\ C_{41}$$
$$= a_{11}C_{11}$$

$C_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11}$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$= 1 \cdot (a_{22}\ a_{33}\ a_{44}\ )$ (periksa !)

Jadi det $A = a_{11}\ (\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}\ )$

$= a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}$

a_{11}, a_{22}, a_{33}, dan a_{44} adalah elemen-elemen pada diagonal utama.

Untuk matriks segi tiga bawah, pembuktiannya diberikan sebagai latihan.

c) Jika A adalah sebarang matriks kuadrat, maka :

det A = $\det{}^{T}A$.

Bukti :

Tanpa mengurangi sifat keumumannya, kita buktikan sifat ini dengan menggunakan matriks 3 × 3 yang umum, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

det A $= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama)

Untuk menghitung det (A^{T}), kita lakukan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama.

$$\det A^{T} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}\ (-1)^{1+3} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ (periksa)

Jadi det A = det A^T

Untuk memperdalam pemahaman, pembaca dapat melakukan ekspansi kofaktor dengan memilih baris atau kolom lain untuk pembuktian sifat ini.

d) Jika A dan B adalah matriks n × n, maka :

det (AB) = det (A) det (B).

Pembuktian sifat ini diberikan sebagai latihan dan untuk mengilustrasikannya, perhatikan contoh berikut ini :

Contoh 1

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$

Tunjukkan : det (AB) = det (A) det (B)

Penyelesaian

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 19 \\ 9 & 51 \end{bmatrix}$$

det (AB) = (16)(51) - (9)(19) = 645 ....(1)

det (A) = (1)(3) - (2)(-6) = 15

det (B) = (2)(11) - (-3)(7) = 43

det (A) det (B) = (15)(43) = 645 ....(2)

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan :

det (AB) = det (A) det (B) = 645

e) Jika A adalah sebarang matriks kuadrat yang mempunyai dua baris yang sebanding, maka deterninan A = 0.

Bukti sifat ini akan diberikan sebagai latihan.

Contoh 1

$$\text{Misalkan } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Perhatikan baris kedua dari matriks A sebanding dengan baris pertama dari matriks A, atau baris kedua dari matriks A = 2 kali baris pertama.

Jika kita hitung det A = 0.

5. Menghitung Determinan Dengan Reduksi Baris

Perhitungan determinan sebuah matriks dengan menggunakan metoda reduksi sangat penting. Karena dengan mereduksi sebuah matriks ke dalam bentuk eselon baris kita dapat menghindari perhitungan yang panjang di dalam memakai definisi determinan secara langsung atau menggunakan ekspansi kofaktor.

Untuk dapat mereduksi sebuah matriks ke daalam bentuk eselon baris kita lakukan "Operasi Baris Elementer" atau disingkat OBE.

Operasi Baris Elementer Tersebut Adalah:

1) Mengalikan suatu baris dengan konstanta yang tidak sama dengan nol.

2) Mempertukarkan letak dua baris.

3) Menambahkan suatu baris dengan kelipatan baris lainnya.

Notasi yang digunakan dalam melakukan operasi baris elementer adalah sebagi berikut :

i) $b_i(k)$ artinya mengalikan baris ke i dengan konstanta $k \neq 0$

Contoh :

b_1 (2) artinya kalikan baris pertama dengan konstanta sebesar 2.

ii) $b_i + k\, b_j$ artinya tambahkan baris ke i dengan k kali baris ke j. Jadi disini yang berubah adalah baris ke i.

iii) $b_i \Leftrightarrow b_j$ artinya pertukarkan letak baris ke i dengan ke j.

Contoh 1

Dengan operasi baris elementer, ubahlah matriks A berikut kedalam bentuk eselon baris tereduksi, jika :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_2 - 2\,b_1 \\ b_3 - b_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_1 + b_2 \\ \\ b_3 \ (1/2) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_1 - b_3 \\ \\ b_2 \ (-1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_2 \ (1/2) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} b_1 - b_3 \\ \\ b_2 + 5b_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ berada dalam bentuk eselon baris tereduksi.

<u>Sifat-sifat Matriks Eselon Baris tereduksi</u>

1. Jika sebuah baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama didalam baris tersebut adalah 1 (kita namakan satu utama)
2. Jika ada suatu baris yang terdiri seluruhnya dari nol, maka semua baris itu dikelompokkan bersama-sama dibawah matrik.
3. Di dalam sebarang dua baris yang berurutan, yang tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka 1 utama didalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh kekanan dari pada 1 utama didalam baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom mengandung sebuah 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Sebuah matriks yang mempunyai sifat-sifat 1, 2 dan 3 disebut berada di dalam eselon baris.

<u>Contoh 2</u>

Matriks-matriks yang berikut berada dalam bentuk eselon baris tereduksi.

a). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c). $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Contoh 3

Matriks-matriks yang berikut berada dalam bentuk eselon baris tereduksi.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Dari contoh 2 dan 3, dengan mudah kita dapat melihat bahwa matriks di dalam bentuk eselon baris tereduksi harus mempunyai nol di atas dan di bawah setiap 1 utama, sebaliknya sebuah matriks di dalam bentuk eselon baris harus mempunyai nol di bawah 1 utama. Berikut ini akan kita lihat bagaimana operasi baris elementer pada sebuah matriks akan mempengaruhi nilai deterninannya.

Perhatikan matriks-matriks berikut ini :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Jika kita hitung determinan dari matriks-matriks ini dengan menggunakan definisi 1 atau ekspansi-ekspansi kofaktor, akan diperoleh :

$\det(A) = 18$; $\det(A_1) = 36$; $\det(A_2) = 18$; dan $\det(A_3) = -18$.

Perhatikan kembali matriks-matriks A, A_1, A_2 dan A_3 di atas.

a) A_1 diperoleh dengan mengalikan baris pertama dari A dengan skalar 2. $(b_1(2))$.

b) A_2 diperoleh dengan menambahkan 1 kali baris pertama dari A kepada baris kedua atau $b_2 + b_1$.

c) A_3 diperoleh dengan mempertukarkan baris pertama dan baris kedua ($b_1 \leftrightarrow b_2$).

Dari hasil perhitungan determinan kita memperoleh hubungan sebagai berikut :

a) $\det(A_1) = 2 \cdot \det(A)$

b) $\det(A_2) = \det(A)$

c) $\det(A_3) = -\det(A)$

<u>Teorema 1</u>

Misalkan A adalah sebarang matriks $n \times n$

a) Jika suatu baris tunggal dari A dikalikan dengan suatu skalar k ($k \neq 0$), maka determinan matriks yang baru (A') sama dengan k, kali determinan A.

Jadi det $(A') = k \det (A)$.

b) Jika hasil kelipatan suatu baris dari A dengan suatu konstanta tak nol ditambahkan kepada baris lain dari A, maka deternimnan dari matriks yang baru (A') sama dengan determinan A.

Jadi det $(A') = \det (A)$.

c) Jika dua baris dari matriks A dipertukarkan, maka determinan matriks yang baru (A') adalah $- \det (A)$.

Jadi det $(A') = - \det A$.

Bukti

a) Misalkan :

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

B adalah matriks yang didapatkan dengan mengalikan suatu baris ke i dari matriks A dengan konstanta tak nol k.

Selanjutnya kita hitung det (A) dan det (B) dengan metoda ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i, diperoleh :

$$\det (A) = (-1)^{i+2} a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in}M_{in}$$

$$= a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

Ingat !!

i) $(-1)^{i+1} M_{i1} = C_{i1}$, $(-1)^{i+2} M_{i2} = C_{i2}$

dan seterusnya $(-1)^{i+n} M_{in} = C_{in}$

ii) M_{i1} artinya minor baris ke i dan kolom 1 dan seterusnya.

$$\det(B) = (-1)^{i+1} k\, a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} k\, a_{i2} M_{i2} + \ldots\ldots (-1)^{i+n} k\, a_{in} M_{in}$$

$$= k\,(a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots\ldots + a_{in} C_{in})$$

$$= k \det(A).$$

Jadi $\det(B) = k \det(A)$.

b). Misalkan

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya $B_{n\times n}$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan r kali baris kee i dari A kepada baris ke m yaitu :

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & & & & \\ ra_{i1}+a_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & ra_{in}+a_{mn} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita hitung det (A) dan det (B) dengan metoda ekspansi kofaktor sepanjang baris ke m, didapat:

$$\det(A) = (-1)^{m+1} a_{m1} M_{m1} + (-1)^{m+2} a_{m2} M_{m2} + \dots + (-1)^{m+n} a_{mn} M_{mn}$$

$$= a_{m1} C_{m1} + a_{m2} C_{m2} + \dots + a_{mn} C_{mn}$$

$$\det(B) = (-1)^{m+1} (ra_{i1} + a_{m1}) M_{m1} + \dots + (-1)^{m+n} (ra_{in} + a_{mn}) M_{mn}$$

$$= r\{(-1)^{m+1} a_{i1} M_{m1} + \dots + (-1)^{m+n} a_{in} M_{mn}\} + \{(-1)^{m+1} a_{m1} M_{m1} + \dots (-1)^{m+n} a_{mn} M_{mn}\}$$

$$= r(a_{i1} C_{m1} + \dots + a_{in} C_{mn}) + (a_{m1} M_{m1} + \dots + a_{mn} C_{mn})$$

Berdasarkan sifat (e) pada bahagian 4, nilai dari :

$a_{i1} C_{m1} + a_{i2} C_{m2} + \dots + a_{in} C_{mn} = 0$, karena pada matriks ini terdapat 2 baris yang identik (sebanding).

Sehingga : $\det(B) = r\{0\} + \{a_{m1} C_{m1} + a_{m2} C_{m2} + \dots + a_{mn} C_{mn}\} = 0 + \det(A)$

Jadi $\det(B) = \det(A)$.

Bukti bahagian (c) diberikan sebagai latihan.

Selanjutnya kita akan menggunakan operasi baris elementer sebagai metoda alternatif untuk menghitung determinan suatu matriks, guna menghindari perhitungan yang sangat banyak bila kita menggunakan secara lansung definisi determinan. Ide dasar dari metoda ini adalah melakukan operasi baris elementer untuk mereduksi matriks A yang diketahui kepada sebuah matriks R yang berada dalam bentuk eselon baris. Kita ketahui bahwa bentu k eselon baris dari sebuah matriks kuadrat adalah segitiga atas, sehingga determinan dari R dapat dihitung dengan menggunakan sifat b) pada bahagian 4. Sedangkan nilai det(A) dapat diperoleh dengan menggunakan teorema 1 di atas , yaitu dengan menghubungkan nilai det (A) yang tidak diketahui kepada nilai det (R).

Untuk lebih jelasnya penggunaan metoda ini, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 4

Hitunglah det (A) jika :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Dengan mereduksi A ke dalam bentuk eselon baris dan menggunakan teorema 1, diperoleh :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris pertama dan baris ketiga dari A dipertukarkan ($b_1 \Leftrightarrow b_3$).

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris kedua ditambah dengan (-4) kali baris pertama ($b_2 + (-4)\, b_1$)

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris ketiga ditambah (-2) kali baris pertama ($b_3 + (-2)\, b_1$).

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris kedua ditambah (-2)kali baris ketiga (b_2 + (-2)b_3)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris kedua dan keti-ga dipertukarkan

($b_2 \Leftrightarrow b_3$)

$$= (-5) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sebuah faktor sebesar -5 dikeluarkan dari baris kedua

$$= (-5)\ (1)$$

Jadi det (A) = 5

Perhatikan bahwa : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

berada dalam bentuk eselon baris merupakan sebuah matriks segitiga atas. Maka berdasarkan sifat (b) pada bahagian 4, determinannya diperoleh dengaan mengalikan unsur-unsur pada diagonal utama.

<u>Contoh 5.</u>

Hitunglah determinan A, jika :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Baris ke empat ditambah dengan 3 kali baris pertama.

$(b_4 + (3) b_1)$

Jadi det A = 0 (Berdasarkan sifat (a) pada bahagian 4)

Perhatikan bahwa matriks A diatas mempunyai 2 buah baris yang sebanding, yaitu baris pertama dan baris keempat. Dengan melakukan satu kali OBE kita akan memperoleh sebuah baris nol (baris yang semuaunsurnya nol). Tanpa perhitungan yang rumit, kita dapat langsung menentukan nilai determinan A (dengan menggunakan sifat (a) pada bahagian 4).

6. Aturan Cramer (Kaidah Cramer)

Aturan Cramer adalah suatu penempatan dari determinan yang berguna di dalam memecahkan sistim persaman linier A X = B, dimana A adalah matriks n×n dan B matriks n×1, dengan syarat det (A) ≠ 0. Aturan Cramer untuk mencari pemecahan (solusi dari sistim persamaan linier A X = B adalah sebagai berikut :

Jika AX = B adalah sebuah sistem yang terdiri dari n persamaan linier dengan n bilangan yang tidak diketahui sehingga det (A) ≠ 0, maka sistim tersebut mempunyai sebuah pemecahan yang unik. Pemecahan tersebut adalah :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

$$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Dimana A_k adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan elemen-elemen di dalam kolom ke j dari A dengan elemen-elemen di dalam matriks

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh 1

Gunakanlah aturan Cramer untuk memecahkan sistim persamaan linier berikut :

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -4$$

Penyelesaian

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita hitung det (A), det (A_1), det (A_2)dan det (A_3).

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\ (-1) \quad = -4$$

Jadi det (A) = -4

Dengan mereduksi A_1, A_2, A_3 ke bentuk eselon baris, seperti diatas kita dapatkan

det $(A_1) = -4$ det $(A_2) = -8$ det $(A_3) = -12$

sehingga ;

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-12}{-4} = 3$$

Pembaca diharap kan memeriksa jawaban tersebut dengan subsitusi langsung kepersamaan yang diketahui.

Untuk memecahkan sebuah sistem yang terdiri dari n persamaan dengan n bilangan yang tidak diketahui dengan aturan Cramer, maka kita perlu menghitung n + 1 determinan dari matriks-matriks nxn. Dengan aturan Cramer kita dapat menghitung nilai variabel tertentu misalnya x_k; k = 1, 2, ..., n tanpa harus menghitung nilai variabel lain.

B. Invers Matriks Bujur Sangkar

Perhatikan persamaan ; $ax = b$ ....(1)

dimana a, b adala bilaangan-bilangan real. Untk mencari pemecahan dari persamaan tersebut kita dapat membagi kedua ruas persamaan tersebut dengan a (jika $a \neq 0$), sehinga didapatkan $x = b/a$.

Bagaimana pemecahan $AX = B$?, dimana A dan B adalah matriks-matriks. Kita tidak dapat membagi kedua ruas persamaan tersebut dengan A. Untuk pemecahan sistim $AX = B$, kita perlu menentukan invers perkalian dari A (multipicative invers dari A).

Bila a suatu bilangan real ($a \neq 0$), dan invers perkalian dari a dinyatakan dengan a^{-1} ; sehinga $aa^{-1} = 1$.

Jadi jika $a x = b$, maka kita dapatkan :

$$a^{-1}(ax) = a^{-1} b$$
$$(a^{-1} a)(x) = a^{-1} b$$
$$1 (x) = a^{-1} b$$
$$x = a^{-1} b$$

Definisi 1

Jika A suatu matriks kuadrat n×n, maka invers perkalian dari A adalah suatu matriks M, sehingga $M A = A M = I_n$

Untuk selanjutnya invers perkalian dari A, disebut invers A, dan dinotasikan dengan A^{-1}. Suatu matriks A yang mempunyai invers disebut "dapat dibalik" (invertible).

Contoh 1

Tunjukkan bahwa $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

adalah invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian

Jika B adalah invers dari A, maka $BA = AB = I_n$ (definisi).

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Karena $BA = AB = I_2$, maka B adalah invers dari A.

Tidak semua matriks kuadrat dapat di balik (mempunyai invers).

Contoh 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Selidikilah apakah A punya invers.

Penyelesaian

Misalkan B adalah invers dari A, berdasarkan definisi.

$AB = BA = I_3$

Misalkan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11}+2b_{12}+3b_{13} & 2b_{11}-b_{12}+4b_{13} & 0 \\ b_{21}+2b_{22}+3b_{23} & 2b_{21}-b_{22}+4b_{23} & 0 \\ b_{31}+2b_{32}+3b_{33} & 2b_{31}-b_{32}+4b_{33} & 0 \end{bmatrix} = I_3$$

Kolom ketiga dari BA, merupakan kolom nol (kolom yang semuanya nol). Jadi tidak mungkin kita memperoleh $BA = I_3$ Karena $BA \neq I_3$ maka A tidak dapat dibalik (tidak punya invers).

Teorema 1

Bila $A_{n \times n}$ mempunyai invers, maka invers dari A adalah tunggal (unik).

Bukti

Kita buktikan teorema ini dengan kontradiksi.

Andaikan B_1 dan B_2 keduanya adalah invers dari A, akan kita tunjukkan $B_1 = B_2$

Berdasarkan definisi : $B_1 A = AB_1 = I$ dan $B_2 A = AB_2 = I$

Perhatikan $B_1 A = I$

$(B_1 A) B_2 = I B_2 = B_2$

$B_1 (AB_2) = B_2$

$B_1 (I) = B_2$ (Karena B_2 invers dari A)

$B_1 = B_2$

Jadi $B_1 = B_2$

1. Invers Matriks Bujur Sangkar

Misalkan $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Jika $ad - bc \neq 0$, maka $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

atau $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$

karena $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_2$ (Periksa !)

$ad - bc$ adalah nilai dari det (A).

Contoh 1

Tentukan invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{4 - 6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

Pembaca diharapkan memeriksa bahwa $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_2$

Teorema 2

Suatu matriks $A_{n\times n}$ mempunyai invers jika dan hanya jika det (A) $\neq$ 0.

Bukti :

Tanpa mengurangi sifat keumumanya, kita akan buktikan untuk matriks $A_{2\times 2}$

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Kita akan mencari suatu invers dari A (misalkan P),

dimana $P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Berdasarkan definisi AP = I

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita peroleh dua sistem persamaan linier yaitu :

I. $a_{11}x + a_{12}\ z = 1$ dan II. $a_{11}\ y + a_{12}\ w = 0$

$a_{21}\ x + a_{22}\ z = 0$ $a_{21}\ y + a_{22}\ w = 1$

Kita gunakan aturan Cramer untuk mencari solusi dari kedua sistem persamaan di atas.

<u>Untuk sistim I</u>

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Untuk sistim II</u>

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det\ (A_1)}{\det\ (A)} \qquad z = \frac{\det\ (A_2)}{\det\ (A)}$$

Bukti :

Tanpa mengurangi sifat keumumanya, kita akan buktikan untuk matriks A_{2x2}

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Kita akan mencari suatu invers dari A (misalkan P),

dimana $P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Berdasarkan definisi AP = I

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita peroleh dua sistem persamaan linier yaitu :

I. $a_{11}x + a_{12}\ z = 1$ dan II. $a_{11}\ y + a_{12}\ w = 0$

$a_{21}\ x + a_{22}\ z = 0$ $a_{21}\ y + a_{22}\ w = 1$

Kita gunakan aturan Cramer untuk mencari solusi dari kedua sistem persamaan di atas.

Untuk sistim I

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk sistim II

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det\ (A_1)}{\det\ (A)} \qquad z = \frac{\det\ (A_2)}{\det\ (A)}$$

Nilai x dan z ada dengan syarat det $(A) \neq 0$.

$$y = \frac{\det (B_1)}{\det (A)} \qquad w = \frac{\det (B_2)}{\det (A)}$$

Nilai y dan w ada jika det $(A) \neq 0$

Karena elemen-elemen dari P adalah x, y, z dan w maka :

$$P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$ ada jika dan hanya jika det $A \neq 0$

Kenyataan ini juga berlaku untuk $A_{n \times n}$ (buktikan).

2. Mencari Invers Matriks Dengan Operasi Baris Elementer

Pada bahagian ini kita akan mengembangkan sebuah bagan sederhana atau alogaritma untuk mencari invers dari dari sebuah matriks yang dapat dibalik. Untuk mencari invers dari sebuah matriks A yang dapat dibalik, maka kita harus mencari sebuah urutan operasi baris elementer (OBE) yang mereduksi A ke dalam matriks satuan dan kemudian melakukan urutan operasi yang sama pada I_n untuk mendapatkan A^{-1}.

Contoh berikut ini akan memperlihatkan bagaimana prosedur tersebut di lakukan.

Contoh 1 :

Cari invers dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

Untuk mereduksi A ke dalam matriks satuan I_3 dengan OBE dan melakukan operasi-operasi ini secara serempak kepada I_3 agar menghasilkan A^{-1}, kita lakukan langkah-langkah berikut ini :

a. Gandengkan matriks satuan (I) ke kanan A

b. Lakukan OBE kepada kedua ruas (kedua matriks) sampai ruas kiri mereduksi pada I. Maka matriks di ruas kanan adalah invers dari A. Jadi matriks akhir akan berbentuk $I|A^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad b_2 \Leftrightarrow b_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} b_2 + (-3)\, b_1 \\ b_3 + (-2)\, b_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2/5 & 1/5 \end{array}\right] \quad b_2\ (1/5)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \quad b_2 \Leftrightarrow b_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -7/5 & -4/5 \end{array}\right] \quad b_3+(-4)b_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/10 & 4/10 \end{array}\right] \quad b_3(-1/2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3/2 & -11/10 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} b_1 + (-3)\,b_3 \\ b_2 + (2)\,b_3 \end{array}$$

Perhatikan, bentuk matriks yang terakhir adalah $\left[\, I \mid A^{-1} \,\right]$

$$\text{Jadi } A = \begin{bmatrix} -3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/20 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Bila prosedur diatas kita gunakan pada sebuah matriks yang tidak dapat dibalik, maka kita tidak mungkin dapat mereduksi ruas kiri ke dalam bentuk matriks identitas (I). Pada suatu tahap di dalam perhitungan tersebut kita akan menemukan sebuah baris bilangan nol pada matriks sebelah kiri. Maka kita dapat menyimpulkan bahwa matriks yang diberikan tidak dapat dibalik dan perhitungan dapat dihentikan.

<u>Contoh 2</u>

$$\text{Perhatikan matriks } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Kita lakukan prosedur seperti contoh 1, untuk melihat apakah A^{-1} ada.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad b_3 \Leftrightarrow b_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -44 & -14 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -22 & -7 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} b_2 + (-6)\, b_1 \\ b_3 + (-3)\, b_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -22 & -7 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \quad b_2 + (-2)\, b_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & -7 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad b_2 \Leftrightarrow b_3$$

Kita dapatkan sebuah baris nol (baris yang terdiri dari seluruhnya dari nol) pada matriks sebelah kiri. Jelas kita tidak mugkin dapat mereduksi matriks sebelah kiri menjadi matriks I. Jadi A tidak dapat dibalik atau A^{-1} tidak ada.

3. <u>Menentukan Invers Dengan A "Adjoin" Matriks</u>

<u>Definisi 1</u>

Jika A adalah sebarang matriks n×n dan misalkan C_{ij}

adalah kofaktor dari a_{ij} pada matriks A. Transpose dari matriks yang elemennya c_{ij} disebut dengan "Adjoin A" dan ditulis dengan adj (A).

Contoh 1 :

Tentukanlah adjoin dari matriks :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Pada bahagian A poin 3 dari bab III ini, kita telah membicarakan bagaimana menentukan kofaktor-kofaktor dari setiap unsur matriks. Kita gunakan presedur tersebut untuk menentukan kofaktor-kofaktor dari matriks A di atas.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 12$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -24$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -13$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 11$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

Matrik kofaktor dari A adalah $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$

yaitu $C = \begin{bmatrix} 9 & 12 & -24 \\ 9 & -13 & 11 \\ -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

Berdasarkan definisi adjoint A atau adj (A) = C^T

Jadi adj (A) = $\begin{bmatrix} 9 & 9 & -9 \\ 12 & -13 & 3 \\ -24 & 11 & -6 \end{bmatrix}$

Selanjutnya kita sampai pada suatu rumus untuk menghitung invers dari sebuah matriks yang dapat di balik dengan menggunakan adjoint matriks.

Teorema 1

Jika A adalah sebarang matriks nxn yang dapat dibalik, maka :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det (A)} \operatorname{adj} (A)$$

Bukti

Perhatikan $A^{-1} = \frac{1}{\det (A)} \operatorname{adj} (A)$

$$A\,A^{-1} = A \cdot \frac{1}{\det (A)} \operatorname{adj} (A)$$

$$I = A \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$$

$$A \operatorname{adj} A = \det A\,(I) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Untuk itu mula-mula harus ditunjukkan persamaan * diatas.

Perhatikan hasil perkalian.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{j1} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{j2} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & & & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{jn} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Elemen pada baris ke i dan kolom ke j dari A adj (A) adalah :

$a_{i1}\, c_{j1} + a_{i2}\, c_{j2} + \ldots + a_{in}\, c_{jn}$ .... (1)

(Prkalian elemen-elemen di dalam empat persegi panjang).

Jika i = j, maka (1) adalah ekspansi kofaktor dari det (A) sepanjang baris ke i dari A. Jika $i \neq j$, maka koefisien - koefisien a dan kofaktor-kofaktor berasal dari baris-baris A yang berbeda sehinga persamaan (1) bernilai nol.

Maka :

$$A\ \text{adj}\ (A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\ I \quad \ldots (2)$$

Karena A dapat dibalik, maka $\det(A) \neq 0$. Maka persamaan (2) dapat dituliskan kembali sebagai :

$$\frac{1}{\det(A)} \left[A\ \text{adj}\ (A) \right] = I$$

$$A \left[\frac{1}{\det(A)}\ \text{adj}\ (A) \right] = I$$

Kedua ruas dikalikan dari kiri dengan A^{-1}, sehingga di peroleh

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ \text{adj}\ (A)$$

Contoh 2

Tentukan invers dari matriks A pada contoh 1

Penyelesaian

Matriks A pada contoh 1 adalah :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Pada contoh 1 telah didapatkan

$$\text{Adj }(A) = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -9 \\ 12 & -13 & 3 \\ -24 & 11 & -6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita hitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

$$\det(A)\ a_{11}\ (-1)^{1+1}\ M_{11} + a_{12}\ (-1)^{1+2}\ M_{12} + A\ \ (-1)^{1+3}\ M_{12}$$

$$= (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$(2)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\ (9) + (1)\ (12) + (2)\ (-24)$$

$$= -9 + 12 - 48$$

Jadi det $(A) = -45$

$$\text{Maka : } A^{-1} = \frac{1}{-45} \begin{bmatrix} 9 & 9 & -9 \\ 12 & -13 & 3 \\ -24 & 11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/5 & -1/5 & 1/5 \\ -4/15 & 13/45 & -1/15 \\ 8/15 & -11/45 & 2/15 \end{bmatrix}$$

Pembaca diharapkan memeriksa bahwa $A^{-1}\ A = A\ A^{-1} = I$

Untuk matriks yang ukurannya (ordonya) lebih besar dari pada 3x3, maka rumus yang diberikan pada teorema 1, secara perhitungan kurang ampuh dibandingkan dengan cara yang diberikan bahagian 2.B, yaitu dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer (OBE) ..

Pada umumnya teorema I sering dapat digunakan untuk mendapatkan sifat-sifat invers tanpa menghilangkan invers tersebut..

Perhatikan contoh berikut ini

Contoh 3

Buktikan bahwa jika det (A) = 1 dan semua elemen di dalam A adalah bilangan bulat, maka semua elemen di dalam A adalah bilangan bulat.

Bukti

Misalkan $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$a_{ij} \in Z \qquad \forall$ i dan $\forall$ j,

dimana i = 1, 2, ...n ; dan j = 1, 2, ...n.

Z = himpunan bilangan bulat

Misalkan kofaktor dari A adalah $C = [c_{ij}]_{n \times n}$

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \forall$ i,j = 1, 2 .....n, dimana C_{ij} adalah kofaktor dari elemen a_{ij}

Karena $a_{ij} \in Z \quad \forall$ i,j = 1, 2 ; ..., n, maka C_{ij} juga merupakan bilangan bulat untuk semua i dan j. Berdasarkan definisi, adjoint dari A adalah C^T.

Maka adj (A) = $C^T = [C_{ij}] \quad \forall$ ij = 1, 2 ..... n.

Karena $C_{ij} \in Z \quad \forall$ ij = 1, 2,..... n maka C_{ij} juga merupakan bilangan-bilangan bulat. $\forall$ i, j = 1, 2, ... n.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{ adj } (A)$$

$$= \frac{1}{1} \text{ adj } (A)$$

$A^{-1} = \text{adj}(A)$

Karena $A^{-1} = \text{adj}(A)$ maka semua elemen-elemen di dalam A^{-1} adalah bilangan bulat.

4. <u>Sifat-sifat Invers Matriks</u>

a) Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan mempunyai ukuran yang sama, maka :

(i) AB dapat dibalik

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<u>Bukti</u>

Pembuktian (i) dan (ii) dapat dilakukan serempak. Karena A dan B adalah matriks - matriks yang dapat dibalik maka A^{-1} dan B^{-1} ada.

AB punya invers (dapat dibalik) bila ada C sedemikian sehingga $(AB)\,C = C\,(AB) = I$

Pilih $C = B^{-1}A^{-1}$

$$\begin{aligned}(AB)\,C &= (AB)\,B^{-1}A^{-1}\\ &= A\,(BB^{-1})\,A^{-1}\\ &= A\,I\,A^{-1}\\ &= A\,A^{-1}\end{aligned}$$

Jadi $(AB)\,C = I$..............(1)

$$\begin{aligned}C\,(AB) &= B^{-1}A^{-1}\,(AB)\\ &= B^{-1}(A^{-1}A)\,B\\ &= B^{-1}(I)\,B\\ &= B^{-1}B.\end{aligned}$$

Jadi $C\,(AB) = I$..............(2)

Dari (1) dan (2) jelas $(AB)\,C = C\,(AB) = I$

Jadi benar bila A dan B dapat dibalik maka AB dapat dibalik dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Contoh 1.

Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

Tunjukkan bahwa : a) AB dapat dibalik

b) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Penyelesaian.

i) det (A) = 2(3) - (5) 1 = 1 ≠ 0

Karena det (A) ≠ 0 maka A dapat dibalik

det (B) = 2(4) -(-3)(4) = 20 ≠ 0

Karena det (B) ≠ 0 maka B dapat dibalik

Berdasarkan sifat di atas maka AB dapat dibalik

ii) $AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$

$$AB^{-1} = \frac{1}{-70 + 90} \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -18 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -18 & 10 \end{bmatrix}$$

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} -7/20 & 1/4 \\ -9/20 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6 - 5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{8 + 12} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/20 \\ -9/10 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/20 \\ -1/5 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/10 & 1/4 \\ -9/10 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \ldots(**)$$

Dari (*) dan (* *), jelas bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Sebelum kita melanjutkan untuk mempelajari sifat-sifat invers matriks yang lain, kita akan mendefinisikan hal - hal berikut, yang berguna untuk pembuktian sifat-sifat invers.

Definisi 1

Jika A adalah matriks kuadrat dan n adalah bilangan bulat tidak negatif maka :

a. $A^n = \underbrace{A \, A \, A \ldots A}_{n \text{ faktor}}$

b. $A^0 = I$

Definisi 2

Jika A adalah matriks kuadrat yang dapat dibalik maka

$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1} \, A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}$

b) Jika A adalah sebuah matriks kuadrat yang dapat dibalik maka :

(i) A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$

(iii) Untuk setiap skalar $k \neq 0$, maka kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

Bukti.

(i) A dapat dibalik maka A^{-1} ada dan memenuhi

$A\,A^{-1} = A^{-1}A = I \ldots\ldots\ldots(*)$

Akan ditunjukan A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$.

Misalkan $A^{-1} = B$

Jika B dapat dibalik maka ada C sedemikian sehingga :

$BC = CB = I$ .... (**)

Pilih $C = B^{-1}$

Maka dari (**): $B\,B^{-1} = B^{-1}B = I$

$$(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}(A^{-1}) = I$$

atau $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I$ ....(***)

dengan membandingkan (*) dan (***), kita peroleh :

$A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$

Jadi A^{-1} dapat dibalik dan balikannya $= A$

(ii) Berdasarkan definisi 1.a

$$A^n = \underbrace{A\,A\,A\,\ldots\,A}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}$$

Karena A dapat dibalik maka A^{-1} ada

Berdasarkan sifat (a) dapat disimpulkan AA....A sebanyak n faktor juga dapat dibalik :

$\therefore$ A^n dapat dibalik.

Selanjutnya akan ditunjukan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$(A^n)^{-1} = (\underbrace{A\,A\,A\,\ldots\,A}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}})^{-1}$ (definisi)

$(A^n)^{-1} = (\underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}})^{-1}$ (sifat (a))

$= (A^{-1})^n$ (definisi)

Jadi $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

(iii) Bukti (iii) diberikan sebagai latihan

c) Jika A adalah sebuah matriks kuadrat dan r,s adalah bilangan-bilangan bulat, maka:

(i) $A^r A^s = A^{r+s}$

(ii) $(A^r)^s = A^{rs}$

<u>Bukti :</u>

(i) <u>Mula - mula kita tunjukkan untuk r, s bilangan bulat tak negatif.</u>

$$A^r A^s = (\underbrace{A\ A\ A\ \ldots\ A}_{r\ \text{faktor}})(\underbrace{A\ A\ A\ \ldots\ A}_{s\ \text{faktor}}) \quad \text{(definisi 1.a)}$$

$$= \underbrace{A\ A\ A\ \ldots\ A}_{r\ +\ s\ \text{faktor}}$$

$$= A^{r+s} \quad \text{(definisi 1.a)}$$

Jadi $A^r A^s = A^{r+s}$ ....(*)

<u>Selanjutya untuk r,s bilangan bulat negatif.</u>

Misalkan $r = -p$ dan $s = -q$ dimana $p, q \in \mathbb{Z}$

$$A^r \cdot A^s = A^{-p} A^{-q}$$

$$= (A^{-1})^p (A^{-1})^q \quad \text{(definisi 2)}$$

$$= (\underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{p\ \text{faktor}})(\underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{q\ \text{faktor}}) \quad \text{(definisi 1.a)}$$

$$=(A^{-1})^{p+q} \quad \text{(definisi 1.a)}$$

$$= (A)^{-(p+q)}$$

$$= (A)^{-p\ -q}$$

$$= (A)^{(-p)\ +\ (-q)}$$

$$= A^{r+s}$$

Jadi $A^r A^s = A^{r+s}$.............................(**)

Dari (*) dan (**) dapat disimpulkan bahwa :

$A^r A^s = A^{r+s}$ berlaku untuk semua matriks kuadrat A dan untuk semua r,s bilangan bulat.

Pembuktian (ii) dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti (i) dan diberikan sebagai latihan.

5. Soal-soal dan penyelesaianya.

Untuk lebih memperdalam pemahaman tentang konsep-konsep yang telah diberikan, pada bagian ini akan diberikan sejumlah soal-soal dan penyelesaiannya.

Soal 1.

Carilah semua nilai λ sehingga det (A) = 0, bila

$$A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Bila $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka det (A) = ad - bc.

Untuk soal diatas det (A) = $(\lambda - 1)(\lambda - 4) - 2 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - \lambda + 4 - 2 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$

Kita memperoleh persaman kuadrat dalam λ, pemecahannya adalah :

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Jadi $\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ dan $\lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$

Soal 2

A adalah matriks n×n yang dapat dibalik, B adalah sebarang matriks n×n. Buktikan bahwa det $(A^{-1} B A)$ = det (B)

Bukti

Dari hukum assosiatif perkalian matriks kita dapatkan :

$A^{-1} B A = (A^{-1} B) A$.

Selanjutnya :

$$
\begin{aligned}
\det (A^{-1} B A) &= \det((A^{-1} B) A) \\
&= \det (A^{-1} B) \det (A) && \text{(sifat 4.d)} \\
&= \det (A^{-1}) \det (B) \det (A) && \text{(sifat 4.d)} \\
&= \det (A^{-1}) \det (A) \det (B) \\
&= \det (A^{-1} A) \det (B) \\
&= \det (I) \det (B) \\
&= 1 \det (B)
\end{aligned}
$$

Jadi det $(A^{-1} B A)$ = det (B)

Soal 3

Buktikan bahwa jika sebuah matriks A yang kuadrat mempunyai sebuah kolom yang terdiri dari bilangan-bilangan nol, maka det (A) = 0.

Bukti

Perhatikan matriks kuadrat A berikut :

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

Misalkan kolom yang terdiri dari bilangan-bilangan nol adalah kolom ke k,

Jadi $a_{1k} = a_{2k} = \ldots = a_{nk} = 0$

Determinan matriks A dapat kita hitung dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke k, sehingga didapatkan :

$\det(A) = a_{1k}\, C_{1k} + a_{2k}\, C_{2k} + \ldots + a_{nk}\, C_{nk}$

Karena $a_{1k} = a_{2k} = \ldots = a_{nk} = 0$, maka :

$\det(A) = 0\, C_{1k} + 0\, C_{2k} + \ldots = 0\, C_{nk} = 0$

Jadi terbukti, jika sebarang matriks $A_{n \times n}$ mengandung satu kolom nol, maka det (A) = 0

Soal 4

Jika :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \det(A) = 5$$

a) Tentukan determinan dari $\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}$

b) Tentukan determinan dari $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$

Penyelesaian

Soal ini dapat kita selesaikan dengan menggunakan teorema 1 bahagian 5, yaitu menghitung determinan dengan OBE.

a). $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$

$= (-1)(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = (-1)\ (2)\ (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$= (-1)\ (2)\ (-1)\ (5) = 10$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} \quad b_2 + 3b_1 \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$= 2\ (5) = 10$

<u>Soal 5</u>

Jika :

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ dengan $b \neq 0$.

Perlihatkan bahwa untuk semua $u \in \mathbb{R}$, $u \neq 0$ Maka $uI - A$ dapat dibalik (A punya invers)

<u>Bukti</u>

$uI - A = u \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u-a & -b \\ b & u-a \end{bmatrix}$

$u\ I - A$ dapat dibalik (punya invers) jika :

$\det\ (u\ I - A) \neq 0$

det $(u I - A) = (u - a)^2 + b^2$ ....(*)

Untuk memperlihatkan persaman (*) $\neq$ 0, telitilah kasus-kasus berikut ini.

(i) $u = a \neq 0$, maka $(u - a)^2 + b^2 = (u - u)^2 + b^2 = b^2$

Jadi untuk kasus ini didapatkan :

det $(u I - A) = b^2 \neq 0$, karena $b \neq 0$

(ii) $u \neq 0$, $a = 0$, maka $(u - a)^2 + b^2 = (u - a)^2 + b^2 = u^2 + b^2$

$u^2 + b^2 \neq 0$, karena $U \neq 0$ dan $B \neq 0$

Jadi det $(u I - A) = u^2 + b^2 \neq 0$

Karena det $(u I - A) \neq 0$ untuk semua bilangan riel $u \neq 0$, maka $u I - A$ dapat dibalik atau $u I - A$ punya invers.

Soal 6

Jika A dapat dibalik, buktikan bahwa det $(A^{-1}) = \frac{1}{\det (A)}$

Bukti

Karena A dapat dibalik, maka $A^{-1} A = I$

det $(A^{-1} A)$ = det (I)

det (A^{-1}) det (A) = 1 ....(*)

Karena A dapat dibalik maka det (A) $\neq$ 0, maka persamaan (*) dapat dibagi dengan det (A), sehingga diperoleh :

$$\frac{\det (A^{-1}) \det (A)}{\det (A)} = \frac{1}{\det (A)}$$

Jadi det $(A^{-1}) = \frac{1}{\det (A)}$

Soal 7

Apakah jumlah dua matriks yang dapat dibalik perlu dibalik ?

Penyelesaiaan

Jumlah dua matriks yang dapat dibalik belum tentu dapat dibalik.

Contoh :

Ambil $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

Maka det (A) = 11 dan det (B) = 11

Karena det (A) = det (B) $\neq 0$, maka A dan B keduanya dapat dibalik

Selanjutnya :

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Karena $A + B = O$, dan det (O) = 0, maka A + B tidak dapat dibalik.

Soal 8

Misalkan A dan B matriks kuadrat sehingga $AB = O$. Perlihatkan bahwa jika A dapat dibalik maka $B = O$.

Penyelesaian

$A\,B = O$, A dapat dibalik berarti A^{-1} ada.

$A\,B = O$

$A^{-1} (A.B) = A^{-1}\,O$

$(A^{-1}\,A)\,B = O$

$I\,B = O$

$B = O$

Jadi $A\,B = O$ dan A dapat dibalik maka $B = O$.

Soal 9

Misalkan A adalah sebuah matriks kuadrat.

Perlihatkan bahwa $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$, jika $A^4 = O$.

Penyelesaian

$A^4 = O$

$-A^4 = O$

$I - A^4 = I$

$(I + A^2)(I - A^2) = I$

$(I + A^2)(I + A)(I - A) = I$

$(I + A^2)(I + A)(I - A)(I - A)^{-1} = I(I - A)^{-1}$

$(I + A^2)(I + A)I = I(I - A)^{-1}$

$(I + A^2)(I + A) = I(I - A)^{-1}$

$(I + A^2)(I + A) = I(I - A)^{-1}$

$I^2 + IA + A^2 I + A^3 = (I - A)^{-1}$

$I + A + A^2 + A^3 = (I - A)^{-1}$ ....(terbukti)

Soal 10

B adalah matriks kuadrat yang dapat dibalik.

Buktikan :

$AB^{-1} = B^{-1}A$ jika dan hanya jika $AB = BA$

Bukti

Soal ini harus dibuktikan dengan 2 arah, yaitu :

(i) Jika $AB^{-1} = B^{-1}A$ maka $AB = BA$

(ii) Jika $AB = BA$ maka $AB^{-1} = B^{-1}A$

(i) $AB^{-1} = B^{-1}A$

$AB^{-1}B = B^{-1}AB$

$AI = B^{-1}AB$

$A = B^{-1}AB$

$BA = BB^{-1}AB$

$BA = (BB^{-1})B$

$BA = IAB$

$BA = AB$

Jadi, jika $AB^{-1} = B^{-1}A$ maka $AB = BA$........(1)

(ii) $AB = BA$

$ABB^{-1} = BAB^{-1}$

$A (B \, B^{-1}) = B \, A \, B^{-1}$

$A \, I = B \, A \, B^{-1}$

$B^{-1} A \, I = B^{-1} \, B \, A \, B^{-1}$

$B^{-1} \, A = I \, A \, B^{-1}$

$B^{-1} \, A = A \, B^{-1}$

Jadi, jika $A \, B = B \, A$ maka $B^{-1} \, A = B \, A^{-1}$ ....(2)

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $A \, B^{-1} = B^{-1} \, A$ jika dan hanya jika $A \, B = B \, A$

<u>Soal 11</u>

Jika A, B dan C adalah sebarang matriks kuadrat, dan C^{-1} ada. Tunjukkan: Jika $C^{-1} \, A \, C = B$, maka det (A) = det (B).

<u>Penyelesaian</u>

$C^{-1} \, A \, C = B$

$C^{-1} \, A \, C \, C^{-1} = C^{-1} \, B$

$C^{-1} \, A \, (I) = C^{-1} \, B$

$C^{-1} \, A = C^{-1} \, B$

$C \, C^{-1} \, A = C \, C^{-1} \, B$

$I \, A = I \, B$

$A = B$

Karena $A = B$, maka det (A) = det (B)

Jadi, jika $C^{-1} \, A \, C = B$, maka det (A) = det (B)

SOAL - SOAL UNTUK LATIHAN

1. Hitung diterminan dari matriks-matriks berikut dengan menggunakan reduksi baris (OBE).

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

2. Perhatikan bahwa det $(I_n) = 1$

3. Jika det (A) = det (B), haruskah A = B ?

4. Tentukan nilai-nilai untuk k, sehingga determinaan dari matriks berikut 0 (nol).

a) $\begin{bmatrix} k-1 & 2 \\ 1 & k \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} k-2 & 5 \\ 10 & k+3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{bmatrix}$

5. Jika A adalah matriks segitiga atas, buktikan bahwa :
det (A) = det (A^T).

6. Jika A dan B keduanya matriks segitiga atas, tunjukkan bahwa det (AB) = det (A) det (B).

7. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   a) Tentukan det (A) di dalam polinomial x.

   b) Tentukan x sedemikian sehingga det (A) = 0.

8. a) Jika A dan B adalah sebarang matriks nxn dan A = B. Apakah selalu benar untuk mengatakan bahwa det (A) = det (B) ?

   b) Jika A dan B adalah sebarang matriks nxn dan det (A) = det (B). Apakah perlu A = B ?
   (Jelaskan jawaban anda).

9. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a+b & c+d \\ e & f \end{bmatrix}$

Perlihatkan bahwa :

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a & c \\ e & f \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} b & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

10. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Tentukan M_{11}, M_{12} dan M_{13} (M = Minor)

b) Tentukan C_{11}, C_{12} dan C_{13} (C = Kofaktor)

c) Tentukan det (A)

11. Gabungkan metoda reduksi baris (OBE) dan kofaktor untuk menghitung det (A), bila :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Gunakan aturan Cramer untuk memecahkan sistem berikut :

a) $2x + 3y + z = 9$

$x + 2y + 32 = 6$

$3x + y + 2z = 8$

b) $4x + 5y = 2$

$11x + y + 2z = 3$

$x + 5y + 2z = 1$

13. Gunakan aturan Cramer untuk mencari z, tanpa mencari x, y dan w dari sistim :

$4x + y + z + w = 6$

$3x + 7y - z + 10 = 1$

$7x + 3y - 5z + 8w = -3$

$x + y + z + 2w = 3$

14. Jika $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Perlihatkaan bahwa $C_{22}\ C_{33} - C_{23}\ C_{32} = a_{11}$ det (A)

15) Buktikan untuk $A_{2\times 2}$ berlaku untuk Adj (Adj A) = A

16) a) Tunjukan bahwa jika det (A) = 0, maka A (adj A) = 0

b) Tunjukan bahwa jika det (A) $\neq$ 0 maka det (adj A) $\neq$ 0

17. Buktikan $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (c - a)(b - a)(c - b)$

18. Untuk setiap matriks A berikut, tentukanlah adjoin A atau adj (A).

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

19. Untuk matriks-matriks pada soal 18 di atas, gunakan adj (A) untuk menentukan A^{-1}, jika inversnya ada

20. Tentukan invers dari matriks berikut dengan reduksi baris $[A, I]$

a). $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ b). $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

21. a) Berikan contoh matriks A dan B sedemikian sehingga A^{-1} dan B^{1} ada, tetapi $(A + B)^{-1}$ tidak ada.
    b) Berikan contoh matriks A dan B sedemikian sehingga A^{-1} dan B^{-1} tidak ada, tetapi $(A + B)^{-1}$ ada.
22. A dan B adalah sebarang matriks nxn A^{-1} ada dan B^{-1} tidak ada. Perlihatkan bahwa AB tidak invertible (AB^{-1} tidak ada). Petunjuk gunakan det (AB)
23. Jika $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ adalah invers dari A

    Tentukanlah invers dari 3A

24. Bila $A = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta & \text{Sin } \theta \\ -\text{Sin } \theta & \text{Cos } \theta \end{bmatrix}$

    Tunjukkan bahwa $A^{-1} = A^{T}$

25. Perlihatkan bahwa : Jika A invertible dan $A^{-1} = A^{T}$, maka, det (A) = $\pm$ 1 (Petunjuk det (A) = det (A^{T}))

26. a) Jika adalah matriks simetri dan non singular. Apakah A^{-1} juga simetri.?.

b) Jika A adalah matriks simetri miring (Skew simetri) dan non singular. Apakah A^{-1} juga skew simetri ?.

27) A dan B adalah matriks n x n . Jika AB dan BA keduanya dapat dibalik, haruskah A dan B keduanya dapat dibalik ?.

28) Tunjukan bahwa setiap matriks nilpotent adalah singular

29) Jika $A = B$ dan A^{-1} ada haruskah $A^{-1} = B^{-1}$?

30) Misalkan A dan B matriks n x n, jika $A^{-1} = B^{-1}$, haruskah $A = B$

31) Jika A, B adalah matriks n x n.

Buktikan : det (AB) = det (A) det(B).

32) Jika A_{nxn} mempunyai 2 baris yang sebanding, maka det(A) = 0.

33) Buktikan, jika dua baris dari matriks A dipertukarkan, maka determinan matriks yang baru (A^1) = -det (A)

34) Buktikan jika Anxn adalah matriks yang dapat dibalik, maka $\forall\, k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$. kA dapat dibalik dan $(k\,A)^{-1} = \frac{1}{k}\,A^{-1}$

35) Buktikan jika A adalah sebuah matriks kuadrat dan r,s adalah bilangan-bilangan bulat, maka $(A^r)^s = A^{rs}$