PROBABILITAS

Oleh:

DRS. TANIUS KUSAI
Dosen FPMIPA IKIP Padang

Diperbanyak oleh:
BADAN PENERBIT FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA
DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
(FPMIPA) IKIP PADANG

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
P A D A N G

1991

KATA PENGANTAR

Dalam kehidupan sehari-hari kita dihadapkan dengan bermacam-macam fenomena-fenomena ataupun peristiwa-peristiwa yang jumlahnya boleh dikatakan tidak dapat dihitung atau tidak terhingga banyaknya. Dari peristiwa-peristiwa yang kita hadapi itu ada yang dapat kita amati secara sadar atau ada yang tidak. Fenomena-fenomena ini dapat kita jadikan sebagai dasar dalam pengambilan keputusan-keputusan yang akan kita gunakan dalam memecahkan masalah-masalah yang kita hadapi dan dapat kita gunakan pula dalam pencapaian tujuan yang telah kita tetapkan.

Salah satu tugas dari Pengetahuan Probabilitas dan Statistika adalah mencoba mencari-cari fenomena-fenomena atau peristiwa-peristiwa yang dapat kita jadikan sebagai dasar pembuat keputusan untuk menetapkan suatu teori ataupun keputusan lainnya yang dapat digunakan hampir dalam semua bidang pengetahuan serta lapangan kehidupan.

Sebagai contoh dapat penulis kemukakan beberapa hal atau masalah yang meminta bantuan pengetahuan Probabilitas dalam menyelesaikan masalah pengambilan keputusan untuk melakukan suatu tindakan bila tersedia beberapa tindakan yang dapat dipilih. Misalnya dalam memilih suatu jabatan tertentu, kita dihadapkan pada beberapa masalah yang harus kita pertimbangkan buruk baiknya, menguntungkan atau tidak menguntungkan dan sebagainya. Setelah dipertimbangkan masalah-masalah itu barulah kita mengambil keputusan yang paling menguntungkan.

Berdasarkan hal di atas sepantasnyalah pengetahuan Probabilitas ini mendapat perhatian bagi kita semua untuk mempelajari dan mendalaminya sehingga dapat mengaplikasikannya dalam kehidupan sehari-hari.

Karenanya penulis mencoba membuat satu buku yang mungkin dapat membantu para mahasiswa dalam mempelajari Probabilitas dan dapat digunakan oleh bagi yang membutuhkannya terutama bagi penulis sendiri.

Kemudian dari itu penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu baik moral materil dalam terciptanya buku ini dan di samping itu penulis memohon bantuan berupa kritik dalam penyempurnaan buku ini, terima kasih.-

Padang, Maret 1991

Penulis.

DAFTAR ISI

BAB I: PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari baik dalam lingkungan hidup secara makro maupun mikro, kita selalu dikelilingi atau menemui berbagai-bagai fenomena secara sadar maupun tidak sadar bila kita mencoba mengkaji suatu kejadian atau peristiwa akan dapat kita temukan atau kita bayangkan kesempatan dari kajian itu, seperti umpamanya kejadian sakit, ada yang sakit ringan, cukup dan ada yang berat. Dari sakit yang ringan itu ada pula kesempatan atau alternatif sakit kepala, sakit kaki, tangan, badan kurang enak. Dengan kata lain sesuatu kejadian itu terdiri dari kejadian-kejadian kecil. Kejadian yang kecil terdiri pula dari kejadian-kejadian yang lebih kecil lagi. Untuk mengkaji banyaknya kesempatan/alternatif/peluang dari fenomena/kejadian itu diperlukan Probabilitas (Teori Kemungkinan) sebagai suatu model dari matematika untuk mempelajari baik peluang dari fenomena ataupun kejadian.

1. Pengertian Probabilitas

Seperti yang telah kita uraikan pada pendahuluan di atas untuk mempelajari atau mengkaji peluang dari fenomena atau kajian diperlukan suatu ilmu yang dapat memecahkan masalah peluang-peluang fenomena atau kejadian itu.

Contoh 1. Berapa jumlah nomor telepon yang kita butuhkan untuk memenuhi kebutuhan permintaan langganan yang semakin banyak sesuai dengan perkembangan kota.

Contoh 2. Bagaimana pertumbuhan sebatang jagung kalau tidak dipupuk, kalau diberi pupuk A, pupuk B atau pupuk lain.

Contoh 3. Berapa besar peluang Angka Kredit Rata-rata seorang mahasiswa kalau mahasiswa itu mengambil beban 15 SKS, 18 SKS atau 24 SKS untuk satu semester dalam pengambilan beban studi untuk setiap semester.

Contoh 4. Berapa banyak salam yang timbul kalau 5 orang bersalaman.

Contoh 5. Berapa besar probabilitas yang akan tejadi jika kita ambil kartu As dari suatu pak kartu bridge.

Contoh 6. Berapa besar probabilitas kita mendapatkan keuntungan jika kita beli satu lembar lotre.

Contoh 7. Berapa besar probabilitas keuntungan kalau beras kita jual waktu sesudah panen.

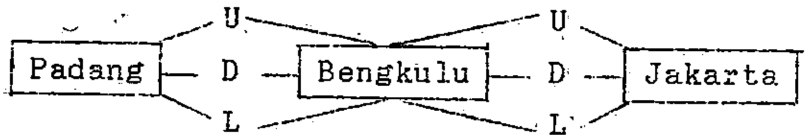
Berdasarkan contoh di atas kita sangat memerlukan suatu model matematika untuk menentukan besarnya peluang atau besarnya kejadian dari fenomena atau kejadian. Model matematika untuk ini ialah *Probabilitas*. Dengan kata lain *Probabilitas* adalah suatu model dari matematika untuk menentukan besarnya peluang fenomena/kejadian yang dapat terjadi.

2. **Nilai Probabilitas**

Untuk menentukan nilai probabilitas dari suatu kejadian, di bawah ini kita buat suatu ilustrasi dari kejadian.

Contoh 1.

Si Amat akan pergi dari Padang ke Jakarta tetapi ia harus singgah di Bengkulu. Beberapa cara/alternatif dia dapat berpergian dari Padang ke Jakarta dengan harus singgah di Bengkulu. Berapa nilai probabilitas ia memakai pesawat udara. Untuk penyelesaian masalah ini kita ilustrasikan sebagai berikut:



Banyak cara si Amat dapat berpergian dari Padang ke Jakarta dan singgah di Bengkulu ialah:

1. Dia dapat memakai pesawat udara dari Padang ke Bengkulu dan dari Bengkulu ke Jakarta pakai pesawat udara juga.
2. Dari Padang ke Bengkulu dia pakai pesawat udara dan dari Bengkulu ke Jakarta dengan mobil/jalan darat.
3. Dari Padang ke Bengkulu pakai pesawat udara, terus ke Jakarta dengan kapal laut.
4. Dari Padang jalan darat dari Bengkulu dengan pesawat udara ke Jakarta.
5. Dari Padang jalan darat ke Bengkulu, sedangkan dari Bengkulu ke Jakarta dengan jalan darat.
6. Dari Padang jalan darat, dari Bengkulu ke Jakarta jalan laut.
7. Dari Padang dengan kapal laut ke Bengkulu, dari Bengkulu dengan pesawat udaa ke Jakarta.
8. Padang - Bengkulu jalan laut, Bengkulu - Jakarta jalan darat.
9. Padang - Bengkulu jalan laut, Bengkulu - Jakarta jalan laut juga.

Jadi banyak cara si Amat berpergian dari Padang ke Jakarta lewat Bengkulu adalah 9 (sembilan) cara, yaitu:

1.	UU	4.	DU	7.	LU
2.	UD	5.	DD	8.	LD
3.	UL	6.	DL	9.	LL

dengan U = Udara, D = Darat dan L = Laut

atau himpunan kejadiannya S = {UU,UD,UL,DU,DD,DL,LU,LD,LL}

Nilai probabilitas si Amat pakai pesawat udara untuk ke-Jakarta dari Padang ialah $\frac{1}{9}$, karena UU hanya 1 cara, sedangkan kejadian yang dapat terjadi ialah 9 cara atau:

$$P(UU) = \frac{1}{9}.$$

Dapat juga ditanyakan berapa probabilitas si Amat berpergian dengan paling banyak satu kali pakai pesawat udara. Himpunan kejadian ≡ Hp = {UU,UD,UL,DU,DD,DL,LU,LD,LL}. Paling banyak satu kali pakai pesawat udara berarti pakai pesawat udara satu kali dan tidak pakai pesawat udara sama sekali. Jadi bila A ≡ kejadian si Amat pakai pesawat udara paling banyak satu kali yang dapat dinyatakan sebagai bagian; A = {UD,UL,DU,LU,DD,DL,LD,LL} :

$$P(A) = \frac{8}{9}.$$

Interpretasi: 1. Banyak frekuensi harapan yang terjadi ada 1 dan banyak kejadian yang dapat terjadi ada 9.

2. Banyak frekuensi harapan yang terjadi ada 8 dan banyak kejadian yang dapat terjadi ada 9.

Jadi: Nilai probabilitas kejadian A adalah nilai yang didapat dari membagi frekuensi kejadian yang diharapkan, dengan frekuensi kejadian yang dapat terjadi atau dengan pendek:

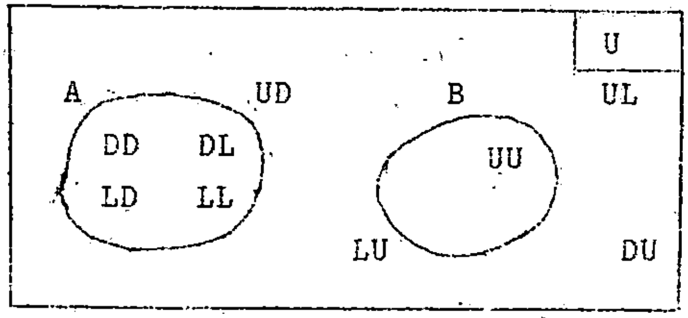
$$P(A) = \frac{m}{n}$$

dimana: m = frekuensi kejadian harapan

n = kejadian yang dapat terjadi.

3. Dua kejadian saling lepas.

Dua kejadian A dan B dikatakan dua kejadian saling lepas atau saling mengasingkan (mutually xclusive) bila tidak ada suatu kejadian kecilpun yang dapat terjadi secara bersama-sama diantara kejadian A dan B. Secara himpunan dapat dikatakan bahwa kejadian A dan B terdiri dari bagian atau unsur atau elemen. Bila tidak ada suatu unsur kecilpun yang ada pada A dan ada pula pada B, maka himpunan A dan himpunan B tersebut dua himpunan yang disjoints (dua himpunan saling lepas). Secara diagram Venn adalah:



Dua himpunan yang saling lepas (dis joint).

Dari contoh di atas dapat kita buat sebagai berikut: Kejadian A si Amat berpergian dari Padang ke Jakarta lewat Bengkulu dengan melalui darat atau laut. Kejadian B si Amat berpergian dari Padang ke Jakarta lewat Bengkulu melalui udara.

Dari contoh, kejadian A = {DD, DL, LD, LL}.

Kejadian B = {UU}.Kejadian A dan kejadian B adalah dua kejadian yang saling lepas.

Secara matematika:

Nilai probabilitas kejadian A = $P(A) = \frac{4}{9}$

Nilai probabilitas kejadian B = $P(B) = \frac{1}{9}$

$P(A \cup B) = P(DD,DL,LD,LL,UU) = \frac{5}{9}$

Jadi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Bila $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ maka kejadian A dan kejadian B disebut dua kejadian lepas.

Dimisalkan bila kejadian A si Amat berpergian dari Padang ke Jakarta lewat Bengkulu melalui darat atau laut dan kejadian B si Amat sekali melalui laut. Kita dapatkan secara himpunan adalah:

A = {DD,DL,LD,LL}

B = {LD,DL,UL,LU}

A U B = {DD,DL,LD,LL,UL,LU}

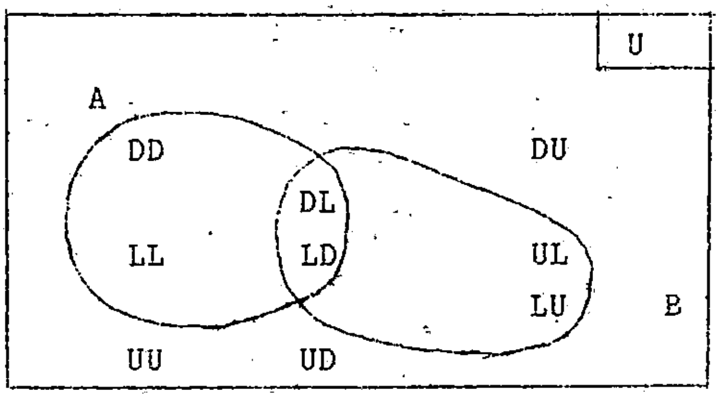
$$A \cup B = A + B - A \cap B \quad , \quad A \cap B = \{LD, DL\}$$
$$= 4 + 4 - 2$$
$$= 6.$$

$P(A) = \frac{4}{9}$ $\qquad (A \cup B) \neq P(A) + P(B)$

$P(B) = \frac{4}{9}$ $\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{6}{9}$ $\qquad = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9}.$

maka kejadian A dan kejadian B adalah dua kejadian yang tidak saling lepas (tidak mutually exclusive).
Kejadian A dan B dalam hal ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Contoh 2:

Diketahui 5 buah titik A, B, C, D dan E yang tidak terletak pada satu garis atau tidak koliner.
Melalui titik-titik itu dibuat segitiga. Bila kejadian A adalah segitiga-segitiga yang melalui titik-titik A, B dan C atau D, kejadian B adalah segitiga-segitiga yang salah satu titik sudutnya adalah titik E. Apakah kejadian A dan kejadian B dua kejadian lepas.

<u>**Penyelesaian**</u>:

Diketahui: 5 titik A, B, C, D, dan E,
dibuat segitiga-segitiga.
Kejadian A segitiga-segitiga melalui titik A, B, C atau D.
Kejadian B segitiga-segitiga yang salah satu titiknya titik E.

Ditanya: Apakah kejadian A dan B dua kejadian lepas.

Jawab: HP = {ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE,BCD,BCE,BDE,CDE}

A = {ABC,ABD,ACD,BCD}

B = {ABE,ACE,ADE,BCE,BDE,CDE}

A U B = {ABE,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE,BCD,BCE,BDE,CDE}

$P(A) = \frac{4}{10}$ $\quad\quad$ $P(A) + P(B) = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} = 1$

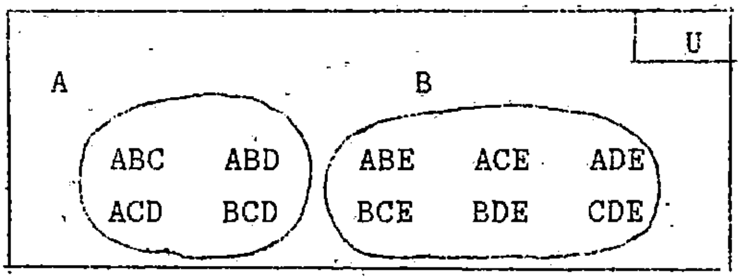
$P(B) = \frac{6}{10}$

$$P(A \cup B) = \frac{10}{10} = 1$$

Jadi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Maka A dan B dua kejadian lepas.

Diagram Venn:



Dari contoh-contoh di atas dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

Bila peluang dari kejadian dinotasikan dengan n dan banyak kejadian A yang diharapkan dinotasikan dengan m, maka nilai probabilitas kejadian A adalah:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad , \; m \leq n.$$

Dapat dikatakan bahwa P = 0, bila harga m = 0 dan P = 1, bila m = n. Dapat juga dikatakan bahwa bila P(A) = P maka harga P adalah $0 \leq P \leq 1$. Jadi nilai probabilitas dari kejadian A pada interval (0,1).

P = 0 disebut kepalsuan : contoh probabilitas manusia jadi beruk.

P = 1 disebut kepastian : contoh probabilitas manusia akan mati.

BAB II: RUANG SAMPEL DAN TITIK SAMPEL

Sampel

Bila sutu mata uang atau coint ditoss 10 kali, 100 kali, 1000 kali akan terlihat oleh kita bahwa hasil tossan itu hanya dua saja yaitu mata uang akan terbuka dengan gambar (m) atau akan terbuka dengan angka (b).

Bila dua mata uang atau coint ditoss sekaligus 10 kali, 100 kali, 1000 kali akan terlihat oleh kita bahwa hasil tossan itu adalah kedua mata uang itu akan terbuka dengan 2 gambar (mm) atau terbuka dengan gambar mata uang pertama dan angka mata uang kedua (mb), terbuka dengan angka mata uang pertama dan gambar mata uang kedua (bm) atau kedua mata uang tersebut terbuka dengan kedua-duanya angka (bb).

Tossan 10 kali, 100 kali, 1000 kali kita sebut dengan populasi sedangkan m atau b dan mm, mb, bm atau bb disebut tidak sampel dan rumusnya disebut ruang sampel.

Berdasarkan contoh-contoh di atas didapat:

Sampel ialah sebagian dari populasi yang mempunyai sifat-sifat atau ciri-ciri yang sama dengan sifat-sifat atau ciri-ciri dari populasi.

Banyak titik sampel

1. Bila satu mata uang ditoss didapat S = {m,b},
   S = ruang sampel.

   Bila dua mata uang ditoss didapat S = {mm,mb,bm,bb}.

   Cara menentukan banyak titik sampel dari dua mata uang ialah:

II \ I	m	b
m	mm	mb
b	bm	bb

Cara lain: Menentukan titik sampel dari 1,2,3,... n mata uang adalah:

Mata Uang ke V	Mata Uang ke IV	Mata Uang ke III	Mata Uang ke II	Mata Uang ke I
m	m	m	m	m
m	m	m	m	b
m	m	m	b	m
m	m	m	b	b
m	m	b	m	m
m	m	b	m	b
m	m	b	b	m
m	b	b	b	b
m	b	m	m	m
:	:	:	:	:

Bila kita teruskan akan didapat:

1 mata uang ditoss $2^1 = 2$ titik sampel:{m,b}

2 mata uang ditoss $2^2 = 4$ titik sampel:{mm,mb,bm,bb}

3 mata uang ditoss $2^3 = 8$ titik sampel:{mmm,mmb,...}

4 mata uang ditoss $2^4 = 16$ titik sampel:{mmmm,mmmb,...}

5 mata uang ditoss $2^5 = 32$ titik sampel:{mmmmm,mmmmb,...}

Jadi n buah mata uang ditoss didapat 2^n buah titik sampel, dimana 2 adalah menunjukkan banyaknya peluang mata uang di toss sedangkan n (pangkat) adalah menunjukkan banyaknya mata uang yang ditoss.

2. Bila satu buah dadu ditoss didapat ruang sampel S dengan 6 buah titik sampel yaitu dadu terbuka dengan mata 1,mata 2, mata 3, mata 4,mata 5 atau mata 6 atau Hp = {1,2,3,4,5,6}. Untuk menentukan banyaknya titik sampel bila dua dadu ditoss ialah sebagai berikut:

- Secara sistimatis, Hp:{11,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25, 26,31,32,33,34,35,41,42,43,44,45, 46,51,52,53,54,55,56,61,62,63,64, 65,66}.

atau

- Secara tabel seperti berikut:

Dadu X \ Dadu Y	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Jadi bila dua dadu X dan dadu Y ditoss bersama-sama satu kali akan didapat titik sampel sebanyak 36 buah.

Sama halnya dengan mata uang ditoss maka bila dadu ditoss didapat:

1 buah dadu ditoss didapat banyak titik sampel 6 buah = 6^1 buah.

2 buah dadu ditoss didapat banyak titik sampel 36 buah= 6^2 buah.

3 buah dadu ditoss didapat banyak titik sampel 216 buah = 6^3 buah.

Bila n buah dadu ditoss didapat 6^n buah titik sampel.

Contoh-contoh soal:

Contoh 1. Tiga mata uang ditoss bersama-sama satu kali. Tentukanlah probabilitas mata uang itu terbuka dengan dua muka dan probabilitas terbuka dengan 1 muka. Apakah kedua kejadian itu lepas ?

Jawab:

Diketahui: tiga mata uang ditoss ersama-sama.

A = kejadian mata uang terbuka dengan 2 muka (2m)

B = kejadian mata uang terbuka dengan 1 muka (1m).

Ditanya: a. P(A)

b. P(B)

c. A dan B dua kejadian lepas.

Penyelesaian:

U = {mmm,mmb,mbm,mbb,bmm,bmb,bbm,bbb}

A = {mmb,mbm,bmm}

B = {mbb,bmb,bbm}

a). $P(A) = \frac{3}{8}$

b). $P(B) = \frac{3}{8}$.

A U B = {mmb,mbm,bmm,mbb,bmb,bbm}

$P(A \cup B) = \frac{6}{8}$

$P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Jadi kejadian A dan B dua kejadian yag saling lepas.

Contoh 2. Dari sebuah desa yang berpenduduk 50.000 orang diambil/dikumpulkan 1000 kepala keluarga yang beranak 4. Berapa kepala keluarga yang beranak dua laki-laki ?

Jawab:

Diketahui: Jumlah penduduk 50.000 orang, diantaranya 1000 kepala keluarga yang beranak 4, disebut kejadian A.

Kepala keluarga beranak 2 laki-laki disebut kejadian B.

Ditanya: Jumlah keluarga beranak 2 laki-laki ?

Penyelesaian:

A = {LLLL,LLLP,LLPL,LLPP,LPLL,LPLP,LPPL,LPPP,PLLL,PLLP, PLPL,PLPP,PPLL,PPLP,PPPL,PPPP}

B = {LLPP,LPLP,LPPL,PLLP,PLPL,PPLL}

$P(B) = \frac{6}{16} \longrightarrow P(B) = \frac{3}{8}$.

Jadi banyak keluarga beranak 4 yang beranak 2 laki-laki = $\frac{3}{8}$. 1000 KK = 375 Kepala Keluarga.

Contoh 3. ....

Contoh 3. Dua buah dadu X dan Y ditoss bersama-sama satu kali. Bila kejadian A adalah jumlah mata dadu paling kecil 7. Kejadian B adalah ada dadu terbuka dengan mata 5.

Tentukanlah:

a. P(A) e. P(A - B)

b. P(B) f. P(B - A)

c. $P(A^C)$ g. P(A U B)

d. $P(B^C)$ h. $P(A \cap B)$.

Jawab:

Diketahui: dua dadu X dan dadu Y ditoss sekaligus bersama-sama.

A adalah kejadian jumlah mata dadu dari 7 keatas.

B adalah kejadian ada dadu terbuka dengan mata dadu 5.

Ditanya: a. P(A) e. P(A - B)

b. P(B) f. (P(B - A)

c. $P(A^C)$ g. P(A U B)

d. $P(B^C)$ h. $P(A \cap B)$.

i. Apakah kejadian A dan B dua kejadian lepas.

Penyelesaian:

Ruang sampel S adalah:

Dadu X \ Dadu Y	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Bila kejadian A dinyatakan dengan variabel X, maka:

$X : \{7,8,9,10,11,12\}$

$A = \{16,25,34,43,52,61,26,35,44,53,62,36,45,54,63,46,55,64,$
$56,65,66\}$

$B = \{15,25,35,45,55,65,51,52,53,54,56\}$

$A^C = \{11,12,13,14,15,21,22,23,24,31,32,33,41,42,51\}$

$B^C = \{11,12,13,14,16,21,22,23,24,26,31,32,33,34,36,41,42,43,$
$44,46,61,62,63,64,66\}$

$A - B = \{16,26,36,46,66,34,44,64,43,63,62,61\}$

$B - A = \{15,51\}$

$A \cup B = \{15,16,25,26,34,35,36,43,44,45,46,51,52,53,54,55,$
$56,61,62,63,64,65,66\}$

$A \cap B = \{25,35,45,55,65,52,53,54,56\}$

a. $P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

b. $P(B) = \frac{11}{36}$

c. $P(A^C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ atau $P(A^C) + P(A) = 1 \longrightarrow$

$P(A^C) = 1 - P(A)$

$= \frac{36}{36} - \frac{21}{36}$

$= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$

d. $P(B^C) = 1 - P(B)$ $\qquad P(B^C) = \frac{36}{36} - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}.$

e. $P(A - B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$

f. $P(B - A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$

g. $P(A \cup B) = \frac{23}{36}.$

h. $P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$

i. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{21}{36} + \frac{11}{36} - \frac{9}{36}$

$= \frac{23}{36}.$

$P(A) + P(B) = \frac{21}{36} + \frac{11}{36}$

$= \frac{33}{36}.$

Jadi $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$.

Kejadian A dan kejadian B dua kejadian yang tidak lepas.

Soal-Soal:

1. Lima mata uang ditoss bersama-sama 1 kali; A adalah kejadian mata uang terbuka dengan paling kurang 2 dengan muka (m) dan B adalah kejadian mata uang terbuka paling banyak 1 belakang (b).

   Ditanyakan:

   a. P(A)

   b. P(B)

   c. P(A - B)

   d. P(A U B)

   e. P(B - A).

   f. P(A ∩ B).

2. Dari catatan Posyandu suatu daerah tercatat 50 keluarga beranak 4 orang. Bila A adalah kejadian banyak keluarga yang beranak paling banyak 2 laki-laki dan B adalah kejadian banyak keluarga paling kurang 1 perempuan.

   Ditanyakan:

   a. P(A)

   b. P(B)

   c. P(A U B)

   d. P(B ∩ A)

   e. P(A - B).

3. Dua dadu ditoss bersama-sama satu kali, X adalah kejadian dadu terbuka dengan jumlah mata dadu tak lebih dari 7 dan Y adalah kejadian dadu terbuka dengan ada mata 4. Apakah kejadian X dan Y dua kejadian lepas !

4. Dari satu pak kartu bridge diketahui bahwa kejadian A terambil kartu merah dan kejadian B terambil kartu tidak petak. Apakah kejadian A dan B dua kejadian lepas !

5. Seorang mahasiswa bernama Namri akan pergi kuliah dan cara dia pergi kuliah itu ada dengan 4 alat transportasi yaitu honda (H), mobil (M), sepeda (S) dan jalan kaki (K). Dia pergi kuliah itu harus singgah di rumah temannya untuk bersama-sama pergi kuliah. Berapa probabilitas NAMRI satu kali memakai mobil (M) !.

BAB III. KOMBINATORIK

Dalam menentukan banyak peluang dari suatu kejadian, pengetahuan mengenai kombinatorik sangat membantu sekali. Oleh karenanya pengetahuan kombinatorik perlu kita pelajari dengan baik. Kombinatorik ialah tumbuhnya bermacam pengertian atau susunan akibat letak dari objek-objek yang disusun, urutan objek membedakan susunan yang satu dari yang lain atau urutan objek tidak membedakan susunan yang atau pengertian yang satu dari yang lain. Dalam hal pertama disebut permutasi sedangkan dalam hal kedua disebut kombinasi.

A.1. Permutasi

Untuk lebih jelasnya apa yang dimaksud dengan permutasi itu di bawah ini diberikan contoh-contoh:

Bendera adalah merupakan lambang dari suatu negara. Bila kita ambil saja umpamanya bendera Indonesia adalah terdiri dari warna merah sebelah atas warna putih sebelah bawah. Apabila letak warnanya dipertukarkan menjadi putih di atas merah dibawah akan sangat jauh beda pengertiannya karena bendera putih di atas merah dibawah adalah melambangkan bendera bangsa Polandia. Begitu juga dari huruf kata N,I,R,A,M dapat kita bentuk kata-kata lain seperti:

1.	NIRMA	6.	MANRI	11.	MIARN
2.	NIRAM	7.	MARNI	12.	MIANR
3.	NIMAR	8.	MARIN	13.	.....
4.	NRIMA	9.	MIRNA		
5.	NRIAM	10.	MIRAN		

Dengan demikian dapat kita lihat bahwa letak-letak huruf N, I, R, M atau A akan dapat dibentuk kata-kata yang banyak dengan arti atau pengertian yang berbeda.

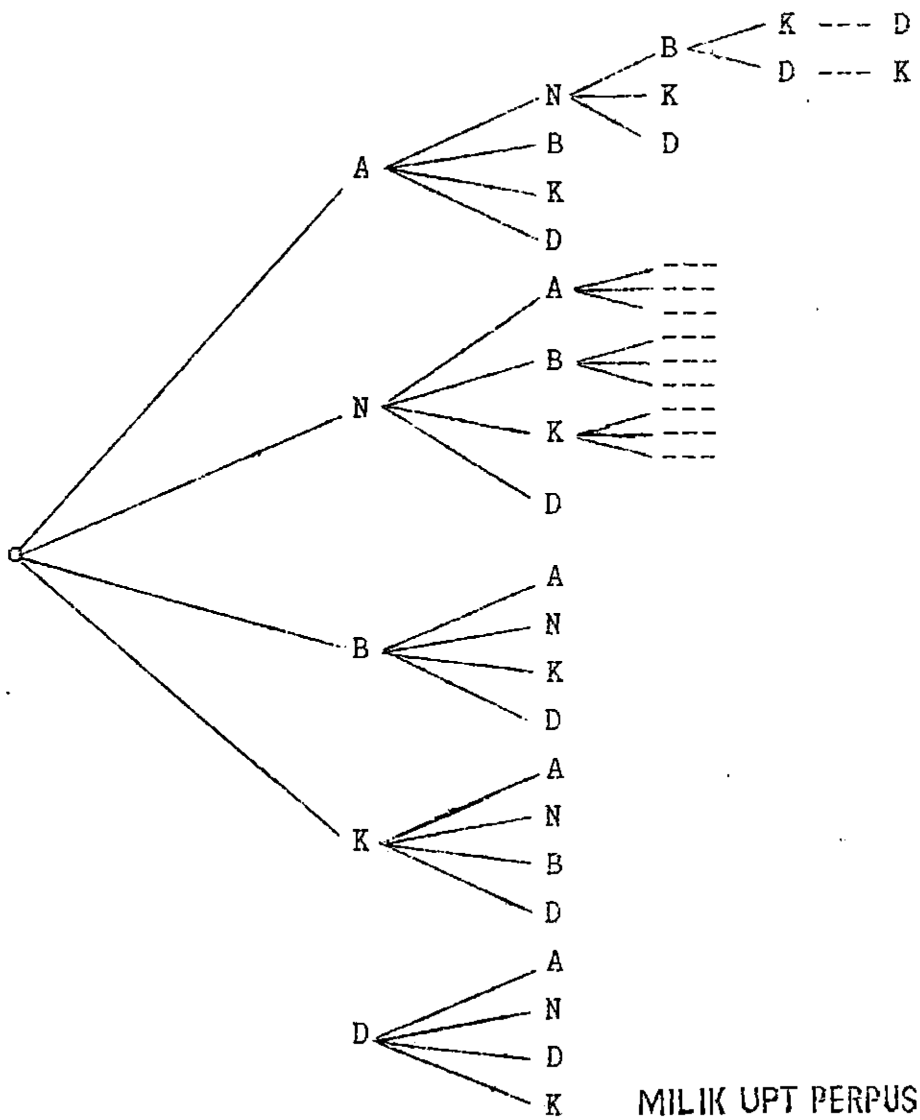
Jadi permutasi ialah: Susunan objek-objek yang letak atau urutan objek membedakan susunan atau pengertian yang berbeda yang satu dengan yang lain.

Menentukan banyak susunan atau permutasi dari n objek dapat kita lakukan sebagai berikut:

1. Dengan diagram cabang
2. Dengan diagram kotak.

Diagram Cabang

Andaikan kita menyuruh duduk, Amin (A), Nani (N), Badu (B), dan Didi (D) pada sederet kursi, banyak cara duduk mereka dapat dilihat sebagai berikut:



Banyaknya cara duduk dari 5 orang itu adalah 5x4x3x2x1 cara. Analog kalau yang kita suruh duduk 6 orang didapat banyak cara duduk mereka adalah 6x5x4x3x2x1 cara.
Dan begitu pula kalau n orang yang kita suruh duduk, banyak cara duduk mereka adalah n(n - 1)(n - 2).......... 1
Dari bentuk perkalian itu dapat kita lihat perkalian bilangan tersebut adalah perkalian bilangan dengan urut normal sampai 1 dan dinotasikan dengan ! (= faktorial).

Jadi: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

$n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$

Banyak permutasi dengan n objek:

$$P_n = n!$$

Diagram Kotak

Sesuai dengan fungsi tempat dari angka-angka, ada tempat satuan, puluhan, ratusan, ribuan dan seterusnya, yang dapat digambarkan sebagai berikut:

rib	rat	pul	sat

Andaikan angka yang menempati tempat-tempat itu adalah 2, 3, 4, 5. Tempat ribuan dapat ditempati oleh salah satu dari keempat angka itu. Karena tempat ribuan telah ditempai oleh salah satu angka, untuk menempati tempat ratusan tinggal lagi 3 angka.
Tempat puluhan hanya akan ditempati oleh 2 angka sebab satu angka telah menempati ratusan, untuk menempati satuan tentu hanya satu angka lagi.
Secara kotak:

rib	rat	pul	sat
4	3	2	1

Ini berarti banyak bilangan yang dapat dibuat dari angka 2, 3, 4, 5 ada sebanyak $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4\,!$

atau permutasi dengan 4 angka ialah:

$$P_4 = 4.3.2.1$$

$$P_4 = 4\,!.$$

Contoh-contoh soal:

Contoh 1. Berapa buah kode yang dapat dibuat dari bendera merah, kuning, putih, hijau, biru, nila ?

Penyelesaian:

Diketahui: Banyak bendera ada 6 buah.

Ditanya : Berapa buah kode yang dapat dibuat.

Jawab: : Karena ada 6 buah bendera banyak kode yang dapat dibuat adalah:

$$P_6 = 6\,!$$
$$= 6.5.4.3.2.1$$
$$= 720 \text{ buah.}$$

Jadi banyak kode ialah sebanyak 720 buah.

Contoh 2. Berapa cara duduk 5 orang mahasiswa S1 pada deretan 5 buah kursi ?

Penyelesaian:

Diketahui: Banyak objek 5 buah.

Ditanya : Berapa cara duduknya.

Jawab : Banyak cara duduk:

$$P_5 = 5\,! = 5.4.3.2.1$$
$$= 120 \text{ cara.}$$

Contoh 3. Berapa cara penyusunan 4 vas bunga yang berbeda pada teras, susunan mana itu ?

Penyelesaian:

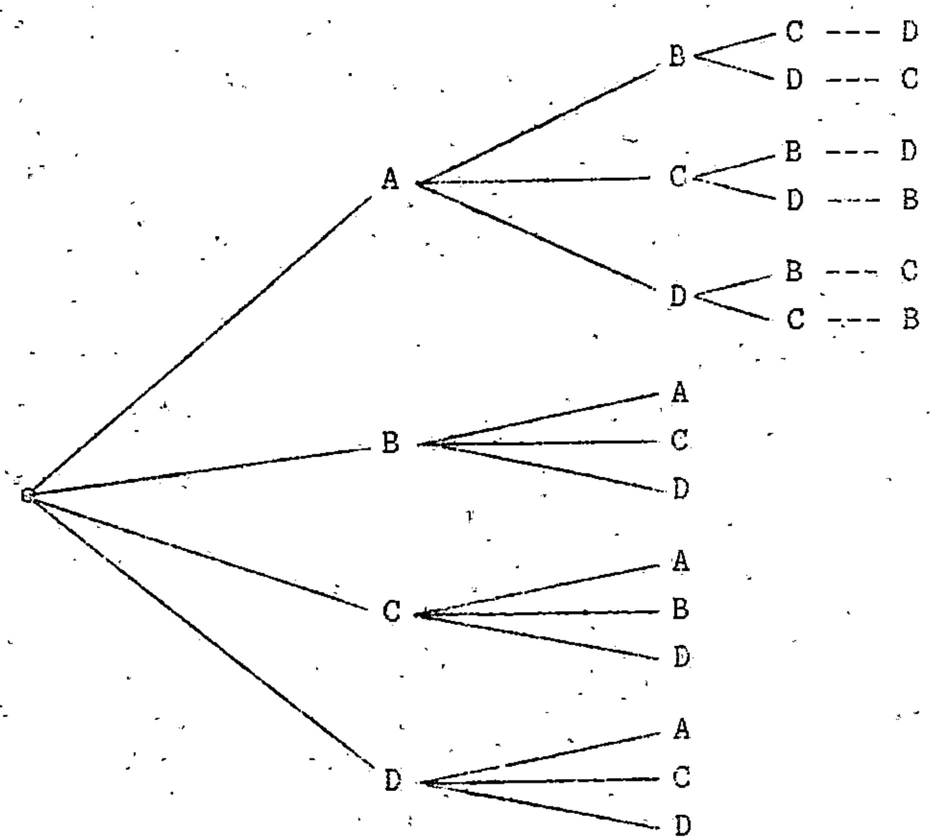
Diketahui: Vas bunga 4 buah.

Ditanya : Berapa cara penyusunan.

Jawab : banyak permutasi dengan 4 objek adalah:

$$P_4 = 4\,! = 4.3.2.1$$
$$= 24 \text{ buah.}$$

Banyak susunan itu dapat dilakukan dengan diagram cabang. Vas-vas bunga itu adalah: A,B,C,D.



yaitu:			
ABCD	BACD	CABD	DACB
ABDC	BADC	CADB	DABC
ACBD	BCAD	CBAD	DCBA
ACDB	BCDA	CBDA	DCAB
ADBC	BDAC	CDBA	DBAC
ADCB	BDCA	CDAB	DBCA

Dari contoh-contoh di atas dapat kita ambil kesimpulan bahwa keuntungan dari pengetahuan permutasi ini ialah:

a. dpat menghindarkan cara hidup spekulatif karena dengan diketahui bahwa kemungkinan keberuntungan secara spekulatif sangat kecil. Contoh kalau kita beli satu lembar lotre, keberuntungan yang akan kita peroleh hanya sepersekian atau sangat kecil.

b. Dengan diketahui banyaknya permutasi yang dapat dibuat dalam kehidupan sehari-hari akan dapat mengatasi kebosanan.

c. Memperkaya imaginasi dan kreativitas seseorang.

A.2. Permutasi Dengan Objek Yang Disusun Kurang Dari Objek Yang Diketahui

Permutasi dengan jumlah objek yang kurang dari jumlah objek yang diketahuiatau dengan kata lain banyak objek yang disusun tidak sebanyak objek yang diketahui dapat diikuti contoh-contoh berikut:

Contoh-contoh:

1. Berapa banyak cara duduk 4 orang pada tempat duduk yang hanya memuat 3 orang ?
2. Berapa banyak cara penyusunan 8 buku pada rak yang memuat paling banyak 6 buah buku ?
3. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk dari angka 2,3,4,5,6,7,8 di bawah 1000 ?
4. Berapa banyak kode yang dapat dibuat dari bendera-bendera merah, kuning, hijau, biru, putih, hitam jika kode-kode itu terdiri dari 5 bendera, 4 bendera atau 3 bendera ?
5. Berapa buah nama yang dapat kita buat dari huruf S, A, R, I, F jika semua nama itu hanya terdiri dari 4 huruf saja ?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas perlu kita lihat uraian di bawah ini. Dari pertanyaan di atas di dapat bahwa:

1. Banyak nama yang dapat kita buat dari huruf-huruf S,A, R,I,F jika nama-nama itu terdiri dari ke 5 hurufnya ialah: $P_5 = 5\,! = 5.4.3.2.1 = 120$ buah nama.
2. Banyak nama yang dapat dibuat 4 dari 5 huruf itu ialah 120 buah nama juga. Hal ini dapat kita jelaskan dengan diagram cabang yaitu dengan membuang huruf terakhir. Contoh: SARI dari SARIF, ISRA dari ISRAF.
3. Banyak nama yang dapat dibuat 3 dari 5 huruf itu ialah dengan membuang 2 huruf terakhir dari 5 huruf.
   Contoh: SAF dari SAFIR dan seterusnya.

Begitu juga kalau kita bentuk bilangan dari angka-angka 2,3,4,5,6,7,8, dibawah bilangan 1000. bilangan itu adalah:

1. 0 - 10 ——> bilangan terdiri atas 1 angka
2. 10 - 100 ——> bilangan terdiri atas 2 angka
3. 100 - 1000 ——> bilangan terdiri atas 3 angka.

Selanjutnya kita lihat lagi pembentukan nama-nama dari 5 huruf tadi.

Nama terdiri dari 5 huruf didapat 120 nama.

Banyak nama terdiri 4 huruf dari 5 huruf didapat 120 buah nama.

Banyak nama terdiri 3 huruf dari 5 huruf didapat 60 buah nama.

Bila kita lambangkan variasi itu dengan P maka:

$${}_5P_4 = 120 \qquad\qquad P_5 = 120$$

$${}_5P_3 = 60 \qquad\qquad P_5 = 120$$

Jadi: ${}_5P_4 : P_5 = 120 : 120 \longrightarrow 120\ {}_5P_4 = 120\ P_5$

${}_5P_3 : P_5 = 60 : 120 \longrightarrow 120\ {}_5P_3 = 60\ P_5$

$${}_5P_4 = \frac{P_5}{1} \longrightarrow {}_5P_4 = \frac{5\,!}{(5-4)}$$

$${}_5P_3 = \frac{P_5}{2} \longrightarrow {}_5P_3 = \frac{5\,!}{(5-3)}$$

maka $${}_7P_5 = \frac{P_7}{2!} \longrightarrow {}_7P_5 = \frac{7\,!}{(7-5)!}$$

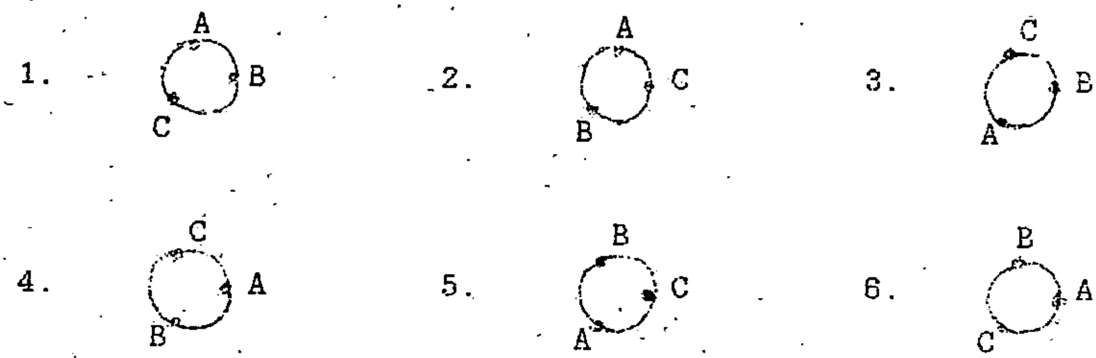
Secara umum $_nP_m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, dimana $m \leq n$

atau

$$_nP_m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

A.3. Permutasi dengan Objek Melingkar

Permutasi dengan objek melingkar ialah susunan-susunan yang dibentuk dengan susunan objek secara melingkar misalnya duduk mengelilingi suatu meja, seperti ada empat orang A, B, C, D akan duduk mengelilingi meja bundar. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat contoh sebagai berikut: Berapa banyak cara duduk tiga orang mahasiswa A, B, C mengelilingi meja bundar. Pertanyaan ini dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut:



Kalau kita perhatikan keenam cara duduk seperti yang kita lihat di atas, ternyata bahwa cara 1 sama dengan cara 4 dan cara 5 karena B duduk sebelah kiri A dan C sebelah kanan A, sedangkan cara 2 sama denan cara 3 dan cara 6 karena B duduk sebelah kanan A dan C sebelah kiri A.

Jadi cara duduk mereka hanya dua cara saja. Dengan demikian cara duduk mereka secara mengelilingi suatu meja, A dijadikan patokan, sedangkan B dan C dapat bermutasi.

Selanjutnya dapat diambil kesimpulan bahwa bila n objek disusun secara melingkar didapat banyak susunan $(n - 1)!$, karena 1 objek dijadikan patokan.

jadi permutasi dengan n objek secara melingkar:

$P_n(n = \text{melingkar}) = (n - 1)!$.

A.4. Permutasi dengan Beberapa Objek Sama

Untuk menjelaskan hal ini kita perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh 1. Berapa banyak kata yang dapat dibuat dengan huruf-huruf I, N, I.

Penyelesaian:

Bila kita anggap huruf I yang pertama tidak sama dengan huruf I yang kedua didapat permutasi dengan 3 objek adalah 6 cara yaitu:

1. INI	2. IIN	3. NII
4. INI	5. IIN	6. NII

Jadi permutasi dengan objek I, N, I dua objek I sama didapat 3 permutasi yaitu INI, IIN, NII.

Contoh 2. Berapa kata yang dapat dibuat dengan huruf-huruf M.A.S.A.

Penyelesaian:

Kata-kata itu ialah:

1. MASA	5. AASM	9. AMSA
2. MAAS	6. ASMA	10. SAAM
3. MSAA	7. ASAM	11. SAMA
4. AASM	8. AMAS	12. SMAA

Jadi permutasi dengan huruf-huruf M.A.S.A hanya 12 kata.

dari contoh 1 dan 2 di atas:

Banyak Objek	Permutasi	Permutasi dengan Dua Objek Sama
3	6	3
4	24	12
5	120	60
⋮	⋮	⋮

Berdasarkan hal di atas dapat disimpulkan bahwa permutasi dengan 2 objek sama.

$$P_3 \text{ (2 objek sama)} = \frac{P_3}{2} \text{ , 2 huruf I sama}$$

$$P_4 \text{ (2 objek sama)} = \frac{P_4}{2} \text{ , 2 huruf A sama}$$

atau

P_4 (2 objek sama) $= \frac{P_4}{1!.2!.1!}$, 2 huruf A, 1 satu huruf S dan 1 huruf M.

Dengan contoh-contoh yang lain dapat diambil kesimpulan:

$P_n(p,q,r \text{ sama}) = \frac{n!}{p!\ q!\ r!}$, dimana $p + q + r = n$

Contoh-contoh soal:

Contoh 1. Berapa banyak cara susunan kata dapat dibuat dari huruf-huruf A,B,C,D,E,F kalau kata-kata itu paling banyak terdiri dari 4 huruf, 3 huruf, 2 huruf dan 1 huruf ?

Penyelesaian:

Diketahui 6 huruf.

Kata-kata terdiri dari paling banyak 4 huruf, berarti kata-kata itu terdiri dari 4 huruf, 3 huruf, 2 huruf dan 1 huruf.

Jadi dari 6 huruf yang diketahui dapat dibentuk:

a. Kata terdiri dari 4 huruf:

$${}_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} \text{ buah} = \frac{6.5.4.3.2!}{2!} \text{ buah}$$
$$= 360 \text{ buah.}$$

b. Kata terdiri dari 3 huruf:

$${}_6P_3 = \frac{6!}{(6-3)!} \text{ buah} = \frac{6.5.4.3!}{3!} \text{ buah}$$
$$= 120 \text{ buah.}$$

c. Kata terdiri dari 2 huruf:

$${}_6P_2 = \frac{6!}{(6-2)!} \text{ buah} = \frac{6.5.4!}{4!} \text{ buah}$$
$$= 30 \text{ buah.}$$

d. Kata....

d. Kata terdiri dari 1 huruf:

$$_6P_1 = \frac{6!}{(6-1)!} \text{ buah} = \frac{6.5!}{1!} \text{ buah}$$
$$= 6 \text{ buah.}$$

Jadi banyak kata = (360+120+30+6)buah = 516 buah

Contoh 2. Diketahui 5 orang bangsa Inggris, 6 orang bangsa Indonesia dan 4 orang bangsa Amerika akan mengadakan sidang. Berapa cara mereka duduk jika:

a. Mereka duduk pada bangku panjang tanpa memperhatikan bangsa.

b. Mereka duduk pada meja bundar tanpa memperhatikan bangsa.

c. Mereka duduk pada bangku panjang tetapi tidak terpisah dari bangsanya.

d. Mereka duduk pada meja bundar tapi tak terpisah dari bangsanya.

Penyelesian:

Diketahui: Jumlah 15 orang. Banyak bangsa 3 macam.

Duduk pada bangku panjang tanpa memperhatikan bangsa. Duduk pada meja bundar tanpa memperhatikan bangsa.

Duduk pada bangku atau meja bundar tak terpisah dari bangsa.

Ditanya: a. Banyak cara duduk pada bangku panjang tanpa memperhatikan bangsa.

b. Idem a duduk mengelilingi meja bundar.

c. Banyak cara duduk pada bangku panjang, tak terpisah dari bangsa.

d. Idem c duduk mengelilingi meja bundar.

Jawab: a. Banyak cara duduk pada bangku panjang tanpa memperhatikan bangsa berarti mereka duduk sembarangan adalah:

$$P_{15} = 15! = 15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.3.2.1 \text{ cara}$$
$$= 1307674300000 \text{ cara.}$$

b. Banyak cara duduk pada meja bundar adalah:

$P(15 - 1)! = 14! = 14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.2.1$ cara

$= 87178291000$ cara.

c. mereka duduk tak terpisah dari bangsanya berarti 3 bangsa itu dapat bermutasi yaitu $3! = 6$ cara setiap bangsa duduk tak terpisah dari bangsanya dapat pula bermutasi yaitu:

5 bangsa Inggris dapat duduk P_5 cara $= 5!$

$= 5.4.3.2.1$ cara $= 120$ cara.

6 bangsa Indonesia dapat duduk P_6 cara $= 6!$

$= 6.5.4.3.2.1$ cara $= 720$ cara.

4 bangsa Amerika dapat duduk P_4 cara $= 4!$

$= 4.3.2.1$ cara $= 24$ cara.

Jadi banyak cara duduk $= 6 \times 120 \times 720 \times 24$ cara

$= 12.441.600$ cara.

d. Mereka duduk mengelilingi meja bundar berarti satu bangsa jadi patokan, dua bangsa dapat dipermutasikan yaitu $2! = 2$ cara, sedangkan yang lain idem dengan c. Banyak cara duduk ialah:

$2 \times 120 \times 720 \times 24$ cara

$= 4.147.200$ cara.

Contoh 3. Berapa buah bilangan yang dapat dibuat dari angka-angka 2,3,4,5,6,7,8, bilangan di bawah 1000 kalau angka boleh berulang ?

Penyelesaian:

Diketahui: Angka 2,3,4,5,6,7,8 bilangan di bawah 1000 angka boleh berulang.

Ditanya : Banyak bilangan.

Jawab: a. Bilangan di bawah 1000 jika angka tidak berulang yaitu: 0 - 10 $\longrightarrow$ bilangan terdiri dari 1 angka, banyak bilangan adalah:

$${}_7P_1 = \frac{7!}{(7-1)!} = \frac{7.6!}{6!} = 7 \text{ buah}$$

10 - 100 ⟶ bilangan terdiri dari dua angka, banyak bilangan ialah: ${}_7P_2 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7.6.5!}{5!}$ $= 42$ buah.

100 - 1000 ⟶ bilangan terdiri dari tiga angka, banyak bilangan adalah: ${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = 210$ buah.

Banyak bilangan = 7 + 42 + 210 bilangan = 259 bilangan.

b. Banyak bilangan kalau angka berulang, yitu:

10 - 100 bilangan dengan angka berulang = 7 buah

100 - 1000 bilangan dengan 2 angka berulang, yaitu:

2,2,3 ; 2,2,4 ; 2,2,5 ; 2,2,6 ; 2,2,7 ; 2,2,8

3,3,2 ; 3,3,4 ; 3,3,5 ; 3,3,6 ; 3,3,7 ; 3,3,8

:
:

8,8,2 ; 8,8,3 ; 8,8,4 ; 8,8,5 ; 8,8,6 ; 8,8,7

dengan masing-masingnya terdapat 3 bilangan.

Jadi banyak bilangan 7.6.3 buah = 126 buah.

Bilangan dengan 3 angka berulang = 7 buah.

Banyak bilangan (7 + 126 + 7) buah = 140 buah.

Jadi banyak bilangan dapat dientuk:

(259 + 140) buah = 399 buah.

Contoh 4. Berapa kata yang dapat dibuat dengan huruf:

M.I.S.S.I.S.S.I.P.P.I

n = 11

Jawab: : p = 1 , q = 4 , r = 4 , s = 2

p + q + r + s = 1 + 4 + 4 + 2 = 11

Banyak kata yang dapat dibentuk:

$$\frac{11!}{1!\ 4!\ 4!\ 2!} = \frac{11.10.9.\cancel{8}.7.\cancel{2}.5.\cancel{4!}}{1!\ \cancel{4!}\ \cancel{4!}\ \cancel{2!}} = 11.10.9.7.5$$

$$= 346500 \text{ kata.}$$

Soal-Soal:

1. Dari tujuh bendera merah, kuning, biru, hijau, putih, hitam, dibuat kode; Berapa buah kode dapat dibuat bila untuk satu kode paling kurang terdiri dari 5 bendera ?

2. Berapa cara pembentukan panitia yang terdiri dari Ketua, wakil Ketua, wakil Sekretaris dan Bendahara dari 10 orang mahasiswa ?

3. Berapa buah nama dapat dibuat dari huruf-huruf M,E,D,R,A jika nama itu ada yang terdiri paling banyak dua huruf yang diulang ?

4. Dari sekumpulan buku yang terdiri dari 5 buku Bahasa Inggris, 4 buku Matematika, 6 buku Biologi, buku-buku dengan judul berbeda-beda akan disusun pada rak.
   Berapa banyak cara menyusun buku itu pada rak jika:
   a. tanpa memperhatikan jenis buku,
   b. dengan susunan tidak terpisah dari jenisnya.

B. KOMBINASI

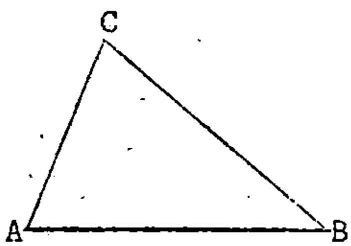
Seperti telah kita ketahui bahwa pada permutasi urutan atau susunan objek-objek membedakan susunan atau pengertian yang berbeda satu sama lain. Tetapi ada susunan yang urutan objek tidak membedakan pengertian yang satu dari yang lain. Susunan yang demikian kita sebut Kombinasi.

Pengertian kombinasi dapat kita ilustrasikan sebagai berikut:

1. Pada suatu himpunan letak objeknya tidak mempengaruhi atau tidak membedakan himpunan yang satu dengan himpunan yang lain.

   Contoh: A = {1,2,3,4,5,6} akan sama dengan
   B = {2,1,3,5,4,5} atau sama dengan
   C = {5,6,3,1,2,4} dan seterusnya.

2. Dalam geometri segitiga ABC sama dengan segitiga ACB, sama dengan segitiga CBA.



$\triangle ABC = \triangle ACB = \triangle BAC = \triangle BCA = \triangle CAB = \triangle CBA$.

Jadi urutan A,B,C tidak membedakan segitiga-segitiga itu.

3. Siswa kelas dua, tidak ada pengaruh atau membedakan kelas dua itu walaupun tempat duduk siswa dipertukarkan. Jadi tempat duduk atau daftar namanya dapat dirobah-robah.

Berdasarkan ketiga contoh di atas dapat diambil kesimpulan bahwa urutan objek tidak mempengaruhi atau tidak membedakan pengertian yang satu dari yang lainnya, atau dengan kata lain kombinasi dengan n buah objek tetap satu.

Kombinasi m objek dari n objek.

Kombinasi dengan objek yang banyaknya sama dengan objek yang diketahui tidak menjadi masalah. Tetapi kalau jumlah objek yang dikombinasikan kurang dari objek yang diketahui akan lain halnya, untuk itu kita perhatikan contoh-contoh di bawah ini:

Contoh:

1. Berapa banyak himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan A = {1,2,3,4,5}.

   Jawab: Himpunan bagian dari A didapat:

   a. Himpunan bagian yang terdiri dari 4 unsur, yaitu:

      A_1 = {1,2,3,4} A_2 = {1,2,3,5} A_3 = {1,2,4,5}

      A_4 = {1,3,4,5} A_5 = {2,3,4,5}.

      Didapatkan 5 himpunan bagian.

   b. Himpunan bagian dengan 3 anggota yaitu:

      A_6 = {1,2,3} A_7 = {1,2,4} A_8 = {1,2,5}

      A_9 = {1,3,4} A_{10} = {1,3,5} A_{11} = {1,4,5}

      A_{12} = {2,3,4} A_{13} = {2,3,5} A_{14} = {2,4,5}

      A_{15} = {3,3,4}.

      Didapat 10 buah himpunan bagian.

   c. Himpunan bagian dengan 2 anggota yaitu:

      A_{16} = {1,2} A_{17} = {1,3} A_{18} = {1,4} A_{19} = {1,5}

      A_{20} = {2,3} A_{21} = {2,4} A_{22} = {2,5} A_{23} = {3,4}

      A_{24} = {3,5} A_{25} = {4,5}.

      Jadi ada 10 buah himpunan bagian.

   d. Himpunan bagian dengan 1 anggota yaitu:

      A_{26} = {1} A_{27} = {2} A_{28} = {4} A_{29} = {4} A_{30} = {5}.

      Ada pula 5 buah himpunan bagian.

Dari hal di atas dapat kita lihat bahwa pembentukan himpunan bagian dengan 4 anggota dari 5 anggota, 3 anggota dari 5 anggota, 2 anggota dari 5 anggota dan 1 anggota dari 5 anggota. Selanjutnya kombinasi 4 sama 5 dinotasikan dengan $_5C_4$, kombinasi 3 sama 4 dinotasikan dengan $_4C_3$, dan seterusnya, atau kombinasi 4 sama 5 dapat pula dinotasikan dengan $\binom{5}{4}$.

Selanjutnya kita bandingkan banyak permutasi dengan banyak kombinasi. Untuk itu perhatikan tabel di bawah ini.

Banyak objek	Banyak objek yang disusun	Kombinasi	Permutasi
5	5	${}_5C_5 = 1$	${}_5P_5 = 120$
5	4	${}_5C_4 = 5$	${}_5P_4 = 120$
5	3	${}_5C_3 = 10$	${}_5P_3 = 60$
5	2	${}_5C_2 = 10$	${}_5P_2 = 20$

Dari contoh didapat:

$${}_5C_5 : {}_5P_5 = 1 : 120 \longrightarrow {}_5C_5 = \frac{{}_5P_5}{120} \longrightarrow {}_5C_5 = \frac{{}_5P_5}{120} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow {}_5C_5 = \frac{\frac{5!}{(5-5)!}}{5!}$$

$${}_5C_4 : {}_5P_4 = 5 : 120 \longrightarrow {}_5C_4 = \frac{{}_5P_4}{120} \longrightarrow {}_5C_4 = \frac{{}_5P_4}{24} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow {}_5C_4 = \frac{\frac{5!}{(5-4)!}}{4!} \longrightarrow {}_5C_4 = \frac{5!}{4!(5-4)!}$$

$${}_5C_3 : {}_5P_3 = 10 : 60 \longrightarrow {}_5C_3 = \frac{10\,{}_5P_3}{60} \longrightarrow {}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{6} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow {}_5C_3 = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!} \longrightarrow {}_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$${}_5C_2 : {}_5P_2 = 10 : 60 \longrightarrow {}_5C_2 = \frac{10\,{}_5P_2}{20} \longrightarrow {}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow {}_5C_2 = \frac{\frac{5!}{(5-2)!}}{2!} \longrightarrow {}_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$$

Dari bentuk-bentuk di atas dapat kita buat suatu kesimpulan bahwa banyak kombinasi dari 5 objek yang diketahui yang disusun 4 objek adalah:

$$_5C_4 = \frac{5!}{4!(5-4)!}$$

dan dari 5 objek yang diketahui disusun 3 objek, didapat:

$$_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

selanjutnya $_7C_5$ berarti:

$$_7C_5 = \frac{7!}{5!(7-5)!}$$

Secara umum: $$_nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{dimana } m \leq n$$

Jadi berarti bahwa kombinasi m objek dari n buah objek yang diketahui adalah hasil pembagian n faktorial dengan m faktorial kali (n - m) faktorial.

Contoh-contoh soal

1. Berapa buah segitiga yang dapat dibuat dari 5 titik yang diketahui, dan kelima titik tidak kolinesr (segaris) segitiga-segitiga mana itu ?

   Penyelesaian:

   Diketahui: Titik-titik A,B,C,D,E tak segaris.

   Banyak titik yang dilalui segitiga yaitu 3 buah.

   Ditanya: a. Banyak segitiga

   b. Segitiga-segitiga mana itu.

   Jawab: a. Dari lima titik disusun hanya tiga titik untuk setiap segitiga. Banyak segitiga ialah:

   $$_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.3!}{3!.2!} = 10$$

   Jadi banyak segitiga itu hanya 10 buah.

   b. Segitiga-segitiga itu ialah:

   ABC , ABD , ABE , ACD , ACE

   ADE , BCD , BCE , BDE , dan CDE.

2. Berapa banyak group Volley yang dapat dibentuk dengan 9 orang mahasiswa laki-laki.

Penyelesaian:

Diketahui: 9 orang anak laki-laki, banyak group Volley 6 orang.

Ditanya : Banyak group Volley.

Jawab: Karena anggota Volley hanya 6 orang dan jumlah orangnya 9 orang.

Banyak group Volley ialah:

$$_9C_6 = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9.8.7.6!}{6!.3!} = 84$$

Banyak alternatif group Volley adalah: 84 group.

3. Sebuah bak berisi 8 ekor ikan mujair dan 10 ekor ikan mas. Berapakah banyak peluang bila diambil secara random 5 ekor ikan.

Penyelesaian:

Diketahui: Banyak ikan dalam bak 8 ekor mujair dan 10 ekor ikan mas.

Ditanya : Banyak kejadian bila diambil 5 ekor dan kemudian tentukan probabilitasnya.

Jawab: Pengambilan 5 ekor ikan alternatifnya:

a. Kelimanya ikan mujair disebut kejadian A
b. Kelimanya ikan mas disebut kejadian B
c. 4 ikan mujair, 1 ikan mas disebut kejadian C
d. 3 ikan mujair, 2 ikan mas disebut kejadian D
e. 2 ikan mujair, 3 ikan mas disebut kejadian E
f. 1 ikan mujair, 4 ikan mas disebut kejadian F.

Maka kejadian harapan adalah:

a. $A = {}_8C_5 \cdot {}_{10}C_0 = \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot 1 = \frac{8.7.6.5!}{5!.3!} = 56$ kejadian

b. $B = {}_8C_0 \cdot {}_{10}C_5 = 1 \cdot \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5!.5!} = 56$ kejadian

c. $C = {}_8C_4 \cdot {}_{10}C_1 = \frac{8!}{4!.4!} \cdot \frac{10!}{1!.9!} = \frac{8.7.6.5.4!}{4!.4!} \cdot \frac{10.9!}{1!.9!} = 700$ kejadian

d. $D = {}_8C_3 \cdot {}_{10}C_2 = \frac{8!}{3!.5!} \cdot \frac{10!}{2!.8!} = \frac{8.7.6.5!}{3!.5!} \cdot \frac{10.9!}{2!.8!}$ = 2520 kejadian

e. $E = {}_8C_2 \cdot {}_{10}C_3 = \frac{8!}{2!.6!} \cdot \frac{10!}{3!.7!} = \frac{8.7.6!}{2!.6!} \cdot \frac{10.9!}{3!.7!}$ = 3360 kejadian

f. $F = {}_8C_1 \cdot {}_{10}C_4 = \frac{8!}{1!.7!} \cdot \frac{10!}{4!.6!} = 8 . \frac{10.9.8.7.6!}{4!.6!}$ = 1680 kejadian

Kejadian yang dapat terjadi adalah:

$S = {}_{18}C_5 = \frac{18!}{5!.13!} = \frac{18.17.16.15.14.13!}{5!\ 13!}$ = 8568 kejadian

maka $P(A) = \frac{56}{8568}$, $P(B) = \frac{252}{8568}$, $P(C) = \frac{700}{8568}$,

$P(D) = \frac{2520}{8568}$, $P(E) = \frac{3360}{8568}$, $P(F) = \frac{1680}{8568}$,

Kegunaan Kombinasi

A. Dalam Matematika lain

1. Kalau kita perhatikan koefisien-koefisien dari suku 2 pangkat n adalah pemakaian kombinasi.

   Koefisien-koefisien suku 2 pangkat n adalah sebagai berikut di bawah ini:

n = 1		$_1C_0$	$_1C_1$		
n = 2		$_2C_0$	$_2C_1$	$_2C_2$	
n = 3	$_3C_0$	$_3C_1$	$_3C_2$	$_3C_3$	
n = 4	$_4C_0$	$_4C_1$	$_4C_2$	$_4C_3$	$_4C_4$

   =====

   Kalau harga kombinasi itu kita cari didapat bila:

n = 1		1	1		
n = 2		1	2	2	
n = 3	1	1	2	2	
n = 4	1	4	6	4	1

   Dengan demikian suku-suku dari suku dua pangkat n dapat ditentukan sebagai berikut:

   1. Banyak susu-suku adalah n + 1.
   2. Derajat susku-suku sama yaitu berderajat n.
   3. Koefisien-koefisien adalah $_nC_0$, $_nC_1$, $_nC_2$, $\ldots {}_nC_n$.

Jadi hasil dari:

$(a + b)^3 = {}_3C_0 a^{3-0} b^0 + {}_3C_1 a^{3-1} b^1 + {}_3C_2 a^{3-2} b^2 + {}_3C_3 a^{3-3} b^3$

$(a + b)^5 = {}_5C_0 a^{5-0} b^0 + {}_5C_1 a^{5-1} b^1 + {}_5C_2 a^{5-2} b^2 + {}_5C_3 a^{5-3} b^3 + {}_5C_4 a^{5-4} b^4 + {}_5C_5 a^{5-5} b^5.$

$(a+b)^n = {}_nC_0 a^{n-0} b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_{n-1} a^{n-n+1} b^{n-1}$
${}_nC_n{}^{n-n} b^n.$

Jadi: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k$ dan suku-sukunya ${}_nC_k a^{n-k} b^k$

b^k adalah suku ke $k + 1$.

Dari contoh didapat:

1). $(a + b)^5 = \frac{5!}{0!5!} a^{5-0} b^0 + \frac{5!}{1!4!} a^{5-1} b^1 + \frac{5!}{2!3!} a^{5-2} b^2 +$

$\frac{5!}{3!2!} a^{5-3} b^3 + \frac{5!}{4!1!} a^{5-4} b^4 + \frac{5!}{5!0!} a^{5-5} b^5.$

$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$

2). Suku ke-4 dari $(x - 2y)^6$ ialah:

$${}_6C_3 x^{6-3} (-2y)^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} x^3 (-2y)^3 = -8 \frac{6!}{3!3!} x^3 y^3$$

$$= -8 . \frac{6.5.4.3!}{3!3!} x^3 y^3 = -160 x^3 y^3.$$

2. Buktikanlah banyak diagonal dari suatu segi-n adalah:

$$\tfrac{1}{2} n(n - 3).$$

Bukti:

a. Misalkan akan ditentukan diagonal segi-4. Banyak titik segi 4 adalah 4 buah, umpamanya titik-titik A, B, C dan D. Tiap dua titik dapat dihubungkan dengan sebuah garis. Banyak garis penghubung:

$${}_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!2!} = 6 \text{ buah}$$

Banyak garis sisi adalah 4 buah.

Banyak diagonal adalah 6-4 buah atau $(\frac{4!}{2!2!} - 4)$ buah

$\frac{4.3.2!}{2!2!} - 4 = 4(\frac{3}{2} - 1) = \frac{4}{2}(3 - 2) = \frac{4}{2}(4 - 3).$

b. Misal: banyak diagonal dari segi 5 adalah:

$$_5C_2 - 5 = \frac{5!}{2!3!} - 5 = \frac{5.4.3!}{2!3!} - 5 = 5(\tfrac{4}{2} - 1)$$

$$= \tfrac{5}{2}(4 - 2) = \tfrac{5}{2}(5 - 3).$$

c. Banyak diagonal segi-6 adalah:

$$_6C_2 - 6 = \frac{6!}{2!3!} - 6 = \frac{6.5.4!}{2!3!} - 6 = 6(\tfrac{5}{2} - 1)$$

$$= \tfrac{6}{2}(5 - 2) = \tfrac{6}{2}(6 - 3).$$

Maka banyak diagonal segi n adalah:

$$_nC_2 - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} - n = \tfrac{1}{2}n(n-1-2)$$

$$= \tfrac{1}{2}n(n-3).$$

banyak diagonal segi n adalah: $\frac{n}{2}(n-3) = \frac{1}{2}n(n-3)$.

B. Dalam Bidang lain

Contoh 1:

Berapa macam warna yang dapat kita buat dari warna-warna pokok; merah, kuning, biru, hijau, putih, hitam sehingga didapat warna yang berbeda-beda ?

Penyelesaian:

Dapat kita bentuk warna baru dengan mengambil 2,3,4,5,6 warna dari 6 warna pokok itu. Jadi warna dapat dibuat dengan:

1). 2 dari 6 warna pokok = $_6C_2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6.5.4!}{2!4!}$ = 15 warna.

2). 3 dari 6 warna pokok = $_6C_3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3!}$ = 20 warna.

3). 4 dari 6 warna pokok = $_6C_4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6.5.4!}{2!4!}$ = 15 warna.

4). 5 dari 6 warna pokok = $_6C_5 = \frac{6!}{5!1!} = \frac{6.5!}{5!1!}$ = 6 warna.

5). 6 dari 6 warna pokok = $_6C_6 = \frac{6!}{6!0!}$ = 1 warna

Jadi banyak warna yang dapat dibuat adalah:
(15 + 20 + 15 + 6 + 1) = 57 warna.

Contoh 2:
Buktikanlah diagonal segi-n = $\frac{1}{2}n(n - 3)$.
Bukti:
Banyak titik segi-n adalah n buah.
Banyak garis penghubung tiap 2 titik adalah:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

Banyak sisi segi-n adalah n buah.
Banyak diagonal = banyak garis penghubung dikurangi banyak sisi.
atau:

$$\begin{aligned}\text{Banyak diagonal segi n} &= \frac{n!}{2!(n-2)} - n\\ &= \frac{n(n-1)!}{2!} - n\\ &= \frac{n(n-1) - 2n}{2}\\ &= \frac{n(n-1-2)}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}n(n-3) \text{ terbukti.}\end{aligned}$$

Contoh 3:
Buktikanlah: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{n-r}$

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!}\\ &= \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}\\ &= \frac{(n-r+r)(n-1)}{r!(n-r)!}\\ &= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}\\ &= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)(n-r-1)!} + \frac{r(n-1)!}{r(r-1)(n-r)!}\end{aligned}$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!\{(n-1-r\}!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}, \text{ terbukti.}$$

Soal-Soal Campuran

1. 5 Bangsa Inggris, 6 bangsa Indonesia,4 bangsa Amerika akan mengadakan pertemuan untuk mendapatkan suatu kesepakatan. Berapa cara mereka duduk jika:
   a. Pada bangku panjang tanpa memperhatikan bangsanya.
   b. Mengelilingi meja bundar tanpa memperhatikan bangsanya sendiri.
   c. Pada bangku panjang tapi tidak terpisah dari bangsanya.
   d. Mengelilingi meja bundar tidak terpisah dari bangsanya.
   e. Idem, dengan a,b,c,d jika yang akan bersidang hanya 3 orang bangsa Inggris, 4 orang bangsa Indonesia, dan 2 orang Amerika.

2. Seorang pustakawan akan menyusun buku-buku; 3 buku bahasa Indonesia, 5 buku Matematika, 3 buku Biologi, 6 buku Fisika yang masing-masing berbeda judulnya pada rak yang memuat 10 buah buku. Tentukanlah banyak cara pustakawan itu menyusun buku yang terdiri dari 2 bahasa Indonesia, 3 Matematika, 1 Biologi dan 4 Fisika bila:
   a. Tak diperhatikan jenis bukunya.
   b. Tak terpisah dari jenis bukunya.

3. Buktikan:
   a. $\sum_{j=1}^{n} j({}_nC_j) = n\ 2^{n-1}$.
   b. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^r$

4. Tentukan harga n dari:
   a. ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_4$
   b. $3\ {}_{n+1}C_3 = 7\ {}_nC_2$

5. Berapa unit soal dapat kita susun dari 20 buah soal jika banyak soal untuk setiap unit terdiri atas 10 soal.

C. Probabilitas dengan Kombinatorik

Untuk penyelesaian probabilitas dengan memakai analisis kombinatorik ini terlebih dahulu kita harus dapat membedakan apakah analisis permutasi atau analisis kombinasi.

Contoh-contoh soal:

1. 7 orang mahasiswa akan membentuk panitia yang terdiri atas: ketua, wakil ketua, sekretaris I, sekretaris II dan bendahara. Berapa probabilitas panitia yang dapat dibentuk jika si A akan menjadi ketua, kalau mahasiswa-mahasiswa itu: A,B,C,D,E,F,G ?

   Penyelesaian:
   Diketahui: Mahasiswa: A,B,C,D,E,F,G yaitu sebanyak 7 orang. Susunan panitia terdiri atas 5 orang
   Ditanya : Banyak panitia jika A jadi ketua.
   Jawab: Banyak panitian 5 dari 7 orang adalah:

$$ {}_5P_7 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7.6.5.4.3.2!}{2!} = 2520 \text{ panitia} $$

   Karena ke 7 orang dapat kesempatan untuk ketua maka si A sebagai ketua adalah $\frac{1}{7}$.
   Jadi banyak posisi A sebagai ketua:
   $\frac{1}{7}$ x 2520 = 360 panitia.

2. Dari suatu pak kartu remi diambil dua kartu secara random. Berapa probabilitas terambil kartu As dan probabilitas keduanya kartu petak (P) ?

   Penyelesaian:
   DiketahuI: Banyak kartu 52 lembar yang terdiri dari 4 kartu As dan 13 kartu petak merah.
   Ditanya : a. P(As)
   b. P(2p).

Jawab:

a. $$P(As) = \frac{{}_4C_2}{{}_{52}C_2} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{52!}{2!50!}} = \frac{\frac{4.3.2!}{2!2!}}{\frac{52.51.50!}{2!50!}}$$

$$= \frac{6}{1326} = \frac{1}{221}$$

b. $$P(2p) = \frac{{}_{13}C_2}{{}_{52}C_2} = \frac{\frac{13!}{2!11!}}{\frac{52!}{2!50!}}$$

$$= \frac{\frac{13.12.11!}{2!11!}}{\frac{52.51.50!}{2!50!}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

3. Diketahui 7 buah titik A,B,C,D,E,F,G yang tidak koliner atau tidak terletak pada suatu garis. Dengan memakai titik itu dibuat segitiga.Berapa probabilitas segitiga-segitiga itu mempunyai titik sudut A.

Penyelesaian:

Diketahui: 7 titik tidak segaris, dan segitiga terdiri atas 3 titik.

Ditanya : a. Banyak segitiga.

b. Berapa probabilitas segitiga mempunyai titik sudut A.

Jawab:

a. Banyak segitiga yang dapat dibuat:

$$_3C_7 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7.6.5.4!}{3!4!} = 35$$

segitiga dengan titik sudut A adalah:

ABC,ABD,ABE,ABF,ABG,ACD,ACE,ACF,ACG,ADE,ADF,ADG,AEF, AEG, dan AFG.

Atau segitiga dengan A sebagai titik sudut adalah:

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.

b. Probabilitas segitiga itu mempunyai ttik sudut A adalah:

$$\frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

BAB IV

KEJADIAN BERGANTUNGAN DAN KEJADIAN BEBAS

A. Kejadian Bergantungan

Dua buah kejadian bergantungan atau kejadian yang satu merupakan syarat dari kejadian yang lain atau sebaliknya. Kejadian yang demikian adalah dua kejadian yang disebut dengan kejadian bersyarat. Dua kejadian bersyarat dinotasikan dengan:

(A/B) atau (B/A) berarti bahwa kejadian A terjadi kejadian B akan terjadi atau B terjadi kejadian A pun terjadi.

Nilai Probabilitas

P(A/B) berarti probabilitas terjadinya kejadian A yang diikuti dengan kejadian B.

P(B/A) berarti probabilitas terjadinya kejadian B yang diikuti dengan kejadian A.

Probabilitas kejadian A dengan syarat diikuti oleh kejadian B atau sebaliknya diilustrasikan sebagai berikut:

Dari suatu pak kartu bridge diambil satu kartu. Berapa probabilitas terambilnya satu kartu As dengan bunga merah ?
Dari soal ini dapat kita uraikan sebagai berikut:
Banyak kartu As yang berbunga merah ada dua kartu, sedangkan banyak kartu As ada 4 buah dan kartu berwarna merah ada 26 buah. dengan demikian dapat kita buat matriknya sebagai berikut:

Kejadian	Kartu As (A)	Kartu tidak As $(A)^c$	Jumlah
Kartu merah (B)	2	24	26
Kartu tidak merah (B^c)	2	24	26
$\sum$	4	48	52

Terambilnya kartu As dengan bunga merah dinotasikan dengan;

P(A/B) berarti terambil kartu As dengan bunga merah.

Terambilnya kartu merah dengan simbul As dinotasikan dengan;

P(B/A) berarti terambil kartu merah dengan simbul As.

terambil satu kartu As dengan syarat terambilnya kartu yang berwarna merah dapat dianggap probabilitas terambil satu kartu merah dari sub populasi 26 kartu merah adalah:

$$P(A/B) = \frac{2}{26}$$

$$= \frac{\frac{2}{52}}{\frac{26}{52}}$$

karena:

$$P(B \cap A) = \frac{2}{52}$$

$$P(B) = \frac{26}{52}$$

dapat diambil kesimpulan bahwa:

$$P(A/B) = \frac{P(A \quad B)}{P(B)} \longrightarrow P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

atau

$$P(B/A) = \frac{P(A \quad B)}{P(A)} \longrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B/A).$$

Berarti bahwa probabilitas terjadinya A yang juga B terjadi atau probabilitas terjadinya B yang juga kejadian A terjadi, dengan kata lain pada P(A/B) kejadian B lebih dulu terjadi. Sedangkan pada P(B/A) kejadian A lebih dulu terjadi.

P{ada hal pertama:

P(B) > 0 dan hal kedua P(A) > 0.

Syarat dari Probabilitas Bersyarat

Dari $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ dapat beroleh dalam bentuk:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

dengan demikian apabila A, B, dan C bergantungan, maka:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cap C)$$
$$= P(A \cap B).P(C/A \cap B)$$
$$= P(A).P(B/A).P(C/A \cap B)$$

atau

Bila untuk 3 kejadian A_1, A_2, A_3 diketahui adalah tiga kejadian bersyarat didapat:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2).$$

Dengan kata lain probabilitas terjadinya A_1, A_2, dan A_3 yang kejadian A_1 pada waktu A_1 terjadi A_2 pun terjadi dan waktu A_1 dan A_2 terjadi A_3 pun terjadi.

Secara umum:

1. Untuk kejadian A_1, A_2, A_3, ... A_n, maka:

   $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots A_n) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2).P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3)\ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots A_{n-1}).$$

2. Bila suatu kejadian A yang terdiri dari kejadian-kejadian: A_1, A_2, A_3, ...A_n yang mutually exclusif didapat:

   $$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \ldots + P(A_n)P(A/A_n)$$

   karena: $A = A_1 \cap A + A_2 \cap A + \ldots + A_n \cap A$ dan

   $$P(A) = P(A_1 \cap A) + P(A_2 \cap A) + P(A_3 \cap A) + \ldots + P(A_n \cap A).$$

B. **Kejadian-kejadian Bebas**

Bila kejadian A dan kejadian B merupakan dua kejadian yang bebas maka:

$$P(B/A) = P(B)$$

berarti bahwa dari: $P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$

didapat: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

atau:

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j).P(A_k), \text{ dimana } j \neq k.$$

Jika kejadian-kejadian A_1, A_2, A_3, ...A_n adalah kejadian bebas maka:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n).$$

C. Teori atau Aturan "BAYES"

Misalkan: A_1, A_2, A_3,...A_n adalah kejadian-kejadian yang mutually exclusif dalam kejadian A yaitu satu kejadian dari kejadian-kejadian itu terjadi juga terjadi A, maka: aturan atau Teori "BAYES" itu adalah:

$$P(A_k/A) = \frac{P(A_k)\ P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\ P(A/A_k)}$$

Contoh-contoh soal:

1. Suatu dadu ditoss dua kali, kejadian A adalah terbukanya dadu dengan mata 4, 5 atau 6 pada toss pertama dan kejadian B terbuka dadu dengan mata 1, 2, 3 atau 4 pada toss kedua. Tentukanlah probabilitas terjadinya A dan B.

   Penyelesaian:

   Diketahui: Dadu ditoss dua kali;

   A = kejadian dadu ditoss pertama terbuka 4, 5, atau 6.

   B = kejadian dadu toss kedua terbuka 1, 2, 3, atau 4.

   Ditanya : $P(A \cap B)$.

   Jawab:

   Cara I : $P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$

   $= P(A).P(B)$ dimana kejadian A dan B bebas karena kejadian dadu terbuka pada toss kedua tak perlu terjadi kejadian toss pertama.

   maka: $P(B/A) = P(B)$.

   $$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Cara II:......

Cara II: Pada toss pertama dadu berpeluang akan terbuka dengan 6 cara, dan pada toss kedua begitu pula. Jumlah peluangnya ada 6.6 cara = 36 cara setiap 3 cara dari toss pertama dapat diasumsikan 4 cara dari toss kedua. Peluang semua dapat diharapkan 3.4 cara = 12 cara, berarti A dan B terjadi, maka probabilitas:

$$P(A \cap B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Dengan demikian dapat dijelaskan bahwa:

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ karena:

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right).$$

Jadi kejadian A dan B adalah bebas.

2. Buktikanlah bahwa:

$$P(A_k/A) = \frac{P(A_k)\ P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\ P(A/A_k)} \quad \text{(teori BAYES).}$$

Karena kejadian A terdiri dari kejadian A_1, A_2, ...A_n yang mutually exclusif maka:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3) + \ldots + P(A \cap A_n) \\ &= P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \ldots + P(A_n)P(A/A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(A/A_k) \end{aligned}$$

Jadi:

$$\begin{aligned} P(A_k/A) &= \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A_k)\ P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\ P(A/A_k)} \end{aligned}$$

3. Kotak I berisi 3 kelereng merah dan 2 kelereng biru, sedangkan kotak II berisi 2 kelereng merah dan 8 kelereng biru, suatu mata uang ditoss, jika terbuka dengan muka diambil sebuah kelereng dari kotak I, jika terbuka dengan

belakang diambil satu kelereng dari kotak II. Berapa probabilitas terambil kelereng merah.

Penyelesaian:

Diketahui: Terambil kelereng merah dari kotak I atau II adalah R, kejadian terambil merah dari kotak I disebut A_1 dan merah dari kotak II disebut A_2.

Kotak I : 3 merah dan 2 kelereng biru.

Kotak II : 2 merah dan 8 biru.

Ditanya : $P(R) = \ldots?$

Jawab:

$$P(I) = \tfrac{1}{2} \quad , \quad P(II) = \tfrac{1}{2}$$

$$P(R/I) = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}, \quad P(R/II) = \frac{2}{2+8} = \frac{2}{10}$$

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \quad I) + P(\; II) \\ &= P(I).P(R/I) + P(II).P(R/II) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{10} = \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

4. Produksi suatu pabrik adalah 50% dihasilkan oleh mesin A; 30% oleh mesin B dan 20% dihasilkan oleh mesin C. 3% dari hasil mesin A rusak, 5% dari hasil mesin C rusak dan 4% dari hasil mesin B juga rusak. Diambil secara random satu hasil. Berapa probabilitas bahwa hasil yang rusak terambil berasal dari mesin C.

Penyelesaian:

Misalkan: X = Kejadian terambil hasil yang rusak

A = Kejadian terambil dari hasil mesin A

B = Kejadian terambil dari hasil mesin B

C = Kejadian terambil dari hasil mesin C.

maka:

X/A = terambil rusak yang dihasilkan mesin A

X/B = terambil rusak yang dihasilkan mesin B

X/C = terambil rusak yang dihasilkan mesin C.

Jadi: $P(A) = 50\% = \tfrac{1}{2}$

$P(B) = 30\% = \dfrac{30}{100}$ $\qquad$ $P(X/A) = 3\% = \dfrac{4}{100}$

$P(C) = 20\% = \frac{1}{5}$ $\qquad$ $P(X/B) = 4\% = \dfrac{4}{100}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P(X/C) = 5\% = \dfrac{5}{100}$

Terambil rusak berarti terambil rusak dari mesin A atau dari mesin B atau mesin C, maka:

$$P(X) = P(X \quad A) + P(X \quad B) + P(X \quad C)$$

$$= P(A)P(X/A) + P(B)P(X/B) + P(C)P(X/C)$$

$$P(C/X) = \frac{P(C \cap X)}{P(X)}$$

$$= \frac{P(C)\ .\ P(X/C)}{P(A)P(X/A) + P(B)P(X/B) + P(C)P(X/C)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\ .\ \frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\ .\ \frac{3}{100} + \frac{3}{10}\ .\ \frac{4}{100} + \frac{1}{5}\ .\ \frac{5}{100}}$$

$$= \frac{\frac{1}{100}}{\frac{3}{200} + \frac{12}{1000} + \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{10}{37}\ .$$

5. Dalam suatu perkumpulan olah raga diketahui 4% dari laki-laki dan 1 % dari wanita mempunyai tinggi 180 cm, dan diketahui pula dari kelompok itu 60% laki-laki. Jika seorang dipilih secara random dan ternyata tingginya 180 cm. Berapa probabilitas bahwa ia seorang laki-laki.

Penyelesaian:

A = Kejadian terambil laki-laki

B = Kejadian terambil wanita

Z = Terambil yang tingginya 180 cm

Z/A = Kejadian terambil seorang anggota laki-laki yang tingginya 180 cm.

Z/B = Kejadian terambil seorang anggota wanita yang tingginya 180 cm.

Ditanya: $P(A/Z) = \ldots ?$

Jawab:

$$P(A) = 60\% = \frac{60}{100}$$

$$P(B) = 40\% = \frac{40}{100}$$

$$P(Z/A) = 4\ \% = \frac{4}{100}$$

$$P(Z/B) = 1\ \% = \frac{1}{100}$$

maka:

$$P(Z) = P(A \cap Z) + P(B \cap Z)$$

$$= P(A).P(Z/A) + P(B).P(Z/B)$$

$$= \frac{60}{100} . \frac{4}{100} + \frac{40}{100} . \frac{1}{100}$$

$$P(Z) = \frac{240}{100} + \frac{40}{100}$$

$$= \frac{280}{1000} = \frac{28}{100}$$

$$P(A/Z) = \frac{P(A \cap Z)}{P(Z)}$$

$$= \frac{P(A).P(Z/A)}{P(Z)}$$

$$= \frac{\frac{60}{100} . \frac{4}{100}}{\frac{280}{1000}} = \frac{\frac{240}{1000}}{\frac{280}{1000}} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}.$$

6. Dari seluruh rakyat dari suatu negara dalam pemilihan umum tercatat pemilih;

   45% Republik, 40% Demokrat dan 15% Indenpendent.

   Ada tiga calon dalam pemilihan umum itu, yaitu seorang dari kaum Republik (R) seorang dari kaum Demokrat (D) dan seorang dari Indenpendent (I).

   Distribusi suara yang diperoleh kursi calon itu adalah sebagai berikut:

   80% kaum Republik, 10% kaum Demokrat, 15% Indenpendent memilih R, 5% kaum Republik, 85% kaum Demokrat, 10% kaum Indenpendent memilih D, 15% kaum Republik, 5% kaum Demokrat, 75% kaum Indenpendent memilih I.

Jika seorang dipilih secara random dan ternyata ia adalah I, berapa probabilitas bahwa ia kaum Republik.

Penyelesaian:

A = Kejadian bahwa pemilih dari kaum Republik

B = Kejadian bahwa pemilih dari kaum Demokrat

C = Kejadian bahwa pemilih dari kaum Independent

I/A = Kejadian bahwa kaum Republik memilih calon Independent.

I/B = Kejadian bahwa kaum Demokrat memilih calon Independent.

I/C = Kejadian bahwa kaum Independent memilih calon Independent.

$$P(A) = 45\% = \frac{45}{100}, \quad P(I/A) = 15\% = \frac{15}{100}$$

$$P(B) = 40\% = \frac{40}{100}, \quad P(I/B) = 5\% = \frac{5}{100}$$

$$P(C) = 15\% = \frac{15}{100}, \quad P(I/C) = 75\% = \frac{75}{100}$$

Ditanya: $P(A/I) = \ldots?$

Jawab:

$$\begin{aligned}
P(I) &= P(I \cap A) + P(I \cap B) + P(I \cap C) \\
&= P(A).P(I/A) + P(B).P(I/B) + P(C).P(I/C) \\
&= \frac{45}{100} \cdot \frac{15}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{15}{100} \cdot \frac{75}{100} \\
&= \frac{675}{10000} + \frac{2000}{10000} + \frac{1125}{10000} \\
&= \frac{2000}{10000} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A/I) &= \frac{P(A/I)}{P(I)} \\
&= \frac{P(A).P(A/I)}{P(I)} \\
&= \frac{\frac{45}{100} \cdot \frac{15}{100}}{\frac{2000}{10000}} = \frac{\frac{675}{10000}}{\frac{2000}{10000}} = \frac{675}{2000} = \frac{27}{80}
\end{aligned}$$

D.1. Percobaan Berulang

Kerapkali juga suatu kejadian dapat terjadi berulang-ulang. Untuk menjelaskan masalah ini,perhatikan contoh-contoh di bawah ini:

1. Dalam suatu pacuan kuda, tiga ekor kuda A, B, dan C berpacu bersama-sama dan probabilitas untuk menang berturut-turut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, dan $\frac{1}{6}$. Bila pacuan diulangi berapa probabilitas kuda yang sama memenangkan pacuan dua kali berturut-turut.

   Soal ini dapat diselesaikan sebagai berikut:

   Penyelesaian:

   Ruang sampel pacuan itu adalah:

   S = (A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(B,B),(B,C),(C,A),(C,B),(C,C).

   Misalkan D = kejadian bahwa kuda yang sama memenangkan kedua pacuan itu $\longrightarrow$ D = (A,A),(B,B),(C,C) .

   dimana: P(D) = P{(A,A),(B,B),(C,C)}
   = P(A,A) + (B,B) + (C,C)

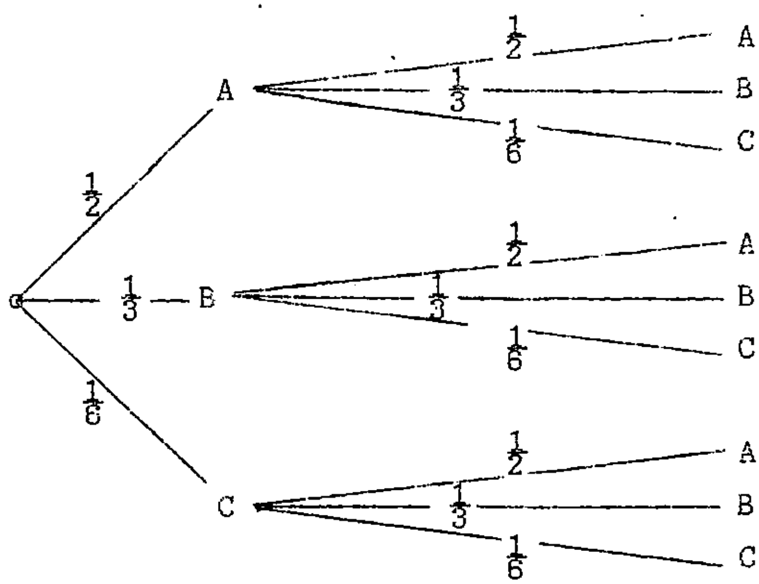
   Bila pada pacuan pertama A menang dan pada pacuan kedua A menang maka kejadian A pertama dan A kedua adalah dua kejadian yang bebas, begitu pula dengan kuda B dan C.

$$P(A,A) = P(A \cap A) = P(A).P(A).$$

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(A,A) + P(B,B) + P(C,C)\\
&= P(A \cap A) + P(B \cap B) + P(C \cap C)\\
&= P(A).P(A) + P(B).P(B) + P(C).P(C)\\
&= (\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{6}.\tfrac{1}{6})\\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{36}\\
&= \frac{9+4+1}{36} = \tfrac{14}{36} = 0,389.
\end{aligned}$$

Soal-soal itu dapat diselesaikan secara grafik:

Pacuan I　　　　　　Pacuan II



$P(A,A) = P(A).P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(B,B) = P(B).P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$P(C,C) = P(C).P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$$\begin{aligned} P(A,A) + P(B,B) + P(C,C) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{9+4+1}{36} = \frac{14}{36} \\ &= 0{,}389. \end{aligned}$$

Agar lebih jelas selesaikan lagi soal di bawah ini:

Satu dadu empat sisinya dicat merah (M) dan dua sisi lainnya di cat kuning (K). Dadu ditoss 3 kali dan diperhatikan sisi yang muncul, berapa probabilitas bahwa sisi yang muncul pada ketiga lambungan itu sama.

Penyelesaian:

Cara I: Ruang sampel untuk ketiga lambungan itu ialah:

S = (MMM,MMK,MKM,MKK,KMM,KMK,KKM,KKK).

A = kejadian bahwa warna pada ketiga percobaan itu sama.

A = (MMM,KKK).

$P(A) = P(M \cap M \cap M) + P(K \cap K \cap K)$

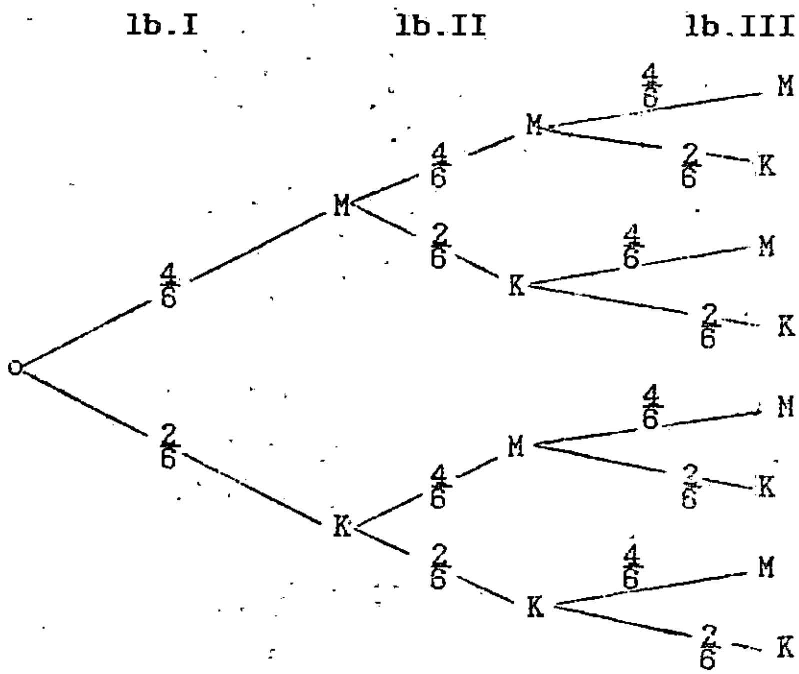
$$= P(M)P(M)P(M) + P(K)P(K)P(K);$$ karena kejadian M dan K bebas

$$= \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}$$

$$= \frac{64}{216} + \frac{8}{216}$$

$$= \frac{72}{216} = \frac{1}{3}.$$

Cara II: Secara grafis,



$$P(A) = P(M)P(M)P(M) + P(K)P(K)P(K)$$

$$= \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}$$

$$= \frac{64}{216} + \frac{8}{216}$$

$$= \frac{72}{216} = \frac{1}{3}.$$

2. Proses Stokastik

Prosesstokastik ialah suatu deretan percobaan dimana setiap percobaan mempunyai ruang sampel berhingga dan mempunyai probabilitas tertentu.

Contoh: 1. .....

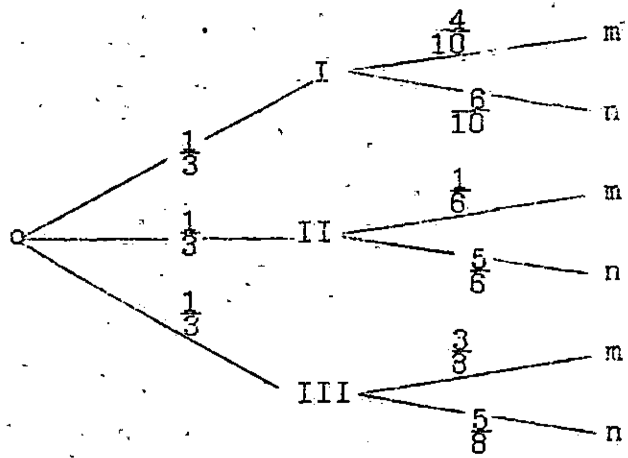
Ada tiga kotak yaitu kotak I, kotak II dan kotak III. Kotak I berisi 10 buah bola lampu, 4 diantaranya mati, kotak II berisi 6 buah bola lampu 1 diantaranya mati, kotak III berisi 8 buah bola lampu 3 diantaranya mati, secara random diambil sau kotak dan secara random pula diambil satu bola dari kotak itu. Berapa probabilitas terambil bola mati ?

Penyelesaian soal:

1. Penyelesaian soal ini adalah suatu deretan percobaan dimana pada percobaan I pengambilan satu kotak dari tiga kotak dan percobaan kedua adalah pengambilan satu bola lampu.
   a. Dalam pengambilan kotak didapat ruang sampel;
   $$S_1 = (I, II, III).$$
   b. Dalam pengambilan kotak didapat ruang sampel;
   $$S_2 = (m, h).$$
   c. Bola mati dari kotak I ialah m/A (A = kejadian terambil kotak I).
   d. Bola mati dari kotak II ialah m/B(B = kejadian terambil kotak II).
   e. Bola mati dari kotak III ialah m/C(C= kejadian terambil kotak III).
   f. $m = (m \cap A) \cup (m \cap B) \cup (m \cap C)$.
   g. $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.
   h. m/A = terambil mati dengan syarat dari kotak I
   m/B = terambil mati dengan syarat dari kotak II
   m/C = terambil mati dengan syarat dari kotak III
   dimana:
   $P(m/A) = \frac{4}{10}$
   $P(m/B) = \frac{1}{6}$
   $P(m/C) = \frac{3}{8}$.
   i. $P(m) = P(m \cap A) + (m \cap B) + (m \cap C)$.
   $= P(A).P(m/A) + P(B).P(m/B) + P(C).P(m/C)$
   $= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}$.

$$= \frac{4}{30} + \frac{1}{18} + \frac{3}{24} = \frac{48+20+45}{360} = \frac{113}{360}.$$

2. Secara grafis (diagram pohon) dapat digambarkan seperti di bawah ini:



$$\begin{aligned} P(m) &= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{10} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{8} \\ &= \tfrac{4}{30} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{3}{24} \\ &= \tfrac{48+20+45}{360} \\ &= \tfrac{113}{360}. \end{aligned}$$

Untuk lebih jelasnya perhatikan lagi contoh soal di bawah ini:

Contoh 2.

Ada dua kotak A dan B, kotak A berisi 9 buah kartu yang bernomor 1 sampai dengan 9, kotak B berisi 5 kartu bernomor 1 sampai dengan 5. Sebuah kotak dipilih secara random dan secara random pula diambil satu kartu. Jika terambil kartu bernomor ganjil (q), maka satu kartu diambil dari kotak yang lain. Jika terambil kartu bernomor genap (p) maka kartu diambil dari kotak yang sama. Tentukanlah probabilitas terambil kedua kartu yang bernomor ganjil.

Penyelesaian:

1. Misal A = kejadian terambil kotak A $\longrightarrow$ $P(A) = \frac{1}{2}$

   B = kejadian terambil kotak B $\longrightarrow$ $P(B) = \frac{1}{2}$

   q/A = terambil kartu ganjil dari A $\longrightarrow$ $P(q/A)=\frac{5}{9}$

$p/p \cap A$ = terambil genap setelah terambil genap dari kotak A $\longrightarrow P(p/p \cap A) = \frac{3}{8}$

$p/p \cap B$ = terambil genap setelah terambil genap dari kotak B $\longrightarrow P(p/p \cap B) = \frac{1}{4}$

$q/q \cap A$ = kejadian terambil ganjil setelah terambil ganjil dari kotak A (terambil ganjil dari kotak B = q_B)
$\longrightarrow P(p/p \cap A) = \frac{3}{5}$

$q/q \cap B$ = kejadian terambil ganjil setelah terambil ganjil dari kotak B (terambil ganjil dari kotak A = q_A)

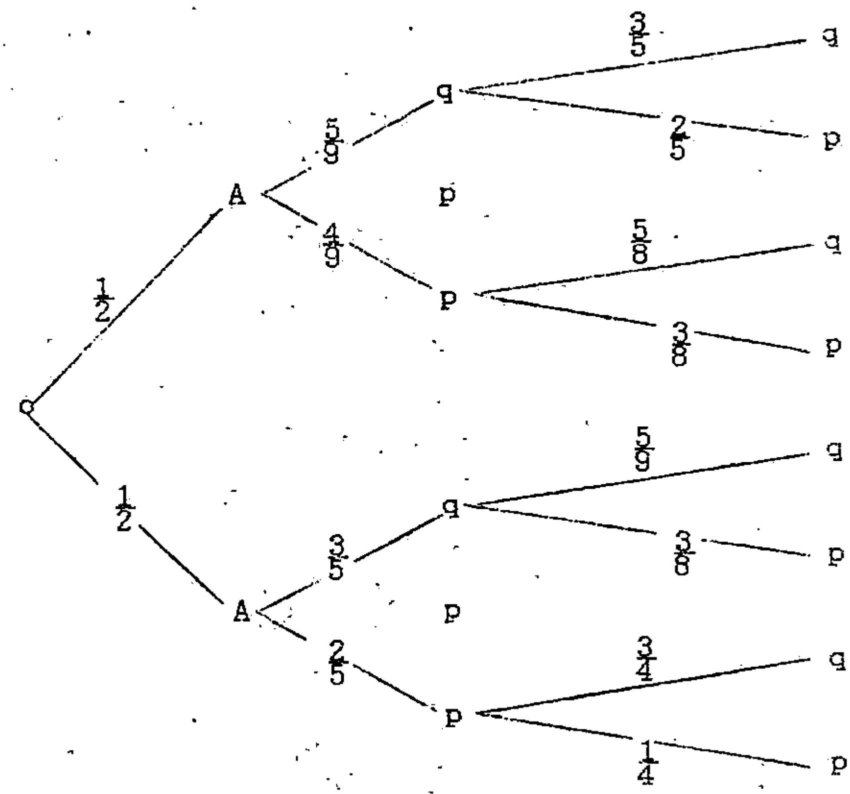
$$2q = (A, q_A, q_B).(B, q_B, q_A)$$

$$\begin{aligned} P(2q) &= P(A \cap q_A \cap q_B) + P(B \cap q_B \cap q_A) \\ &= P(A).P(q_A).P(q_B) + P(B).B(q_B).P(q_A) \\ &= \tfrac{1}{2}.\tfrac{5}{8}.\tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{5}.\tfrac{5}{8} \\ &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Secara grafis:

Misal dari kotak A terambil kartu ganjil, kartu diambil dari kotak B, cabang dari A ke q probabilitasnya $\frac{5}{9}$ karena kotak A berisi 5 kartu q dan probabilitas dari q ke q = $\frac{3}{5}$ karena kotak B berisi 5 kartu, 3 diantaranya ganjil. Probabilitas dari q ke p = $\frac{2}{5}$.

Jika dari kotak A terambil kartu genap (p), kartu diambil dari kotak A juga, probabiliotas dari A ke p = $\frac{4}{9}$. Probabilitas dari p ke q = $\frac{5}{8}$ sebab dalam kotak A tinggal 8 kartu karena 5 diantaranya ganjil. Begitu juga kalau dilakukan pengambilan dari kotak B.



Contoh 3.

Sebuah kotak berisi dua mata uang logam, sebuah mata uang mempunyai 2 muka yaitu (m,b). Mata uang kedua mempunyai dua muka sama yaitu m. Diambil secara random satu mata uang dan ditoss. Jika hasilnya menghasilkan m, mata uang lain ditoss, tetapi jika toss menghasilkan belakang (b), mata uang sama di toss lagi. Tentukanlah probabilitas bahwa pada toss kedua menghasilkan muka (m).

Penyelesaian:

Diketahui: Dua mata uang, mata uang I (m,b) mata uang ke dua (m). Diambil secara random 1 mata uang.
Diambil satu mata uang dan ditoss, jika menghasilkan m mata uang ke dua ditoss, bila menghasilkan belakang (b) mata uang yang sama ditoss.

Ditanya : P(D) ——> D = kejadian mata uag muncul pada toss ke dua.

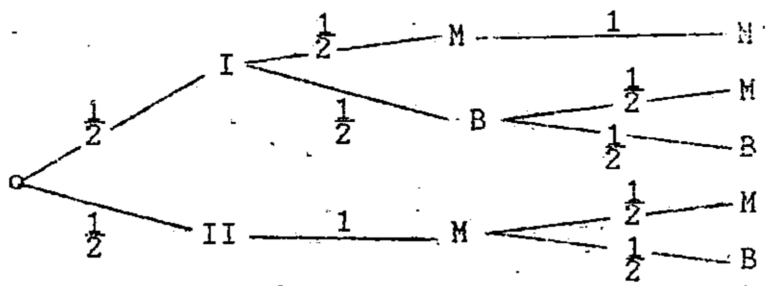
Jawab:

1. A = kejadian terambil mata uang I $P(A) = \frac{1}{2}$.
   B = kejadian terambil mata uang I $P(B) = \frac{1}{2}$.

S = (IMM),(IBM),(IBB),(IIMM),(IIBB)

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(IMM) + P(IBM) + P(IIMM) \\
&= P(I)P(M_1)P(M_2) + P(I)P(B)P(M) + P(II).P(M).P(M) \\
&= \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.1 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}.1.\tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} \\
&= \frac{2 + 1 + 2}{8} = \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

2. Secara grafis:



$$
\begin{aligned}
P(D) &= \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.1 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}.1.\tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} \\
&= \frac{2 + 1 + 2}{8} = \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

Soal-Soal:

1. Diketahui tiga kotak I,II,III. Kotak I berisi 3 kelereng merah (m) dan 5 kelereng biru (b). Kotak II berisi 2 kelereng merah dan 1 kelereng biru dan kotak III berisi 2 kelereng merah dan 3 kelereng biru. Sebuah kotak diambil secara random dan terambil sebuah kelereng. Berapa probabilitas bahwa yang terambil kelereng biru dan berapa probabilitas bahwa terambil kelereng merah.

2. Kotak A berisi 588 kelereng merah (m) dan 12 kelereng putih (p), kotak B berisi 291 kelereng merah (m) dan 9 kelereng putih (p), kotak C berisi 96 kelereng merah (m) dan 4 kelereng putih (p). Semua kelereng dikumpulkan dalam kotak D. Jika terambil kelereng merah (m). Berapa probabilitas bahwa yang terambil itu berasal dari kotak C.

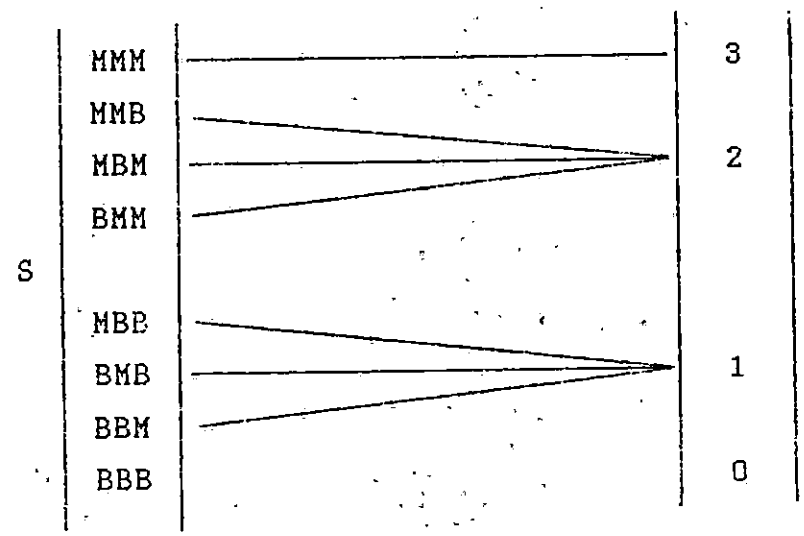
3. Dari dua kotak diketahui bahwa kotak A berisi 3 bola kuning dan 2 bola hitam, kotak B berisi 2 bola kuning dan 5 bola hitam. Satu kotak diambil secara random, kemudian dimasukkan kedalam kotak lain. Dari kotak yang lain diambil satu bola secara random. Hitunglah probabilitas bahwa bola yang terambil berwarna sama.

BAB V

FUNGSI PROBABILITAS

A.1. Variabel Random

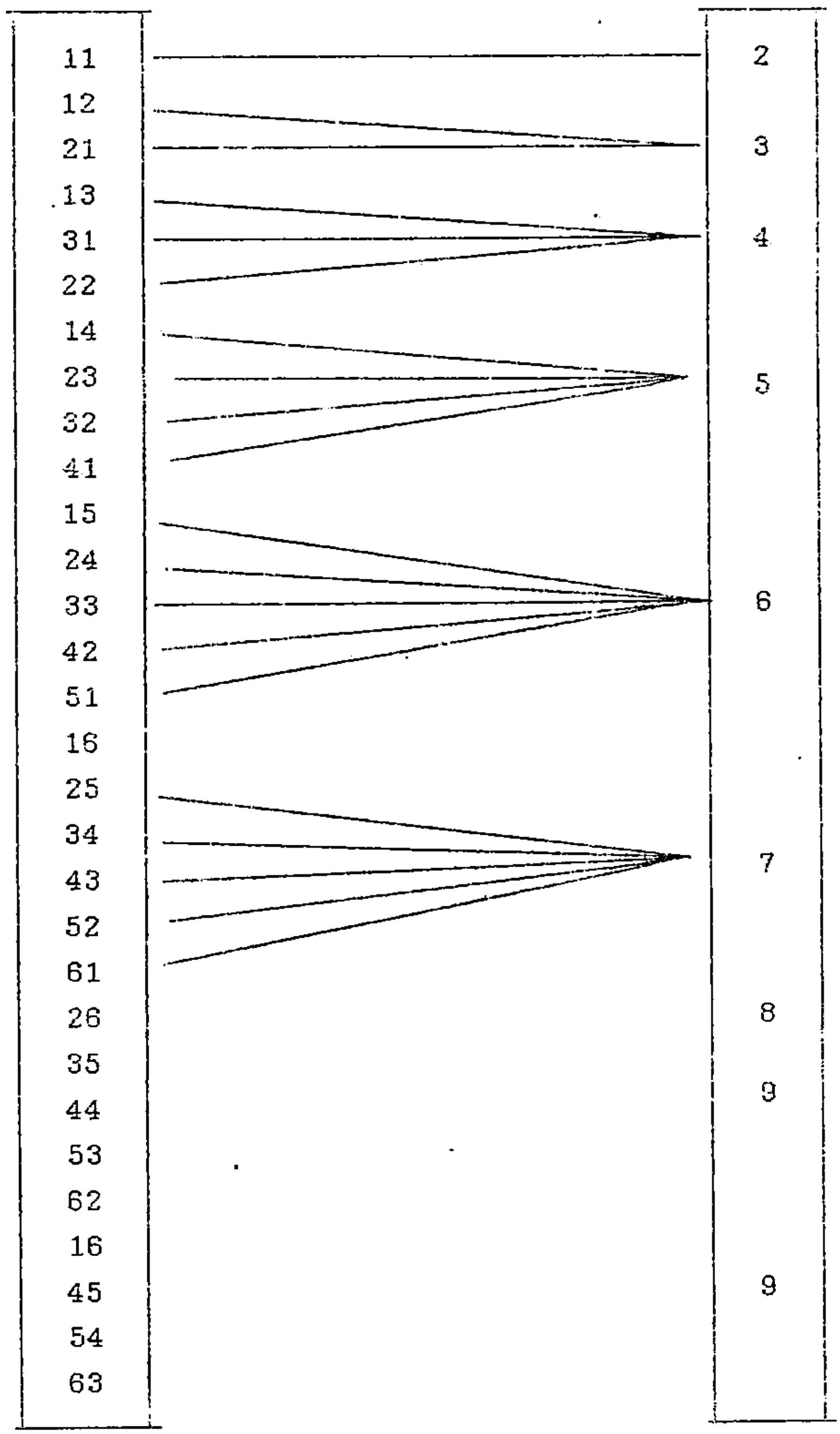
Dari 3 mata uang yang ditoss bersama-sama satu kali didapat ruang sampel S = (MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BBM,BBB). Jika dari hasil toss tadi yang kita perhatikan adalah banyaknya muncul M, didapat himpunan bilangan nyata T = (0,1,2,3). Dengan demikian anggota-anggota T, seperti diagram berikut:



Seperti telah kita ketahui di SMA bahwa perkawanan ini disebut fungsi dari S ke T yang dinotasikan dengan $f : S \longrightarrow T$, yang berarti S adalah daerah domain atau daerah asal, sedangkan T adalah codomain atau daerah hasil atau daerah kawan atau range.

Banyaknya M pada lambungan tiga mata uang itu disebut variabel random. Dari 2 dadu yang ditoss bersama-sama satu kali akan didapat ruang sampel $S = \{(x,y)/1 \leq 6,\ 1 \leq y \leq 6\}$.

Kita perhatikan jumlah mata dadu didapat himpunan bilangan nyata T : (2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12).



Jumlah mata yang timbul disebut variabel random f : S ——> T S adalah domain dan T adalah codomain.

Jadi variabel random didefinisikan sebagai berikut (*Suryanto, 1976, 44*):

Variabel random pada ruang sampel S adalah fungsi berharga nyata yang domainnya adalah S.
Variabel random disebut juga variate atau chanche variabel stokastic variabel.

Definisi: *Jika X adalah variabel random pada ruang sampel S maka untuk setiap $s \in S$ tertentu bilangan nyata X(s) dan daerah hasil dari X dinyatakan dengan X(S).*

Dari contoh-contoh di atas didapat:

1. Pada toss 3 mata uang bersama-sama satu kali, x adalah variabel random yang dinyatakan banyaknya M yang muncul, maka: S = (BBB,BBM,BMB,BMM,MBB,MBM,MMB,MMM)
   X(s) = bernilai 0,1,2,3
   X(S) = {0,1,2,3}.

2. Dari toss dua dadu bersama-sama satu kali dan Y adalah variabel random yang menyatakan jumlah mata dadu yang muncul maka: S = (11,12,13,14,15,16,21,22,...,46,56,66)
   Y(s) = bernilai 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)
   Y(S) = (2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12).

3. Dari dua dadu yang ditoss bersama-sama satu kali dan Z adalah variabel yang menyatakan banyaknya mata 5 yang muncul, maka: S = (11,12,13,14,15,16,21,22,...,46,56,66)
   Z(s) = bernilai 0,1,2
   Z(S) = (0,1,2).

Ruang sampel S di atas disebut ruang sampel yang diskrit atau ruang sampelyang terhitung sedangkan ruang sampel tang titik sampelnya tidak terhitung disebut ruang sampel yang kontiniu atau ruang sampel yang tak terhitung (uneoun table). Variabel random yang didefinisikan pada ruang sampel kontinu disebut variabel random yang kontinu.

2. Nilai Fungsi

Ada beberapa fungsi yang domainnya S dan x,y adalah variabel-variabel random yang didefinisikan pada S. Nilai-nilai fungsi ditentukan dengan rumus yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(x + y)(s) = x(s) + y(s) \longrightarrow \text{setiap } s \text{ elemen } S$$
$$(x - y)(s) = x(s) + y(s) \longrightarrow \forall s \in S$$
$$(x + k)(s) = x(s) + k \longrightarrow \forall s \in S$$
$$(kx)(s) = k(x)(s) \longrightarrow \forall s \in S$$
$$(xy)(s) = x(s)y(s) \longrightarrow \forall s \in S$$

dimana:

$x + y$, $x - y$, $x + k$, kx dan xy masing-masing adalah merupakan variabel random baru yang didefinisikan pada S.

Contoh-contoh soal:

1. Dua dadu ditoss bersama-sama satu kali maka:

   $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(4,6),(5,6,(6,6)$ atau

   $\{(x,y \mid 1 \leq x \leq 6,\ 1 \leq y \leq 6)$.

   X menyatakan banyaknya mata yang muncul pada dadu pertama, maka: X(s) : 1,2,3,4,5,6.

   Y menyatakan banyaknya mata yang muncul pada dadu kedua, maka: Y(s) : 1,2,3,4,5,6.

   Jika dibentuk variabel random $x + y$ dan $x - y$ maka:

   (x _ y) menyatakan jumlah mata yang muncul pada kedua dadu

   (x - y) menyatakan banyaknya mata yang muncul pada dadu pertama dikurangi dengan banyak mata yang muncul pada dadu kedua, maka:

   $(x + y)(s)$: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12

   $(x - y)(s)$: -5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5.

2. Sebuah dadu ditoss, jika x adalah banyaknya mata yang muncul. Bentuklah $x + 2$ dan $3x$ serta tentukan nilai-nilainya.

Penyelesaian:

$$S = (1,2,3,4,5,6)$$
$$(x + 2)(s) = 3,4,5,6,7,8$$
$$(3x)(s) = 3,46,9,12,15,18.$$

3. Dua dadu ditoss bersama-sama satu kali, X menyatakan banyaknya mata yang muncul pada dadu pertama dan Y menyatakan banyaknya mata yang muncul pada dadu kedua. Dibentuk variabel baru XY menyatakan hasil kali antara banyaknya mata yang muncul pada dadu pertama dengan banyaknya mata dadu kedua yang muncul.

   Tentukanlah XY(s) dan XY(S).

   Penyelesaian:

   XY(s): 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,15,15,18,20,24,25,30,36

   XY(S)={1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,15,16,18,20,24,25,30,36}.

3. **Menghitung Probabilitas**:

Jika mata uang dilambungkan 3 kali maka ruang sampelnya;

$$S = (MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BMB,BBM,BBB).$$

Kejadian muncul satu kali M dalam percobaan adalah (MBB,BMB, BBM) bersesuaian dengan $\{s \in x(s), x(s) = 1\}$ ialah kejadian $x = 1$. Dengan demikian kita dapat menghitung probabilitas kejadian $x = 1$, dan seterusnya.

Jadi: a. $P(x = 0) = P(\{s \in x(s), x(s) = 0\}) = P(BBB) = \frac{1}{8}$

b. $P(x = 1) = P(\{s \in x(s), x(s) = 1\}) =$
$P(MBB,BMB,BBM) = \frac{3}{8}$.

c. $P(x = 2) = P(\{s \in x(s), x(s) = 2\}) =$
$P(MMB,MBM,BMM) = \frac{3}{8}$.

d. $P(x = 3) = P(\{s \in x(s), x(s) = 3\}) = P(MMM) = \frac{1}{8}$.

e. $P(x < 3) = P(BBB,MBB,BMB,BBM,MMB,MBM,BMM) = \frac{7}{8}$.

Dapat juga kita difinisikan variabel random y yang menyatakan banyaknya B yang muncul dalam percobaan. Kejadian muncul dua M dan satu B ialah (MMB,MBM,BMM), kejadian ini bersesuaian de-

ngan ($S \in x(s), x(s) = 2$ dan $y(s) = 1$), yaitu kejadian $x = 2$ dan $y = 1$. Jadi $P(x = 2, y = 1) = P(MMB, MBM, BMM) = \frac{3}{8}$.
Jadi x dan y adalah variabel-variabel random pada ruang sampel S dan a,b,c serta d adalah bilangan-bilangan nyata maka ada beberapa simbol untuk probabilitas sebagai berikut (*Suryanto*, **1976. 49**).

$$P(x = a) = P(\{s \mid s\ x(s) = a,b\})$$
$$P(a = x = b) = P(\{s \mid S\ a \leq x(s) \leq b\})$$
$$P(x = a) = P(\{s \mid S\ x(s) \leq a\})$$
$$P(x = a, y = b) = P(\{s \mid S\ x(s) = a \text{ dan } y(s) = b\})$$
$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = P(\{s \in S \mid a \leq x(s) \leq b \text{ dan } c \leq y(s) \leq d\}).$$

Contoh-contoh soal:

1. Sebuah kelereng diambil dari kotak berisi 5 kelereng merah (m) dan 5 kelereng putih (p). Pada saat yang sama sebuah mata uang dilambungkan, x menyatakan banyaknya kelereng p yang terambil dan y menyatakan banyaknya m yang terambil pada pelambungan mata uang.

   Tentukan: a. $P(x = 0, y = 0)$

   b. $P(x = 0, y = 1)$

   c. $P(x = 1, y = 0)$

   d. $P(x < 2, y < 1)$.

   Jawab: $S = (mM, mB, pM, pB)$

   a. $P(x = 0, y = 0) = P(mB) = \frac{1}{4}$

   b. $P(x = 0, y = 1) = P(mM) = \frac{1}{4}$

   c. $P(x = 1, y = 0) = P(pM) = \frac{1}{4}$

   d. $P(x < 2, y < 1)\ P(mB, pB) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2. Pada pelambungan dua dadu bersama satu kali, x menyatakan banyaknya mata yang muncul pada dadu pertama, dan y menyatakan banyaknya mata muncul pada dadu kedua dan tentukan:

   a. $P(x = 4)$

   b. $P(4 \leq x \leq 6)$

   c. $P(x = 2, y = 4)$.

   d. $P(2 = x = 3, 3 \leq y\ 6)$

   e. $P(x < 4, y > 4)$.

Jawab: a. $S = \{(1,2,3,4,5,6)\}$

$P(x = 4) = \frac{1}{6}$.

b. $P(4 \leq x \leq 6) = P(4,5,6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c. $S(11,12,13,14,15,\ldots,61,62,63,64,65,66)$, 36 titik sampel. $P(x = 2,\ y = 4) = P(24) = \frac{1}{36}$.

d. $P(2 \leq x \leq 3,\ 3 \leq y \leq 6) = P(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

e. $P(x < 4,\ y < 4) = P((1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6) = ((\frac{6}{36})) = \frac{1}{6}$.

B. Fungsi Probabilitas

Dari dua dadu yang ditoss bersama-sama satu kali didapat $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots,(5,6),(6,6)\}$ bila kita difinisikan variabel random x adalah yang menyatakan "*mata terbanyak yang muncul diantara kedua dadu*".

Berarti:

$x = 1 \longrightarrow (1,1)$

$x = 2 \longrightarrow (1,2),(2,2)$ atau $(2,1)$

$x = 3 \longrightarrow (1,3),(2,3),(3,3),(3,2)$ atau $(3,1)$

$x = 4 \longrightarrow (1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2)$ atau $(4,1)$

$x = 5 \longrightarrow (1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(5,4),(5,3),(5,2)$ atau $(5,1)$

$x = 6 \longrightarrow (1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2)$ atau $(6,1)$.

Jadi:

$P(x = 1) = P(1,1) = \frac{1}{36}$

$P(x = 2) = P((1,2),(2,2),(2,1)) = \frac{3}{36}$

$P(x = 3) = P((1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)) = \frac{5}{36}$

$P(x = 4) = P((1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1)) = \frac{7}{36}$

$P(x = 5) = P((1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1)) = \frac{9}{36}$

$P(x = 6) = P((1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)) = \frac{11}{36}$.

Untuk nilai-nilai x dapat ditentukan nilai-nilai dari P(x) yang berarti P(x) merupakan suatu fungsi yang disebut fungsi khusus atau disebut **Fungsi Probabilitas** dan dinotasikan dengan f(x).

Jadi dari contoh:

$f(1) = P(x = 1) = \frac{1}{36}$

$f(2) = P(x = 2) = \frac{3}{36}$

$f(3) = P(x = 3) = \frac{5}{36}$

$f(4) = P(x = 4) = \frac{7}{36}$

$f(5) = P(x = 5) = \frac{9}{36}$

$f(6) = P(x = 6) = \frac{11}{36}$

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) =$

$\sum P(x = v_i) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = \frac{36}{36} = 1.$

atau $\sum f(x) = 1$.

Definisi: Fungsi probabilitas untuk variabel random diskrit itu disebut juga distribusi probabilitas suatu fungsi p(x) disebut fungsi probabilitas bolan. $f(x) \geq 0$ dan $\sum f(x) = 1$ dan $\forall x \in x(y)$.

Contoh soal:

1. Dua dadu ditoss bersama-sama satu kali dan x adalah variabel random yang menyatakan jumlah mata dadu yang muncul pada kedua dadu. Jika f(x), nyatakan P(x), tunjukkanlah:

   $$\sum f(x) = 1.$$

   Penyelesaian:

   $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(4,6),(5,6),(6,6)\}$

   $x(S) = (2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)$

   $f(2) = P(x = 2) = P(1,1) = \frac{1}{36}$

   $f(3) = P(x = 3) = P(1,2),(2,1) = \frac{2}{36}$

   $f(4) = P(x = 4) = P(1,3),(2,2),(3,1) = \frac{3}{36}$

   $f(5) = P(x = 5) = P(1,4),(2,2),(3,4),(4,1) = \frac{4}{36}$

   $f(6) = P(x = 6) = P(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1) = \frac{5}{36}$

   $f(7) = P(x = 7) = P(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1) = \frac{6}{36}$

$f(8) = P(x = 8) = P(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2) = \frac{5}{36}$

$f(9) = P(x = 9) = P(3,6),(4,5),(5,4),(6,3) = \frac{4}{36}$

$f(10) = P(x = 10) = P(4,6),(5,5),(6,4) = \frac{3}{36}$

$f(11) = P(x = 11) = P(5,6),(6,5) = \frac{2}{36}$

$f(12) = P(x = 12) = P(6,6) = \frac{1}{36}$

Jadi:

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)+f(9)+f(10)+f(11)+$
$f(12) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} +$
$\frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1$

maka $\sum f(x) = 1 \longrightarrow$ fungsinya adalah fungsi probabilitas.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x + 10}{60} & \text{untuk } x = 0,1,2,3,4. \\ 0 \text{ untuk yang lain.} \end{cases}$

Tentukan bahwa f(x) fungsi probabilitas.

Jawab:

f(x) = 0 untuk x yang lain, untuk x = 5,6,7,8 berarti
f(5) = 0, f(6) = 0 dan seterusnya.

Untuk $x \in x(s) \longrightarrow x(s) = (0,1,2,3,4)$

$f(0) = \frac{10}{60}$

$f(1) = \frac{11}{60}$

$f(2) = \frac{12}{60}$

$f(3) = \frac{13}{60}$

$f(4) = \frac{14}{60}$

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = \frac{10}{60} + \frac{11}{60} + \frac{12}{60} + \frac{13}{60} + \frac{14}{60}$
$= \frac{60}{60} = 1.$

Untuk selanjutnya dapat ditulis $f(x) = \frac{x+10}{60}$ untuk
$x = 0,1,2,3,4.$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{n(n + 1)} & \text{untuk } x = 0,1,2,\ldots n \\ 0 \text{ untuk yang lain.} \end{cases}$

Jawab:

Jawab soal ini cukup diperhatikan nilai-nilai f(x) untuk setiap x x(s), x(s) = (0,1,2,3,...,n)

$$f(0) = \frac{0}{n(n+1)} = 0$$

$$f(1) = \frac{2}{n(n+1)} = \ldots ?$$

$$f(2) = \frac{4}{n(n+1)} = \ldots ?$$

$$\vdots$$

$$f(n) = \frac{2n}{n(n+1)} = \ldots ?$$

$$\sum f(x) = 0 + \frac{2}{n(n+1)} + \frac{4}{n(n+1)} + \ldots + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{2n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2 + 4 + \ldots + 2(n-1) + 2n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2(1 + 2 + 3 + \ldots n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2.\frac{1}{2}\, n(n+1)}{n(n+1)} = 1.$$

Jadi f(x) merupakan fungsi probabilitas dan cara penulisan f(x) dapat disederhanakan menjadi:

$$f(x) = \frac{2x}{n(n+1)} \quad \text{untuk } x = 0,1,2,3,\ldots,n$$

4. Tunjukkan bahwa $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & \text{untuk } x = 0,1,2,3,4. \\ 0 & \text{untuk yang lain.} \end{cases}$

Penyelesaian dapat dilakukan sebagai berikut:

X_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

$$\Sigma f(x_i) = f(x_o) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$$
$$= 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10}$$
$$= \frac{10}{10} = 1.$$

$\forall x_i \in x(s)$ dan $f(x_i) \geq 0$.

Distribusi dan Grafik Fungsi Probabilitas

Daricontoh-contoh di atas dapat diambil kesimpulan bahwa fungsi f(x) itu fungsi probabilitas untuk variabel random diskrit karena $\Sigma f(x_i) = 1$ dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $(\forall)x_i$. Fungsi probabilitas disebut juga distribusi probabilitas karena nilai atau frekuensi relatif dari probabilitas itu akan tersebar sesuai dengan harga-harga variabelnya. Dengan diketahui harga variabel random dari fungsi probabilitas itu dapat pula diketahui harga f(x) dalam frekuensi relatif yaitu pada interval $0 \leq f(x_i) \leq 1$. Di samping variabel random diskrit ada pula variabel random kontiniu dan begitu juga dengan distribusinya.

Fungsi dengan variabel kontiniu dinyatakan dengan:

$$\Sigma f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Contoh-contoh Soal:

1. Diketahui $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{21} & \text{untuk } 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \text{ untuk x yang lain.} \end{cases}$

   Buktikanlah bahwa f(x) ≡ fungsi probabilitas.

   Bukti: Karena x ≡ variabel kontiniu, maka:

$$\Sigma f(x) = \int_1^4 \frac{x^2}{21} dx$$
$$= \frac{1}{21} \int_1^4 x^2 dx$$
$$= \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big]_1^4$$

$$= \frac{1}{63}(4^3 - 1^3)$$

$$= \frac{1}{63} \cdot 63 = 1.$$

Karena $\sum f(x) = 1$ dan $f(x) \geq 0$ maka $f(x)$ adalah fungsi probabilitas.

2. Diketahui fungsi probabilitas:

$$f(x) = \begin{cases} c(x^3 + 5) \text{ dimana } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 \text{ untuk } x \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Ditanyakan harga c bila:

a. x adalah variabel diskrit (x = 1,2,3,4,5).

b. x adalah variabel kontiniu.

Jawab:

a. $x = 1 \longrightarrow f(1) = 6c$

$x = 2 \longrightarrow f(2) = 13c$

$x = 3 \longrightarrow f(3) = 32c$

$x = 4 \longrightarrow f(4) = 69c$

$x = 5 \longrightarrow f(5) = 130c$

$\sum f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$

$= 6c + 13c + 32c + 69c + 130c$

$= 250c$ ....(1)

Karena $f(x) \equiv$ fungsi probabilitas $\longrightarrow \sum f(x) = 1$ ...(2)

$(1) = (2) \longrightarrow 250\, c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{250}$.

b. $x \equiv$ adalah variabel kontiniu.

$\sum f(x) = \int_1^5 c(x^3 + 5)dx$

$= c \int_1^5 (x^3 + 5)dx$

$= c\{\frac{1}{4}x^4 + 5x\}_1^5$

$= c\{\frac{1}{4}(625 - 1) + 5(5 - 1)\}$

$= 176c$ ....(1)

Karena f(x) adalah fungsi probabilitas $\longrightarrow$

$$\sum f(x) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(1) = (2) \longrightarrow 176c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{176}\,.$$

Fungsi Dengan Dua Variabel Bebas

Fungsi probabilitas dengan dua variabel bebas dinyatakan dengan:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x + qy) \text{ untuk } a \leq x \leq b \text{ dan } d \leq y \leq e \\ \\ 0 \quad \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Fungsi itu dapat dipandang x dan y sebagai variabel diskrit (x dan y bulat) dan dapat dipandang x dan y sebagai variabel kontiniu.

Untuk menentukan distribusi dari fungsi itu pada dasarnya sama saja dengan fungsi aljabar dengan dua variabel bebas;

$$Z = f(x,y) \text{ yaitu:}$$

1. Untuk x dan y diskrit atau bulat maka pada fungsi itu dapat dibuat distribusinya dengan mensubstitusikan harga x dan y seperti berikut:

$$\begin{array}{lcl} x = a\,,\ y = d & \longrightarrow & f(a,d) = \ldots\ldots\ldots \\ x = a\,,\ y = e & \longrightarrow & f(a,e) = \ldots\ldots\ldots \\ x = b\,,\ y = d & \longrightarrow & f(b,d) = \ldots\ldots\ldots \\ x = b\,,\ y = e & \longrightarrow & f(b,e) = \ldots\ldots\ldots \\ \hline & & \sum f(x,y) \quad = \ldots\ldots\ldots \end{array} +$$

2. Untuk x dan y kontinu dapat ditentukan;

$$\sum f(x,y) = \int_a^b \int_d^e f(x,y)\,dy\,dx.$$

Contoh: Diketahui f(x,y) = fungsi probabilitas seperti:

$$\text{Diketahui: } f(x,y) = \begin{cases} c(2x + y)\,, & 2 \leq x \leq 6\ ;\ 0 \leq y \leq 5 \\ \\ 0 \text{ untuk } x,y \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Ditanyakan harga c jika:

a. x,y adalah variabel diskrit (x,y bulat).

b. x,y adalah variabel kontiniu.

Jawab: a. x,y variabel diskrit (x,y bulat):

$x = 2 , y = 0 \longrightarrow f(2,0) = 4c$

$x = 2 , y = 1 \longrightarrow f(2,1) = 5c$

$x = 2 , y = 2 \longrightarrow f(2,2) = 6c$

$x = 2 , y = 3 \longrightarrow f(2,3) = 7c$

$x = 2 , y = 4 \longrightarrow f(2,4) = 8c$

$x = 2 , y = 5 \longrightarrow f(2,5) = 9c$

$x = 3 , y = 0 \longrightarrow f(3,0) = 6c$

$x = 3 , y = 1 \longrightarrow f(3,1) = 7c$

: : :

$\sum f(x,y) = 315\ c$

atau dapat pula distribusikan sebagai berikut:

X \ Y	0	1	2	3	4	5	Σ f(x,y)
2	4c	5c	6c	7c	8c	9c	39c
3	6c	7c	8c	9c	10c	11c	51c
4	8c	9c	10c	11c	12c	13c	63c
5	10c	11c	12c	13c	14c	15c	75c
6	12c	13c	14c	15c	16c	17c	87c
Σ f(x,y)	40c	45c	50c	55c	60c	65c	315c

Karena f(x,y) adalah fungsi probabilitas $315c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{315}$.

b. x,y variabel kontiniu maka:

$$\sum f(x,y) = \int_2^6 \int_o^5 c(2x + 4)dy\ dx$$

$$= c \int_2^6 (2xy + \tfrac{1}{2} y^2)\Big]_o^5 dx$$

$$= c \int_2^6 \{2x(5 - 0) + \tfrac{1}{2}(5^2 - 0^2)\}dx$$

$$= c \int_2^6 (10x + \tfrac{25}{2})dx$$

$$= c(5x^2 + \tfrac{25}{2} x)\Big]_2^6$$

$$= c\{5(36 - 4) + \tfrac{25}{2}(6 - 2)$$

$$= c\{160 + 50\}$$

$$= 210c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Karena $f(x,y) \equiv$ fungsi probabilitas $\longrightarrow \sum f(x,y) = 1 \ldots(2)$

$(1) = (2) \longrightarrow 210c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{210}$.

Grafik Fungsi Probabilitas

Untuk menggambarkan grafik dari fungsi probabilitas variabel random diskrit perlu kita tentukan lebih dahulu nilai probabilitasnya untuk setiap harga variabel bebas random diskritnya, dan kemudian cara menggambarkannya sama saja dengan fungsi-fungsi biasa yaitu dengan memakai sistem koordinat sumbu.

Contoh-contoh soal:

1. Dua dadu ditoss bersama-sama satu kali, x adalah variabel random yang menyatakan selisih dari mata kedua dadu itu. Nilai-nilai f(x) dapat dihitung sebagai berikut:

$x = 0 \longrightarrow P\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \longrightarrow f(0) = \frac{6}{36}$

$x = 1 \longrightarrow P\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,5),(5,4),(4,3),(3,2),$
$(2,1)\} \longrightarrow f(1) = \frac{10}{36},$

$x = 2 \longrightarrow P\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(6,4),(5,3),(4,2),(3,1)\} \longrightarrow$
$f(2) = \frac{8}{36}$

$x = 3 \longrightarrow P\{(1,4),(2,5),(3,6),(6,3),(5,2),(4,1)\} \longrightarrow f(3) = \frac{6}{36}$

$x = 4 \longrightarrow P\{(1,3),(2,6),(6,2),(5,1)\} \longrightarrow f(4) = \frac{4}{36}$

$x = 5 \longrightarrow P\{(1,6),(6,1)\} \longrightarrow f(5) = \frac{2}{36}.$

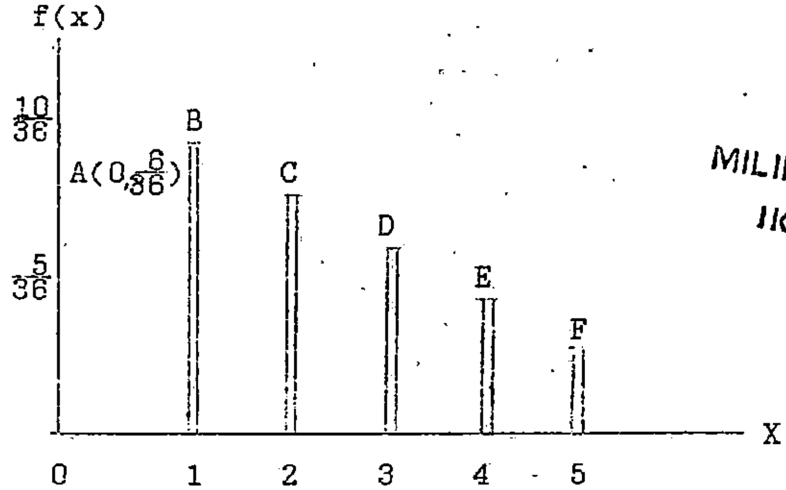
Grafik tabel dapat ditulis sebagai berikut:

Distribusi probabilitasnya adalah:

Mik	A	B	C	D	E	F
X_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Secara grafik:

Jadi gambarnya akan kelihatan seperti batang yang diciutkan yaitu batang A, B, C, D, E, dan F.

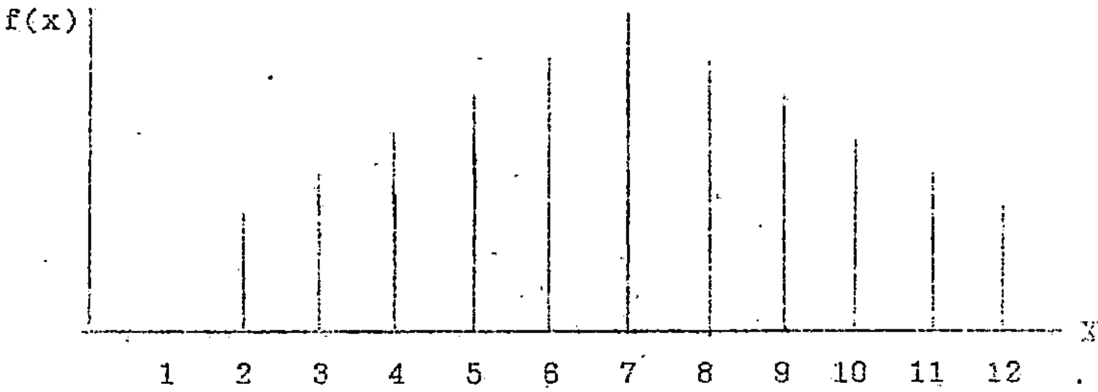


2. Dua dadu yang ditoss bersama-sama satu kali, x adalah variabel random yang menyatakan jumlah mata kedua dadu itu maka f(x) atau fungsi probabilitasnya di dapat seperti di-

bawah ini:

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Grafiknya adalah:



Gambar distribusi probabilitasnya adalah merupakan batang yang diciutkan.

Distribusi Probabilitas

Di bawah ini akan kita bicarakan beberapa macam distribusi teoritin dari variabel random diskrit, yaitu:

1. Distribusi Bernoulli

Seperti telah kita ketahui pada percobaan dengan mata uang atau dadu atau yang lainnya, didapat bermacam-macam hasil; umpamanya bila satu dadu ditoss satu kali didapat 6 hasil atau bila dua dadu ditoss satu kali didapat 36 hasil, atau bila dua mata uang ditoss satu kali didapat 4 macam hasil. Dengan pengambilan suaru kartu akan didapat 52 hasil.
Dari percobaan-percobaan itu dapat juga kita golongkan menjadi hanya dua macam yang akan terjadi, yaitu bila terjadi apa yang kita harapkan kita sebut **hasil** (sukses) dan bila terjadi apa yang tidak kita kehendaki disebut gagal. Dapat kita ambil dari percobaan-percobaan itu ruang sampelnya hanya $S = \{H,G\}$, $P(H)$ adalah probabilitas hasil

atau sukses, $P(G)$ adalah probabilitas gagal dengan pengertian $P(H) + P(G) = 1$ atau $P(G) = 1 - P(H)$. **Bernoulli** dalam hal ini melambangkan $P(H)$ dengan θ dan $P(G) = 1 - \theta$ distribusinya adalah dengan rumus:

$$f(x,\theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \text{ untuk } x = 0,1.$$

x adalah variabel menyatakan banyaknya sukses.

Contoh 1:

Suatu dadu ditoss dan disebut berhasil kalau terbuka mata 2, maka $P(H) = \theta = \frac{1}{6}$, maka rumus untuk distribusi **Bernoulli** ialah:

$$f(x,\theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \text{ untuk } x = \{0,1\}.$$

$$f(\theta,\tfrac{1}{6}) = (\tfrac{1}{6})^x(1 - \tfrac{1}{6})^{1-x} \text{ untuk } x = \{0,1\}.$$

$$= \frac{1^0}{6} \; \frac{(5)^1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$f(\theta,\tfrac{1}{6}) = \frac{1^1}{6}(1 - \frac{1}{6})^0$$

Contoh 2:

Tiga mata uang ditoss bersama-sama satu kali. Dinamakan hasil (sukses) bila menghasilkan 2M. Tentukanlah:

a. θ.

b. Rumus untuk distribusi Bernoulli yang terjadi.

c. Nilai-nilai distribusi.

Penyelesaian:

Tiga mata uang yang ditoss bersama-sama satu kali didapat:

S = {MMM,MMB,MBM,MBB,BMM,BBM,BBB}

H = {MMB,MBM,BMM}.

a. $P(H) = \theta = \frac{3}{8}$.

b. $f(x,\theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}$ untuk $x = 0,1$.

$$f(0,\tfrac{3}{8}) = \frac{3^0}{8}(1 - \tfrac{3}{8})^1 \longrightarrow f(0,\tfrac{3}{8}) = \frac{5}{8}$$

$$f(0,\tfrac{3}{8}) = \frac{3^1}{8}(1 - \tfrac{3}{8})^0 \longrightarrow f(1,\tfrac{3}{8}) = \tfrac{3}{8}$$

2. Distribusi Binomial

Distribusi Binomial ialah distribusi dengan n kali percobaan Bernoulli. Bila x kali yang diharapkan terjadi dari n kali percoabaan maka fungsi probabilitasnya ialah:

$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ dimana p = sukses dan q = gagal,
$x = 0,1,2,\ldots,n.$

atau

$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} \theta^x q(1 - \theta)^{n-x}$ dimana $x = 0,1,2,\ldots n$,
dan x = variabel, yang menyatakan banyak kali yang sukses dari n kali percobaan.

Contoh 1:

Dari satu mata uang yang ditoss n kali, dan H dikatakan hasil, G dikatakan gagal, $P(H) = \theta \longrightarrow P(G) = 1 - \theta$, dapat dibuatkan tabel sebagai berikut:

n	Ruang Sampel	X(S)	P(x)
1	(G,H)	{0,1}	$P(x=1)=P(H)=\theta, P(x=0)=P(G)=1-\theta$
2	(GG,GH,HG,HH)	{0,1,2}	$P(x=2)=P(HH)=\theta^2$ $P(x=1)=P(GH,HG)=2(1-\theta)\theta$ $P(x=0)=P(GG)=2(1-\theta)^2$
3	(GGG,GGH,GHG, HGG,GHH,HGH, HHH).	{0,1,2,3}	$P(x=3)=P(GGG)=\theta^3$ $P(x=2)=P(GHH,HGH,HHG)=3\theta^2(1-\theta)$ $P(x=1)=P(GGH,GHG,HGG)=3\theta(1-\theta)^2$ $P(x=0)=P(GGG)=(1-\theta)^3$
4 ⋮ n	⋮	⋮	⋮

Kalau kita perhatikan tabel di atas bahwa distribusi probabilitas dapat kita hubungkan dengan hasil suku dua dipangkatkan n atau binomial expansion. Jadi bila hasil dengan H dan gagal dengan G maka:

$$(G + H)^n = \binom{n}{o}G^n + \binom{n}{1}G^{n-1}H + \binom{n}{2}G^{n-2}H^2 + \ldots + \binom{n}{x}G^{n-x}H^x$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} G^x H^{n-x}$$

karenanya distribusi ini lebih terkenal dengan binomial dengan bentuk:

$b(x,n,\theta) = (\theta^x(1 - \theta)^{n-x}$ dimana $x = 0,1,2,3,\ldots n$.

Contoh 1:

Suatu mata uang distoss 5 kali. Tentukanlah:

a. Probabilitas M muncul 3 kali

b. Probabilitas M muncul 4 kali

c. Probabilitas M muncul 2 kali

d. Buat distribusi binomialnya.

Jawab:

Misal dikatakan sukses bila M muncul, $\theta = P(H) = \frac{1}{2}$

$$P(G) = 1 - \theta = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

mata uang ditoss 5 kali, $n = 5$, x adalah banyak M muncul atau $x = 3$, $x = 4$, dan $x = 2$.

a. $f(3) = \binom{5}{3}\frac{1}{2}^3(1-\frac{1}{2})^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{1}{2}^3 \cdot \frac{1}{2}^2 = \frac{5.4.3!}{3!2!} \cdot \frac{1}{2}^3 \cdot \frac{1}{2}^2$

$= 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

b. $f(4) = \binom{5}{4}\frac{1}{2}^4(1-\frac{1}{2})^{5-4} = \frac{5!}{4!(5 - 3)!} \cdot \frac{1}{2}^4 \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{5.4!}{4!1!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$.

c. $f(2) = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{1}{2}^2 \cdot \frac{1}{2}^3 = \frac{5.4.3!}{2!3!} \cdot \frac{1}{2}^2 \cdot \frac{1}{2}^3$

$= 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{10}{32}$.

d. $b(x;5,\frac{1}{2}) = \binom{5}{0} \frac{1}{2}^0(1 - \frac{1}{2})^5 + \binom{5}{1} \frac{1}{2}^1(1 - \frac{1}{2})^4 +$

$\binom{5}{2} \frac{1}{2}^2(1 - \frac{1}{2})^3 + \binom{5}{3} \frac{1}{2}^3(1 - \frac{1}{2})^2 +$

$\binom{5}{4} \frac{1}{2}^4(1 - \frac{1}{2}) + \binom{5}{5} \frac{1}{2}^5(1 - \frac{1}{2})^0.$

3. **Distribusi Poisson (Perancis)**

Distribusi Poisson adalah distribusi binomial dengan percobaan yang sangat besar sehingga n menuju tak berhingga atau n — dan nilai hasil atau θ sangat kecil, sedangkan nilai nθ adalah konstant. Dalam bentuk yang demikian perhitungan dengan binomial atau rumus;

$$b(x;n,\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1 - \theta)^{n-x}$$

tidak efisien. Untuk perhitungannya dipakai:

$$\lim_{n \to \infty} b(x;n,\theta)$$

sehingga didapat: $\lim_{n \to \infty} b(x;n,\theta) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ dimana $\theta = \frac{\lambda}{n}$.

Distribusi Poisson ini merupakan pendekatan yang baik dari distribusi binomial untuk $n \geq 50$ dan $n \leq 5$ dan cukup baik bila $n \geq 10$ dan $n \leq 1$.

Bukti Distribusi Poisson

$b(x;n,\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1 - \theta)^{n-x}$

$= \frac{n.n-1.n-2...n(x-1)}{1,2,3,...x} \frac{(\lambda)^x}{x!} (1 - \frac{x}{n})^{n-x}$

$= \frac{n.n-1.n-2...n-x+1}{n^x} \frac{\lambda^x}{x!} (1 - \frac{x}{n})^{n-x}$

$= 1.(1 - \frac{1}{n})\theta\ 1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{x-1}{n}) \frac{\lambda^x}{x!} (1 - \frac{x}{n})^{n-x}$

$\lim_{n \to \infty} b(x;n,\theta) = \lim_{n \to} 1(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{x-1}{n})\frac{\lambda^x}{x!}(1 - \frac{\lambda}{n})^{n-x}$

$= 1 . \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^x}{x!} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-x}$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n \to} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Jadi: $\lim_{n \to \infty} b(x;n,\theta) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

atau $P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-e} = e^{-x}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n \to} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot 1 = e^{-\lambda}$$

ingat : $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^n$.

Contoh soal:

10% dari alat-alat yang dihasilkan oleh suatu pabrik diketahui rusak. Diambil dari hasil pabrik itu sebagai sampel 10 buah. Berapa probabilitas terambil 2 dari 10 buah itu rusak ?

Jawab:

a. **Secara Distribusi Binomial**

Bila kemungkinan yang rusak adalah p = 0,1, misalkan x menunjukkan banyak yang rusak itu dari pemilihan yang 10 itu maka:

$$P(X=x) = \binom{n}{n}(\theta^x)(1-\theta)^{n-x}$$
$$P(X=2) = \binom{10}{2} 0.1^2 . 0{,}9^8$$
$$= \frac{10.9.8!}{2!\ 8!} . 0{,}01 . 0{,}9^8$$
$$= 45 . 0{,}01 . 0{,}9^8$$
$$= 0{,}1937 \quad 0{,}19.$$

b. **Secara Distribusi Poisson**

Dari $\theta = \frac{\lambda}{n} \longrightarrow = \theta n = 10.0{,}1 = 1 \longrightarrow \lambda = 1$

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \longrightarrow P(x=2) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{5,4364} = 0,1839 \quad 0,18$$

Distribusi dengan variabel random kontiniu

Distribusi dengan variabel random kontiniu yang kerap kali digunakan orang untuk membandingkan hasil penelitian yang ditentukan adalah Distribusi Normal. Distribusi ini disebut juga distribusi **GAUSSIAN**. Distribusi itu dinyatakan operasi:

$$f(x) = P(x \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v-u)^2}{2\;{}^2}} \, dv.$$

Dalam hal yang demikian dikatakan bahwa variabel random x adalah distribusi normal dengan rata-rata x_0 dan variansi = variasi baku kuadrat jika kita misalkan z adalah Nilai Standard yang berkorespondensi dengan x maka:

$$Z = \frac{x - u_0}{\sigma}$$

atau dalam probabilitas:

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}.$$

np = adalah rata-rata

p = probabilitas yang diharapkan

q = 1 - p.

Contoh soal:

1. Suatu mata uang ditoss 500 kali. Tentukan probabilitas bahwa mata uang jatuh dengan muka 250 kali dengan beda 10 kali dan beda 20 kali.

   Jawab:

   $$p = \tfrac{1}{2}\ , \ q = 1 - p\ , \ q = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$= np \longrightarrow = 500 \cdot \tfrac{1}{2} = 250$$
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{500} = 11,18.$$

x= mata uang jatuh dengan muka

a mata uang jatuh dengan muka berbeda 10 dari 500 ⟶
$240 \leq x \leq 260$ dan $239,5 < x \leq 260,5$.

$$Z_{239,5} = \frac{239,5 - 250}{11,18} \longrightarrow Z_{239,5} = -0,94$$

$$Z_{260,5} = \frac{260,5 - 250}{11,18} \longrightarrow Z_{260,5} = 0,94$$

Dengan melihat tabel kurva normal Z = 0,94 - 0,3264.
Jadi luas daerah yang diarsir 2 x 0,3264 = 0,6528 bagian.

Soal-Soal:

1. Tentukanlah probabilitas bahwa pada toss sebuah mata uang yang berimbang (fair) tiga kali dan muncul:
   a). 3M
   b). 2B dan 1M
   c). paling kurang 1M
   d). paling banyak 1B.

2. Tentukan probabilitas adari 5 kali mentoss suatu dadu jika muncul mata 3:
   a). dua kali
   b). paling banyak muncul 1 kali.

3. Tentukan probabilitas bahwa pada sebuah keluarga beranak 4 jika:
   a). paling kurang beranak 1 laki-laki
   b). paling kurang 1 laki-laki dan 1 perempuan.

4. Jika 20% dari buah baju hasil suatu pabrik adalah rusak. Tentukanlah kemungkinan probabilitas dari pengambilan cara random dari 4 buah baju jika terambil:

   a). 1

   b). 0

   c). kecil dari 2.

BAB VI

HARAPAN MATEMATIKA (MATEMATIKA EXPECTATION)

Definisi dari Matematis

Konsep yang sangat penting pada teori kemungkinan dan Statistik adalah harapan matematis atau harga yang diharapkan atau harapan dari suatu variabel random.

Untuk suatu variabel random deskrit X mempunyai kemungkinan-kemungkinan harga X_1, X_2, ... , X_n.
Harapan X secara sistimatika ditentukan seperti:

$$E(X) = X_1P(X=X_1) + \ldots + X_nP(X=X_n) = \sum_{1=1}^{n} X_1P(X=X_j)$$

Jika $P(X=X_j) = f(X_j)$

$$E(X) = X_1f(X=X_1) + X_2f(X_2) + \ldots + X_nP(X_n) = \sum_{1=1}^{n} X_jE(X_j)$$
$$= \sum X\, f(X).$$

Contoh 1:

Tentukan harapan dari kemungkinan mata dari sepasang dadu yang ditoss.

Misalkan X variabel yang menyatakan dadu pertama terbuka dengan mata mata 1,2,3,4,5 atau 6, maka:

$$E(X) = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6}$$
$$= \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{3}{6} + \tfrac{4}{6} + \tfrac{5}{6} + \tfrac{6}{6}$$
$$= \tfrac{21}{6}$$
$$= \tfrac{7}{2}.$$

Bila Y variabel yang menyatakan mata dadu kedua terbuka dengan mata 1,2,3,4,5 atau 6, maka:

$$E(Y) = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6}$$
$$= \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{3}{6} + \tfrac{4}{6} + \tfrac{5}{6} + \tfrac{6}{6}$$
$$= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6}$$
$$= \tfrac{21}{6}$$
$$= \tfrac{7}{2}.$$

Jadi $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Jika $F(X) = F(X_2) \ldots = F(X_n)$, maka

$$\Sigma (X) = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \text{ atau aritmatic.}$$

Untuk variabel random yang kontiniu X dengan fungsi F(X). Ekspektasi dari X ditentukan seperti:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, F(X)dx.$$

Ekspektasi X kerapkali fungsi tersebut rata-rata hitung dari X yang biasanya dilambangkan dengan M_x atau $\bar{X}$ apabila variabelnya telah dimengerti. Dan mean rata-rata hitung dari X menyatakan harga rata-rata dari X sehingga dengan demikian kita dapat menyatakan bahwa harga X tersebut disekitar harga rata-rata itu. Jadi ekspektasi itu disebut titik pusat kecenderungan.

Contoh 2:

Dimisalkan pada suatu permainan dengan memakai sebuah dadu yang seimbang. Seorang menang Rp.200,-. Jika dadu dengan mata dua terbuka, menang Rp.400,-. Jika dadu terbuka dengan mata 6. Jika mata dari dia tadik kalah dan tadik menang. Tentukanlah harapan (Exspektaction) dari kemungkinannya.

Jawab:

Misalkan X adalah variabel random yang mendapatkan kemenangan dari setiap toss menang terjadi atau tidak bila terbuka 1,2,3,4,5,6 yang dinamakan dengan X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6. Sedangkan probabilitasnya adalah $F(X_1)$, $F(X_2)$ ... $F(X_6)$.

Jadi nilai yang diharapkan (Expectasi) ialah:

$$\begin{aligned} E(X) &= X_1F(X_1) + X_2F(X_2) + X_3F(X_3) + X_4F(X_4) + X_5F(X_5) + X_6F(X_6) \\ &= 0 \cdot \tfrac{1}{6} + 200 \cdot \tfrac{1}{6} + 0 \cdot \tfrac{1}{6} + 400 \cdot \tfrac{1}{6} + 0 \cdot \tfrac{1}{6} + (-300)\tfrac{1}{6} \\ &= \frac{200}{6} + \frac{400}{6} - \frac{300}{6} \\ &= 50. \end{aligned}$$

Beberapa Teori dari Ekspektasi:

1. Jika C adalah suatu bagian konstan maka:

$$E(CX) = C\ E(X.$$

2. Jika X dan Y adalah variabel random maka:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

3. Jika X dan Y adalah variabel random bebas maka:

$$E(XY) = E(X)\ .\ E(Y).$$

VARIAN:

Kita telah ketahui bahwa ekspektasi dari variabel random X. Kerap kali disebut rata-rata atau mean yang dinotasikan dengan μ. Besaran lain yang dipentingkan juga pada teori kemungkinan dan statistik ialah varian ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Var\ (X) &= E(X - \mu)^2 \qquad Var\ (X) \text{ selalu positif} \\ &= E(X^2 - E\mu X + \mu^2) \\ &= \sum X^2 - 2\mu\ E(X) + \mu^2 \\ &= \sum X^2 - 2\mu\ \mu + \mu^2 \longrightarrow Var\ (X) = \sum X^2 - \mu^2. \end{aligned}$$

Standar deviasi:

$$X = \sqrt{Var\ (X)} = \sqrt{E(X - \mu)^2}$$

$$\text{atau} \qquad \sigma^2_x = \text{Varian}.$$

Jika X adalah variabel random distrik mempunyai fungsi probabilitas F(X) maka:

$$\text{Varian: } \sigma^2_x = E((X - \mu_o)^2) = \sum_{j=1}^{n} (\mu_1 - \mu_o)^2 = f(X_1)$$

Bila fungsi probabilitasnya dikatakan $F(X_1) = F(X_2) = \ldots F(X_n)$. Maka; Varian adalah:

$$= \frac{(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + (X_3 - \mu)^2 + \ldots + (X_n - \mu)^2}{n}$$

Contoh:

Beberapa Teori Varian:

1. $\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$
   dimana $\mu = E(X)$.
2. Jika C adalah konstan maka:
   $$Var\ (Cx) = C^2\ Var\ (X).$$
3. Besar $E(X - x)Y)$ adalah minim bila $a = m = E(x)$.
4. Jika X dan Y variabel random bebas:
   $Var\ (X + Y) = Var\ (X) + Var\ (Y) - \sigma x + y = \sigma^2 + \sigma y^2$
   $Var\ (X - Y) = Var\ (X) + Var\ (Y) - \sigma x - y = \sigma^2 + \sigma y^2$.

COVARIAN

Covarian adalah varian gabungan distribusi dari dua atau lebih fungsi probabilitas. Distribusi dari fungsi probabilitas dari variabel X dan distribusi fungsi probabilitas dari variabel Y dan juga didapat secara terpisah.
Di samping itu dapat juga kita pandang secara gabungan dan dengan demikian ditentukan:

1. $X = E(X - \mu_x)^2$
2. $Y^2 = E(Y - \mu_y)^2$
3. $\sigma_{xy} = Cov\ (X_1Y) = E(X - x)(Y - y)$.

Beberapa Teori Covarian

1. $Cov\ xy = E(xy) - E(x)(\ E(y) = E(xy) - xy$
2. Jika X dan Y variabel random bebas $xy = Cov\ (X,Y) = 0$
3. $Var\ (X + Y) = Var\ (X) + Var\ (Y) + 2\ Cov\ (X,Y)$
   atau $\sigma x + y = \sigma x + \sigma y + 2\ Cov\ (X,Y)$
4. $(\sigma xy) \leq x\sigma y$.

Korelasi: Jika dari fungsi $f(x,y)$, x dan y adalah variabel random bebas, secara sendiri-sendiri dapat ditentukan ekspektasinya varian dan deviasi bakunya.
Di samping itu antara variabel x dan variabel y dapat pula dicari variansi gabungan atau covarian.
Berapa besar hubungan korelasi antara variabel x

dan variabel y yang disebut dengan koefisien korelasi dapat dicari dengan:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

dimana: $_{xy}$ = deviasi baku gabungan variael x dan variabel y

σ_x = deviasi baku variabel x

σ_y = deviasi baku variabel y.

MOMENT

Moment ke 2 dari satu variabel random X terhadap rata-rata X disebut juga sentral momen ke R dan ditentukan oleh:

$$\mu r = E(X - \mu)^r$$

dimana r = 0,1,2,3,... selanjutnya

$\mu_o = 1 \quad \mu_1 = 0 \quad = \sigma^2$ momen ke 2 = Varian.

Momen untuk Variabel adalah:

$$\mu_r = \sum_{1=1}^{n} (\mu_j - \mu_o)\ f(\mu_o) = (\mu - \mu_o)^2\ f(\mu).$$

CHEBYSREV'S INEGUALITY (Ketidaksamaan Cheby shev)

Suatu segi yang penting juga pada teori kemungkinan statistik ialah ketidaksamaan Chey shev.

Ketidaksamaan Cheby shev

Misalkan X adalah variabel random (diskrit atau kontinu) dan mempunyai satu dan varian, maka jika E adalah suatu bilangan positif adalah maka:

$$(/k - \mu_o/ \geq E) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon\ 2}$$

atau

$$E = k \longrightarrow P(/k - \mu_o/ \geq k\ ) \leq \frac{1}{k^2}$$

Jika k = 2 $\longrightarrow P(/k - \mu_o \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{k^2} = 0,25$

atau

$$P(/k - \mu_o < 2\sigma) \geq 0,75.$$

Contoh Soal:

1. Diketahui:

$$f(x) = \begin{cases} Cx^3 & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{untuk x yang lain} \end{cases}$$

Adalah fungsi probabilitas.

Ditanya:

a. Harga C bila x = 1,2,3,4,5

b. Harga C bila x variabel kontinu

c. Setelah didapat harga C dari (a) tentukan E(X)

d. Setelah didapat harga C dari (b) tentukan E(X).

Jawab:

a. $f(1) = C$

$f(2) = 8C$

$f(3) = 27C$

$f(4) = 64C$

$f(5) = 125C$

$$\sum f(x) = C + 8C + 27C + 64C + 125C$$
$$= 225C.$$

Karena fungsi adalah fungsi probabilitas $\longrightarrow \sum f(x) = 1$

maka: $225C = 1$

$$C = \frac{1}{225}.$$

b. $\sum f(x) = \int_1^5 C\ Cx^3 dx = C \int_1^5 x^3 dx$

$$= C\ \frac{1}{4}\ x^4]_1^5 = C\ \frac{1}{4}\ (625 - 1).$$

Karena fungsi probabilitas $\longrightarrow \sum f(x) = 1$ maka:

$$156C = 1$$
$$C = \frac{1}{156}.$$

c. $E(X) = X_1P(X=X_1)+X_2P(X=X_2)+X_3P(X=X_3)+X_4P(X=X_4)+X_5P(X=X_5)$

$$= 1\ .\ \frac{1}{225} + 2\ .\ \frac{8}{225} + 3\ .\ \frac{27}{225} + 4\ .\ \frac{64}{225} + 5\ .\ \frac{125}{225}$$

$= \frac{1 + 16 + 81 + 256 + 625}{225}$

$= \frac{979}{225} = 4{,}35.$

d. $E(X) = C \int_1^5 X\, f(x) = dx$

$= \frac{1}{156} \int_1^5 X \, . \, X^3 \, dx$

$= \frac{1}{156} \cdot \frac{1}{5} X^5 \,]_1^5$

$= \frac{1}{156} \cdot \frac{1}{5} (3125 - 1)$

$= \frac{3125}{780} = 4{,}005.$

2. Jika diketahui fungsi probabilitas

$$f(x,y) = \begin{cases} c(2x + y) \text{ untuk } 2 \leq x \leq 6 \; ; \; 0 \leq y \leq 5 \\ 0 \text{ untuk } x, \, y \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Ditanyakan:

a. Bila x dan y variabel random bebas diskrit atau x dan y bulat, tentukanlah:

a). Harga c.

b). Jika harga c telah didapatkan, tentukan:

1). $\epsilon(x)$	7). Var(y)
2). $\epsilon(x^2)$	8). σy (deviasi baku y)
3). Var(x)	9). ϵ (xy)
4). σ_x (deviasi baku x)	10). Covar(xy)
5). $\epsilon(y)$	11). σxy (deviasi baku xy)
6). $\epsilon(y^2)$	12). ρ (korelasi antara x dan y).

b. Bila x dan y variabel random bebas kontinu, tentukan pula:

a). Harga c

b). Jika harga c telah didapatkan, tentukan:

1). $\in(x)$
2). $\in(x^2)$
3). Var(x)
4). σx
5). $\in(y)$
6). $\in(y^2)$
7). Var(y)
8). σy
9). $\in(xy)$
10). Covar(xy)
11). σxy
12). ρ .

Jawab:

a.a).

X \ Y	0	1	2	3	4	5	$\sum f(x,y)$
2	4c	5c	6c	7c	8c	9c	39c
3	6c	7c	8c	9c	10c	11c	51c
4	8c	9c	10c	11c	12c	13c	63c
5	10c	11c	12c	13c	14c	15c	75c
6	12c	13c	14c	15c	16c	17c	87c
$\sum f(x,y)$	40c	45c	50c	55c	60c	65c	315c

Karena f(x,y) ≡ fungsi probablitas maka $\sum f(xy) = 1$.
Jadi $315c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{315}$.

b). Dengan harga c = 315, maka:

1). $\in(x) = 2(39c) + 3(51c) + 4(63c) + 5(75c) + 6(87c)$
$= 78c + 153c + 252c + 375c + 522c$
$= 1380c.$

Jadi $\in(x) = \frac{1380}{315}$.

2). $\in(x^2) = 4(39c)+9(51c)+16(63c)+25(75c)+36(87c)$
$= 156c + 459c + 1008c + 1875c + 3132c$
$= 6630c.$

Jadi $\in(x^2) = \frac{6630}{315}$.

3). $Var(x) = \in(x^2) - \in(x)^2$

$= \frac{6630}{315} - \frac{1904400}{99225}$

$= 21,04762 - 19,19274$

$= 1,85488.$

4). $x = \sqrt{1,85488} = 1,36194$

atau $\sigma_x = 1,36.$

5). $\in(y) = 0.40c+1.45c+2.50c+3.55c+4.60c+5.65c$

$= 45c + 100c + 165c + 240c + 325c$

$= 875c.$

Jadi $\in(y) = \frac{875}{315}.$

6). $\in(y^2) = 0^2.40c+1^2.45c+2^2.50c+3^2.55c+4^2.60c+5^2.65c$

$= 45c + 200c + 495c + 960c + 1625c$

$= 3325c$

$\in(y^2) = \frac{3325}{315}.$

7). $Var(y) = \frac{3325}{315} - (\frac{875}{315})^2 = 10,56 - \frac{765625}{99225}$

$= 10,56 - 7,72 = 2,84.$

8). $\sigma_y = \sqrt{Var\ y} = \sqrt{2,84} = 1,69.$

9). $\in(xy) = 2.0.4c+2.1.5c+2.2.6c+2.3.7c+2.4.8c+2.5.9c+$
$+3.0.6c+3.1.7c+3.2.8c+3.3.9c+3.4.10c+$
$+3.5.11c+4.0.8c+4.1.9c+4.2.10c+4.3.11c+$
$+4.4.12c+4.5.13c+5.0.10c+5.1.11c+5.2.12c+$
$+5.3.13c+5.4.14c+5.5.15c+6.0.12c+6.1.13c+$
$+6.2.14c+6.3.15c+6.4.16c+6.5.17c$

$= 10c+24c+42c+64c+90c+21c+48c+81c+120c+165c+$
$+36c+80c+132c+192c+260c+55c+120c+195c+280c+$
$+375c+78c+168c+275c+384c+510c$

$= 3800c$

$\in(xy) = \frac{3800}{315}.$

10). $Covar(xy) = \in(xy) - \in(x)\in(y)$

$= \frac{3800}{315} - \frac{1380}{315} \cdot \frac{875}{315}$

$= 12,063 - \frac{1207500}{99225}$

$= 12,063 - 12,169$

$= 0,1063.$

11). $xy = \sqrt{Covar(xy)} = \sqrt{0,1063} = 0,32.$

12). $\rho = \frac{\sigma xy}{\sigma_x \sigma_y} \longrightarrow \rho = \frac{0,32}{1,36 \cdot 1,69} \longrightarrow \rho = \frac{0,32}{2,2984}$

Jadi koefisien korelasinya = 0,139.

3. Bila x,y variabel kontinu.

a. $\sum f(x,y) = \int_a^b \int_c^d c(2x + y)dy\, dx$

$= c \int_2^5 \int_o^6 (2x + y)dy\, dx$

$= c \int_2^6 (2xy + \frac{1}{2} y^2)]_o^5\, dx$

$= c \int_2^6 (2x(5) + \frac{1}{2}(5^2))dx$

$= c \int_2^6 (10x + \frac{25}{2})dx$

$= c\{5x^2 - \frac{25}{2} x\}]_2^6$

$= c\{5(36 - 4) - \frac{25}{2}(6 - 2)\}$

$= c\{160 - 50\}$

$= 210c.$

Karena f(x0 $\equiv$ fungsi probabilitas $\sum f(xy) = 1$.

Jadi 210c = 1 $\longrightarrow$ $c = \frac{1}{210}$.

b. Dengan $c = \frac{1}{210}$, maka:

1). $(x) = c \int_2^6 \int_0^5 x(2x + y)dy\, dx$

$= c \int_2^6 \int_0^5 (2x^2 + xy)dy\, dx$

$= c \int_2^6 (2x^2y + \frac{1}{2} xy^2)]_0^5\, dx$

$= c \int_2^6 (2x^2.5 + \frac{1}{2} x(25))dx$

$= c \int_2^6 (10x^2 + \frac{25}{2} x)dx$

$= c\{\frac{10}{3} x^3 + \frac{25}{4} x^2\}]_2^6$

$= c\{\frac{10}{3} (6^3 - 2^3) + \frac{25}{4} (6^2 - 2^2)\}$

$= c\{\frac{10}{3} (216 - 8) + \frac{25}{4} (36 - 4)\}$

$= (693 + 200)c = 893c.$

Jadi $\in (x) = \frac{893}{210}$.

2). $\in (x^2) = c \int_2^6 \int_0^5 x^2(2x + y)dy\, dx$

$= c \int_2^6 \int_0^5 (2x^3 + x^2y)dy\, dx$

$= c \int_2^6 (2x^3y + \frac{1}{2} x^2y^2)]_0^5\, dx$

$= c \int_2^6 (2x^3(5 - 0) + \frac{1}{2} x^2(25 - 0)dx$

$$= c \int_2^6 (10x^3 + \frac{25}{2}x^2)dx$$

$$= c(\frac{10}{4}x^4 + \frac{25}{6}x^3)]_2^6$$

$$= c\{\frac{10}{4}(6^4 - 2^4) + \frac{25}{6}(6^3 - 2^3)\}$$

$$= c\{\frac{10}{4}(1296 - 16) + \frac{25}{6}(216 - 8)\}$$

$$= c\{3200 + 866\}$$

$$= c(4066) = 4066c$$

$$\in (x^2) = \frac{4066}{210}.$$

3). $$\mathrm{Var}(x) = (x^2) - (x)^2$$

$$= \frac{4066}{210} - (\frac{893}{210})^2$$

$$= 19,36 - \frac{797449}{44101}$$

$$= 19,36 - 18,08 = 1,28.$$

4). $\sigma x = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} = 1,13.$

5). $$\in(y) = c \int_2^6 \int_o^5 y(2x + y)dy\,dx$$

$$= c \int_2^6 \int_o^5 (2xy + y^2)dy\,dx$$

$$= c \int_2^6 xy^2 + \frac{1}{3}y^3)]_o^5 dx$$

$$= c \int_2^6 \{x(25) + \frac{1}{3}(5^3)\}dx$$

$$= c\{\frac{25}{2}x^2 + \frac{125}{3}x\}]_2^6$$

$$= c\{\frac{25}{2}(36 - 4) + \frac{125}{3}(6 - 2)\}$$

$$= c(400 + 167) = 567c.$$

$$(y) = \frac{567}{210}.$$

6). $\in(y^2) = c \int_2^6 \int_0^5 y^2(2x + y)dy\,dx$

$$= c \int_2^6 \int_0^5 (2xy^2 + y^3)dy\,dx$$

$$= c \int_2^6 (\tfrac{2}{3}xy^3 + \tfrac{1}{4}y^4)]_0^5\,dx$$

$$= c \int_2^6 \{\tfrac{2}{3}x(125) + \tfrac{1}{4}(625)\}dx$$

$$= c \int_2^6 (\tfrac{250}{3}x + \tfrac{625}{4})dx$$

$$= c\{\tfrac{250}{6}x^2 + \tfrac{625}{4}x)]_2^6$$
$$= c\{\tfrac{250}{6}(36 - 4) + \tfrac{625}{4}(6 - 2)\}$$
$$= (133 + 625)c = 1958c.$$

$\in(y^2) = \frac{1958}{210}$.

7). $Var(y) = \frac{1958}{210} - (\frac{567}{210})^2 = 9,32 - 7,29 = 2,03$

8). $\sigma y = \sqrt{Var(y)} = \sqrt{2,03} = 1,4247 \cong 1,42.$

9). $\in(xy) = c \int_2^6 \int_0^5 xy(2x + y)dy\,dx$

$$= c \int_2^6 \int_0^5 (2x^2y + xy^2)dy\,dx$$

$$= c \int_2^6 (x^2y^2 + xy^2)dy\,dx$$

$$= c \int_{2}^{6} (x^2y^2 + \tfrac{1}{3}xy^3)]_{o}^{5}\, dx$$

$$= c \int_{2}^{6} (x^2(25) + \tfrac{1}{3}x(125)dx$$

$$= c \int_{2}^{6} (25x^2 + \tfrac{125}{3}x)dx$$

$$= c(\tfrac{25}{3}x^3 + \tfrac{125}{3}x^2)]_{2}^{6}$$

$$= \{\tfrac{25}{3}(216 - 8) + \tfrac{125}{3}(6^2 - 4)\}c$$

$$= (1733 + 1333)c$$

$$= 3066c.$$

$$\in(xy) = \frac{3066}{210}.$$

10). $\text{Covar}(xy) = \in(xy) - \in(x)\in(y)$

$$= \frac{3066}{210} - \frac{893}{210} \cdot \frac{537}{210}$$

$$= 14,6 - \frac{506331}{44100}$$

$$= 14,6 - 11,48$$

$$= 3,12$$

11). $\sigma xy = \sqrt{\text{Covar}(xy)} = \sqrt{3,12} = 1,77.$

12). $\rho = \dfrac{\sigma xy}{\sigma x \sigma y} \longrightarrow \rho = \dfrac{1,77}{1,33 \cdot 1,42} \longrightarrow$

$$\rho = \frac{1,77}{1,8806} \longrightarrow \rho = 0,94.$$

DAFTAR PUSTAKA

Aries JR. Frank, 1964, **Calculus**, New York, Schaum's Outlines Series Mc Graw Hill Book Company.

Dajan Anto, 1986, **Pengantar Metoda Statistik** Jilid I, II, Penerbit LP3ES.

Hadi Sutrisno, 1983, **Statistik** Jilid I, II dan III, Penerbit Psikologi UGM.

J.Supranto, 1986. **Pengantar Probabilitas Statistik Induktif** Jilid I,II, Penerbit Erlangga.

J.Supranto, 1984, **Statistik Teori & Aplikasi** Jilid I, II, Penerbit Erlangga.

Menden Hall, 1987, **Statistik Untuk Manajemen dan Ekonomi**, Jilid I, II, Penerbit Erlangga.

Nugroho, 1982, **Sendi-Sendi Statistik**, Penerbit CV.Rajawali.

Sujana, 1986, **Metoda Statistika**, Penerbit Tarsito.

Spiegel. Murray R, 1975, **Probabilitas and Statistics** New York Schaum's Outlines Series Mc Graw Hill Book Company.