

1895 / HD / 89

TRIGONOMETRI I

PERPUSTAKAAN IKIP PADANG
KOLEKSI BIDANG ILMU
TIGAR SEPULUH
KARUS LAPAK DALAM PERGURUAN

D
i
s
u
s
u
n

Oleh

MILIK UPT PERPUSTAKAAN
IKIP PADANG

Dr. Murtiana Ramlu
Dosen FPMIPA IKIP Padang

Diperbanyak Oleh

BADAN PENERBIT FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN
ILMU PENGETAHUAN ALAM
(FPMIPA) - IKIP PADANG

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
(IKIP) PADANG

1989

KATA PENGANTAR

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa dan sesuai dengan kemampuan yang ada, buku dengan judul "Trigonometri I" telah dapat disusun sebagaimana mestinya.

Buku ini penulis susun untuk melengkapi bahan bacaan para pembaca yang berminat terhadap mata kuliah Trigonometri I khususnya dan bidang studi matematika umumnya.

Penulis menyadari bahwa buku ini mungkin ada kekurangan-kekurangan, oleh sebab itu kritik yang sehat dan membangun dari pembaca diterima dengan senang hati.

Akhirnya penulis mengucapkan terima kasih pada Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Padang yang telah bersedia membantu dalam penerbitan dan perbanyakannya buku Trigonometri I ini.

Padang, Agustus 1989

P e n u l i s .

MLP PETERUSTAKAAN IKIP PADANG	
DITERIMA TEL	<i>Okt. '89</i>
SUMBER/HARGA	<i>Hadiah</i>
KOLEKSI	<i>K1</i>
AL-FIV 11/89	<i>1895/hr/89 - 2 (2)</i>
	<i>514 Ram 20</i>

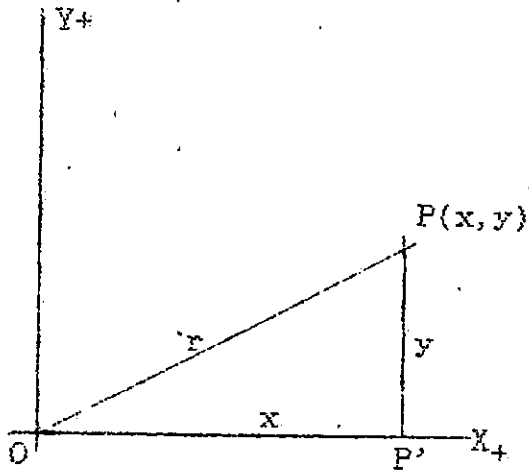
DAFTAR ISI

	Halaman
KATA PENGANTAR.....	ii
DAFTAR ISI.....	iii
I. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI.....	1
1.1. Rumus-rumus Dasar Trigonometri.....	1
1.2. Perbandingan Trigonometri dari Sudut yang Bercomplement.....	3
1.3. Contoh-Contoh.....	4
1.4. Soal-Soal.....	5
II. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI PADA KWADRAN-KWADRAN.....	7
2.1. Kwadrant II.....	7
2.2. Kwadrant III.....	8
2.3. Kwadrant IV.....	8
2.4. Sudut-sudut yang lebih besar dari pada 360°	9
2.5. Sudut Negatif.....	10
2.6. Contoh-Contoh.....	10
2.7. Soal-Soal.....	10
III. PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI.....	11
3.1. Contoh.....	11
3.2. Soal-Soal.....	12
IV. PENGGUNAAN DAFTAR LOGARITMA PADA TRIGONOMETRI.....	13
4.1. Contoh-Contoh.....	13
4.2. Contoh-Contoh.....	14
4.2. Soal-Soal.....	15

V.	MENGHITUNG LOGARITMA DARI Sin, Cos, tg dan Cotg	
	SUATU SUDUT.....	17
	5.1. Contoh-Contoh.....	17
	5.2. Contoh-Contoh.....	18
	5.3. Soal-Soal.....	19
VI.	PERBANDINGAN TRIGONOMETRI DARI JUMLAH DAN SELISIH	
	2 BUAH SUDUT.....	21
	6.1. Contoh-Contoh.....	22
	6.2. Soal-Soal.....	23
VII.	RUMUS-RUMUS SUDUT BANGKAP.....	24
	7.1. Contoh-Contoh.....	24
	7.2. Soal-Soal.....	25
	7.3. Rumus Jumlah dan Selisih dari Sinus dan Cosinus.....	25
	7.4. Contoh-Contoh.....	26
	7.5. Soal-Soal.....	28
VIII.	DALIL DE MOIVRE.....	29
	8.1. Contoh-Contoh.....	31
	8.2. Soal-Soal.....	32
IX.	DERET TRIGONOMETRI.....	34
	9.1. Soal-Soal.....	35
X.	L I M I T.....	36
	10.1. Contoh-Contoh.....	38
	10.2. Soal-Soal.....	39
XI.	ELIMINASI.....	40
	11.2. Soal-Soal.....	41

XII. PERSAMAAN TRIGONOMETRI SEDERHANA.....	43
12.1. Contoh-Contoh.....	46
12.2. Soal-Soal.....	49
XIII. GRAFIK FUNGSI.....	50
13.1. Contoh-Contoh.....	50
13.2. Soal-Soal.....	54
XIV. FUNGSI CYCLOMETRI.....	55
14.1. Contoh-Contoh.....	57
14.2. Soal-Soal.....	58
14.3. Penyelesaian Soal-Soal Campuran.....	60
14.4. Soal-Soal Tambahan.....	69
DAFTAR PUSTAKA.....	73

I. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI



Gambar 1.

Dalam aljabar telah dikenal juga sistem koordinat orthogonal. Sumbu x \perp sumbu y di titik O, titik P (x,y) terletak pada daerah $Y_+ OX_+$ (kuadran I). $OP = r$ membentuk $\angle \alpha$ dengan sumbu X_+ .

$PP' = y =$ ordinat titik P (proyektor).

$OP' = x =$ absis titik P (proyeksi). $r =$ proyektum.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{proyektor}}{\text{proyektum}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{proyeksi}}{\text{proyektum}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{proyektor}}{\text{proyeksi}}$$

$$\text{Cotg } \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{proyeksi}}{\text{proyektor}}$$

$$\text{Cosec } \alpha = \frac{r}{y} = \frac{\text{proyektum}}{\text{proyektor}}$$

$$\text{Sec } \alpha = \frac{r}{x} = \frac{\text{proyektum}}{\text{proyeksi}}$$

Kesimpulan:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\text{Cosec } \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\text{Sec } \alpha}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{Cotg } \alpha}$$

$$\sin \alpha \times \text{Cosec } \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \times \text{Sec } \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha \times \text{Cotg } \alpha = 1$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}} \quad \text{dan} \quad \boxed{\operatorname{Cotg} \alpha = \frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha}}$$

$\operatorname{Sin} \alpha$, $\operatorname{Cos} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{Cotg} \alpha$, $\operatorname{Sec} \alpha$, dan $\operatorname{Cosec} \alpha$ dinamakan perbandingan trigonometri suatu sudut.

1.1. Rumus-rumus Dasar Trigonometri.

Perhatikan gambar 1.

$\triangle OPP'$ siku-siku di P.

Menurut dalil Pythagoras : $(OP')^2 + (PP')^2 = OP^2$

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots\dots\dots(1)$$

Jika persamaan (1) di atas dibagi dengan r^2 , maka didapatlah:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{x}{r} \right)^2 + \left(\frac{y}{r} \right)^2 = 1$$

$$\boxed{\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Sin}^2 \alpha = 1}$$

Jika persamaan (1) dibagi dengan x^2 , maka didapat :

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 = \left(\frac{r}{x} \right)^2$$

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{Sec}^2 \alpha}$$

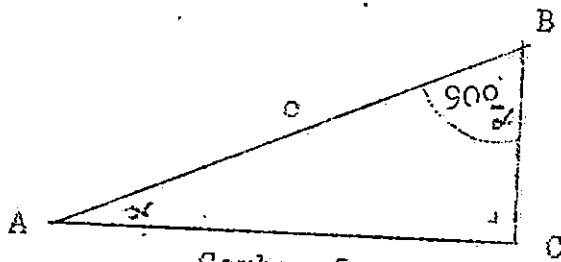
Selanjutnya jika persamaan (1) dibagi dengan y^2 , maka didapat pula :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$$

$$\boxed{\text{Cotg}^2 \alpha + 1 = \text{Cosec}^2 \alpha}$$

1.2. Perbandingan Trigonometri Dari Sudut Yang Bercomplement.



Gambar 2.

Perhatikan gambar 2.

Segitiga ABC siku-siku

$\angle A = \alpha$, maka

$\angle B = (90^\circ - \alpha)$.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha}$$

Selanjutnya juga didapat :

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{tg}(90^\circ - \alpha) = \text{Cotg} \alpha$$

$$\text{Cotg}(90^\circ - \alpha) = \text{tg} \alpha$$

$$\text{Sec}(90^\circ - \alpha) = \text{Cosec} \alpha$$

$$\text{Cosec}(90^\circ - \alpha) = \text{Sec} \alpha$$

dari keterangan di atas, nyatalah: Sinus dan Cosinus, tangen dan Cotg serta Secan dan Cosecan bercomplement sesamanya.

1.3. Contoh-Contoh.....

1.3. Contoh-Contoh :

1. Diketahui $\text{Cotg } \alpha = \sqrt{3}$

Hitunglah perbandingan trigonometri yang lain.

Jawab : $\text{Cotg } \alpha = \sqrt{3} \longrightarrow \text{tg } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$\text{Cotg}^2 \alpha + 1 = \text{Cosec}^2 \alpha$$

$$3 + 1 = \text{Cosec}^2 \alpha$$

$$\text{Cosec}^2 \alpha = 4$$

$$\text{Cosec } \alpha = \sqrt{4} = 2 \longrightarrow$$

$$\text{Sin } \alpha = \frac{1}{\text{Cosec } \alpha}$$

$$\text{Sin } \alpha = 1/2.$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Cos } \alpha}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1/2}{\text{Cos } \alpha}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ Cos } \alpha = 1/2$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} \longrightarrow \text{Sec } \alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

2. Buktikan : $\frac{\text{tg } x}{\text{Cosec } x} = (1 - \text{Cos}^2 x)\text{Sec } x.$

Bukti :

$$\frac{\text{tg } x}{\text{Cosec } x} = (1 - \text{Cos}^2 x)\text{Sec } x.$$

$$= \text{Sin}^2 x \cdot \frac{1}{\text{Cos } x}$$

$$= \frac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} \cdot \text{Sin } x$$

$$= \text{tg } x \cdot \frac{1}{\text{Cosec } x}$$

1.4. Soal-soal....

1.4. Soal-Soal :

1. Hitunglah semua perbandingan trigonometri dari sudut-sudut : 0° , 30° , 45° dan 90° .
2. Jika diketahui $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Hitunglah perbandingan trigonometri yang lain.
3. Buktikanlah : $(\text{tg } \alpha + \text{Cotg } \alpha) \text{Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha = 1$.
4. Buktikanlah : $(\text{tg}^2 x - \text{Sin}^2 x) \text{Cotg}^4 x = \text{Cos}^2 x$.
5. Buktikanlah : $\frac{\text{Sin}^2 x - \text{Cos}^2 x}{\text{tg}^2 x - 1} (1 + \text{tg}^2 x) = 1$.
6. Jika diketahui $\text{tg } \alpha = 1 + \sqrt{2}$. Hitunglah perbandingan trigonometri dari sudut $(90^\circ - \alpha)$. $\sqrt{1+1} \quad | \quad 1+\sqrt{2}$
7. Buktikanlah identitas yang berikut :

$$\frac{\text{Sin } \alpha \text{ Cos}(90^\circ - \alpha)}{\text{Sin } \alpha} + \frac{\text{Cos } \alpha \text{ Sin}(90^\circ - \alpha)}{\text{Cos } \alpha} = 1$$
8. $\text{tg}^2(90^\circ - \alpha) \text{Sin}^2 \alpha + \text{Cotg}^2(90^\circ - \alpha) \text{Cos}^2 \alpha = 1$.
9. $(2 \text{Sin } \alpha + \text{Cos } \alpha)^2 + (\text{Sin } \alpha - 2 \text{Cos } \alpha)^2 = 5$.
10. $(1 + \text{Sec } \alpha + \text{tg } \alpha)(1 + \text{Cosec } \alpha + \text{Cotg } \alpha) = 2(1 + \text{tg } \alpha + \text{Cotg } \alpha + \text{Sec } \alpha + \text{Cosec } \alpha)$.
11. $(\text{Cosec } \alpha - \text{Sin } \alpha)(\text{Sec } \alpha - \text{Cos } \alpha) = \frac{1}{\text{tg } \alpha + \text{Cotg } \alpha}$
12. $\frac{\text{tg } \alpha}{\text{Sec } \alpha - 1} = \frac{\text{Sec } \alpha + 1}{\text{tg } \alpha}$

13.

$$13. \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha .$$

$$14. \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} =$$

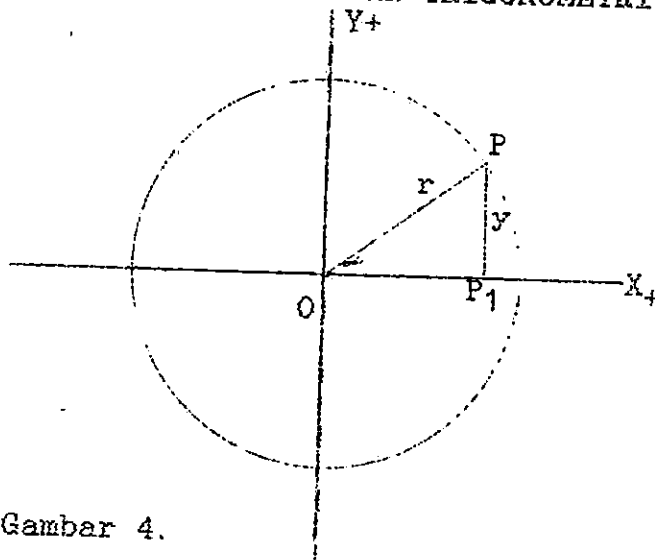
$$\frac{2}{1 - 2 \cos^2 \alpha} = \frac{2}{2 \sin^2 \alpha - 1}$$

$$15. \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha} \times \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + 1}$$

$$16. \sin^2 \alpha - \cos^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

$$17. \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

II. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI PADA KWADRAN-KWADRAN

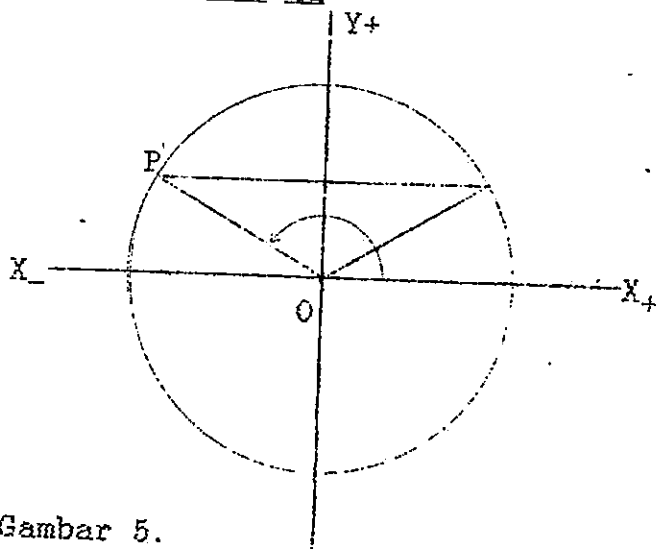


Gambar 4.

Daerah X_+OY_+ adalah kwadrand I.

Sudut-sudut yang besarnya antara 0° dan 90° , disebut sudut-sudut pada kwadrand I. Semua perbandingan trigonometri pada kwadrand I bertanda positif.

2.1. Kwadrand II



Gambar 5.

Daerah Y_+OX_- disebut kwadrand II (Gambar 5).

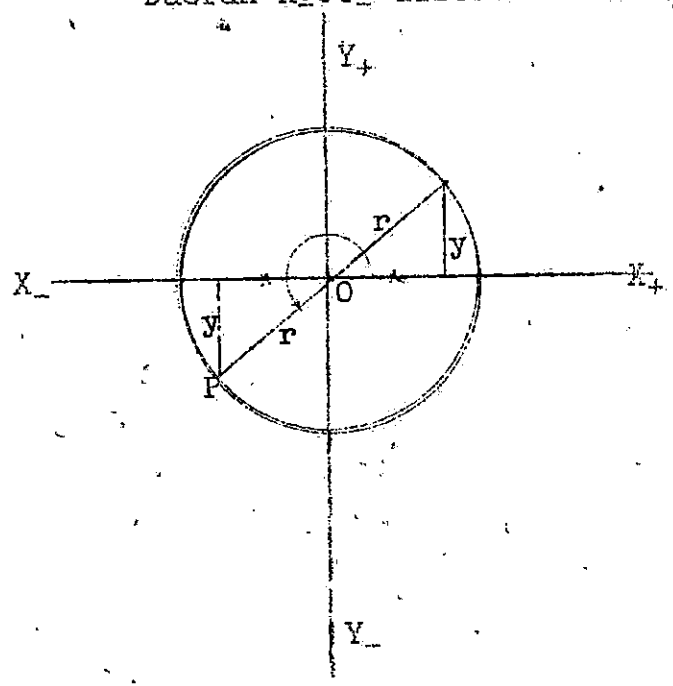
Sudut-sudut yang besarnya antara 90° dan 180° , dinamakan sudut-sudut pada kwadrand II. $\angle X_+OP$ adalah salah satu sudut pada kwadrand II. Perbandingan trigonometri pada kwadrand II ini, hanya Sinus dan Cosecans yang positif, yang lainnya bertanda negatif, seperti terlihat dibawah ini :

$\text{Sin}(180^\circ - \alpha)$	$= \text{Sin } \alpha$
$\text{Cos}(180^\circ - \alpha)$	$= -\text{Cos } \alpha$
$\text{tg}(180^\circ - \alpha)$	$= -\text{tg } \alpha$
$\text{Cotg}(180^\circ - \alpha)$	$= -\text{Cotg } \alpha$
$\text{Sec}(180^\circ - \alpha)$	$= -\text{Sec } \alpha$
$\text{Cosec}(180^\circ - \alpha)$	$= \text{Cosec } \alpha$

2.2. Kwadran III...

2.2. Kwadrant III.

Daerah X_+OY_- disebut kwadrant III (gambar 6).



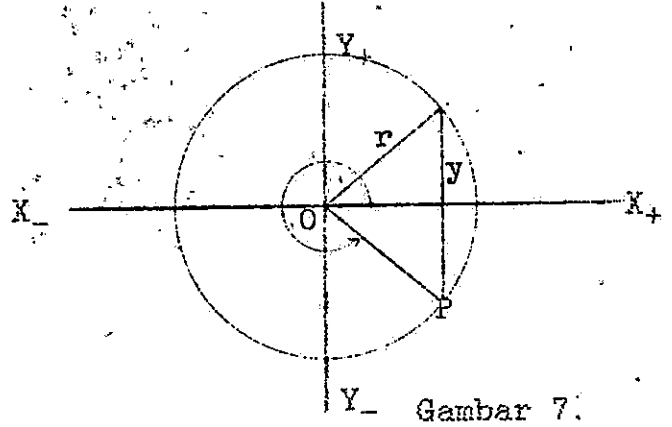
Sudut-sudut yang besarnya antara 180° dan 270° dinamakan sudut-sudut pada kwadrant III.

Sudut X_+OP adalah salah satu sudut pada kwadrant III. Perbandingan trigonometri pada kwadrant III ini hanya tg dan $Cotg$ yang bertanda positif, sedangkan yang lainnya bertanda negatif seperti terlihat dibawah ini.

Gambar 6.

$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ tg(180^\circ + \alpha) &= tg \alpha \\ Cotg(180^\circ + \alpha) &= Cotg \alpha \\ \sec(180^\circ + \alpha) &= -\sec \alpha \\ Cosec(180^\circ + \alpha) &= -Cosec \alpha \end{aligned}$
--

2.3. Kwadrant IV.



Daerah X_+OY_- disebut kwadrant IV (gambar 7).

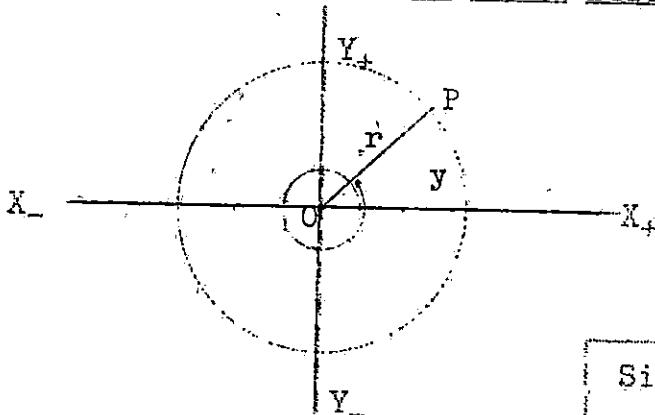
Sudut-sudut yang besarnya antara 270° dan 360° dinamakan sudut-sudut pada kwadrant IV. Sudut X_+OP adalah

Gambar 7.

salah satu sudut pada kwadrand IV. Perbandingan trigonometri dalam kwadran IV ini, hanya Cos dan Sec yang bertanda positif, sedangkan yang lainnya bertanda negatif, seperti terlihat di bawah ini.

$$\begin{aligned} \sin(360^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{Cotg}(360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{Cotg} \alpha \\ \operatorname{Sec}(360^\circ - \alpha) &= \operatorname{Sec} \alpha \\ \operatorname{Cosec}(360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{Cosec} \alpha \end{aligned}$$

2.4. Sudut-Sudut Yang Lebih Besar Dari Pada 360°



Gambar 8.

Pada gambar 8, terlihat $\angle X_+OP$ adalah $360^\circ + \alpha$, maka semua perbandingan trigonometrinya berlaku seperti pada kwadrand I. Jadi :

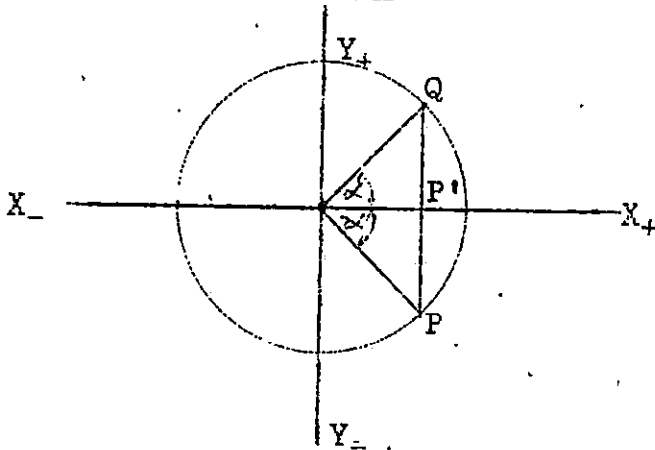
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + k.360^\circ) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha + k.360^\circ) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha + k.360^\circ) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{Cotg}(\alpha + k.360^\circ) &= \operatorname{Cotg} \alpha \\ \operatorname{Sec}(\alpha + k.360^\circ) &= \operatorname{Sec} \alpha \\ \operatorname{Cosec}(\alpha + k.360^\circ) &= \operatorname{Cosec} \alpha \end{aligned}$$

Tetapi juga ternyata bahwa $\operatorname{tg}(\alpha + k.180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$ dan $\operatorname{Cotg}(\alpha + k.180^\circ) = \operatorname{Cotg} \alpha$ ($k = \text{bilangan bulat pos}$).

Fungsi-fungsi trigono adalah fungsi yang berulang (periodik),

tidak berubah jika $\alpha + k \cdot 360^\circ$ untuk Sin dan Cos dan tidak berubah jika $\alpha + k \cdot 180^\circ$ untuk tg dan Cotg. Jadi perioda Sin dan Cos adalah 360° dan perioda tg dan Cotg adalah 180° .

2.5. Sudut Negatif.



Pada gambar 9, terlihat bahwa :

$$\sin(-\alpha) = \frac{-PP'}{OP} = \frac{-y}{r} = -\sin \alpha$$
 dengan cara yang sama dapat diperiksa, bahwa umumnya berlaku :

Gambar 9.

$\sin(-\alpha)$	$= -\sin \alpha$
$\cos(-\alpha)$	$= \cos \alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha)$	$= -\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{Cotg}(-\alpha)$	$= -\operatorname{Cotg} \alpha$
$\operatorname{Sec}(-\alpha)$	$= \operatorname{Sec} \alpha$
$\operatorname{Cosec}(-\alpha)$	$= -\operatorname{Cosec} \alpha$

2.6. Contoh-Contoh.

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

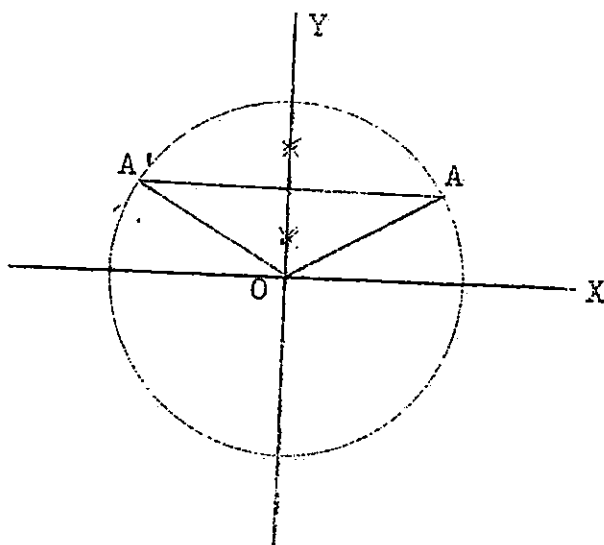
$$\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Soal-Soal :

1. Hitunglah semua perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut 0° , 90° , 180° , 270° dan 360° .
2. Hitunglah semua perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut 45° , 150° , 240° dan 315° .

III. PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI



Gambar 10.

Lingkaran $(0,1)$ adalah lingkaran trigonometri yang berjari-jari 1. Untuk mencari harga x yang memenuhi pertidaksamaan $\sin x > \frac{1}{2}$, diambil titik B, sehingga $OB = \frac{1}{2}r$. Kemudian buat garis melalui B // sumbu x sehingga memotong lingkaran $(0,1)$ di A dan A'.

A dan A' dihubungkan dengan O.

Sudut x yang memenuhi terletak diantara A dan A' yaitu busur AA' perhitungannya dalah sebagai berikut :

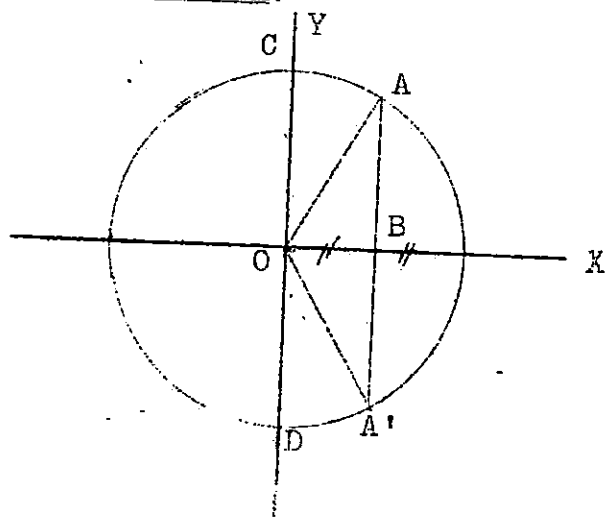
$$\sin x > \frac{1}{2}$$

$$\sin x > \sin 30^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ dan}$$

$$\sin x > \sin 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Jadi harga yang memenuhi: $30^\circ < x < 150^\circ$.

3.1. Contoh.



Gambar 11.

Hitunglah harga-harga ϕ antara 0° dan 360° yang memenuhi

$$\sec \phi \geq 2$$

Jawab:

Ambil $OB = \frac{1}{2}r$. Melalui B buat garis yang // sumbu Y, sehingga memotong lingkaran di A dan A', A dan A' dihubungkan dengan O.

Maka sudut yang memenuhi adalah antara A dan C dan antara A' dan D.

Perhitungannya :

$$\sec \varphi \geq 2$$

$$\frac{1}{\cos \varphi} \geq 2$$

$$1 \geq 2 \cos \varphi$$

$$1 - 2 \cos \varphi \geq 0$$

$$0 < \cos \varphi < \frac{1}{2}$$

$$\text{Untuk } \cos \varphi = \frac{1}{2} \longrightarrow \varphi_1 = 60^\circ$$

$$\varphi_2 = 300^\circ$$

Maka harga φ yang memenuhi untuk $0^\circ < \cos \varphi \leq \frac{1}{2}$ adalah $\angle AOC$ dan $\angle A'OD$ atau harga yang memenuhi adalah :

$$60^\circ \leq \varphi < 90^\circ \text{ dan}$$

$$270^\circ < \varphi \leq 300^\circ.$$

3.2. Soal-Soal.

1. Hitunglah harga z antara 0° dan 360° yang memenuhi $\text{tg } z \leq 1$.
2. Hitunglah harga φ antara 0° dan 360° yang memenuhi $\text{Cotg } \varphi < 1$.
3. Hitunglah harga x antara 0° dan 360° yang memenuhi $0 < \text{Cotg } x < 1\frac{1}{2}$.

IV. PENGGUNAAN DAFTAR LOGARITMA PADA TRIGONOMETRI

Untuk menghitung harga Sin, Cos, tg, dan Cotg suatu sudut dapat digunakan daftar III pada buku daftar logaritma. Untuk menghitung harga Sec dan Cosec diperoleh dari harga Cos dan Sin saja, karena $\text{Sin} \alpha \times \text{Cosec} \alpha = 1$ dan $\text{Cos} \alpha \times \text{Sec} \alpha = 1$.

4.1. Contoh-Contoh.

1. Hitunglah $\text{Sin } 23^\circ 15' 46''$.

Untuk menghitung ini, terlebih dahulu dihitung :

$$\text{Sin } 23^\circ 15' = 0,39474. \quad (\text{lihat daftar logaritma lima}$$

$$\text{Sin } 23^\circ 16' = 0,39501. \quad \text{desimal halaman } 93).$$

$$\text{Selisihnya} = 0,00027 = 27 e_5.$$

Kemudian hitung yang $46''$, maka harga $46'' =$

$$\frac{46}{60} \times 27 e_5 = 21 e_5 \text{ maka harga } \text{Sin } 23^\circ 15' 46'' \text{ ada-}$$

$$\text{lah : } 0,39474 + 21 e_5 = 0,39495.$$

2. Hitunglah $\text{Cos } 31^\circ 47' 25''$.

Terlebih dahulu dihitung :

$$\text{Cos } 31^\circ 47' = 0,85005. \quad (\text{lihat daftar logaritma, lima}$$

$$\text{Cos } 31^\circ 48' = 0,84989. \quad \text{desimal halaman } 97).$$

$$\text{Selisihnya} = 0,00016 = 16 e_5.$$

$$\text{Harga yang } 25'' = \frac{25}{60} \times 16 e_5 = 7 e_5.$$

$$\begin{aligned} \text{Maka harga } \text{Cos } 31^\circ 47' 25'' &= 0,85005 - 7 e_5 \\ &= 0,84998. \end{aligned}$$

3. Hitunglah.....

3. Hitunglah $\text{tg } 41^\circ 12' 53''$.

Terlebih dahulu dihitung :

$\text{tg } 41^\circ 12' = 0,87543$. (menurut daftar logaritma hala-

$\text{tg } 41^\circ 13' = 0,87595$. man 102).

Selisihnya $= 0,00052 = 52 e_5$

Harga $53'' = \frac{53}{60} \times 52 e_5 = 46 e_5$

Maka harga $\text{tg } 41^\circ 12' 53'' = 0,87543 + 46 e_5$

Selanjutnya dapat dilaksanakan menghitung kembali, yang merupakan kebalikan dari menghitung harga suatu Sin, Cos, tg, dan Cotg suatu sudut tertentu. Dalam hal ini yang diketahui harganya, dan akan dihitung adalah sudutnya.

4.2. Contoh-Contoh.

1. Diketahui $\text{Sin } \varphi = 0,6$.

Hitunglah harga φ yang memenuhi antara 0° dan 360° .

Jawab : $\text{Sin } 36^\circ 52' = 0,59995$. (dalam daftar logarit-

$\text{Sin } 36^\circ 53' = 0,60019$ ma halaman 99).

Jadi yang tepat $0,60000$ tidak ada dalam daftar.

Selisih harga $\text{Sin } 36^\circ 52'$ dengan $\text{Sin } 36^\circ 53'$ adalah $24 e_5$. Ternyata selisih harga $\text{Sin } \varphi$ dengan $\text{Sin } 36^\circ 52'$ adalah $5 e_5$. Untuk menentukan detiknya diperoleh dari:

$\frac{5}{24} \times 60'' = 13''$, maka :

$x_1 = 36^\circ 52' 13'' + k.360^\circ$.

$x_2 = 143^\circ 7' 47'' + k.360^\circ$.

2. Diketahui.....

2. Diketahui $\cos \varphi = \frac{1}{3} = 0,33333$.

Hitunglah φ yang memenuhi antara 0° dan 360° .

Jawab : $\cos 70^\circ 31' = 0,33353$. (dalam daftar logarit-
 $\cos 70^\circ 32' = 0,33326$. ma halaman 90).

Selisih harga $\cos 70^\circ 31'$ dengan harga $\cos 70^\circ 32'$ adalah $27 \cdot e_5$.

Selisih harga $\cos \varphi$ dengan $\cos 70^\circ 31'$ adalah $20 \cdot e_5$.

Untuk menentukan detiknya adalah :

$$\frac{20}{27} \times 60'' = 44'', \text{ maka :}$$

$$1' = 70^\circ 31' 44'' + k \cdot 360^\circ.$$

$$2 = 289^\circ 28' 16'' + k \cdot 360^\circ.$$

3. Diketahui $\cotg \varphi = \sqrt{6}$

Hitunglah harga φ yang memenuhi.

Jawab : $\cotg x = \sqrt{6} = 2,44949$

$\cotg 22^\circ 12' = 2,45043$. (dalam daftar logarit-

$\cotg 22^\circ 13' = 2,44839$. ma halaman 92).

Selisih harga $\cotg 22^\circ 12'$ dengan $\cotg 22^\circ 13'$ adalah

$204 \cdot e_5$. Selisih harga $\cotg \varphi$ dengan $\cotg 22^\circ 12'$ ada-

lah $94 \cdot e_5$. Untuk menentukan detiknya :

$$\frac{94}{204} \times 60'' = 28'', \text{ maka harga } \varphi = 22^\circ 12' 28'' + k \cdot 180^\circ.$$

4.3. Soal-Soal.

Hitunglah dengan mempergunakan daftar Sin pada daftar logaritma lima desimal.

1. $\sin 52^\circ 17' 38''$

2. $\sin 119^\circ 40' 23''$

3. $\cos \dots$

3. $\cos 69^\circ 44' 21''$
4. $\cos 215^\circ 53'$
5. $\sec 332^\circ 15' 47''$
6. $\operatorname{tg} 73^\circ 25' 7''$

Hitunglah harga x yang memenuhi antara 0° dan 360° dari:

7. $\operatorname{cosec} x = 18\frac{1}{2}$
8. $\sec x = 2\frac{1}{4}$
9. $\sin 3x = 0,6$
10. $\operatorname{tg} 4x = 2,3.$

314
Rum
t

PERPUSTAKAAN IKIP PADANG
KOLEKSI BIDANG ILMU
TIDAK DIPINJAMKAN
ABUSUS DENDA 10000
11/11/2018

V. MENGHITUNG LOGARITMA DARI ~~Sin, Cos, tg dan Cosec~~ SUATU SUDUT

Untuk menghitung harga logaritma dari Sin, Cos, tg dan Cote, suatu sudut dapat digunakan daftar II pada buku daftar logaritma. Untuk menghitung logaritma dari Sec dan Cosec, diperoleh dari kebalikannya.

$$\log \text{Sec } \alpha = \log \frac{1}{\text{Cos } \alpha} = \log 1 - \log \text{Cos } \alpha$$

$$\log \text{Cosec } \alpha = \log \frac{1}{\text{Sin } \alpha} = \log 1 - \log \text{Sin } \alpha$$

5.1. Contoh-Contoh.

1. Hitunglah $\log \text{Sin } 55^\circ 47' 19''$.

Jawab : Untuk menghitung ini, terlebih dahulu dihitung : $\log \text{Sin } 55^\circ 47' = 9,91746 - 10$. (lihat daftar $\log \text{Sin } 55^\circ 48' = 9,91755 - 10$. logaritma).

$$\text{Selisih } \log \text{Sin di atas} = 9 e_5.$$

kemudian hitung $19''$, maka harga $19'' = \frac{19}{60} \times 9 e_5 = 3 e_5$

$$\begin{aligned} \text{Maka harga } \log \text{Sin } 55^\circ 47' 19'' &= 9,91746 - 10 + 3 e_5 \\ &= 9,91649 - 10. \end{aligned}$$

2. Hitunglah $\log \text{Cos } 55^\circ 36' 41''$.

Jawab : Untuk menghitung ini, terlebih dahulu dihitung : $\log \text{Cos } 55^\circ 36' = 9,75202 - 10$. (lihat daftar $\log \text{Cos } 55^\circ 37' = 9,75184 - 10$. II logaritma).

$$\text{Selisih harga } \log \text{Cos di atas} = 18 e_5.$$

$$\text{Harga yang } 41'' = \frac{41}{60} \times 18 e_5 = 12 e_5$$

$$\begin{aligned} \text{Maka harga } \log \text{Cos } 55^\circ 36' 41'' &= 9,75202 - 10 - 12 e_5 \\ &= 9,75190 - 10. \end{aligned}$$

3. Hitunglah.....

3. Hitunglah, $\log \operatorname{tg} 55^{\circ} 41' 9''$.

Jawab : Terlebih dahulu dihitung :

$$\log \operatorname{tg} 53^{\circ} 41' = 10,16666 - 10. \quad (\text{dengan melihat daftar II halaman 67})$$

$$\log \operatorname{tg} 53^{\circ} 45' = 10,16693 - 10.$$

Selisih $\log \operatorname{tg} 55^{\circ} 44'$ dengan $\log \operatorname{tg} 55^{\circ} 43'$ adalah :
27 e_5 .

$$\text{Harga yang } 9'' = \frac{9}{60 \cdot 20} \times 27^9 e_5 = 4 e_5.$$

Jadi harga $\log \operatorname{tg} 55^{\circ} 44' 9''$ adalah :

$$= 10,16666 - 10 + 4 e_5$$

$$= 10,16670 - 10 \quad \text{atau} = 0,16670.$$

Selanjutnya dapat dilaksanakan menghitung kembali; yang merupakan kebalikan dari menghitung harga logaritma Sin, Cos, tg dan Ctg suatu sudut tertentu.

Dalam hal ini diketahui harganya, dan akan dihitung adalah sudutnya.

5.2. Contoh-Contoh.

1. Diketahui $\log \operatorname{Sin} x = 9,74968 - 10$.

Hitunglah harga x yang memenuhi antara 0° dan 360° .

Jawab : Lihat daftar logaritma halaman 67, maka terlihat :

$$\log \operatorname{Sin} 34^{\circ} 11' = 9,74961 - 10.$$

$$\log \operatorname{Sin} 34^{\circ} 12' = 9,74980 - 10.$$

Selisih harga $\log \operatorname{Sin} 34^{\circ} 11'$ dan $\log \operatorname{Sin} 34^{\circ} 12'$ adalah 19 e_5 .

Selisih harga $\log \operatorname{Sin} x$ dengan $\log \operatorname{Sin} 34^{\circ} 11'$ adalah

7 e_5 .

Untuk.....

Untuk menentukan detiknya diperoleh dari :

$$\frac{7}{19} \times 60'' = 22'', \text{ maka : } x_1 = 34^\circ 11' 22'' + k.360^\circ,$$

$$x_2 = 145^\circ 48' 38'' + k.360^\circ.$$

2. Diketahui $\log \operatorname{tg} \varphi = 0,16930$.

Hitunglah harga φ yang memenuhi antara 0° dan 360° .

Jawab : Menurut daftar logaritma didapat :

$$\log \operatorname{tg} 55^\circ 53' = 10,16911 - 10,$$

$$\log \operatorname{tg} 55^\circ 54' = 10,16938 - 10.$$

Selisih harga $\log \operatorname{tg} 55^\circ 53'$ dengan $\log \operatorname{tg} 55^\circ 54'$ adalah $27 e_5$.

Selisih harga $\log \operatorname{tg} \varphi$ dengan $\log \operatorname{tg} 55^\circ 53'$ adalah: $19 e_5$.

$$\text{Detiknya didapat : } \frac{19}{27} \times 60'' = 42''.$$

Jadi harga φ yang memenuhi adalah :

$$55^\circ 53' 42'' + k.180^\circ \text{ (k = bilangan bulat)}.$$

5.3. Soal-Soal.

Hitunglah soal-soal dibawah ini dengan mempergunakan daftar logaritma.

1. $\log \operatorname{Sin} 35^\circ 42' 7''$

2. $\log \operatorname{Cosec} 29^\circ 5' 33''$

3. $\log \operatorname{Sec} 343^\circ 18' 25''$

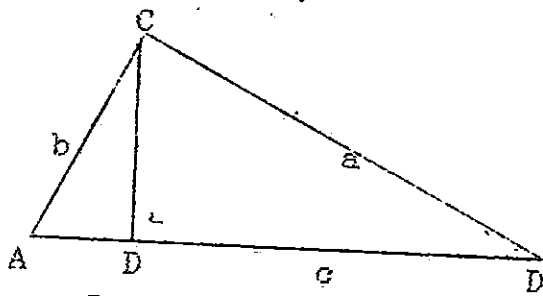
4. $\log \operatorname{tg} 44^\circ 19' 42''$

Hitunglah harga φ yang memenuhi antara 0° dan 360° , dengan mempergunakan daftar logaritma.

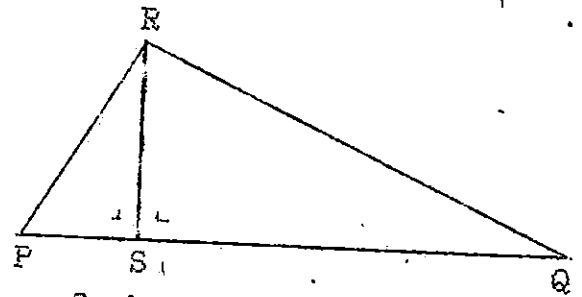
5. $\log \operatorname{Cotg} \dots$

5. $\log \operatorname{Cotg} \varphi = 0,24221$
6. $\log \operatorname{Sec} \varphi = 0,08632$
7. $\log \operatorname{tg} \varphi = 9,82201 - 10$
8. $\log \operatorname{Cos} \varphi = 9,98105 - 10$
9. $\log \operatorname{Cosec} \varphi = 0,21629 \checkmark$
10. $\log \operatorname{Sin} \varphi = 9,26094 - 10.$

VI. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI DARI JUMLAH DAN SELISIH 2 BUAH SUDUT



Gambar 12.



Gambar 13.

Dari gambar 12 didapat $CD = b \sin \alpha$, maka luas segitiga $ABC = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$. Dengan cara yang sama juga didapat luas segitiga $ABC = \frac{1}{2} ac \sin \beta$ dan $= \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Dari gambar 13 didapat :

$$RS = p \cos \alpha$$

$$RS = q \cos \beta$$

$$\text{Luas } \triangle PQR = \text{luas } \triangle PRS + \text{luas } \triangle QRS$$

$$\text{Luas } \triangle PQR = \frac{1}{2} p \cdot q \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{Luas } \triangle PRS = \frac{1}{2} p \cdot q \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{Luas } \triangle QRS = \frac{1}{2} p \cdot q \sin \alpha \cos \beta$$

$$\frac{1}{2} p \cdot q \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} p \cdot q \cos \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} p \cdot q \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

Jika $\alpha > \beta$, didapat :

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}$$

Untuk mendapatkan :

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\{90^\circ - (\alpha + \beta)\}$$

$$= \sin\{(90^\circ - \alpha) - \beta\}$$

$$= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \cos(90^\circ - \alpha) \sin \beta$$

Cos.....

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

Untuk mendapatkan :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \sin\{90^\circ - (\alpha - \beta)\} \\ &= \sin\{(90^\circ - \alpha) + \beta\} \\ &= \sin(90^\circ - \alpha)\cos\beta + \cos(90^\circ - \alpha)\sin\beta \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}$$

Karena rumus Sin dan Cos dari jumlah/selisih dua buah sudut maka didapat pulalah :

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}}$$

dan

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}}$$

6.1. Contoh-Contoh:

1. Hitunglah $\sin 15^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

2. Buktikanlah: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$

$$\begin{aligned} \text{Bukti: } \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} \\ &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \dots\dots \text{terbukti.}$$

6.2. Soal-Soal:

Buktikanlah :

1. $\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha) = 2 \cos \alpha \cos 45^\circ$.
2. $\cotg \alpha - \cotg \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$
3. $\frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{1 + \tg \alpha}{1 - \tg \alpha}$
4. $\cos(135^\circ + \alpha) + \sin(135^\circ - \alpha) = 0$.
5. Hitunglah tanpa daftar:
 - a. $\sin 75^\circ$
 - b. $\cos 15^\circ$
 - c. $\tg 15^\circ$
 - d. $\tg 75^\circ$
 - e. $\sin 15^\circ$
 - f. $\sin \frac{3}{\pi} + \cos \frac{3}{8} \pi$

Buktikanlah :

6. $\tg \varphi + \tg 2\varphi + \tg 3\varphi + \tg \varphi \tg 3\varphi \tg 4\varphi = \frac{\sin 6\varphi}{\cos 2\varphi \cos 4\varphi}$
7. $\tg(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + \tg \alpha}{1 - \tg \alpha} = \cotg(45^\circ - \alpha)$

VII. RUMUS-RUMUS SUDUT RANGKAP

Pada rumus-rumus $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, dan rumus $\text{tg}(\alpha + \beta)$, disubstitusikan $\alpha = \beta$; maka didapatkan:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{tg} 2\alpha = \frac{2 \text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$$

umumnya berlaku:

$$\sin n\alpha = 2 \sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}$$

$$\cos n\alpha = \cos^2 \frac{n\alpha}{2} - \sin^2 \frac{n\alpha}{2} =$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{n\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{n\alpha}{2} - 1$$

$$2 \text{tg} \frac{n\alpha}{2}$$

$$\text{tg} n\alpha = \frac{2 \text{tg} \frac{n\alpha}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{n\alpha}{2}}$$

$$1 - \text{tg}^2 \frac{n\alpha}{2}$$

(n = bilangan sembarang)

7.1. Contoh-Contoh:

$$1. \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 1$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha = 1 + \cos \alpha$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$2. \cos \alpha = \dots\dots\dots$$

$$2. \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

7.2. Soal-Soal:

Buktikanlah :

1. $\sec^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$
2. $\operatorname{Cotg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{Cotg} \alpha}$
3. $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{Cotg} \alpha - 2 \operatorname{Cotg} 2\alpha$
4. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} 2\alpha = \operatorname{Cosec} 2\alpha$
5. $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$
6. $\sin 8\alpha = 8 \cos 4\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha \sin \alpha$
7. $2 \operatorname{Cosec} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha$
6. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
9. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
10. Nyatakanlah $\operatorname{tg} 3$ dalam tg

7.3. Rumus Jumlah dan Selisih Dari Sinus dan Cosinus.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

Jika.....

Jika $\alpha + \beta = p$

$$\alpha - \beta = q$$

$$2\alpha = p + q$$

$$\alpha = \frac{p + q}{2}$$

$$\alpha + \beta = p$$

$$\alpha - \beta = q$$

$$2\beta = p - q$$

$$\beta = \frac{p - q}{2}$$

maka persamaan: $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

menjadi:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

atau

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

Dengan cara yang sama didapat pula :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

7.4. Contoh-Contoh

$$\begin{aligned} 1: \sin 54^\circ - \sin 18^\circ &= 2 \cos \frac{54 + 18}{2} \sin \frac{54 - 18}{2} \\ &= 2 \cos 36 \sin 18 \\ &= \frac{2 \sin 18 \cos 18 \cos 36}{\cos 18} \\ &= \frac{\sin 36 \cos 36}{\cos 18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin 36 \cos 36}{2 \cos 18} \\
 &= \frac{\sin 72^\circ}{2 \cos 18^\circ} \\
 &= \frac{\sin 72^\circ}{2 \sin 72^\circ} \\
 &= \frac{1}{2} .
 \end{aligned}$$

2. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, buktikanlah :

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

Bukti:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin(\alpha + \beta) =$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left[\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right] =$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left[2 \cos \frac{\alpha - \beta + \alpha + \beta}{4} + \cos \frac{\alpha - \beta + \alpha - \beta}{4} \right] =$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} (2 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta) =$$

$$2 \cos \frac{1}{2} \gamma \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \beta =$$

$$4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

terbukti.

7.5. Soal-Soal.....

7.5. Soal-Soal

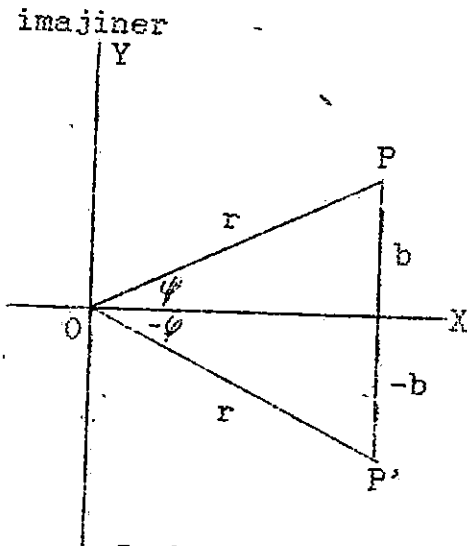
Buktikanlah :

1. $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4 \sin 3\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha$
2. $\sin 2\alpha - \sin 6\alpha + \sin 8\alpha = 4 \sin \alpha \cos 3\alpha \cos 4\alpha$
3. $\sin(\alpha + 45^\circ) + \sin(\alpha - 45^\circ) = (\sin \alpha) \sqrt{2}$
4. $\sin(\alpha + 60^\circ) - \sin(\alpha - 60^\circ) = (\cos \alpha) \sqrt{3}$
5. $\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$

Jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, buktikanlah :

6. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin^{1/2} \alpha \sin^{1/2} \beta \sin^{1/2} \gamma$
7. $\operatorname{Cotg} \alpha + \operatorname{Cotg} \beta + \operatorname{Cotg} \gamma = \operatorname{Cotg} \alpha \cdot \operatorname{Cotg} \beta \cdot \operatorname{Cotg} \gamma$
8. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$
9. $\frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$
10. $4 \sin \varphi \sin(60^\circ + \varphi) \sin(60^\circ - \varphi) = \sin 3\varphi$
 $4 \sin \varphi (\sin^2 60 - \sin^2 \varphi) = \sin 3\varphi$

VIII. DALIL DE MOIVRE



Gambar 14.

Dalam aljabar telah dipelajari mengenai bilangan kompleks $a + bi$, dimana a dan b , bilangan riil, sedangkan $i = \text{imajiner}$.

$r = \text{modulus}$, *dimana $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Menurut gambar 14.

$$\sin \varphi = \frac{b}{r} \longrightarrow b = r \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} \longrightarrow a = r \cos \varphi$$

sehingga bilangan kompleks $a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, dimana $\varphi = \text{argument}$ ($-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$).

Untuk bilangan kompleks $\cos \varphi + i \sin \varphi$, yang modulusnya = 1 dinamakan Uni modulair.

Sifat-sifat bilangan kompleks yang dipakai untuk mencari soal selanjutnya, diantaranya adalah :

1). $a + bi = c + di$, jika dan hanya jika
 $a = c$ dan $b = d$

2). $i^2 = -1$.

Bilangan kompleks $\cos \varphi + i \sin \varphi$, dapat dipendekkan menulisnya dengan $\text{Cis } \varphi$, dimana :

$c = \text{kependekkan Cosinus}$

$i = \text{imajiner}$

$s = \text{kependekkan Sinus}$

$\varphi = \text{argument}$

$$\text{Cis } \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \text{Cis}(-\varphi) &= \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) \\ &= \cos \varphi - i \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cis } \varphi \cdot \text{Cis}(-\varphi) &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi - i \sin \varphi) \\ &= \cos^2 \varphi - i^2 \sin^2 \varphi \\ &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cis } \varphi \times \text{Cis}(-\varphi) = 1}$$

atau

$$\boxed{\text{Cis } \varphi = \frac{1}{\text{Cis}(-\varphi)}}$$

Perkalian $\text{Cis } \alpha$ dan $\text{Cis } \beta$

$$\text{Cis } \alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\text{Cis } \beta = \cos \beta + i \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \text{Cis } \alpha \cdot \text{Cis } \beta &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + \\ &\quad i^2 \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i \{ \sin \alpha \cos \beta + \\ &\quad (\cos \alpha \sin \beta) \} \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cis } \alpha \cdot \text{Cis } \beta = \text{Cis}(\alpha + \beta)}$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$\boxed{\text{Cis } \alpha \cdot \text{Cis } \beta \cdot \text{Cis } \gamma = \text{Cis}(\alpha + \beta + \gamma)}$$

Umumnya berlaku *

$$\text{Cis } \alpha_1 \cdot \text{Cis } \alpha_2 \cdot \text{Cis } \alpha_3 \cdot \dots \cdot \text{Cis } \alpha_n =$$

$$\text{Cis}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n)$$

Jika.....

Jika $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n$, maka
 didapat : $\underbrace{\text{Cis}\alpha, \text{Cis}\alpha, \dots, \text{Cis}\alpha}_{n \text{ faktor}} = \underbrace{\text{Cis}(\alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha)}_{n \text{ suku}}$

atau

$$\boxed{\text{Cis}^n \alpha = \text{Cis } n\alpha}$$

8.1. Contoh-Contoh :

1. Hitunglah $\text{Cis}^{15} 30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } \text{Cis}^{15} 30^\circ &= \text{Cis } 450^\circ = \text{Cis } 90^\circ \\ &= \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ \\ &= i. \end{aligned}$$

2. Hitunglah $\text{Cis}^{-12} 15^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } \text{Cis}^{-12} 15^\circ &= \text{Cis}(-180^\circ) \\ &= \cos 180^\circ - i \sin 180^\circ \\ &= -1 \end{aligned}$$

3. $\text{Cis } n\alpha = \text{Cis}^n \alpha$

untuk $n = 3$, maka $\text{Cis } 3\alpha = \text{Cis}^3 \alpha$

$$\begin{aligned} \text{Cis } 3\alpha &= (\text{Cis } \alpha)^3 \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 \\ &= \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha i \sin \alpha + 3 \cos \alpha i^2 \sin^2 \alpha + \\ &\quad i^3 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha + \\ &\quad i(3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 3 \cos^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \\ &= 3(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 3 \sin^3 \alpha - \sin^3 \alpha\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}$$

$$4. \cos \alpha + i \sin \alpha = p$$

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = \frac{1}{p}$$

$$\hline 2 \cos \alpha = p + \frac{1}{p} \quad \text{dan}$$

$$2i \sin \alpha = p - \frac{1}{p}$$

$$\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = p^2$$

$$\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha = \frac{1}{p^2}$$

$$\hline 2 \cos 2\alpha = p^2 + \frac{1}{p^2} \quad \text{dan}$$

$$2i \sin 2\alpha = p^2 - \frac{1}{p^2}$$

$$\text{umumnya berlaku: } 2 \cos n\alpha = p^n + \frac{1}{p^n} \quad \text{dan}$$

$$2i \sin n\alpha = p^n - \frac{1}{p^n}$$

6.2. Soal-Soal.

1. Jika $\alpha + \beta = \pi/2$, hitunglah :

$$(\sin \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta)$$

2. Buktikanlah : $(1 + \text{Cis } 2\alpha)^n = 2^n \cos^n \alpha \text{ Cis } n\alpha$

3. Hitunglah x dari pers. $\frac{1-x}{1+x} = \cos 2\alpha$

4. Sederhanakanlah....

4. Sederhanakanlah :

$$\frac{\text{Cis } 3\psi \{\text{Cis}(-\psi)\}^5}{\text{Cis}(-2\psi)^3} - \frac{\{\text{Cis}(-4\psi)\} \text{Cis}^3 3\psi}{\text{Cis}}$$

5. Nyatakanlah $\sin 7\alpha$ dalam $\sin \alpha$.

6. Hitunglah $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ dan $\sin(\alpha + \beta)$ dengan memakaikan rumus Cis.

7. Robahlah menjadi bentuk lain :

a). $8 \cos^4 \alpha$ dan $8 \sin^4 \alpha$.

b). $16 \cos^4 \alpha$ dan $16 \sin^4 \alpha$.

8. Buktikanlah :

$$2^{10} \cos^7 \psi \sin^4 \psi = \cos 11\psi + 3 \cos 9\psi - \cos 7\psi - 11 \cos 5\psi - 6 \cos 3\psi + 14 \cos \psi.$$

9. Hitunglah x dari :

$$x^2 + 2x(1 - i) \cotg 2\psi - i(\text{tg}^2 \psi + \cotg^2 \psi) = 0.$$

IX. DERET TRIGONOMETRI

Jika semua suku-suku dari suatu deret merupakan fungsi dari trigonometri, maka deret itu dinamakan deret trigonometri. Misalnya : $\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \dots$

$$\cos^3 a + \cos^3(a + b) + \cos^3(a + 2b) + \dots$$

$$\sin a \sin 3a + \sin 2a \sin 6a + \sin 4a \sin 12 + \dots$$

dan seterusnya.

Suku-suku disimbulkan dengan t_1, t_2, \dots, t_n dan jumlah dari semua suku-suku disimbulkan dengan S_n .

$$\text{Jadi } S_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n.$$

Untuk mencari rumus S_n dari deret $\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \dots + \sin\{a + (n - 1)b\}$.

$$S_n = \sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \dots + \sin\{a + (n-1)b\}.$$

Kemudian ruas kiri (S_n) dan ruas kanan sama-sama dikali dengan $2 \sin \frac{1}{2}b$, sehingga didapat :

$$2 \sin \frac{1}{2}b \cdot t_1 = 2 \sin \frac{1}{2}b \sin a = \cos(a - \frac{1}{2}b) - \cos(a + \frac{1}{2}b).$$

$$2 \sin \frac{1}{2}b \cdot t_2 = 2 \sin \frac{1}{2}b \sin(a + b) = \cos(a + \frac{1}{2}b) - \cos(a + \frac{3}{2}b).$$

$$2 \sin \frac{1}{2}b \cdot t_3 = 2 \sin \frac{1}{2}b \sin(a + 2b) = \cos(a + \frac{3}{2}b) - \cos(a + \frac{5}{2}b).$$

$$2 \sin \frac{1}{2}b \cdot t_n = 2 \sin \frac{1}{2}b \sin\{a + (n-1)b\} = \cos\{a + (n-1)\frac{1}{2}b\} - \cos\{a + n\frac{1}{2}b\}$$

$$2 \sin \frac{1}{2}b S_n = \cos(a - \frac{1}{2}b) - \cos\{a + (n - \frac{1}{2})b\}$$

$$2 \sin \frac{1}{2}b S_n = 2 \sin \frac{1}{2}b \cdot \sin\{a + (\frac{n-1}{2})b\}$$

$$S_n = \frac{\sin \frac{1}{2}nb \cdot \sin\{a + (\frac{n-1}{2})b\}}{\sin \frac{1}{2}b}$$

Rumus jumlah dari deret Sinus

Untuk mendapatkan rumus jumlah dari deret Cosinus, dimana :

$$S_n = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \dots +$$

$\cos\{a + (n-1)b\}$, caranya sama dengan cara deret

Sinus yaitu ruas kiri dan ruas kanan dari persamaan di atas

sama-sama dikalikan dengan $2 \sin \frac{1}{2}b$, sehingga didapat pula

rumus jumlah untuk deret Cosinus, yaitu :

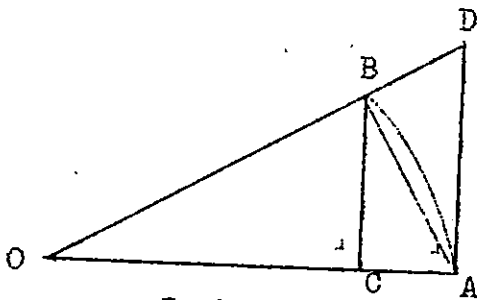
$$S_n = \frac{\sin \frac{1}{2}nb \cdot \cos\{a + (\frac{n-1}{2})b\}}{\sin \frac{1}{2}b}$$

9.1. Soal-Soal:

Hitunglah jumlah n suku dari deret-deret dibawah ini :

1. $\sin a + \sin 5a + \sin 9a + \dots$
2. $\cos a + \cos 4a + \cos 7a + \dots$
3. $\sin^2 a + \sin 2a + \sin^2 3a + \dots$
4. $\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \sin 3\alpha + \sin 3\alpha \sin 4\alpha + \dots$
5. $\cos \alpha - \cos(\alpha + p) + \cos(\alpha + 2p) - \cos(\alpha + 3p) + \dots$
6. $\cos^3 a + \cos^3 2a + \cos^3 3a + \cos^3 4a + \dots$
7. $\sin^3 \frac{a}{b} + 3 \sin^3 \frac{a}{3^2} + 3^2 \sin \frac{a}{3^3} + 3^3 \sin^3 \frac{a}{3^4}$
8. $\sin a - \sin 2a + \sin 3a - \sin 4a + \dots$
9. $\operatorname{Cosec} a + \operatorname{Cosec} 2a + \operatorname{Cosec} 4a + \dots$
10. $\operatorname{tg} a - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{1}{4}a + \dots$

X. L I M I T



Gambar 15.

OAB adalah sektor lingkaran dengan jari-jari 1 kesatuan dan sudut pusat x radial. (Gambar 15)

$BC \perp OA$

Garis singgung dari A memotong perpanjangan OB di D.

$$\sin x = \frac{BC}{r} = \frac{BC}{1} \longrightarrow BC = \sin x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{AD}{r} = \frac{AD}{1} \longrightarrow AD = \operatorname{tg} x$$

Perhatikan gambar 15.

Luas $\triangle OAB <$ luas sektor OAB $<$ luas $\triangle AOD$

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$(0 < x < \frac{1}{2} \pi)$$

Jika $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ sama-sama dibagi dengan $\sin x$, maka

didapat : $1 < \frac{x}{\sin x} \cos x$

untuk $x \longrightarrow 0$, maka harga $\cos x \longrightarrow 1$ dan harga $\frac{1}{\sin x}$ akan mendekati 1: dalam hal ini dikatakanlah :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = 1$$

Jika $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ sama-sama dibagi dengan $\operatorname{tg} x$ di dapat :

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{tg} x} < 1$$

Untuk $x \longrightarrow 0$, maka harga $\cos x \longrightarrow 1$ dan $\frac{x}{\operatorname{tg} x} \longrightarrow 1$

dalam hal ini dikatakanlah :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1$$

Juga dapat dibuktikan :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

umumnya berlaku :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\sin nx} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\operatorname{tg} nx} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} nx}{nx} = 1$$

Untuk menghitung $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, terlebih dulu dimisalkan $x = c - y$ untuk $y \rightarrow 0$, sehingga :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(c - y)$$

Untuk menyelesaikan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, dimisalkan pula $x = \frac{1}{y}$ dimana $y \rightarrow 0$, sehingga :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Setelah itu baru dikerjakan seperti soal $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Sifat-sifat limit yang penting adalah sebagai berikut :

1. $\lim cf(x) = c \lim f(x)$
2. $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
3. $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
4. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

5. Lim.....

$$5. \lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$$

10.1. Contoh-Contoh:

1. Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2x \operatorname{Cosec} 3x$

Jawab :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2x \operatorname{Cosec} 3x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2x}{3} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \dots$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin^{1/2} x \cos^{1/2} x}{2 \sin^2 \frac{1}{2} x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{2} x}{\sin^2 \frac{1}{2} x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/2 x}{\sin^2 \frac{1}{2} x} \cdot 2 \cos \frac{1}{2} x = 1 \cdot 2 = 2.$$

3. Hitunglah

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec^2 x - \sec x \operatorname{tg} x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec^2 x - \sec x \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\pi/2 - y)}{\cos^2(\pi/2 - y)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{\sin^2 y} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} y}{\sin^2 y} =$$

lim.....

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} y}{4 \sin^2 \frac{1}{2} y \cos^2 \frac{1}{2} y} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} y} = \frac{1}{2}$$

10.2. Soal-Soal :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \dots$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos nx}{\sin^2 nx} = \dots$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(1 + \cos x)}{\operatorname{tg} x(1 + 3 \sec x)} = \dots$
4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} = \dots$
5. $\lim_{x \rightarrow 5} (x - 5) \operatorname{Cotg} \pi x = \dots$
6. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \dots$
7. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x - \sin \alpha}{\cos x - \cos \alpha} = \dots$
8. $\lim_{x \rightarrow 7} (x - 7) \operatorname{Cotg} \pi x = \dots$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos nx}{\sin^2 nx} = \dots$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 2x - 2 \sin 3x}{x^3} = \dots$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin^2 x + \sin 3x + \dots}{\sin x} = \dots$

XI. ELIMINASI

Eliminasi adalah menghilangkan satu bilangan anu dari 2 persamaan; menghilangkan 2 bilangan anu dari 3 persamaan, sehingga didapat persamaan resultan.

Umumnya eliminasi dapat dilakukan dengan menghilangkan $(n - 1)$ bilangan anu dari n persamaan, sehingga didapat persamaan resultan.

11.1. Contoh-Contog :

1. Eliminirlah x dari persamaan :

$$\begin{cases} \text{Sin } x = a \\ \text{Cos } x = b \end{cases}$$

Jawab :

$$\begin{cases} \text{Sin } x = a \longrightarrow \text{Sin}^2 x = a^2 \\ \text{Cos } x = b \longrightarrow \text{Cos}^2 x = b^2 \end{cases}$$

Karena $\text{Sin}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1$, maka persamaan resultannya adalah : $a^2 + b^2 = 1$.

2. Eliminirlah x dari persamaan :

$$\begin{cases} a \text{ Sin } x + b \text{ Cos } x = c \\ p \text{ Sin } x + q \text{ Cos } x = r \end{cases}$$

Jawab :

$a \text{ Sin } x + b \text{ Cos } x = c$	I	II
$p \text{ Sin } x + q \text{ Cos } x = r$	P	q
I	a	b

$$ap \text{ Sin } x + bp \text{ Cos } x = cp$$

$$ap \text{ Sin } x + aq \text{ Cos } x = ar$$

$$(bp - aq)\text{Cos } x = (cp - ar)$$

$$\text{Cos } x = \frac{(cp - ar)}{(bp - aq)}$$

$$\text{II} \quad aq \sin x + bq \cos x = cq$$

$$bp \sin x + bq \cos x = br$$

$$\frac{aq \sin x + bq \cos x = cq}{bp \sin x + bq \cos x = br} \quad -$$

$$(aq - bp) \sin x = (cq - br)$$

$$\sin x = \frac{(cq - br)}{(bp - aq)}$$

Jadi persamaan resultan :

$$\left(\frac{cq - br}{aq - bp} \right)^2 + \left(\frac{cp - ar}{bp - aq} \right)^2 = 1.$$

11.2. Soal-Soal :

Eliminirlah x dari persamaan dibawah ini :

$$1. \begin{cases} a \sin x + 5 \cos x = 2a - 3 \\ 7 \sin x - 4 \cos x = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2 \sin x + a \cos x = a - 1 \\ a \sin x + 3 \cos x = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \sin x + \cos x = a \cos x \\ \sec x = b \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \sin x + \cos x = a \\ \cos 2x = b \end{cases}$$

Eliminirlah x dan y dari persamaan dibawah ini :

$$5. \begin{cases} \sin x + \cos y = a \\ \cos x + \sin y = b \\ \sin(x + y) = c \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \sin x + \cos y = a \\ \cos x + \sin y = b \\ \sin 2x + \sin 2y = c \end{cases}$$