PROBLEM SOLVING SEBAGAI HAKEKAT PENELITIAN MATEMATIKA

OLEH :

Dra. Media Rosha, M.Si

Dosen jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA IKIP Padang.

Disampaikan pada Seminar dan Lokakarya Pengembangan Kurikulum dan Laboratorium Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Padang tanggal 6 sd 13 Desember 1996.

PROBLEM SOLVING SEBAGAI HAKEKAT PENELITIAN MATEMATIKA

1. Pendahuluan

Perkembangan teknologi dipengaruhi oleh ilmu dasar yang menyertainya. Matematika, salah satu dari ilmu dasar tak ketinggalan turut menyemarakan perkembangan teknologi yang semakin pesat. Fehr mengatakan matematika dalam hubungannya dengan komunikasi ilmiah mempunyai peranan ganda yakni sebagai " ratu " sekaligus " pelayan " ilmu. Sehingga matematika selayaknya terus dikembangkan melalui penelitian penelitian dalam bidangnya.

Teori matematika dibentuk dari sesuatu asumsi awal yang disepakati bersama, dan dari asumsi ini dikembangkan sifat-sifat atau teori-teori baru. Hasil yang diperoleh dimanfaatkan sebagai landasan bagi pengembangan berikutnya. Teori atau disiplin matematika amat kokoh. Tetapi tidak berarti kaku, kreativitas dan inovasi amat diperlukan dalam pengembangan matematika. Dengan kreativitas dan inovasi yang tinggi penelitian-penelitian matematika dapat dilaksanakan.

Sebelum kita membahas penelitian matematika, terlebih dahulu dibahas mengenai problem solving, karena matematika dan problem solving tidak dapat dipisahkan satu dengan yang lain. Oleh sebab itu makalah ini terbagi atas : pertama problem solving, kemudian tentang belajar matematika, dan terakhir baru dibahas mengenai penelitian matematika.

2. Problem Solving

Problem solving didefinisikan sebagai mencipta ide baru, atau menemukan teknik atau produk baru. Dalam matematika problem solving meliputi : menyelesaikan soal cerita, menyelesaikan soal yang tidak rutin, mengaplikasikan matematika dalam kehidupan sehari-hari, membuktikan dan menciptakan atau menguji conjecture.

Perlunya pemilikan kemampuan problem solving dalam matematika dijelaskan Branca sebagai berikut : (1) kemampuan problem solving merupakan tujuan umum dan bahkan sebagai jantung matematika, (2) problem solving merupakan kemampuan dasar dalam belajar matematika. Sebagai tujuan umum dimaksudkan, belajar problem solving merupakan alasan utama untuk belajar matematika. Sedangkan sebagai kemampuan dasar dimaksudkan kemampuan minimum yang harus dimiliki agar yang belajar matematika dapat berfungsi di masyarakat.

Langkah-langkah dalam problem solving dijelaskan Polya sebagai berikut : (1) memahami masalah, (2) merencanakan solusi, (3) melaksanakan rencana, (4) memeriksa kebenaran proses menemukan solusi dan solusi itu sendiri. Dalam memahami masalah yang dilaksanakan adalah, mengetahui apa yang ditanyakan, dan apakah kondisi yang diberikan cukup untuk mencari yang ditanyakan. Pada langkah kedua, salah satu yang dilaksanakan adalah mencari teori yang dapat digunakan dalam masalah ini. Untuk langkah melaksanakan rencana harus diperiksa bahwa tiap langkah sudah benar. Pada langkah terakhir dilakukan pengecekan hasil dengan cara lain.

3. Belajar Matematika

Mempelajari matematika dengan cara yang benar pada hakekatnya adalah serangkaian kegiatan dalam problem solving. Kemampuan dalam belajar matematika dapat dikembangkan melalui latihan dalam problem solving. Mempelajari matematika dengan cara yang benar berguna untuk : mengetahui materi, dan memupuk kebiasaan sikap dan pola kerja dan berfikir menurut matematika.

Langkah-langkah problem solving dalam matematika meliputi : (1) mengamati untuk memperoleh pengertian mengenai masalah yang dihadapi, (2) merumuskan masalah sesuai dengan persepsi yang diperoleh, (3) menghimpun alat dan sifat yang telah diketahui yang relevan dengan masalah, (4) mencari solusi sebagai tujuan problem solving, (5) merumuskan solusi yang diperoleh dengan lingkup permasalahan yang dihadapi. Seorang " problem solver " matematika, mampu memakai konsep dan istilah matematika serta mampu mengestimasi dan menganalisis.

Selain dari langkah-langkah di atas, tidak kalah pentingnya penekanan-penekanan yang harus diperhatikan agar seseorang " bermatematika " :

1. Banyak latihan
2. hafalan, dilatih menghafalkan, mutu belajar tergantung pada kekuatan kaitan yang sudah dipelajari dengan yang akan dipelajari (thorndike).
3. Penyesuaian dengan tahap-tahap perkembangan subyek didik (Jean Piaget).
4. Pendekatan spiral, dari konkrit ke abstrak dengan penyesuaian pada perkembangan subyek didik (Bruner).
5. Penanaman pengertian pada awal, kesukaran yang dilanjutkan akan mengurangi minat belajar (Dienes).
6. Kombinasi waktu, materi dan metode, penyesuaian pada tahap berfikir (Van Hiele)
7. Kemampuan memberikan rangsang (Gagne, Skinner).

4. Penelitian Matematika

Penelitian matematika yaitu penelitian dalam usaha pengembangan matematika. Kajian-kajian dalam kegiatan matematika adalah pengembangan matematika yang meliputi : pengembangan teori matematika dan pengembangan penerapannya. Belajar matematika adalah belajar meneliti dalam matematika. Seseorang yang mempelajari matematika dengan cara yang benar berarti belajar dan berlatih meneliti dalam matematika.

Penelitian Matematika dimulai dari pengetahuan yang ada. dari pengetahuan yang dimiliki, dapat dikembangkan dengan mempelajari apa yang dimiliki atau yang sudah dikembangkan orang lain. Berawal dari pengetahuan yang dimiliki atau ditambah dengan penelusuran pustaka, pada diri seseorang akan timbul suatu conjecture. Conjecture ini dapat berupa sifat atau teorema, yang timbul dari yang sudah diketahui. Conjecture tidak dibiarkan begitu saja, harus dibuktikan kebenarannya atau ketidakbenarannya. Proses dalam pembuktian conjecture ini adalah kegiatan penelitian. Berikut diberikan contoh timbulnya suatu conjecture dari suatu hasil kajian.

Teorema : *Suatu ukuran μ pada suatu lapangan C dapat diperluas kesuatu ukuran pada lapangan-σ terkecil yang memuat C.*

Dari teorema diatas, mungkin timbul conjecture :

- *bagaimana ketunggalan perluasannya jika μ σ-hingga*
- *apakah perluasannya juga σ-hingga jika μ σ-hingga*

Pengembangan penerapan matematika dapat dilakukan dengan mencari model baru atau penyempurnaan model suatu perlmasalahan, menemukan metode mendapatkan solusinya, memperoleh solusi, mencek kebenaran solusi. Dengan perkataan lain menganalisis model suatu permasalahan.

Problem solving dalam penelitian matematika meliputi : mengamati masalah, merumuskan masalah, mengidentifikasi sub masalah, mengindentifikasi sifat baru dan teorema baru yang mendukung, mencari solusi, mengkomunikasikan solusi dengan permasalahan, dan menyusun catatan mengenai masalah yang tersisa atau mengenai masalah baru yang timbul.

Dari uraian sebelumnya dapat disimpulkan, kerja dalam bidang matematika adalah meneliti. Penelitian matematika pada hakekatnya adalah problem solving. Dalam problem solving seseorang akan menerapkan pengetahuan yang telah dimiliki.

5. Kepustakaan

1. Loeve, M . Probability Theory , John Willey, 1963.
2. Ruseffendi, E.T. , Pengajaran Matematika Modern , Tarsito, 1980

XII. PERSAMAAN TRIGONOMETRI SEDERHANA

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang suku-sukunya terdiri dari fungsi trigonometri.

Contoh dari bentuk persamaan trigonometri adalah :

a. $\text{Sin } 3x = \text{Sin}(60^\circ - 5x)$

b. $5 \text{ Cos}^2 x - 4 \text{ Cos } x - 1 = 0$

c. $\dfrac{\text{Sin } x + \text{Cos } x}{\text{Sin } x . \text{Cos } x} = {}^3/_4$

d. $\sqrt{1 - \text{Sin } x} = \text{Cos } 2x$

Persamaan trigonometri ini terdiri dari beberapa bentuk diantaranya :

1. $\text{Sin } x = a$ dimana $|a| \leq 1$

Jika $a = 0$, maka $x = k.180^\circ /_k$ bilangan bulat

Jika $a = 1$, maka $x = 90^\circ + k.360^\circ$

Jika $a = -1$, maka $x = -90^\circ + k.360^\circ$

Jika $0 < a < 1$, maka didapat $\text{Sin } \varphi = a$ dan harga yang memenuhi adalah : $x_1 = \varphi + k.360^\circ$ (Kwadrand I)

$x_2 = (180^\circ - \varphi) + k.360^\circ$ (Kwadrand II)

Untuk $\text{Cos } x = b$, dimana $|b| \leq 1$.

Penyelesaiannya adalah :

Jika $b = 0$, maka $x = (2k + 1).\ 90^\circ$ (k bilangan bulat)

Jika $b = 0$, maka $x = k.360^\circ$

Jika $b = -1$, maka $x = (2k + 1).180^\circ$

Untuk $0 < b < 1$, didapat harga α, sehingga $\text{Cos}\,\alpha = b$, maka harga x yang memenuhi adalah :

$x = \pm \alpha + k.360^\circ$

dengan cara yang sama begitu pula untuk $\text{tg } x = c$.

2. $\sin(ax + b) = \sin(px + q)$

Penyelesaiannya :

Untuk kwadrand I : $ax + b = px + q + k.360^\circ$

$$(a-p)x = q - b + k.360^\circ$$

$$x = \frac{q - b + k.360^\circ}{a - p}$$

Untuk kwadrand II : $ax + b = 180^\circ - (px + q) + k.360^\circ$

$$(a+p)x = 180^\circ - (b + q) + k.360^\circ$$

$$x = \frac{(2k + 1)180^\circ - (b + q)}{a + p}$$

degan cara yang sama, penyelesaian untuk bentuk :

$\cos(ax + b) = \cos(px + q)$

$tg(ax + b) = tg(px + q)$

3. $\sin(ax + b) = \cos(px + q)$

Penyelesaiannya adalah : $\sin(ax + b) = \sin\{90^\circ - (px + q)\}$

Untuk kwadran I : $ax + b = 90^\circ - (px + q) + k.360^\circ$

$$(a+p)x = 90^\circ - (b + q) + k.360^\circ$$

$$x = \frac{90^\circ - (b + q) + k.360^\circ}{a + p}$$

Untuk kwadrand II :

$$ax + b = 180^\circ - \{90^\circ - (px - q)\} + k.360^\circ$$

$$180^\circ - 90^\circ + px + q + k.360^\circ$$

$$(a-p)x = 90^\circ - (b - q) + k.360^\circ$$

$$x = \frac{90^\circ - (b - q) + k.360^\circ}{a - p}$$

dengan cara yang sama penyelesaian untuk bentuk :

$\cos(ax + b) = \sin(px + q)$

$tg(ax + b) = \mathrm{Cotg}(px + q)$

4. $\mathrm{Sin}(x + a)\ \mathrm{Cos}(x + b) = c.$

Penyelesaiannya : $\mathrm{Sin}(x + a)\ \mathrm{Cos}(x + b) = c$

$$2\ \mathrm{Sin}(x + a)\ \mathrm{Cos}(x + b) = 2c$$

$$\mathrm{Sin}(2x + a + b) + \mathrm{Sin}(a - b) = 2c$$

Jika a, b dan c diketahui, maka x dapat dicari.

Dengan cara yang sama, penyelesaian untuk bentuk :

$$\begin{cases} \mathrm{Cos}(x + a)\ \mathrm{Sin}(x + b) = c \\ \mathrm{Cos}(x + a)\ \mathrm{Cos}(x + b) = c \\ \mathrm{Sin}(x + a)\ \mathrm{Sin}(x + b) = c \end{cases}$$

5. $a\ \mathrm{Cos}\ x + b\ \mathrm{Sin}\ x = c$

$a\ (\mathrm{Cos}\ x + \frac{b}{a}\ \mathrm{Sin}\ x) = c$

umpama $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\ \varphi$, sehingga menjadi :

$$a\ (\mathrm{Cos}\ x + \mathrm{tg}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ x) = c$$

$$a\ (\mathrm{Cos}\ x + \frac{\mathrm{Sin}\ \varphi}{\mathrm{Cos}\ \varphi}\ \mathrm{Sin}\ x) = c$$

$$\frac{a(\mathrm{Cos}x\ \mathrm{Cos}\ \varphi + \mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Sin}\ \varphi)}{\mathrm{Coc}\ \varphi} = c$$

$$a\ \mathrm{Cos}(x - \varphi) = c\ \mathrm{Cos}\ \varphi$$

$$\mathrm{Cos}(x - \varphi) = \frac{c\ \mathrm{Cos}\ \varphi}{a}$$

6. Dua persamaan dengan dua variabel.

Bentuk-bentuknya adalah sebagai berikut :

a). $\begin{cases} x \pm y = \\ \mathrm{Sin}\ x \pm \mathrm{Sin}\ y = k \end{cases}$ atau $\begin{cases} x \pm y = \\ \mathrm{Cos}\ x \pm \mathrm{Cos}\ y = k \end{cases}$

b). $\begin{cases} x \pm y = \\ \dfrac{\mathrm{Sin}\ x}{\mathrm{Sin}\ y} = k \end{cases}$ atau $\begin{cases} x \pm y = \\ \dfrac{\mathrm{Cos}\ x}{\mathrm{Cos}\ y} = k \end{cases}$

x dan y adalah variabel

α = besarnya sudut

k = bilangan konstanta

Umumnya 2 persamaan dengan 2 variabel dapat diselesaikan berdasarkan rumus-rumus aljabar sebelumnya. Untuk jelasnya dikemukakan pada contoh-contoh selanjutnya :

12.1. Contoh-Contoh :

Hitunglah x dari :

1. $\sin 9x = \sin x$

$$9x = x + k.360^{o} \qquad \text{(pada kwadrand I)}$$
$$8x = k.360^{o}$$
$$x_1 = \frac{k.360^{o}}{8}$$
$$9x = 180^{o} - x + k.360^{o} \qquad \text{(pada kwadrand II)}$$
$$10x = 180^{o} + k.360^{o}$$
$$x_2 = 18^{o} + k.36^{o}$$

2. $\sin 3x = \cos 2x$

$$\sin 3x = \sin(90^{o} - 2x)$$
$$3x = 90^{o} - 2x + k.360^{o} \qquad \text{(pada kwadrand I)}$$
$$5x = 90^{o} + k.360^{o}$$
$$x_1 = 18^{o} + k.72^{o}$$
$$3x = 180^{o} - (90^{o} - 2x) + k.360^{o} \qquad \text{(pada kwadrand II)}$$
$$= 90^{o} + 2x + k.360^{o}$$
$$x_2 = 90^{o} + k.360^{o}$$

3. Hitunglah x :

$$2 \cos x \cos 3x + 1 = 0$$
$$\cos 4x + \cos 2x + 1 = 0$$
$$2 \cos^2 2x - 1 + \cos 2x + 1 = 0$$
$$2 \cos^2 2x + \cos 2x = 0$$

Cos.....

$\cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0$

Untuk $\cos 2x = 0$

$$2x = 90^\circ + k.360^\circ$$

$$x = 45^\circ + k.180^\circ$$

Untuk $2\cos 2x + 1 = 0$

$$2\cos 2x = -1$$

$$\cos 2x = -{}^1/_2$$

$$2x_1 = 120^\circ + k.360^\circ \quad \text{(kwadrand II)}$$

$$x_1 = 60^\circ + k.180^\circ$$

dan

$$2x_2 = 240^\circ + k.360^\circ \quad \text{(kwadrand III)}$$

$$x_2 = 120^\circ + k.180^\circ$$

4. Selesaikanlah persamaan :

$$\begin{cases} x - y = 45^\circ \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$$

Untuk x dan y dikwadrand I.

Penyelesaian : $\cos x + \cos y = 1$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos 22^\circ\ 30' = 1$$

$$2\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{\cos 22^\circ\ 30'}$$

$$\cos\frac{x+y}{2} = 0,541$$

$$\frac{x+y}{2} = 57^\circ\ 14' + k.360^\circ$$

$$x + y = 114^\circ\ 28' + k.720^\circ$$

$$x - y = 45^\circ$$

$$x_1 = 79^\circ\ 44' + k.360^\circ \quad \text{(kwadrand I)}$$

$$y_1 = 34^\circ\ 44' + k.360^\circ$$

5. Selesaikanlah persamaan :

$$\begin{cases} x - y = 60^\circ \\ \dfrac{\text{Cos } x}{\text{Cos } y} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Penyelesaian : $\dfrac{\text{Cos } x}{\text{Cos } y} = \dfrac{5}{2}$

$$\frac{\text{Cos } x + \text{Cos } y}{\text{Cos } x - \text{Cos } y} = \frac{5 + 2}{5 - 2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2 \text{ Cos } \frac{x + y}{2} \text{ Cos } \frac{x - y}{2}}{-2 \text{ Sin} \frac{x + y}{2} \text{ Sin } \frac{x - y}{2}} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{\text{tg } \frac{x + y}{2} \text{ tg } \frac{x - y}{2}} = -\frac{7}{3}$$

$$\text{tg } \frac{x + y}{2} \text{ tg } \frac{x - y}{2} = -\frac{3}{7}$$

$$\text{tg } \frac{x + y}{2} \text{ tg } 30^\circ = -\frac{3}{7}$$

$$\text{tg } \frac{x + y}{2} = -\frac{3}{7 . 1/_3 \sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{7}$$

$$\frac{x + y}{2} = -36^\circ \; 35' + k.180^\circ$$

$$x + y = -73^\circ \; 10' + k.360^\circ$$

$$x - y = 60^\circ$$

Harga yang memenuhi : $x = 173^\circ \; 25' + k.180^\circ$

$y = 113^\circ \; 25' + k.180^\circ$.

12.2. Soal-............

12.2. Soal-Soal :

Hitunglah x dari :

1. $\cos 3x = \cos(4x - {}^1/_4\,\pi)$
2. $\sin(x + 10^o)\cos(x + 20^o) = 0,2725$
3. $\cos(x + 12^o)\cos(r + 32^o) = 0,05704$
4. $2\cos x - 3\sin x = 1$
5. $3\cos x - 5\sin x = 3$
6. $2\cos x + 2\sin x = 3$
7. $\begin{cases} x + y = 70^o \\ \sin x \sin y = {}^1/_2 \end{cases}$

Hitunglah x dan y dari persamaan :

8. $\begin{cases} x + y = 120^o \\ \sin x + \sin y = 1,5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y = 120^o \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1,5 \\ \cos x + \cos y = 0,5 \end{cases}$

XIII. GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi trigonometri yang sederhana dapat digambarkan langsung grafiknya, dengan jalan mensubsitusikan harga-harga x, didapat harga y, kemudian buat gambarnya.

Fungsi trigonometri yang tidak sederhana, tidak dapat digambarkan langsung grafiknya. Untuk menggambarkan grafik fungsi ini ada beberapa syarat yang perlu dan cukup yaitu :

a. sederhanakan fungsi itu;

b. tentukan harga extrim;

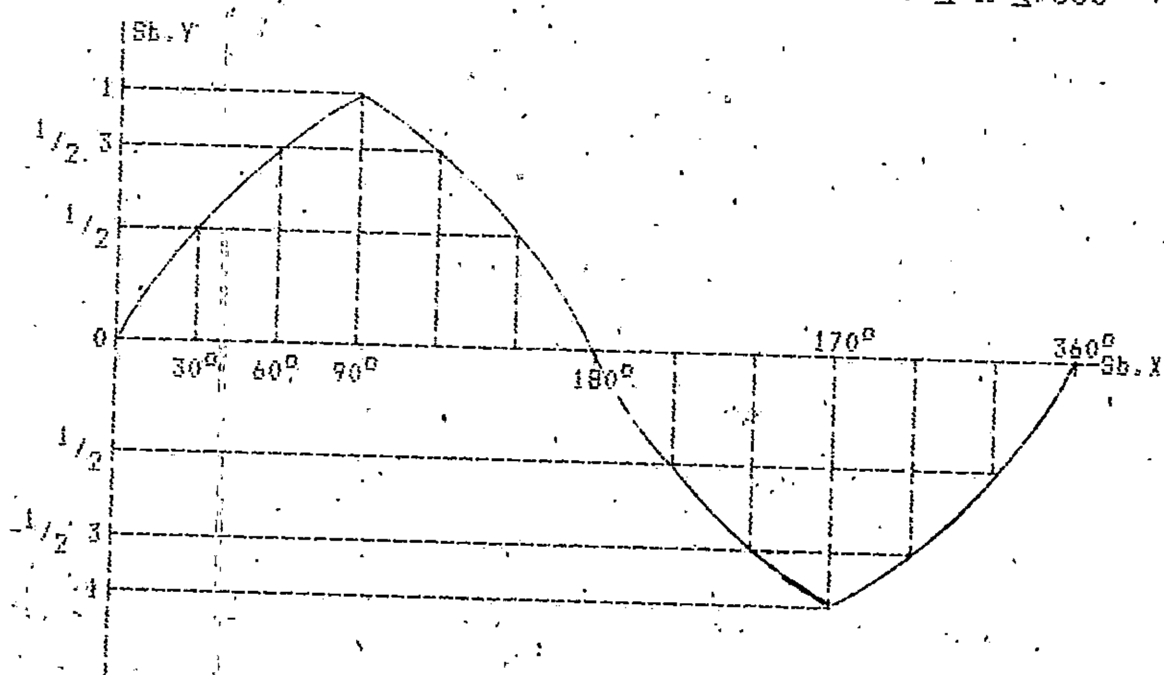
c. tentukan titik potong dengan kedua sumbu;

d. tentukan titik-titik lainnya,

kemudian baru digambarkan selengkapnya.

13.1. Contoh-Contoh :

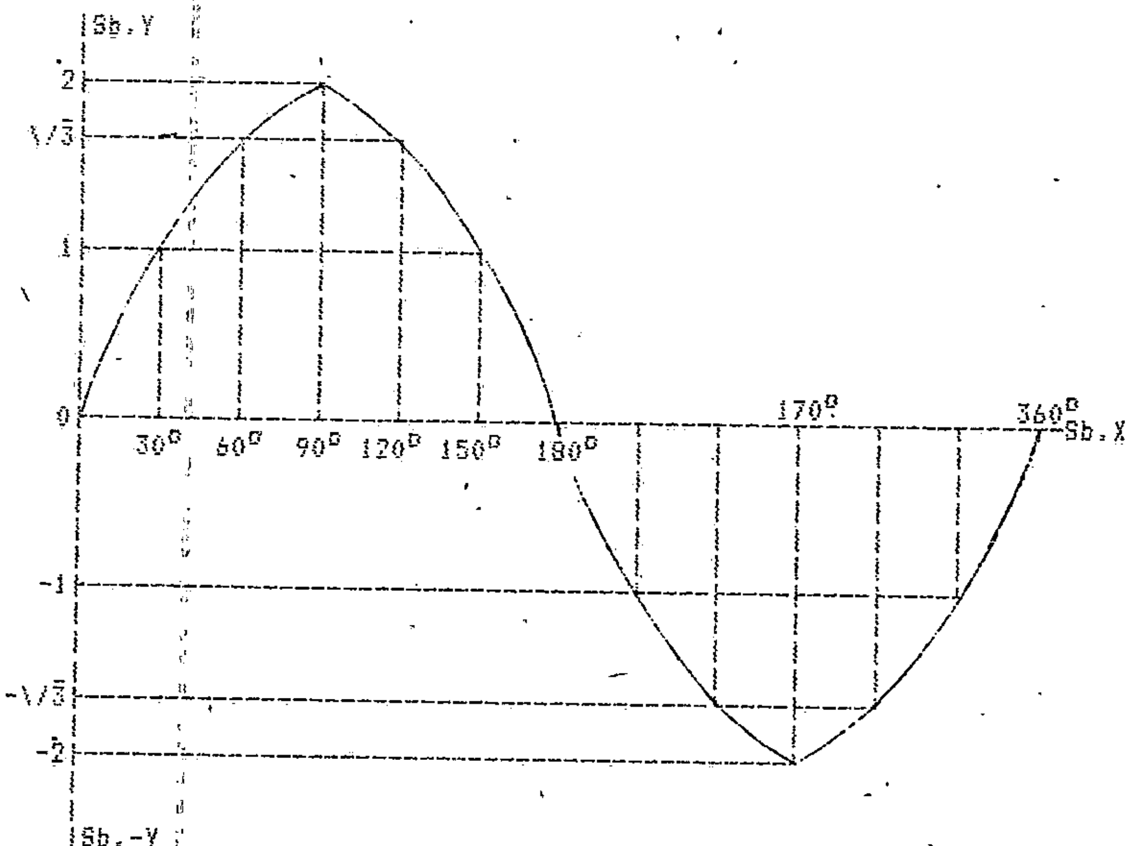
1. Gambarkan grafik y=Sin x dalam interval $0^o \leq x \leq 360^o$.



Gambar 16.-

2. Gambarkan........

2. Gambarkan grafik $y = 2 \text{ Sin } x$



Gambar 17.

3. Gambarkan grafik $y = 6 \text{ Sin } x - 3 \text{ Cos } 2x + {}^1/_3$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

<u>Jawab</u> : $y = 6 \text{ Sin } x - 3 \text{ Cos } 2x + {}^1/_3$

$$= 6 \text{ Sin } x - 3(1 - 2 \text{ Sin}^2 x) + {}^1/_3$$
$$= 6 \text{ Sin } x - 3 + 6 \text{ Sin}^2 x + {}^1/_3$$
$$= 6 \text{ Sin}^2 x + 6 \text{ Sin } x - 2^2/_3$$
$$= 6(\text{Sin}^2 x + \text{Sin } x + {}^1/_4) - 4^1/_6$$
$$= 6(\text{Sin } x + {}^1/_2)^2 - 4^1/_6$$

y max = ... 52

$y \text{ max} = 6(1 + {}^1/_2)^2 - 4^1/_6$ untuk $\text{Sin } x = 1$

$= 6(\,{}^9/_4\,) - 4^1/_6 = 9^1/_3$ $\qquad x = 90^\circ$

$y \text{ min} = 6(-{}^1/_2 + {}^1/_2)^2 - 4^1/_6 = -4^1/_6$

Untuk $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = 210^o$ dan $x_2 = 330^o$

$$y \text{ min relatif} = 6(-1 + \tfrac{1}{2})^2 - 4\tfrac{1}{6}$$
$$= 6(-\tfrac{1}{2})^2 - 4\tfrac{1}{6}$$
$$= -2\tfrac{2}{3}$$

Untuk $\sin x = -1$

$x = 270^o$

Titik potong dengan kedua sumbu: titik potong dengan sumbu y $\longrightarrow x = 0$

$$y = 6 \sin^2 x + 6 \sin x - 2\tfrac{2}{3}$$
$$= 0 + 0 - 2\tfrac{2}{3}$$
$$y = -2\tfrac{2}{3}$$

Untuk $x = 360^o \longrightarrow y = -2\tfrac{2}{3}$

Titik potong dengan sumbu x $\longrightarrow y = 0$

$$6 \sin^2 x + 6 \sin x - 2\tfrac{2}{3} = 0$$
$$18 \sin^2 x + 18 \sin x - 8 = 0$$
$$9 \sin^2 x + 9 \sin x - 4 = 0$$

$$\sin x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 144}}{18} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{18}$$
$$= \frac{-9 \pm 15}{18}$$

$$\sin x_1 = \frac{-9 + 15}{18} = \tfrac{1}{3} \longrightarrow x_1 = 19^o\ 28'\ 16"$$
$$x_2 = 160^o\ 31'\ 44"$$

$\sin x_2 = \frac{-9 - 15}{18} = -\frac{4}{3}$ (tidak memenuhi syarat)

Titik lain :

Untuk $x = 30^o$ dan $x = 150^o \longrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

maka $y = 6 \sin 30 - 3 \cos 60 + \frac{1}{3}$

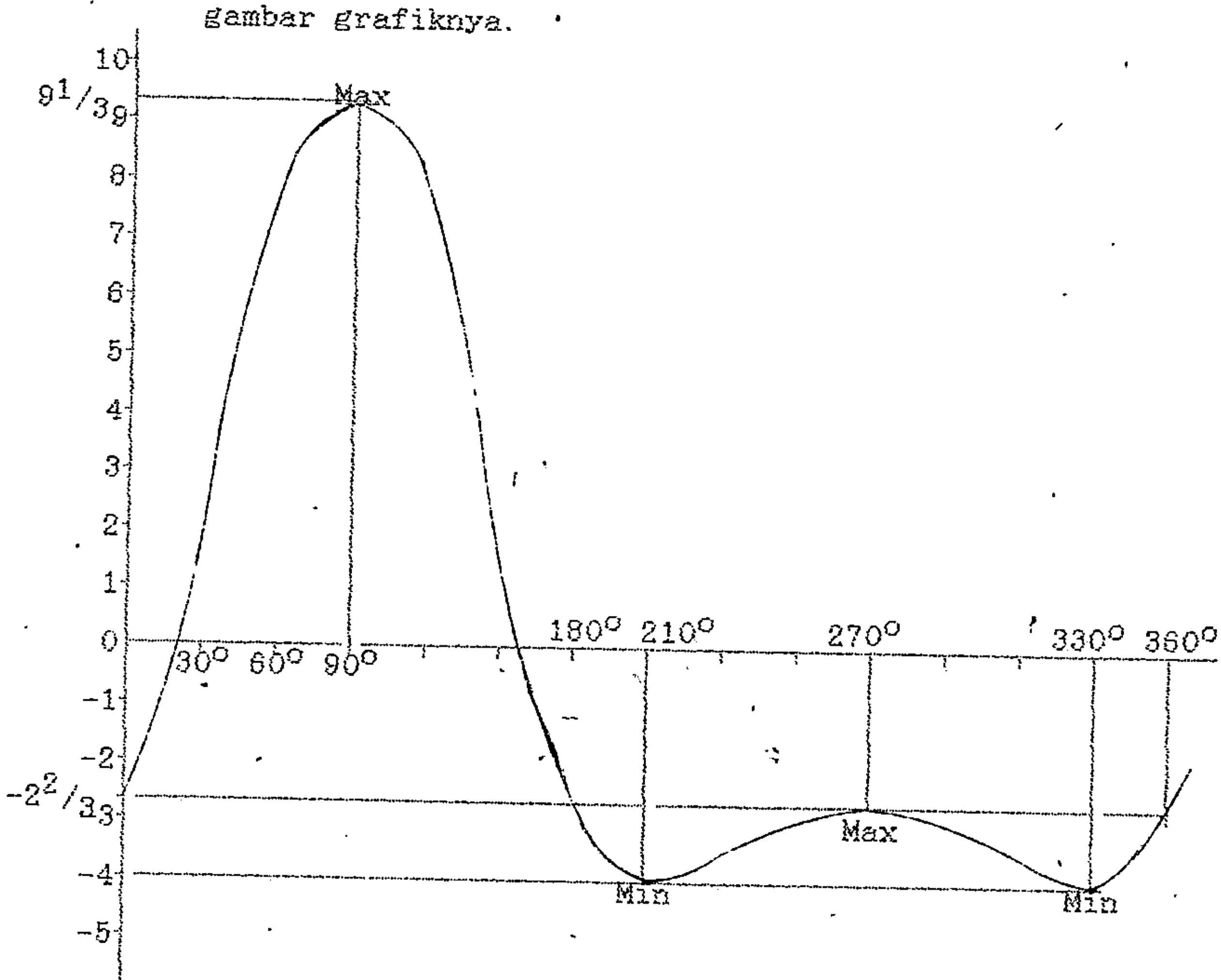
$$= 3 - 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}$$
$$= 1\tfrac{5}{6}$$

Untuk $x = 60^o$ dan $x = 120^o \longrightarrow \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

maka $y = 6 \sin 60 - 3 \cos 120 + \frac{1}{3}$

$$= 3\sqrt{3} + 1^1/_2 + {}^1/_3$$
$$= 3\sqrt{3} + 1^5/_6$$

Bertambah banyak titik-titik yang didapat, makin bagus gambar grafiknya.



Gambar 18.

13.2. Soal-Soal :

Gambarkanlah grafik dibawah ini dalam interval

$0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

1. y = Cos x
2. y = tg x

3. $y = 2(\text{Cos } x + 10^o)$
4. $y = 3(\text{Sin } x + 30^o)$
5. $y = 4(\text{Sin } x - 15^o)$
6. $y = 2\text{Sin}^2 x + 5 \text{ Sin } x - 3$
7. $y = -2 \text{ Cos}^2 x + 3 \text{ Sin } x - 2$
8. $y = 3 \text{ Cos } x + 7 \text{ Sin } x - 6$
9. $y = 2 \text{ Sin } 2x + 6 \text{ Cos}^2 x - 5$
10. $y = 2 \text{ Sin}^2 x + 5 \text{ Sin } x \text{ Cos } x + 10 \text{ Cos}^2 x - 7{,}92.$

XIV. FUNGSI CYCLOMETRI

Fungsi Cyclometri adalah fungsi invers dari fungsi trigonometri.

Sin x = a, maka fungsi cyclometrinya adalah x = arc Sin a

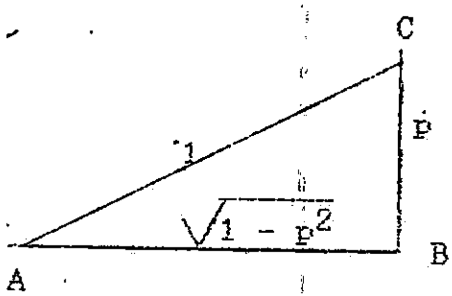
Cos y = b $\longrightarrow$ y = arc Cos b

tg Z = c $\longrightarrow$ Z = arc tg c

Jika Sin x = $^1/_2$ $\longrightarrow$ x = arc Sin $^1/_2$

$x_1 = 30^\circ + k.360^\circ$

$x_2 = 150^\circ + k.360^\circ$



Gambar 19.

Perhatikan $\triangle$ ABC (siku-siku di B):

Jika Sin α = p(0 < p < 1)

maka; $\cos\alpha = \sqrt{1-p^2}$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$

$\text{Cotg}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{1-p^2}}{p}$

Jadi α = arc Sin p

$= \text{arc Cos}\ \sqrt{1-p^2}$

$= \text{arc tg}\ \dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$

$= \text{arc Cotg}\ \dfrac{\sqrt{1-p^2}}{p}$

atau arc Sin p = arc Cos $\sqrt{1-p^2}$ = arc tg $\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$

arc Cotg = $\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{p}$

Untuk Sin α = p . $|p| \leq 1$ dan $-^1/_2\,\pi < \alpha \leq {}^1/_2\,\pi$

Untuk Sin($-\alpha$) = p . $|-p| \leq 1$ dan $-^1/_2\,\pi < \alpha \leq {}^1/_2\,\pi$

didapat arc Sin p + arc Sin(−p) = 0.

Dengan cara yang sama begitu juga arc tg p + arc tg(−p) = 0.

Untuk $\cos\alpha = p$ $\quad |p| \le 1$ dan $0 \le \alpha \le \pi$

Untuk $\cos(\pi - \alpha) = -p \quad |-p| \le 1$ dan $0 \le \pi - \ \le \pi$

maka didapat pula $\text{arc} \cos p + \text{arc} \cos(-p) = \pi$, dengan cara yang sama didapat pula $\text{arc Cotg } p + \text{arc Cotg}(-p) = \pi$.

Selanjutnya jika $\sin\alpha = p$ dimana $|p| \le 1$ dan

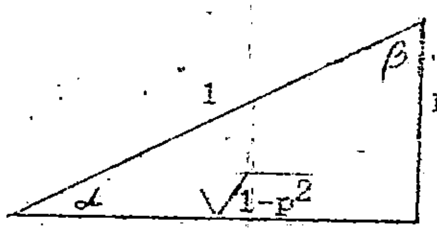
$$-{}^1/_2\,\pi \le \alpha \le {}^1/_2\,\pi$$

didapat $\cos({}^1/_2\,\pi - \alpha) = p$ dengan $0 \le {}^1/_2\,\pi - \alpha \le \pi$

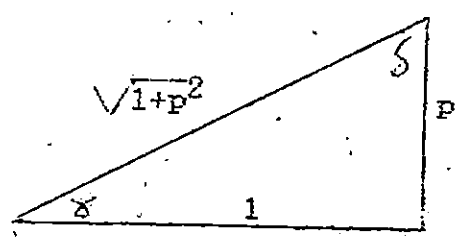
Sehingga didapat $\text{arc} \sin p + \text{arc} \cos p = {}^1/_2\,\pi$, dengan cara yang sama didapat pula $\text{arc tg } p + \text{arc Cotg } p = {}^1/_2\,\pi$

Kesimpulannya :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{arc} \sin p + \text{arc} \sin(-p) = 0 \\ &\text{arc tg } p + \text{arc tg}(-p) = 0 \\ &\text{arc} \cos p + \text{arc} \cos(-p) = \pi \\ &\text{arc Cotg } p + \text{arc Cotg}(-p) = \pi \\ &\text{arc} \sin p + \text{arc} \cos p = {}^1/_2\,\pi \\ &\text{arc tg } p + \text{arc Cotg } p = {}^1/_2\,\pi \end{aligned}}$$



Gambar 20.



Gambar 21.

Perhatikan Gambar: $\alpha = \text{arc} \sin p = \text{arc} \cos\sqrt{1 - p^2}$

$$\beta = \text{arc} \cos p = \text{arc} \sin\sqrt{1 - p^2}$$

$$\gamma = \text{arc} \sin p = \text{arc Cotg } \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$$

$$\beta = \text{arc} \cos p = \text{arc tg } \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$$

Perhatikan gambar: δ = arc Cotg p = arc Sin $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$

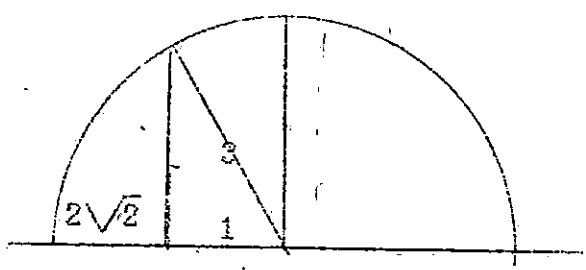
γ = arc tg p = arc Cos $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$

γ = arc tg p = arc Cotg $^1/_p$

δ = arc Cotg p = arc tg $^1/_p$

14.1. Contoh-Contoh :

1. Perhatikan gambar 22. α = arc Cos$(-^1/_3)$.



Gambar 22.

Untuk Cos $\alpha = -^1/_3$, harga yang memenuhi $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Sin $\alpha = ^2/_3\sqrt{2}$

tg $\alpha = -2\sqrt{2}$ dan

Cotg $\alpha = -^1/_4\sqrt{2}$

$\therefore$ α = arc Sin $^2/_3\sqrt{2}$

= arc tg $-2\sqrt{2}$

= arc Cotg $-^1/_4\sqrt{2}$.

2. Hitunglah : a. Cotg(arc Sin a)

b. Sin(arc tg b).

Jawab :

a. Umpama arc Sin a = α Sin α = a

Cos = $\sqrt{1-a^2}$ dalam interval $-\pi/_2 \leq \alpha \leq \pi/_2$

Cotg $\alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

Cotg(arc Sin a) = $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

b. Umpama arc tg b = β tg β = b

Cos $\beta = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$. dan Cos $\beta \geq 0$

dalam.........

dalam interval $-\pi/2 \leq \quad \leq \pi/2$

$$\text{Sin} \quad = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$$

$$\text{Sin(arc tg } b) = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$$

Rumus fungsi cyclometri yang penting diantaranya :

$$\text{arc Sin } p - \text{arc Sin } q = \text{arc Sin}(p\sqrt{1 - q^2} - 2\sqrt{1 - p^2}$$

$$\text{arc Cos } p + \text{arc Cos } q = \text{arc Cos}\{pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\}$$

$$\text{arc Sin } p + \text{arc Sin } q = \text{arc Sin}\{pq - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\} + \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{arc Cos } p - \text{arc Cos } q = \text{arc Cos}(p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2} - \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{arc tg } p - \text{arc tg } q = \text{arc tg } \frac{p - q}{pq + 1}$$

$$\text{arc Cotg } p + \text{arc Cotg } q = \text{arc Cotg } \frac{pq - 1}{p + q}$$

$$\text{arc tg } p + \text{arc tg } q = \text{arc tg } \frac{pq - 1}{p + q} + {}^1/_2\,\pi$$

$$\text{arc Cotg } p - \text{arc Cotg } q = \text{arc Cotg } \frac{p - q}{1 + pq} - {}^1/_2\,\pi$$

Jika $p = q$, maka didapat rumus-rumus sudut rangkap untuk arc:

$$2 \text{ arc Cos } p = \text{arc Cos}(2p^2 - 1)$$

$$2 \text{ arc Sin } p = \text{arc Sin}(2p^2 - 1) + {}^1/_2\,\pi$$

$$2 \text{ arc Cotg } p = \text{arc Cotg } \frac{p^2 - 1}{2p}$$

$$2 \text{ arc tg } p = \text{arc tg } \frac{p^2 - 1}{2p} + {}^1/_2\,\pi$$

14.2. Soal-Soal :

Hitunglah :

1. Sin(arc tg $^1/_2$)
2. Cos(arc Sin $^1/_4$)
3. tg(arc Cotg 2).

Buktikanlah.........

Buktikanlah :

4. $\text{Cos arc Sin } p = \sqrt{1 - p^2}$

5. $\text{Sin arc Cos } p = \sqrt{1 - p^2}$

6. $\text{tg arc Sin } p = \dfrac{p}{\sqrt{1 - p^2}}$

7. $\text{tg arc Cos } p = \dfrac{1}{p}\sqrt{1 - p^2}$

8. Buktikanlah: $\text{arc sin}\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \text{arc tg}\sqrt{\dfrac{x}{y - x}}$ jika, $y > x \geq 0$.

9. Buktikanlah: $2 \text{ arc tg } \dfrac{4}{3} = \dfrac{\pi}{2} + \text{arc tg } \dfrac{7}{24}$.

10. Buktikanlah: $3 \text{ arc tg } \dfrac{4}{3} = \pi - \text{arc tg } \dfrac{44}{117}$.

11. Hitunglah x dari persamaan:

a). $\text{arc cos } \dfrac{12}{13} + \text{arc cos } \dfrac{15}{17} = \text{arc cos } x$.

b). $\text{arc sin } \dfrac{9}{41} + \text{arc sin } \dfrac{3}{5} = \text{arc sin } x$.

c). $\text{arc tg } \dfrac{15}{17} + \text{arc tg } \dfrac{21}{29} = \text{arc tg } x$.

12. Hitunglah: a). $\text{tg}(\text{arc tg } \dfrac{1}{2} + \text{arc tg } \dfrac{1}{3})$.

b). $\sin(\text{arc tg } \dfrac{56}{33} - \text{arc cos } \dfrac{12}{13})$.

13. Buktikan: $\text{arc } \dfrac{63}{65} + 2 \text{ arc tg } \dfrac{1}{5} = \text{arc sin } \dfrac{3}{5}$.

14. Hitunglah: $\text{arc tg } \dfrac{1}{7} + 2(\text{arc tg } \dfrac{1}{2} + 2 \text{ arc tg } \dfrac{1}{3})$.

15. Hitunglah:

$$2 \text{ arc cos } \frac{3}{\sqrt{13}} + \text{arc cotg } \frac{16}{13} + \frac{1}{2} \text{arc cos } \frac{7}{25}.$$

14.3. Penyelesaian Soal-Soal Campuran:

1. Buktikanlah : $\dfrac{tg^2\alpha - \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = tg^4\alpha$

   Bukti :

$$\frac{tg^2\alpha - \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = tg^4\alpha$$

$$\frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha} =$$

$$\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha} =$$

$$\frac{\sin^2\alpha\ (1 - \cos^2\alpha)}{\cos^4\alpha} =$$

$$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha} = tg^4\alpha = tg^4\alpha \quad \text{terbukti.}$$

2. Hitunglah x dari $tg(3x = 120^\circ) = \dfrac{\sin^3 200^\circ \cos^2 312^\circ}{tg\ 191^\circ \sec 433^\circ}$

   Penyelesaian :

$$tg(3x = 120^\circ) = \frac{-\sin^3 20^\circ \cos^2 48^\circ}{tg\ 11^\circ \dfrac{1}{\cos 73^\circ}}$$

$$tg(3x - 120^\circ) = \frac{-\sin^3 20^\circ \cos^2 48^\circ \cos 73^\circ}{tg\ 11^\circ}$$

$$tg(120^\circ - 3x) = \frac{+\sin^3 20^\circ \cos^2 48^\circ \cos 73^\circ}{tg\ 11^\circ}$$

$$\log . tg(120^\circ - 3x) = \log \frac{+\sin^3 20^\circ \cos^2 48^\circ \cos 73^\circ}{tg\ 11^\circ}$$

$$\log tg(120^\circ - 3x) = 3 \log \sin 20^\circ + 2 \log \cos 48^\circ +$$
$$+ \log \cos 73^\circ - \log tg\ 11^\circ$$

$$\log \operatorname{tg}(120^\circ - 3x) = -1{,}56954$$
$$= 8{,}43046 - 10$$
$$120^\circ - 3x = 1^\circ\ 32'\ 36'' \pm k.180^\circ$$
$$3x = 118^\circ\ 27'\ 24'' \mp k.180^\circ$$
$$x = 39^\circ\ 29'\ 8'' \mp k.60^\circ.$$

3. Hitunglah : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + \sin 6x + \sin 10x - \sin 18x}{3 \sin x - \sin 3x}$

Penyelesaiannya:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \sin 6x + \sin 10x - \sin 18x}{3 \sin x - \sin 3x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 4x \cos(-2x) + 2 \cos 14x \sin(-4x)}{4 \sin^3 x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 4x \cos 2x \mp 2 \sin 4x \cos 14x}{4 \sin^3 x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 4x (\cos 2x - \cos 14x)}{4 \sin^3 x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 4x .-2\sin 8x \sin(-6x)}{4 \sin^3 x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4 \sin 4x \sin 8x \sin 6x}{4 \sin^3 x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x \sin 8x \sin 6x}{\sin^3 x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} . \frac{4x}{\sin x} . \frac{\sin 8x}{8x} . \frac{8x}{\sin x} . \frac{\sin 6x}{6x} . \frac{6x}{\sin x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} . 4 \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} . \lim_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{8x} . 8 \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{6x} \cdot 6 \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} =$$

$1 \, . \, 4 \, . \, 1 \, . \, 8 \, . \, 1 \, . \, 6 = 192.$

4. Eliminir x dan y dari $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \cos 2x + \cos 2y = b \\ \cos 3x + \cos 3y = c. \end{cases}$

Penyelesaiannya:

Persamaan ke 2: $\cos 2x + \cos 2y = b$

$$2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 y - 1 = b$$

$$2(\cos^2 x + \cos^2 y) - 2 = b$$

$$2(\cos^2 x + \cos^2 y) = b + 2$$

$$\cos^2 x + \cos^2 y = \frac{b + 2}{2}$$

$$(\cos x + \cos y)^2 - 2 \cos x \cos y = \frac{b + 2}{2}$$

$$a^2 - 2 \cos x \cos y = \frac{b + 2}{2}$$

$$2 \cos x \cos y = \frac{2a^2 - b - 2}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{2a^2 - b - 2}{4}.$$

Persamaan ke 3: $\cos 3x + \cos 3y = c$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 4 \cos^3 y - 3 \cos y = c$$

$$4(\cos^3 x + \cos^3 y) - 3(\cos x + \cos y) = c$$

$$4(\cos^3 x + \cos^3 y) - 3a = c$$

$$4(\cos^3 x + \cos^3 y) = 3a + c$$

$$\cos^3 x + \cos^3 y = \frac{3a + c}{4}$$

$$(\cos x + \cos y)^3 - 3 \cos x \cos y(\cos x + \cos y) = \frac{3a + c}{4}$$

$$a^3 - 3\cos x \cos y(a) = \frac{3a + c}{4}$$

$$-3a \cos x \cos y = \frac{3a + c}{4} - a^3$$

$$3a \cos x \cos y = \frac{4a^3 - 3a - c}{4}$$

$$\cos x \cos y = \frac{4a^3 - 3a - c}{12a}$$

∴ Persamaan resultannya:

$$\frac{4a^3 - 3a - c}{12a} = \frac{2a^2 - b - 2}{4}$$

$$16a^3 - 12a - 4c = 24a^3 - 12ab - 24a$$

$$-8a^3 - 12a - 4c + 12ab = 0$$

$$\underline{\underline{8a^3 - 12a - 12ab + 4c = 0.}}$$

5. Eliminirlah x dan y dari: $\begin{cases} b \sin x = a \sin y \\ b \cos x + a \cos y = c \\ \cos(x + y) = d. \end{cases}$

<u>Penyelesaiannya</u>:

$$\begin{cases} b \sin x = a \sin y \\ b \cos x + a \cos y = c \\ \cos(x + y) = d. \end{cases}$$

$$(1)^2 \longrightarrow b^2\sin^2 x - 2ab \sin x \sin y + a^2\sin^2 y = 0$$

$$(2)^2 \longrightarrow b^2\cos^2 x + 2ab \cos x \cos y + a^2\cos^2 y = c^2$$

$$b^2 + 2ab(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + a^2 = c^2 \quad +$$

$$2ab(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = c^2 - a^2 - b^2$$

$$2ab \cos(x + y) = c^2 - a^2 - b^2$$

$$\cos(x + y) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

$$(3) \longrightarrow \cos(x + y) = d$$

∴ Persamaan........

$\therefore$ Persamaan resultan: $\dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} = d$

$$c^2 - a^2 - b^2 = 2abd$$

$$c^2 - a^2 - b^2 - 2abd = 0$$

$$\underline{\underline{c^2 + a^2 - b^2 + 2abd = 0.}}$$

6. Jika $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$

Buktikanlah: $\sin 2\varphi = \dfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{1 + \sin 2\alpha \sin 2\beta}$

<u>Buktinya</u>:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 + \dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$$

= ....

$$= \frac{\dfrac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}}{1+\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{\dfrac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}}{\dfrac{\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}}$$

$$= \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)^2+(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+\cos^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+\sin 2\alpha\sin 2\beta}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin 2\alpha\sin 2\beta}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{1+\sin 2\alpha\,.\,\sin 2\beta}$$ terbukti.

7. Buktikanlah:

$$\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}2\varphi+\operatorname{tg}3\varphi+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}3\varphi\operatorname{tg}4\varphi = \frac{\sin 6\varphi}{\cos 2\varphi\cos 4\varphi}$$

Buktinya:

$$\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}2\varphi+\operatorname{tg}3\varphi+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}3\varphi\operatorname{tg}4\varphi = \frac{\sin 6\varphi}{\cos 2\varphi\cos 4\varphi}$$

$$(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}3\varphi)+\operatorname{tg}2\varphi+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}3\varphi\operatorname{tg}4\varphi =$$

$$\operatorname{tg}4\varphi(1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}3\varphi)+\operatorname{tg}2\varphi+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}3\varphi\operatorname{tg}4\varphi =$$

$$\operatorname{tg}4\varphi-\cancel{\operatorname{tg}4\varphi\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}3\varphi}+\operatorname{tg}2\varphi+\cancel{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}3\varphi\operatorname{tg}4\varphi} =$$

$$\operatorname{tg}4\varphi+\operatorname{tg}2\varphi =$$

$$\frac{\sin 4\varphi}{\cos 4\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} =$$

$$\frac{\sin 4\varphi \cos 2\varphi + \cos 4\varphi \sin 2\varphi}{\cos 4\varphi \cos 2\varphi} =$$

$$\frac{\sin(4\varphi + 2\varphi)}{\cos 4\varphi \cos 2\varphi} =$$

$$\frac{\sin 6\varphi}{\cos 2\varphi \cos 4\varphi} = \frac{\sin 6\varphi}{\cos 2\varphi \cos 4\varphi}$$

terbukti.

8. Buktikanlah:

$$\sin^2 6^\circ + \sin^2 42^\circ + \sin^2 66^\circ + \sin^2 78^\circ = 2\tfrac{1}{4}$$

Buktinya:

$$\sin^2 6^\circ + \sin^2 42^\circ + \sin^2 66^\circ + \sin^2 78^\circ = 2\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{1 - \cos 12^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 84^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 132^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 156^\circ}{2} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 12^\circ + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 84^\circ + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 132^\circ + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 156^\circ =$$

$$2 - \frac{1}{2}(\cos 12^\circ + \cos 84^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 132^\circ + \cos 156^\circ) =$$

$$2 - \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{12^\circ+84^\circ}{2}\cos\frac{12^\circ-84^\circ}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{132^\circ+156^\circ}{2}\cos\frac{132^\circ-156^\circ}{2}\right) =$$

$$2 - \cos 48^\circ \cos 36^\circ - \cos 144^\circ \cos 12^\circ =$$

$$2 - \cos 48^\circ \cos 36^\circ + \cos 36^\circ \cos 12^\circ =$$

$$2 + \cos 36^\circ(\cos 12^\circ - \cos 48^\circ) =$$

$$2 + \cos 36^\circ\left(-2 \sin \frac{12^\circ+48^\circ}{2} \sin \frac{12^\circ-48^\circ}{2}\right) =$$

$2 + \cos 36^\circ(-2 \sin 30^\circ \sin(-18^\circ)) =$

$2 + \cos 36^\circ \sin 18^\circ =$

$$2 + \frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{2 \cos 18^\circ} =$$

$$2 + \frac{\frac{1}{2} \sin 72^\circ}{2 \cos 18^\circ} =$$

$$2 + \frac{\cancel{\cos 18^\circ}}{4 \cancel{\cos 18^\circ}} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} \longrightarrow 2\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$ terbukti.

9. Hitunglah: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin x - \sin 2x}{x^2 \operatorname{tg} x}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^2 \operatorname{tg} x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{x^2 \operatorname{tg} x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{x^2 \operatorname{tg} x} =$$

$$2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} x}{x \operatorname{tg} x} =$$

$$4 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\operatorname{tg} x} =$$

$$4 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} x}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} =$$

$$4 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2} x}{2 \cdot {}^1/_2\, x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2} x}{2 \cdot {}^1/_2\, x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} =$$

$$\frac{4}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2} x}{{}^1/_2\, x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2} x}{{}^1/_2\, x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} =$$

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

10. Hitunglah x dan y dari persamaan: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1\frac{1}{2}$

$\sec x + \sec y = 2\frac{1}{2}$

Penyelesaian:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1\tfrac{1}{2} \longrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y = \frac{9}{4}$$

$$\sec x + \sec y = 2\tfrac{1}{2} \longrightarrow \sec^2 x + 2 \sec x \sec y + \sec^2 y = \frac{25}{4}$$

$$-1 + 2(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \sec x \sec y) - 1 = -\frac{16}{4}$$

$$2(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \sec x \sec y) = -2$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \sec x \sec y = -1$$

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} - \frac{1}{\cos x \cos y} = -1$$

$$\frac{\sin x \sin y - 1}{\cos x \cos y} = -1$$

$$\sin x \sin y - 1 = -\cos x \cos y$$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = 1$$

$$\cos (x - y) = 1$$

$$x - y = 0$$

$$x = y$$

(1) $\longrightarrow$ .....

$$(1) \longrightarrow tg\ x + tg\ y = 1\tfrac{1}{2}$$

$$2\ tg\ x = \frac{3}{2}$$

$$tg\ x = \frac{3}{4} \longrightarrow x = 40^\circ\ 58'\ 12'' + k.180^\circ$$

$$\therefore\ x = y = 40^\circ\ 58'\ 12'' + k.180^\circ.$$

14.4. Soal-Soal Tambahan :

1. Jika $Cotg\,\alpha = {}^1/_2(-1 + \sqrt{5})$, hitunglah perbandingan trigono yang lainnya.

2. Buktikanlah :

$$Sec^2\alpha - Cotg^2\alpha - (Cosec^2\alpha - tg^2\alpha) = 2\ \frac{tg^2\alpha - 1}{Sin^2\alpha}.$$

3. Buktikanlah :

$$tg^2\ x + Cosec^2\ x = \frac{1 - Cos^2x\ Sin^2x}{Cos^2x\ Sin^2x}$$

4. Hitunglah :

$$tg(270-x) = \frac{Cotg\ 360^\circ 7'25'' \times Cosec\ 106^\circ 25'17'' \times Cotg\ 185^\circ 17'28''}{Cos\ 157^\circ 10'36'' \times Sec\ 265^\circ 17'48''}$$

5. Turunkanlah rumus :

$$Cos\,{}^1/_2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + Cos\,\alpha}{2}} \text{ dan } Sin\,{}^1/_2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - Cos\,\alpha}{2}}$$

6. Hitunglah n suku dari :

$$Cos\,\alpha - Cos(a + \beta) + Cos(a + 2p) - Cos(a + 3p) + \ldots$$

7. Hitunglah :

$$\lim_{x \to 5} (x - 5)Cotg\ \pi\ x$$

8. Buktikanlah :

$\sin^2 6^\circ + \sin^2 42^\circ + \sin 66^\circ + \sin^2 78^\circ = 2^1/_4$.

9. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$, buktikanlah :

$(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\beta + \cos\beta)(\sin\gamma + \cos\gamma) =$

$2(\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$.

10. Hitunglah :

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin 2x - \cos x}$$

11. Buktikanlah : $\sum r_a = 3r + \sum a \operatorname{tg} {}^1/_2\alpha$.

12. Buktikanlah :

$$\operatorname{tg} \frac{21}{2}\alpha = \frac{r\, r_a}{r_b r_c}$$

13. Gambarlah grafik :

$y = 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

14. Gambarlah grafik : $y = 2 \sin x - \cos 2x + 3$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

15. Hitunglah : $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} {}^1/_2 + \operatorname{arc\,tg} {}^1/_3)$.

16. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, buktikanlah:

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}$$

17. Hitunglah x dari persamaan:

$$b \operatorname{tg} x = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

jika a = 42588 dan b = 36724.

18. Hitunglah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2}$

19. Hitunglah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \sin 4x - 4 \sin 3x}{x^3}$

20. Jika $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$. Buktikanlah:
$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 12 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

21. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, buktikanlah:
$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\gamma\cos\alpha} + \dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} = 2$

22. Hitunglah jumlah n suku dari deret:

$\cos x + 2 \cos 4x + 3 \cos 6x + \ldots$

23. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, buktikanlah:
$\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = 8 \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma$

24. Jika $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, buktikanlah:
$\sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha) \cos(45^\circ - \beta) \cos(45^\circ - \gamma) =$
$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma + \frac{1}{2}$.

25. Hitunglah: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \sin 3x}{1 - \cos 4x}$

26. Hitunglah x dari persamaan:

$x + y = 270^\circ$

$\operatorname{tg} x = 3 \cos y$

27. Hitunglah.....

27. Hitunglah x dari persamaan:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1\tfrac{1}{2}$$

$$\sec x + \sec y = 2\tfrac{1}{2}.$$

28. Eliminir x dari:

$$\begin{cases} \sec x - \cos x = a \\ \sec x - \sin x = b \end{cases}$$

29. Eliminir x dan y dari:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \cos 2x + \cos 2y = b \\ \cos 3x + \cos 3y = c. \end{cases}$$

30. Eliminir x dan y dari:

$$\begin{cases} b \sin x = a \sin y \\ b \cos x + a \cos y = c \\ \cos(x + y) = d. \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

Alders, C.J. Ilmu Ukur Segi Tiga. Pradnya Paramita. Jalan Medium 8 - Jakarta 1969.

Christian. R Robert : A Brief Trigonometry. Waltham Massuchusetts . Toronto - London.

J. Pignany, Tullio and Haggard Paul, Element of Trigonometry. Harcourt, Brace & World, Inc 1968.

Kobus M.L, Van Thijn, A Dr. dan Rawuh Rd : Ilmu Ukur Segi Tiga. J.B, Wolters, Jakarta Groningen, 1953.

Marcus, Marvin and Mine Hendryk, College Trigonometry Hongliton Mifflin Company, Boston, 1971.

Wijdenes : Goniometri en Trigonometry. P. Noordhoff NV, Groningen, Jakarta, 1953.

7. $$\begin{cases} \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} y = a \\ \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} y = b \\ \operatorname{Cos}(x + y) = c \end{cases}$$

? 8. $$\begin{cases} \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y + \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} x = a \\ \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y - \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} x = b \\ \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y = c \end{cases}$$