HIMPUNAN DAN BILANGAN

DITERJEMAHKAN
Oleh

Drs. Idrus Ramli

DITERBITKAN OLEH
PROYEK PENINGKATAN PERGURUAN TINGGI
IKIP PADANG
1 9 8 2

H I M P U N A N D A N B I L A N G A N

DITERJEMAHKAN
Oleh
DRS.IDRUS RAMLI

DITERBITKAN OLEH
PROYEK PENINGKATAN PERGURUAN TINGGI
IKIP PADANG
1982

KATA PENGANTAR

Sekarang ini sangat dirasakan kekurangan buku matematika untuk Perguruan Tinggi yang berbahasa Indonesia sebagai bahan bacaan bagi mahasiswa, sedangkan kemampuan mahasiswa untuk dapat membaca buku-buku dalam bahasa asing sangat kurang sekali.

Dalam rangka mengatasi masalah ini penulis mencoba menterjemahkan "HIMPUNAN DAN BILANGAN" yang penulis ambil dari buku "SET THEORY" karangan Seymour Lipschutz, Ph.D, Schaum's Outline Series , bab I, II dan III . Setiap bab diikuti dengan soal-soal dan penyelesaiannya; disamping itu dimuat pula soal-soal tambahan .

Isi buku ini ditekankan kepada perinsip-perinsip dasar himpunan dan bilangan yang sangat berguna sekali bagi mahasiswa atau guru-guru sekolah menengah sebagai pengetahuan dasar yang harus mereka miliki dalam mempelajari teori himpunan lanjutan.

Padang, Pebruari 1982

Penterjemah,

DAFTAR ISI

-o-

B A B I

HIMPUNAN DAN HIMPUNAN BAGIAN

1.1. HIMPUNAN

Himpunan merupakan konsep dasar dalam semua cabang matematika.

Himpunan dapat didefinisikan sebagai suatu kumpulan atau suatu daftar atau suatu kelas dari objek-objek.

Sebagai contoh:

1. Himpunan bilangan-bilangan
2. Himpunan orang
3. Himpunan huruf-huruf
4. Himpunan sungai-sungai, dan sebagainya.

Objek-objek yang membentuk himpunan itu disebut elemen-elemen atau anggota-anggota himpunan yang dimaksud.

Walaupun kita akan mempelajari himpunan itu sebagai eksistensi-eksistensi yang abstrak, baiklah kita catatkan beberapa contoh yang khusus dari himpunan-himpunan itu.

1. Bilangan-bilangan 1, 3, 7, dan 10
2. Penyelesaian persamaan $x^2 - 3x - 2 = 0$.
3. Huruf-huruf hidup dalam alphabet : a, i, u, e dan o.
4. Semua penduduk dunia
5. Mahasiswa-mahasiswa Tom, Dick dan Herry
6. Mahasiswa-mahasiswa yang tidak hadir kuliah.
7. Negara-negara: Inggeris, Perancis dan Denmark
8. Kota-kota besar di Eropah.
9. Bilangan-bilangan 2, 4, 6, 8, ...
10. Sungai-sungai di Amerika Serikat

Dari contoh-contoh diatas pada nomor-nomor ganjil, himpunan itu didefinisikan dengan mencatatkan anggota-anggota setiap himpunan, dan pada nomor-nomor genap himpunan-himpunan itu didefinisikan dengan menyatakan sifat-sifat himpunan, dimana dengan menggunakan sifat-sifat itu dapat ditentukan apakah suatu objek merupakan atau tidak merupakan anggota himpunan yang dibicarakan.

1.2. N O T A S I

Himpunan-himpunan itu biasanya dinyatakan dengan huruf-huruf besar seperti A, B, X, Y, ...
Anggota-anggota himpunan itu biasanya disajikan dengan menggunakan huruf-huruf kecil, seperti a, b, x, y, ...
Jika kita mendefinisikan himpunan yang khusus(tertentu) dengan mencatatkan anggota-anggotanya, sebagai contoh, A memuat anggota-anggota bilangan 1, 3, 7 dan 10 maka kita tuliskan:

$$A = \{1, 3, 7, 10\}$$

Dalam penulisan ini anggota-anggotanya dipisahkan dengan koma, dan ditutup oleh tanda $\{ \}$.
Menulis himpunan dengan cara ini kita sebut "<u>bentuk pendaftaran</u>" dari sebuah himpunan(<u>tabular form</u>).

Tetapi jika kita mendefinisikan sebuah himpunan yang khusus(tertentu) dengan menyatakan sifat-sifatnya dimana elemen-elemennya harus memenuhi sifat-sifat itu, sebagai contoh; Misalnya B adalah himpunan semua bilangan genap, maka kita gunakan suatu huruf biasanya x untuk menunjukkan elemen-elemen himpunan itu dan kita tuliskan :

$$B = \{x \mid x \text{ adalah bilangan genap}\}$$

yang dibaca B adalah himpunan yang anggota-anggotanya x dimana x adalah bilangan genap.
Menulis himpunan dengan cara ini kita sebut "<u>bentuk pemcirian</u>" (<u>set-builder form</u>) dari sebuah himpunan.
$\mid$ dapat dibaca <u>sehingga</u> atau <u>dengan syarat</u>.
Kadang-kadang tanda $\mid$ diganti dengan tanda : sehingga contoh diatas dapat dituliskan dengan :

$$B = \{x : x \text{ adalah bilangan genap}\}$$

Dengan demikian contoh pada 1.1. dapat kita tuliskan seperti dibawah ini;

1. $A_1 = \{1, 3, 7, 10\}$
2. $A_2 = \{x \mid x^2 - 3x - 2 = 0\}$
3. $A_3 = \{a, i, u, e, o\}$
4. $A_4 = \{x \mid x$ penduduk dunia$\}$
5. $A_5 = \{$Tom, Dick, Herry$\}$
6. $A_6 = \{x \mid x$ mahasiswa yang tidak hadir kuliah$\}$ atau
   $\{x \mid x$ mahasiswa dan x tidak hadir kuliah$\}$
7. $A_7 = \{$Inngeris, Perancis, Denmark$\}$
8. $A_8 = \{x \mid x$ kota besar di Eropah$\}$ atau
   $\{x \mid x$ kota besar dan x di Eropah$\}$
9. $A_9 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\ldots\}$
10. $A_{10} = \{x \mid x$ sungai di Amerika Serikat$\}$
    $\{x \mid x$ sungai dan x di Amerika Serikat$\}$

Jika sebuah objek x adalah sebuah anggota dari sebuah himpunan A, maka kita tuliskan $x \in A$ atau dapat dibaca x elemen (anggota) A.
Jika sebuah objek y adalah tidak merupakan sebuah anggota dari sebuah himpunan A, maka kita tuliskan:

$$y \notin A$$

Contoh:

1. Misalkan $A = \{a, i, u, e, o\}$ maka $a \in A$, $b \notin A$
   $e \in A$, $f \notin A$
2. Misalkan $B = \{x \mid x$ bilangan genap$\}$ maka,
   $3 \notin B$, $6 \in B$, $8 \in B$, $14 \in B$

1.3. HIMPUNAN TERHINGGA DAN TIDAK TERHINGGA

Himpunan -himpunan itu dapat terhingga dan dapat tidak terhingga .
Suatu himpunan terhingga, jika himpunan itu memuat sejumlah elemen-elemen yang berbeda dan terhingga, Sebaliknya adalah himpunan-himpunan yang tidak terhingga .

Contoh:

1. Misalkan M himpunan nama -nama hari dalam satu minggu, maka M terhingga.
2. Misalkan $N = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ maka N tidak terhingga.
3. Misalkan $P = \{x \mid x$ sungai didunia $\}$, P terhingga.

1.4. HIMPUNAN YANG SAMA

Himpunan A sama dengan himpunan B jika keduanya mempunyai anggota-anggota yang sama atau jika setiap elemen A adalah elemen B dan setiap elemen B adalah elemen A. Untuk itu disimbolkan : $A = B$

Contoh:

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 1, 4, 2\}$ maka $A = B$. Jadi $\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\}$
   Sebab setiap elemen A adalah elemen B dan setiap elemen B adalah elemen A.
2. Misalkan $C = \{5, 6, 5, 7\}$ dan $D = \{7, 5, 7, 6\}$ maka, $C = D$ sehingga $\{5, 6, 5, 7\} = \{7, 5, 7, 6\}$
   sebab setiap elemen C adalah elemen D dan setiap elemen D adalah elemen C.
   Note: Suatu himpunan tidak berubah jika elemen-elemen nya diulang.
   Dengan demikian: $\{5, 6, 7\} = C = D$
3. Misalkan $E = \{x \mid x^2 - 3x = -2\}$, $F = \{2, 1\}$ dan $G = \{1, 2, 2, 1\}$ maka $E = F = G$.

1.5. HIMPUNAN KOSONG.

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memuat elemen. Himpunan ini dinamakan himpunan kosong(empty set) atau(null set).
Biasanya disimbulkan dengan ϕ

Contoh:

1. Misalkan A adalah himpunan orang didunia yang berumur lebih dari 200 tahun.
2. $B = \{x \mid x^2 = 4, x \text{ ganjil}\} \Longrightarrow B = \emptyset$

1.6. HIMPUNAN BAGIAN

Jika setiap elemen himpunan A adalah elemen himpunan B, maka A disebut himpunan bagian dari B.

Jadi A himpunan bagian B jika $x \in A \Longrightarrow x \in B$. Relasi ini kita tuliskan dengan : $A \subset B$,

yang dapat juga dibaca " A dimuat dalam B".

Contoh:

1. $C = \{1, 3, 5\}$ adalah himpunan bagian dari $D = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
   sebab $1 \in C \Longrightarrow 1 \in D$.
   $3 \in C \Longrightarrow 3 \in D$
   $5 \in C \Longrightarrow 5 \in D$ Jadi $C \subset D$.
2. $E = \{2, 4, 6\}$ adalah himpunan bagian dari $F = \{6, 2, 4\}$
   sebab setiap elemen E adalah juga elemen F.
3. $G = \{x \mid x$ bilangan genap$\}$
   $= \{2, 4, 6, \ldots\}$
   $F = \{x \mid x$ bilangan 2 berpangkat bulat dan positif$\}$
   $= \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$
   maka $F \subset G$ atau dikatakan F dimuat dalam G.

Dengan menggunakan definisi himpunan bagian diatas, kita dapat menyatakan dalam cara yang berbeda definisi dua himpunan yang sama yaitu:

Definisi: Dua himpunan A dan B adalah sama yaitu $A = B$ jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.

Jika A himpunan bagian dari B, maka dapat juga kita tuliskan $B \supset A$, yang dapat dibaca " B superset dari A", atau B memuat A. Jika A bukan himpunan bagian dari B , dapat kita tuliskan $A \not\subset B$ atau $B \not\supset A$.

Disamping itu dapat pula disimpulkan bahwa:

1. $\emptyset$ adalah merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan
2. Jika A bukan himpunan bagian dari B, yaitu $A \not\subset B$, maka ada paling sedikit satu elemen A yang bukan elemen B.

1.7. HIMPUNAN BAGIAN YANG SEJATI

Kita sudah mengetahui bahwa setiap himpunan A adalah

merupakan himpunan bagian dari dirinya sendiri.
B dikatakan himpunan bagian sejati dari A jika, pertama B adalah himpunan bagian dari A dan yang kedua B tidak sama dengan A. Dengan memakaikan simbul B adalah himpunan bagian sejati dari A jika $B \subset A$ dan $B \neq A$.
Dalam beberapa buku, B himpunan bagian dari A dinyatakan dengan : $B \subseteq A$, dan " B himpunan bagian sejati dari A" dinyatakan dengan: $B \subset A$
Dalam pembicaraan selanjutnya, kita akan memakai notasi $\subset$ tanpa membedakan antara "himpunan bagian" dengan "himpunan bagian sejati".

1.8. DUA HIMPUNAN YANG DAPAT DIBANDINGKAN(COMPARABLE).

Dua himpunan A dan B dikatakan dapat dibandingkan jika $A \subset B$ atau $B \subset A$. Atau dengan kata lain: Dua himpunan dapat dibandingkan jika himpunan yang satu merupakan himpunan bagian dari himpunan yang lain.
Dua buah himpunan A dan B dikatakan tidak dapat dibandingkan jika, $A \not\subset B$ dan $B \not\subset A$.
Jika dua himpunan A dan B tidak dapat dibandingkan, maka ada suatuelemen A yang bukan elemen B dan juga ada elemen B yang bukan elemen A.
Contoh:
1. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ maka A dapat dibandingkan dengan B.
2. $R = \{a, b\}$, $S = \{b, c, d\}$ maka R dan S tidak dapat dibandingkan karena $a \in R$ dan $a \notin S$, $c \in S$ dan $c \notin R$

1.9. T E O R I

Dalam matematika, banyak pernyataan-pernyataan dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan asumsi-asumsi dan definisi-difinisi pendahuluan.
Essensi matematika itu memuat teori-teori dengan pembuktiannya.
Teori 1.1. Jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari C, maka A himpunan bagian dari C.

Dapat kita tuliskan $A \subset B$ dan $B \subset C$, maka $A \subset C$.

Bukti. : $A \subset B$

Misalkan $x \in A \Longrightarrow x \in B$

$B \subset C$

$x \in B \Longrightarrow x \in C$

Jadi $x \in A \Longrightarrow x \in C$, maka $A \subset C$.

1.10. HIMPUNAN DARI HIMPUNAN-HIMPUNAN.

Kadang-kadang akan terjadi bahwa objek-objek dari sebuah himpunan adalah himpunan-himpunan itu sendiri. Sebagai contoh, Himpunan dari semua himpunan bagian dari A. Untuk menghindari menyebut "himpunan dari himpunan-himpunan", maka disebut juga dengan "Keluarga dari himpunan-himpunan" atau "klas dari himpunan-himpunan". Untuk itu biasa disimbulkan menuliskannya dengan memakai tulisan tangan seperti:

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$

Contoh:

1. Dalam geometri kita biasanya mengatakan himpunan garis-garis dan himpunan kurva-kurva dengan "klas garis" dan "klas kurva", sebab garis-garis dan kurva-kurva itu sendiri merupakan himpunan titik-titik.
2. Himpunan $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ adalah "keluarga himpunan" atau "klas himpunan" dimana anggota-anggotanya himpunan-himpunan $\{2,3\}$, $\{2\}$ dan $\{5, 6\}$.
3. Secara teoritis mungkin saja sebuah himpunan mempunyai anggota-anggota yang sebahagian merupakan himpunan-himpunan dan sebahagian lagi bukan himpunan-himpunan. Dengan demikian himpunan yang terjadi bukan "klas himpunan-himpunan" ; sebagai contoh:

   $A = \{2, \{1, 3\}, 4, \{2, 5\}\}$, maka A bukan "klas himpunan-himpunan".

1.11. HIMPUNAN SEMESTA (UNIVERSAL SET).

Dalam suatu pemakaian dari teori himpunan, semua himpunan-himpunan yang diselidiki adalah himpunan-himpunan bagian dari sebuah himpunan yang telah ditetapkan.

Himpunan yang telah ditetapkan itu dinamakan "himpunan semesta" atau Universal set.

Contoh:

1. DalamIlmu Ukur Bidang, himpunan semesta terdiri dari semua titik-titik dalam bidang.
2. Dalam mempelajari populasi manusia, himpunan semesta terdiri dari semua orang didunia.

1.12.HIMPUNAN KUASA (POWER SET) .

"Klas himpunan-himpunan" yang anggota-anggotanya semua himpunan-himpunan bagian dari suatu himpunan S disebut "Himpunan Kuasa" dari S . Kita nyatakan himpunan kuasa dari S dengan 2^S.

Contoh:

1. Misalkan $M = \{a, b\}$, maka
   $2^M = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$.
2. Misalkan $T = \{4, 7, 8\}$, maka
   $2^T = \{T, \{4, 7\}, \{4, 8\}, \{7, 8\}, \{4\}, \{7\}, \{8\}, \emptyset$.

Jika himpunan S terbatas, misalkan S mempunyai n elemen, maka "himpunan kuasa dari S" mempunyai 2^n elemen.

1.13.HIMPUNAN-HIMPUNAN YANG SALING TERPISAH

Jika himpunan A dan B tidak ada mempunyai elemen yang sama atau tidak ada elemen A yang menjadi elemen B dan tidak ada elemen B yang menjadi elemen A, maka kita katakan A dan B saling terpisah(disjoint).

Contoh:

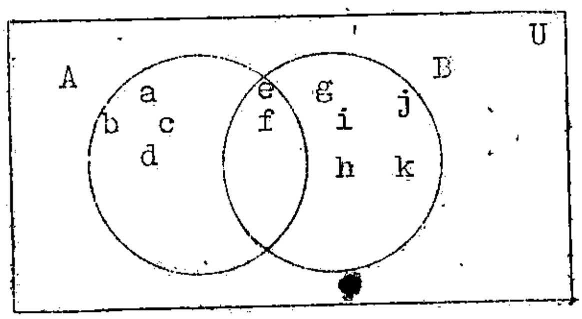
1. Misalkan $A = \{1, 3, 7, 8\}$; $B = \{2, 4, 7, 9\}$
   $7 \in A$ dan juga $7 \in B$ $\Longrightarrow$ A dan B tidak saling terpisah(tidak disjoint).
2. Misalkan A adalah himpunan bilangan-bilangan positif dan B himpunan bilangan-bilangan negatif , maka A dan B saling terpisah, karena tidak ada anggota bilangan positif yang menjadi anggota bilangan negatif , demikian

juga sebaliknya.

3. Misalkan $E = \{x, y, z\}$ dan $F = \{r, s, t\}$ maka E dan F saling terpisah(disjoint).

1.14. DIAGRAM VENN - EULER

Untuk dapat melihat dengan mudah hubungan antara himpunan yang satu dengan yang lain(seperti komplemen, irisan, gabungan dsb.) maka himpunan -himpunan tersebut dapat digambarkan dengan menggunakan diagram Venn - Euler. Venn - Euler mendapatkan suatu cara yang praktis untuk menggambarkan suatu himpunan, yaitu dengan menggunakan garis tertutup, misalnya lingkaran, ellips, garis lengkung ataupun segi banyak sebagai batas himpunan itu. Titik-titik dalam daerah yang dibatasi oleh garis tertutup itu menyatakan gambar anggota-anggota himpunan yang dimaksud.



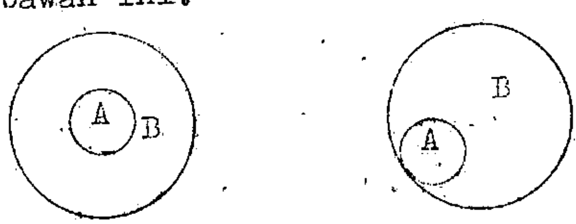
A dan B, himpunan yang kita bicarakan.

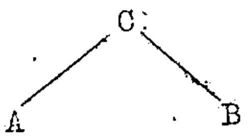
U = himpunan semesta(universal set).

Dengan mengkombinasikan kedua cara, ialah cara penulisan (daftar ciri) dan diagram Venn, kita dapat lebih lengkap menjelaskan suatu pengertian dan sifat-sifat himpunan.

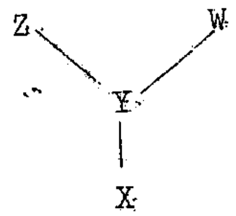
Contoh:

1. Misalkan A himpunan bagian B, katakanlah $A \neq B$. Maka A dan B dapat dilukiskan dengan salah satu dari kedua diagram dibawah ini.





2. Misalkan $X = \{x\}$, $Y = \{x, y\}$, $Z = \{x, y, z\}$
$W = \{x, y, w\}$



1.16.PENGEMBANGAN AXIOMA PADA TEORI HIMPUNAN.

Dalam pengembangan axioma pada suatu cabang matematika, orang mulai dengan:

1). batasan-batasan yang tidak didefinisikan
2). relasi-relasi yang tidak didefinisikan
3). axioma-axioma yang berhubungan dengan batasan-batasan yang tidak didefinisikan dan relasi-relasi yang tidak didefinisikan.

Kemudian orang mengembangkan teori-teori berdasarkan axioma-axioma dan definisi-definisi.

Contoh:

1. Dalam sebuah pengembangan axioma pada Ilmu Ukur Bidang (Plane Euclidean Geometry):
   1). Titik-titik dan garis-garis adalah batasan-batasan yang tidak didefinisikan.
   2). "titik pada sebuah garis" atau ekwivalen dengan "garis memuat sebuah titik, adalah sebuah relasi yang tidak didefinisikan.
   3). Dua axioma dari padanya adalah:
      axioma 1. Dua titik yang berbeda adalah pada satu dan hanya padasatu garis.
      axioma 2. Dua garis yang berbeda tidak dapat memuat lebih dari satu titik persekutuan.

Dalam sebuah pengembangan axioma pada teori himpunan:

1). "elemen" dan "himpunan" adalah batasan-batasan yang tidak didefinisikan

2). "elemen kepunyaan sebuah himpunan" adalah relasi yang tidak didifinisikan.

3). Dua axioma dari padanya adalah:

1. Axioma yang diperluas: dua himpunan A dan B adalah sama jika dan hanya jika setiap elemen(anggota) A adalah anggota B dan setiap anggota B adalah anggota A.

2. Axioma yang tertentu(spesifik); Misalkan P(x) adalah suatu pernyataan dan misalkan A suatu himpunan. Maka ada suatu himpunan,

$B = \{a \mid a \in A \quad , \quad P(a) \text{ benar}\}$

Disini P(x) adalah sebuah kalimat dalam satu variabel untuk yang P(a) = benar atau salah untuk suatu $a \in A$.

Untuk contoh, P(x) : " $x^2 = 4$ " atau "x adalah anggota kewarganegaraan Amerika Serikat".

Pembicaraan mengenai axioma-axioma ini akan kita bicarakan lagi pada bab-bab berikutnya.

1.17.SOAL-SOAL DAN PENYELESAIANNYA.

1. Tulislah pernyataan-pernyataan dibawah ini dengan menggunakan notasi himpunan.
   - a. x bukan anggota A
   - b. R superset dari S
   - c. d anggota E
   - d. F bukan himpunan bagian dari G
   - e. H tidak memuat D

Penyelesaian: a. $x \notin A$ b. $R \supset S$ c. $d \in E$
d. $F \not\subset G$ e. $H \not\supset D$

2. Misalkan $A = \{x \mid 2x = 6\}$ dan $b = 3$. Apakah $b = A$?.
Penyelesaia n: A adalah sebuah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen yang tunggal yaitu 3, sehingga $A = \{3\}$ .. Bilangan 3 adalah anggota A tetapi tidak sama dengan A. Dalam hal ini kita ha rus dapat membedakan antara elemen x dengan $\{x\}$.

3. Misalkan $M = \{r, s, t\}$ .. Periksalah statemen yang berikut apakah benar atau salah.
   a. $r \in M$ b. $r \subset M$
   c. $\{r\} \in M$. d. $\{r\} \subset M$

Penyelesaian: a). Benar .
b). Salah . Simbul $\subset$ digunakan untuk menentukan hubungan dua buah himpunan yaitu untuk menunjukkan suatu himpunan merupakan himpunan bagian dari himpunan lain. $r \subset M$ merupakan pernyataan yang salah karena r adalah anggota dari M, tetapi bukan merupakan hinpunan bagian dari M.
c). Salah. Simbul $\in$ digunakan untuk menunjukkan anggota suatu himpunan. $\{r\}$ bukan anggota himpunan M, dengan demikian $\{r\} \in M$ merupakan pernyataan yang salah. $\{r\}$ adalah himpunan bagian dari M, tetapi bukan anggota himpunan M.
d). Betul.

4. Nytakanlah dalam perkataan/kalimat dan kemudian tuliskan dalam "bentuk pendaftaran"(tabular-form).
   a). $A = \{x \mid x^2 = 4\}$. b). $B = \{x \mid x - 2 = 5\}$
   c). $C = \{x \mid x \text{ positif, } x \text{ negatif}\}$
   d). $D = \{x \mid x \text{ tulisan dalam "correct"}\}$

Penyelesaian:
a). A adalah himpunan x sehingga x kwadrat sama dengan 4. Karena bilangan-bilangan yang bila dikwadratkan sama dengan 4 adalah 2 dan -2, maka $A = \{2, -2\}$

b). B adalah himpunan x, sehingga x dikurangi 2 sama dengan 5. Karena hanya bilangan 7 yang bila dikurangi 2 sama dengan 5, maka $B = \{7\}$.

c). C adalah himpunan x sehingga x bilangan positif dan x bilangan negatif. Karena tidak ada bilangan yang memenuhi kedua sifat itu sekali gus maka C himpunan kosong, yaitu $C = \emptyset$

d). D adalah himpunan x sehingga x adalah sebuah huruf dalam perkataan correct. Huruf-huruf tersebut adalah c, o, r, e dan t sehingga $D = \{c, o, r, e, t\}$.

5. Tuliskanlah himpunan-himpunan dibawah ini dalam "bentuk penciriam"(set-builder form).

a). A terdiri dari tulisan-tulisan a, b, c, d dan e.

b). $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

c). C terdiri dari negara-negara di Amerika Serikat.

d). $D = \{3\}$

e). E = {Presiden Truman, Eisenhower , Kennedy}

Penyelesaian:

a). $A = \{x \mid x$ huruf-huruf sebelum f dalam alphabet$\}$
$= \{x \mid x$ adalah lima huruf yang pertama dalam alphabet$\}$

b). $B = \{x \mid x$ adalah genap dan positif$\}$

c). $C = \{x \mid x$ adalah sebuah negara, x di Amerika Serikat$\}$

d). $D = \{x \mid x - 2 = 1\} = \{x \mid 2x = 6\}$

e). $E = \{x \mid x$ adalah Presiden Amerika Serikat setelah F.D Rosevelt$\}$

<u>Himpunan-himpunan terhingga dan tidak terhingga</u> .

6. Yang manakah yang merupakan terhingga ?.

a). Nama-nama bulan dalam satu tahun.

b). $\{1, 2, 3, \ldots\ldots 100\}$.

c). Semua orang yang tinggal didunia

d). $\{x \mid x = \text{genap}\}$

e). $\{1, 2, 3 \ldots\ldots\}$

Penyelesaian: a), b) dan c) adalah himpunan-himpunan yang terhingga,sedangkan d) dan e) adalah himpunan yang tidak terhingga.

Himpunan-himpunan yang sama

7. Himpunan-himpunan yang manakah yang sama?.
$\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, r\}$, $\{s, r, s, t\}$?.

Penyelesaian: Semua himpunan-himpunan itu sama satu dengan yang lainnya.

8. Himpunan-himpunan manakah yang sama?.
a). $\{x \mid x$ adalah huruf dalam perkataan "follow"$\}$
b). $\{x \mid x$ adalah huruf dalam perkataan flow$\}$
c). Huruf-Huruf pada perkataan wolf
d). Huruf-huruf f, l, o, w

Penyelesaian: Jika semua himpunan itu dituliskan dalam "bentuk pendaftaran" maka akan memudahkan melihatnya, apakah mereka sama atau tidak. Setelah semua himpunan-himpunan itu dituliskan dalam "bentuk pendaftaran" maka ternyata semuanya sama yaitu sama dengan $\{f, l, o, w\}$.

Himpunan kosong(Null set)

9. Perkataan manakah yang berbeda dari yang lain dan kenapa?.
a). emty b). void c). zero d). null

Penyelesaian: a), b) dan d) mempunyai pengertian yang sama yaitu himpunan-himpunan yang tidak mempunyai aggota , sedangkan c) menunjukkan bilangan nol. Jadi yang berbeda adalah c).

10. Himpunan-himpunan yang manakah yang merupakan himpunan kosong?.
$\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$

Penyelesaian: Satu sama lain merupakan himpunan yang berbeda. Yang merupakan himpunan kosong adalah $\emptyset$.

11. Himpunan-himpunan yang manakah yang merupakan himpunan kosong?.
a). $A = \{x \mid x$ adalah huruf sebelum a pada alphabet$\}$
b). $B = \{x \mid x^2 = 9 \text{ dan } 2x = 4\}$
c). $C = \{x \mid x \neq x\}$
d). $D = \{x \mid x + 8 = 8\}$

Penyelesaian:

a). Karena a adalah huruf alphabet yang pertama, maka A tidak mempunyai anggota. Jadi $A = \emptyset$

b). Bilangan yang memenuhi kedua persamaan $x^2 = 9$ dan $2x = 4$ tidak ada, maka $B = \emptyset$.

c). $C = \emptyset$. Dalam beberapa buku, himpunan kosong didefinisikan dengan $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

d). $D \neq \emptyset$, sebab $D = \{0\}$.

Himpunan Bagian

12 . Misalkan $A = \{x, y, z\}$. Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A ?. Tuliskan semua himpunan bagian yang dimaksud.

Penyelesaian:

Banyak himpunan bagian dari A adalah delapan, yaitu:

$\{x, y, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$, $\{x, y\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$ dan $\emptyset$.

13. Didefinisikan himpunan-himpunan pada ilmu ukur bidang sebagai berikut:

$Q = \{x \mid x \text{ adalah segi empat}\}$

$R = \{x \mid x \text{ adalah persegi panjang}\}$

$H = \{x \mid x \text{ adalah belah ketupat}\}$

$S = \{x \mid x \text{ adalah bujursangkar}\}$

Tentukanlah himpunan-himpunan manakah yang merupakan himpunan-himpunan bagian sejati dari yang lain.

Penyelesaian:

Karena setiap bujursangkar adalah bangun datar bersisi empat maka $S \subset Q$. Karena setiap bujursangkar mempunyai empat sudut siku-siku dan setiap bangun datar bersisi empat yang keempat sudutnya siku-siku adalah persegi panjang, maka $S \subset R$. Karena setiap bangun datar yang bersisi empat yang keempat sisinya sama panjang adalah belah ketupat, maka $S \subset H$. Walaupun demikian tidak ada relasi yang menghubungkan keempat himpunan itu sekali gus.

14. Apakah setiap himpunan mempunyai himpunan bagian sejati?.
Penyelesaian: Himpunan $\emptyset$ tidak mempunyai himpunan bagian sejati, sedangkan setiap himpunan yang lain, $\emptyset$ dapat dipandang merupakan himpunan bagian sejatinya. Dalam bebrapa buku, tidak menyebutkan bahwa $\emptyset$ himpunan bagian sejati; maka dalam hal ini himpunan yang mempunyai hanya satu anggota tidak mempunyai himpunan bagian sejati.

15. Buktikan : Jika A himpunan bagian dari $\emptyset$, maka $A = \emptyset$.
Penyelesaian: $\emptyset$ adalah himpunan bagian dari setiap himpunan $\Longrightarrow \emptyset \subset A$ *
Diketahui $A \subset \emptyset$ **
Akibat * & ** maka $A = \emptyset$.

16. Bagaimanakah kita membuktikan bahwa himpunan A adalah bukan himpunan bagian dari B ?.
Buktikan bahwa $A = \{2, 3, 4, 5\}$ bukan himpunan bagian $B = \{x \mid x \text{ bilangan genap}\}$
Penyelesaian: Perlu ada paling sedikit satu anggota A yang bukan anggota B.
Karena $3 \in A$ tetapi $3 \notin B$, maka $A \not\subset B$.

17. Misalkan $V = \{d\}$, $W = \{c, d\}$, $X = \{a, b, c\}$,
$Y = \{a, b\}$ dan $Z = \{a, b, d\}$
Tentukanlah manakah diantara pernyataan yang brikut benar dan mana pula yang salah.

a). $Y \subset X$: b). $W \not\supset V$ c). $W \neq Z$
d). $Z \supset V$ e). $V \not\subset Y$ f). $Z \not\supset X$
g). $V \subset X$ h). $Y \not\subset Z$ i). $X = W$
j). $W \subseteq Y$

Penyelesaian:
a). Karena setiap elemen Y adalah anggota X, maka pernyataan $Y \subset X$ benar.
b). Karena elemen V hanya d dan d anggota W maka $W \supset V$. Jadi pernyataan $W \not\supset V$ salah.
c). Karena $a \in Z$ dan $a \notin W$ maka pernyataan $W \neq Z$ benar.

d). Setiap elemen V adalah anggota Z. Jadi pernyataan $Z \supset V$ benar.

e). Karena $d \in V$ dan $d \notin Y$, maka $V \not\subset Y$ benar.

f). Karena $c \in X$ dan $c \notin Z$, maka Z bukan himpunan yang memuat X. Jadi pernyataan $Z \not\supset X$ benar.

g). V bukan himpunan bagian dari X, karena $d \in V$, tetapi $d \notin X$. Jadi pernytaan $V \subset X$ salah.

h). Setiap anggota Y adalah anggota Z. Jadi $Y \not\subset Z$ salah.

i). Karena $a \in X$ dan $a \notin W$, maka pernyataan $X = W$ salah.

j). Karena $c \in W$ dan $c \notin Y$, maka W bukan himpunan bagian dari Y. Jadi pernyataan $W \subset Y$ salah.

18. Misalkan $A = \{r, s, t, u, v, w\}$, $B = \{u, v, w, x, y, z\}$

$C = \{s, u, y, z\}$, $D = \{u, v\}$

$E = \{s, u\}$, $F = \{s\}$

Misalkan X suatu himpunan yang tidak diketahui. Tentukanlah himpunan-himpunan yang manakah dari A, B, C, D, E dan F yang dapat sama dengan X, jika kita ketahui pernyataan yang berikut:

a). $X \subset A$ dan $X \subset B$ c). $X \not\subset A$ dan $X \not\subset C$

b). $X \not\subset B$ dan $X \subset C$ d). $X \subset B$ dan $X \not\subset C$

Penyelesaian:

a). Himpunan yang merupakan himpunan bagian dari pada kedua himpunan A dan B adalah D. C, E dan F bukan merupakan himpunan bagian dari B karena $s \in C, E, F$ tetapi $s \notin B$.

b). X dapat sama dengan C, E atau F karena himpunan - himpunan ini merupakan himpunan bagian -himpunan bagian dari C dan tidak merupakan himpunan bagian dari B.

c). Hanya B yang merupakan bukan himpunan bagian dari A atau C. D dan A himpunan bagian-himpunan bagian dari A. C, E dan F himpunan bagian dari C.
Jadi $X = B$.

d). B dan D merupakan himpunan bagian -himpunan bagian dari B dan bukan dari C. Himpunan-himpunan yang lain tidak memenuhi syarat. Jadi X = B atau X = D.

19. Misalkan A himpunan dari B dan misalkan B himpunan bagian dari C ($A \subset B$ dan $B \subset C$). Anggaplah $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ dan anggaplah $d \notin A$, $e \notin B$ dan $f \notin C$. Pernyataan-pernyataan yang manakah yang benar?.

a). $a \in C$ b). $b \in A$ c). $c \notin A$

d). $d \in B$ e). $e \notin A$ f). $f \notin A$

Penyelesaian:

a). $A \subset B$, $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$. Jadi jika $a \in A$, maka $a \in C$. Akibatnya pernyataan $a \in C$ benar.

b). Karena $b \in B$ maka tidak perlu $b \in A$. Jadi pernyataan $b \in A$ dapat menjadi salah.

c). Jika $c \in C$ mungkin juga menghasilkan $c \in A$. Jadi pernyataan $c \notin A$ tidak perlu benar.

d). Jika d bukan pada A, maka tidak perlu $d \in B$. Jadi pernyataan $d \in B$ tidak perlu benar.

e). Karena $e \notin B$ dan $A \subset B$, maka pernyataan $e \notin A$ selalu benar.

f). Karena $f \notin C$ dan $A \subset C$, maka pernyataan $f \notin A$ selalu benar.

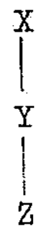
Diagram garis.

20. Susunlah sebuah diagram garis untuk himpunan-himpunan $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, c\}$

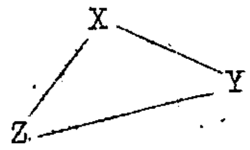
Penyelesaian: Karena $A \supset B$, $A \supset C$ sedangkan B dan C tidak dapat dibandingkan, maka diagram garis dari himpunan-himpunan tsb. adalah:

21. Susunlah diagram garis dari himpunan-himpunan, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$, $Z = \{b\}$

Penyelesaian: Karena $Z \subset Y$ dan $Y \subset X$, maka diagram garisnya dari himpunan-himpunan tsb. adalah:

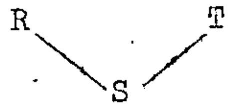


Kita tidak perlu melukiskan diagram garisnya dengan:

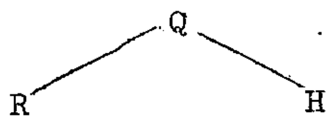


karena jika dibuat garis yang menghubungkan Z ke X, maka ini hanya merupakan perbuatan mubazir, sebab $Z \subset Y$ dan $Y \subset X$, maka otomatis $Z \subset X$.

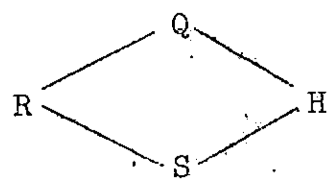
22. Susunlah diagram garis dari himpuanan-himpunan : $R = \{r, s, t\}$, $S = \{s\}$, dan $T = \{s, t, u\}$
Penyelesaian: $S \subset R$, $S \subset T$
R dan T tidak dapat dibandingkan . Diagram garisnya dari himpunan-himpunan tsb. adalah:



23. Misalkan Q, R, H dan S himpunan-himpunan dalam soal no. 13. Susunlah diagram-diagram dari himpunan-himpunan itu.
Penyelesaian: $Q \supset R$ dan $Q \supset H$, maka pertama kita lukiskan:

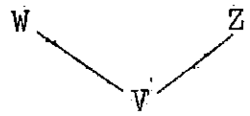


Sekarang tambahkan S pada diagram itu. Karena $S \subset R$ dan $S \subset H$, maka kita lengkapkan diagram tsb. menjadi:

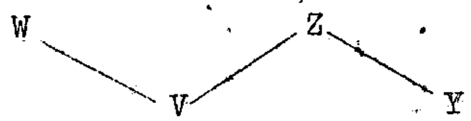


24. Susunlah diagram-diagram garis untuk himpunan-himpunan V, W, X, Y dan Z dalam soal no. 17.

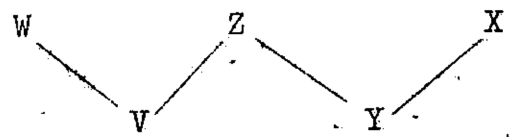
Penyelesaian: Karena $V \subset W$ dan $V \subset Z$, maka diagram garisnya adalah:



Karena $Y \subset Z$, maka kita tambahkan Y pada diagram :



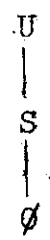
Akhirnya karena $Y \subset X$ kita lengkapkan diagramnya sebagai berikut:



25. Misalkan S suatu himpunan . susunlah diagram garis untuk himpunan $\emptyset$, S dan himpunan semesta U.

Penyelesaian: Karena $\emptyset$ himpunan bagian dari setiap himpunan, maka $\emptyset \subset S$, kita nyatakan dengan diagram:

Selanjutnya karena himpunan-himpunan semesta U, adalah superset dari setiap himpunan yang memuat S, maka kita lengkapkan diagramnya menjadi:



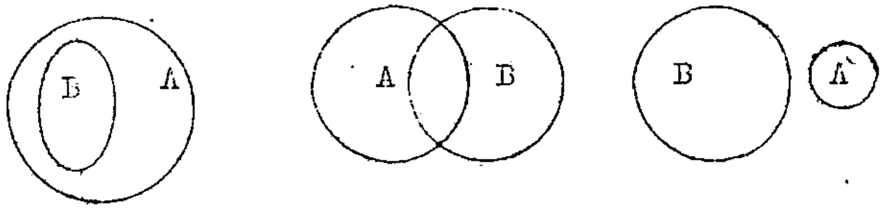
<u>Soal-soal Campuran.</u>

26. Diketahui pernyatan-pernyataan :

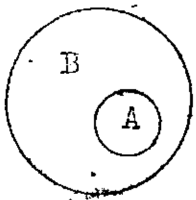
(1). $A \subset B$ (2). $A \supset B$ (3). $A = B$

(4). A dan B terpisah (5). A dan B tak dapat dibandingkan.

Pertanyaan: Pernyataan yang manakah yang dilukiskan kan oleh diagram (...) .... .



a) b) c)



d).

Penyelesaian:

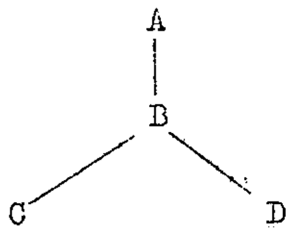
a). Daerah B adalah bagian dari da erah A, karena $A \supset B$

b). Ada titik-titik pada A yang bukan pada B dan ada pula titik-titik pada B yang bukan pada A. Jadi A dan B tidak dapat dibandingkan. Kedua himpunan ini juga tidak terpisah karena ada titik-titik ya ng merupakan kepunyaan kedua himpunan tsb.

c).Kedua himpunan A dan B terpisah, karena tidak ada titik-titik yang terletak pada kedua himpunan itu. Kedua himpunan tsb. juga tidak dapat dibanding - kan.

d). Daerah A adalah bagian dari daerah B. Jadi $A \subset B$.

27.Diketahui diagram garis dari himpunan-himpunan A, B, C danD seperti dibawah ini:

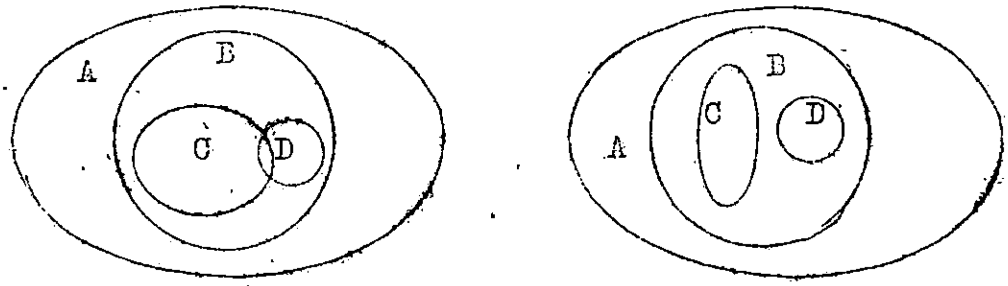


Tuliskan pernyataan-pernyataan berkenaan dengan hubungan sepasang-sepasang dari himpunan-himpunan itu.

Penyelesaian: $C \subset B$, $D \subset B$ dan $B \subset A$. Hal ini mengakibatkan pula bahwa $C \subset A$ dan $D \subset A$. C dan D tidak dapat dibandingkan.

28. Dari soal no. 27 lukiskanlah diagram Venn yang mungkin.

Penyelesaian: Kita dapat membuat dua macam diagram untuk itu, yaitu:



Perbedaan utama dari kedua diagram itu adalah pada diagram pertama, C dan D tidak terpisah sedangkan pada diagram kedua C dan D terpisah.

29. Apakah yang dimaksud dengan simbul $\{\{2, 3\}\}$?

Penyelesaian: Himpunan itu mempunyai satu anggota yaitu $\{2, 3\}$. $\{2, 3\}$ bukan merupakan himpunan bagian dari $\{\{2, 3\}\}$.

30. Misalkan $A = \{2, \{4, 5\}, 4\}$. Berkenaan dengan A ini diantara pernyataan-pernyataan dibawah ini, yang manakah yang tidak benar, ?, mengapa ?

a). $\{4, 5\} \subset A$ b) $\{4, 5\} \in A$ c). $\{\{4, 5\}\} \subset A$

Penyelesaian: Anggota-anggota A adalah 2, 4 dan $\{4, 5\}$. Jadi pernyataan b) benar, dan pernyataan a) salah. Pernyataan c) benar, karena $\{\{4, 5\}\}$ adalah himpunan bagian dari A.

31. Misalkan $E = \{2, \{4, 5\}, 4\}$. Pernyataan-pernyataan yang manakah yang tidak benar, mengapa ?

a). $5 \in E$ b). $\{5\} \in E$ c). $\{5\} \subset E$

Penyelesaian: Setiap pernyataan adalah salah. Anggota anggota himpunan E adalah 2, 4 dan himpunan $\{4, 5\}$, maka jelas a) dan b) salah. Banyak himpunan bagian dari E adalah delapan dan $\{5\}$ bukan salah satu dari padanya, maka c) salah .

32. Tentukanlah himpunan kuasa 2^S dimana $S = \{3, \{1, 4\}\}$

Penyelesaian: Himpunan S memuat dua anggota yaitu 3 dan $\{1, 4\}$, maka 2^S mempunyai anggota $2^2=4$ buah, yaitu; S, $\{3\}$, $\{\{1, 4\}\}$ dan $\emptyset$

Jadi $2^S=\{S, \{3\}, \{\{1,4\}\}, \emptyset\}$

33. Dari yang berikut ini manakah yang tidak didefinisikan dalam perkembangan axiomatic teori himpunan ?.

a). himpunan b). himpunan bagian dari

c). disjoint d). elemen

e). sama f). kepunyaan dari(belongs to)

g). superset dari

Penyelesaian: Konsep-konsep yang tidak didefinisikan dalam teori himpunan adalah: himpunan, elemen, dan relasi kepunyaan(belongs to) yaitu a) , d) dan f).

34. Misalkan A dan B tidak himpunan kosong, yaitu $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$. Jika A dan B terpisah, maka A dan B tidak dapat dibandingkan, buktikanlah!.

Penyelesaian:

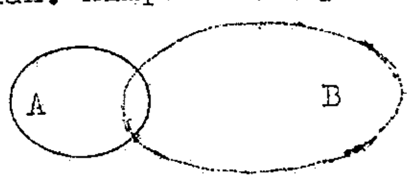
Karena A dan B tidakkosong, maka ada $a \in A$ dan $b \in B$.

Selanjutnya karena A dan B terpisah, $a \notin B$ dan $b \notin A$

Akibatnya $A \not\subset B$ dan $B \not\subset A$ $\Longrightarrow$ A dan B tidak dapat dibandingkan.

35. Misalkan A dan B tidak dapat dibandingkan. Haruskah A dan B terpisah?.

Penyelesaian: A dan B tidak perlu terpisah. Himpunan - himpunan dalam diagram Venn dibawah ini tidak dapat dibandingkan. Himpunan-himpunan ini juga tidak terpisah.



1.18. Soal-soal Tambahan

Notasi

36. Tuliskanlah dalam notasi himpunan:

a). R superset dari T

b). x anggota Y

c). M tidak superset S

d). Himpunan kuasa dari W

e). z bukan anggota A

f). B dimuat dalam F

g). Himpunan kosong

h). R anggota A

37. Nyatakanlah dengan perkataan:

a). $A = \{x \mid x$ tinggal di Paris $\}$

b). $B = \{x \mid x$ bercakap dalam bahasa Denmark $\}$

c). $C = \{x \mid x$ lebih tua dari 21 tahun $\}$

d). $D = \{x \mid x$ ibu kota Perancis $\}$

38. Tuliskan dalam "bentuk pendaftaran":

a). $P = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$

b). $Q = \{x \mid x$ huruf, dalam perkataan "follow" $\}$

c). $R = \{x \mid x^2 = 9 \ , x - 3 = 5\}$

d). $S = \{x \mid x$ huruf hidup $\}$

e). $T = \{x \mid x$ angka pada bilangan 2324 $\}$

39. Misalkan $E = \{1, 0\}$. Manakah diantara pernyataan yang berikut benar atau salah ?.

a). $\{0\} \in E$ b). $\emptyset \in E$ c). $\{0\} \subset E$

d). $0 \in E$ e). $0 \subset E$

40. Dalam perkembangan axiomatic teori himpunan, nayatakanlah simbul-simbul manakah yang menunjukkan relasi yang tidak didefinisikan?.

a). $\not\subset$ b). $\in$ c). $\supset$

Himpunan Bagian

41. Misalkan $B = \{0, 1, 2\}$. Dapatkanlah semua himpunan - himpunan bagian dari B.

42. Misalkan $F = \{0, \{1, 2\}\}$. Dapatkanlah semua himpunan-himpunan bagian dari F.

43. Misalkan $A = \{2, 3, 4\}$,
$B = \{x \mid x^2 = 4, x \text{ positif}\}$
$C = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$
$D = \{x \mid x \text{ bilangan genap}\}$

Lengkapkanlah pernyataan yang berikut dengan menggunakan tanda $\subset$, $\supset$ atau " nc "(tidak dapat dibandingkan) antara setiap pasangan himpunan.

a). A ..... B b). A C
c). B ..... C d). A ..... D
e). B ..... D f). C ..... D

44. Misalkan $A = \{1, 2, \ldots\ldots, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$
$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$
$E = \{3, 5\}$

Himpunan-himpunan yang manakah yang dapat sama dengan X jika diketahui hal-hal sebagai berikut:

a). X dan B terpisah
b). $X \subset D$ dan $X \not\subset B$
c). $X \subset A$ dan $X \not\subset C$
d). $X \not\subset C$ dan $X \not\subset A$

45. Nyatakanlah apakah pernyataan yang berikut benar atau salah.

a). Setiap himpunan bagian dari himpunan terhingga adalah terhingga .
b). Setiap bagian dari himpunan yang tidak terhingga adalah tidak terhingga . /himpunan

SOal-soal Campuran

46. Lukiskanlah diagramgaris himpunan-himpunan A, B, C dan D dari soal no. 43.

47. Lukiskanlah diagram garis untuk himpunan-himpunan A, B, C, D dan E dari soal no. 44.

48. Nayatakalah apakah pernyataan yang berikut benar atau salah.

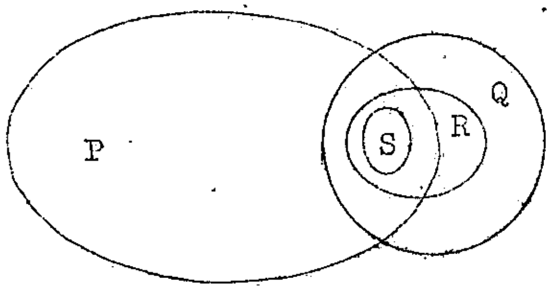
a). $\{1, 4, 3\} = \{3, 4, 1\}$

b). $\{1, 3, 1, 2, 3, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
c). $\{4\} \in \{\{4\}\}$
d). $\{4\} \subset \{\{4\}\}$
e). $\emptyset \subset \{\{4\}\}$

49. Manakah diantara himpunan-himpunan yang berikut terhingga atau tidak terhingga.
   a). himpunan garis-garis yang sejajar dengan sumbu X
   b). himpunan huruf-huruf dalam alphabet
   c). himpunan bilangan-bilangan kelipatan 5
   d). himpunan binatang-binatang yang hidup didunia
   e). himpunan bilangan-bilangan akar dari persamaan $x^{38} + 42x^{23} - 17x^{18} - 2x^5 + 19 = 0$
   f). himpunan lingkaran-lingkaran yang melalui titik O (0,0)

50. Manakah diantarapernyataan yang berikut $\angle$ atau salah dimana $S \neq \emptyset$.
   a). $S \in 2^S$ b). $S \subset 2^S$ $\angle$ benar
   c). $\{S\} \in 2^S$ d). $\{S\} \subset 2^S$

51. Lukiskan diagram garis untuk himpunan-himpunan dalam diagram Venn dibawah ini.



B A B II

OPERASI DASAR HIMPUNAN

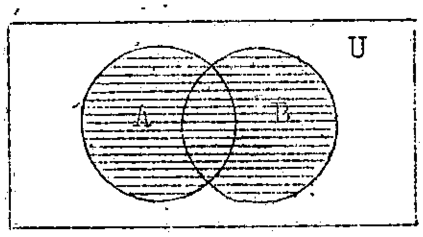
2.1. OPERASI-OPERASI HIMPUNAN

Dalam Ilmu Hitung kita mempelajari operasi tambah, kurang dan perkalian, dimana untuk setiap pasangan bilangan x dan y, bilangan x + y disebut jumlah dari x dan y, bilangan x - y disebut selisih dari x dan y dan bilangan xy disebut perkaliandari x dan y.
Operasi-operasi yang digunakan untuk pasangan-pasangan bilangan itu, masing-masingnya disebut operasi tambah, operasi kurang dan operasi perkalian.

Pada bab ini kita mendefinisikan operasi-operasi gabungan (union), irisan(intersection) dan selisih dari himpunan-himpunan, sehingga kita peroleh himpunan-himpunan baru dari pasangan-pasangan himpunan A dan B.

2.2. GABUNGAN(UNION)

Gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan dari semua anggota-anggota himpunan A atau himpunan B.
Kita nyatakan gabungan dari himpunan A dan B dengan $A \cup B$ yang biasanya dibaca dengan " A gabungan B".
Contoh:
1. Jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ maka $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
   Jika kita gambarkan dengan diagram Venn maka gambarnya seperti terlihat dibawah ini.



$A \cup B$ yang diarsir

2. Misalkan P himpunan bilangan riil yang positif, dan Q himpunan bilangan riil yang negatif, maka $P \cup Q$ terdiri dari semua bilangan riil kecuali nol.

Gabungan A dan B dapat juga didefinisikan sebagai:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

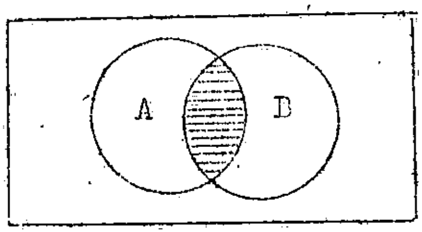
Dari definisi $A \cup B$ itu maka:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \subset (A \cup B)$ dan $B \subset (A \cup B)$

Dalam beberapa buku, A gabungan B dinyatakan dengan A + B dan dibaca A tambah B.

2.3. IRISAN(INTERSECTION)

Irisan dari himpunan A dan himpunan B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya adalah sama-sama anggota A dan B. Kita nyatakan irisan dari himpunan A dan B dengan $A \cap B$, yang dibaca A irisan B.
Dengan menggunakan diagram Venn, $A \cap B$ dapat kita lihat seperti gambar dibawah ini.



$A \cap B$ yang diarsir

Contoh soal.

1. Misalkan $S = \{a, b, c, d\}$, $T = \{f, b, d, g\}$
   maka $S \cap T = \{b, d\}$
2. Misalkan $V = \{2, 4, 6, \ldots\}$ yang merupakan kelipatan dua dan $W = \{3, 6, 9, \ldots\}$ yang merupakan kelipatan tiga, maka ;

$$V \cap W = \{6, 12, 18, \ldots\}$$

Irisan dari A dan B dapat juga didefinisikan sebagai:

$A \cap B = \{x \mid x \in A , x \in B\}$, tanda koma disini mempunyai arti yang sama dengan "dan".

Dari difinisi irisan dari dua himpunan A dan B maka:

1). $A \cap B = B \cap A$

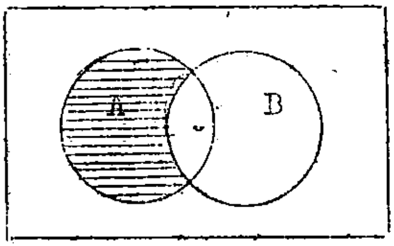
2). A dan B memuat subset $A \cap B$, atau $(A \cap B) \subseteq A$ dan $(A \cap B) \subseteq B$.

3). Jika A dan B tidak ada mempunyai anggota-anggota yang sama yaitu jika A dan B saling terpisah(lepas), maka $A \cap B = \emptyset$

2.4. SELISIH DUA HIMPUNAN.

Selisih himpunan A denganhimpunan B adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya, anggota himpunan A, tetapi bukan anggota himpunan B, dan kita nyatakan dengan A – B yang dibaca "selisih A dengan B" atau disederhanakan membacanya " A kurang B".

Dengan menggunakan diagram Venn A – B adalah daerah A yang bukan bagian daerah B.



A – B yang diarsir

Contoh:

1. Misalkan $S = \{a, b, c, d\}$, $T = \{f, b, d, g\}$
   maka $S - T = \{a, c\}$
2. Misalkan R himpunan bilangan riil dan Q himpunan bilangan rasional, maka R – Q mempunyai anggota-anggota bilangan irrational.

Selisih himpunan A dengan himpunan B dapat juga didefinisikan dengan,

$$A - B = \{x \mid x \in A , \ x \notin B\}$$

Dari definisi selisih himpunan A dengan himpunan B, maka

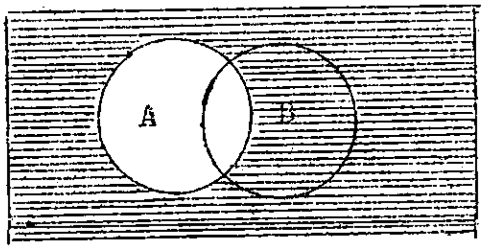
1). Himpunan A memuat A – B sebagai himpunan bagian, yaitu $(A - B) \subset A$.

2). Himpunan-himpunan (A – B), $A \cap B$ dan(B – A) adalah saling terpisah satu sama lain(lepas), sehingga irisan dari setiap dua dari himpunan itu adalah himpunan kosong.

Selisih himpunan A denganhimpunan B kadang-kadang dinyatakan dengan A / B atau A ~ B .

2.5.KOMPLEMEN

Komplemen dari suatu himpunan A adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya bukan anggota A , sehingga anggota-anggota komplemen dari suatu himpunan A tsb . adalah U- A. Komplemen dari suatu himpunan A itu dinyatakan dengan $\overline{A}$ atau A'. Denganmenggunakan diagram Venn,komplemen dari himpunan A tsb. adalah daerah yang diarsir.



$\overline{A}$ yang diarsir

Contoh:

1. Misalkanhimpunan semesta U terdiri dari semua huruf alphabet dan $T = \{a, b, c\}$ maka $\overline{T} = \{d, e, f, \ldots, z\}$
2. Misalkan $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ bilangan genap, maka $\overline{E} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ bilangan ganjil.

Komplemen dari himpunan A dapat juga didefinisikan sebagai:

$\overline{A} = \{x \mid x \in U , x \notin A\}$ atau dapat disederhanakan

menjadi:

$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$

Dari definisi komplemen dari himpunan A, maka:

1). Gabungan suatu himpunan A dengan komplemennya adalah himpunan semestanya dari himpunan A itu.

Jadi $A \cup \overline{A} = U$

Karena himpunan A dengan $\overline{A}$ saling terpisah(lepas) maka

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

2). Komplemen dari himpunan semesta U adalah himpunan $\emptyset$ dan sebaliknya komplemen himpunan kosong adalah himpunan semesta. Jadi $\overline{U} = \emptyset$ dan $\overline{\emptyset} = U$.

3). Komplemen dari komplemen himpunan A adalah himpunan A sendiri. Jadi $\overline{\overline{A}} = A$.

4). Selisih himpunan A dengan himpunan B sama dengan irisan A dengan komplemen B.

Jadi $A - B = A \cap \overline{B}$

Bukti: $A - B = \{x \mid x \in A\ ,\ x \notin B\}$

$= \{x \mid x \in A\ ,\ x \in \overline{B}\}$

$= A \cap \overline{B}$

2.6. OPERASI-OPERASI PADA HIMPUNAN-HIMPUNAN YANG DAPAT DIBAN - DINGKAN.

Operasi gabungan, irisan, selisih dan komplemen mempunyai sifat-sifat yang lebih sederhana bilamana himpunan-himpunan yang diketahui dapat dibandingkan.

Teori: 2.1. Jika $A \subset B$ maka $A \cap B = A$.

Bukti:

Ambil $x \in A \Longrightarrow x \in B \Longrightarrow x \in (A \cap B)$ ...1)

Jadi $A \subset A \cap B$

Ambil $x \in (A \cap B) \Longrightarrow x \in A$ ...... 2)

Jadi $(A \cap B) \subset A$

Dari 1) dan 2) $\Longrightarrow A = A \cap B$

Teori 2.2. Misalkan $A \subset B$ maka $A \cup B = B$

Bukti:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

$= \{x \mid x \in B\}$

$= B$

Teori 2.3. Misalkan $A \subset B$, maka $\overline{B} \subset \overline{A}$, buktikanlah .

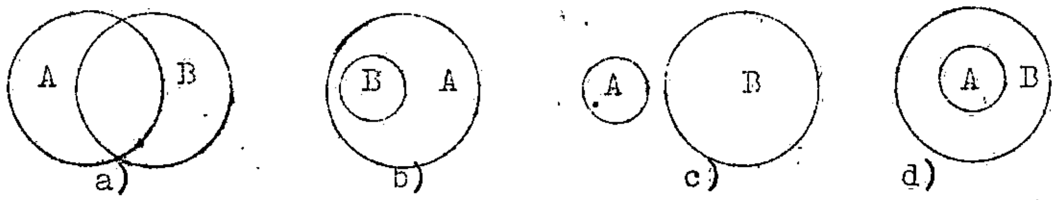
Teori 2.4. Misalkan $A \subset B$, maka $A \cup (B - A) = B$.

Buktikanlah sendiri .

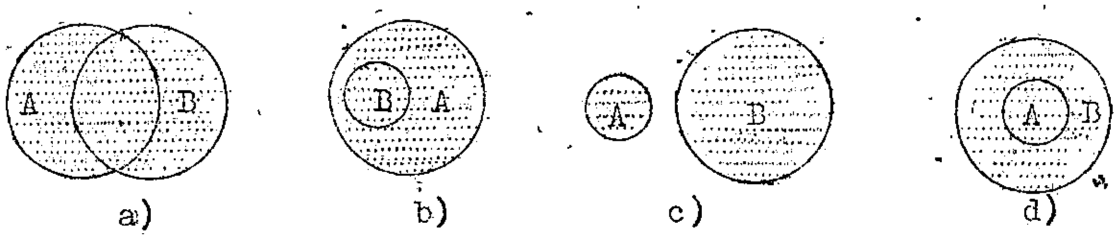
Teori -teori diatas mudah dipahami dengan menggunakan diagram Venn .

2.7. SOAL-SOAL DAN PENYELESAIANNYA.

1. Dalam diagram Venn dibawah ini arsirlah A gabungan B.



Penyelesaian: A gabungan B adalah sebuah himpunan yang anggota-anggotanya pada A atau pada B atau pada keduanya.



A gabungan B adalah daerah yang diarsir.

Dari diagram ini dapat dilihat bahwa :

Pada b) $A \cup B = A$ dan pada d) $A \cup B = B$.

2. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Hitunglah: a). $A \cup B$ b). $A \cup C$ c). $B \cup C$ d). $B \cup B$

Penyelesaian: Untuk membentuk gabungan A dan B, maka semua anggota-anggota himpunan A dan B disatukan, sehingga: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

Dengan cara yang sama:

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$

$B \cup B = \{2, 4, 6, 8\} = B$

3. Misalkan A, B dan C himpunan-himpunan dalam soal 2.

Hitunglah : a). $(A \cup B) \cup C$ b). $A \cup (B \cup C)$

Penyelesaian: a). $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, maka

$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 5\}$

b). $B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$, maka

$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 5\}$

Jadi $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

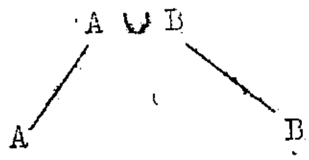
4. Misalkan $X = \{$Tom, Dick, Harry$\}$, $Y = \{$Tom, Marc, Eric$\}$

$Z = \{$Marc, Eric, Edward$\}$

Dapatkanlah: a). $X \cup Y$ b). $Y \cup Z$ c). $X \cup Z$. F)

5. A dan B dua himpunan yang tidak dapat dibandingkan. Lukiskan diagram garis untuk himpunan-himpunan A, B dan $A \cup B$.

Penyelesaian: $A \subset (A \cup B)$ dan $B \subset (A \cup B)$, akibatnya diagram A, B dan $A \cup B$ adalah:



6. Buktikan, $A \subset (A \cup B)$, $B \subset (A \cup B)$.

Penyelesaian: $A \cup B = B \cup A$

Misalkan $x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow A \subset (A \cup B)$

Misalkan $y \in B \Longrightarrow y \in (B \cup A)$ atau $y \in (A \cup B) \Longrightarrow B \subset (A \cup B)$

7. Buktikan $A = A \cup A$

Penyelesaian: Dengan menggunakan definisi 1 pada bab I, maka harus ditunjukkan bahwa $A \subset (A \cup A)$ dan $(A \cup A) \subset A$. Menurut sifat yang sudah dikemukakan pada bagian gabungan $A \subset (A \cup B)$, maka

$A \subset (A \cup A)$ ..... *

Misalkan $X \in (A \cup A)$ maka $X \in A$ atau $X \in A$, $\Longrightarrow$ X anggota A

Jadi $(A \cup A) \subset A$ ..... **

* & ** maka $A = A \cup A$.

8. Buktikan $U \cup A = U$, dimana U himpunan semesta.

Penyelesaian: $U \subset (U \cup A)$ ...... *

Setiap himpunan adalah himpunan bagian dari himpunan semesta. Jadi $(U \cup A) \subset U$ .... **

* & **, maka $U \cup A = U$.

F) Penyelesaian : a) $\{$Tom, Dick, Harry, Marc, Eric$\}$

b) $\{$Tom, Marc, Eric, Edward$\}$ c) $\{$Tom, Dick, Harry, Marc, Eric, Edward

9. Buktikan: $\emptyset \cup A = A$

Penyelesaian: $A \subset (A \cup \emptyset)$ .... * Sekarang misalkan $x \in (A \cup \emptyset)$, maka $x \in A$ atau $x \in \emptyset$. Dengan menggunakan difinisi himpunan kosong karena $x \in A$ maka $x \notin \emptyset$. Kita telah menunjukkan bahwa $x \in (A \cup \emptyset)$, mengakibatkan $x \in A \Longrightarrow (A \cup \emptyset) \subset A$ ..... **

* & ** , maka $A = A \cup \emptyset$!

10. Buktikan: $A \cup B = \emptyset$ maka $A = \emptyset$ dan $B = \emptyset$

Penyelesaian: $A \subset (A \cup B)$, $A \cup B = \emptyset \Longrightarrow A \subset \emptyset$ ... *

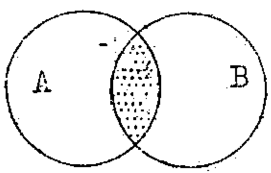
$\emptyset$ adalah himpunan bagian dari setiap himpunan $\Longrightarrow \emptyset \subset A$ ....**

* & ** maka $A = \emptyset$. Dengan cara yang sama $B = \emptyset$.

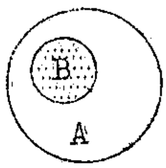
I R I S A N

11. Dalam diagram Venn dalam soal no.1, arsirlah $A \cap B$.

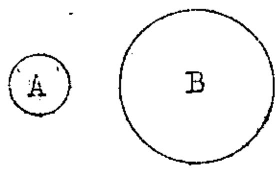
Penyelesaian: Irisan dari A dan B teridri dari daerah berdua dari A dan B.



a)

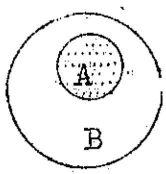


b)



c)

d)



$A \cap B$ adalah daerah yang diarsir.

12. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$C = \{3, 4, 5, 6\}$

Tentukanlah: a). $A \cap B$ b). $A \cap C$ c). $B \cap C$ d). $B \cap B$

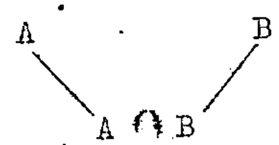
Penyelesaian: Untuk membentuk irisan A dan B, kita catatkan semua anggota yang sama dari A dan B.

Dengan demikian $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cap C = \{3, 4\}$

$B \cap C = \{4, 6\}$, $B \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$

13. Misalkan A, B, dan C himpunan -himpunan pada soal no.12.
Tentukanlah a) $(A \cap B) \cap C$, b). $A \cap (B \cap C)$.
Penyelesaian: a). $A \cap B = \{2, 4\}$. $(A \cap B) \cap C = \{4\}$
b). $B \cap C = \{4, 6\}$ $A \cap (B \cap C) = \{4\}$
Jadi $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = 4$

14. Misalkan A dan B dua himpunan yang tidak dapat dibandingkan. Lukiskanlah diagram garis A, B dan $A \cap B$.
Penyelesaian: $A \cap B$ adalah himpunan bagian dari A dan B, yaitu $(A \cap B) \subset A$ dan $(A \cap B) \subset B$. Dengan demikian diagram garisnya adalah:



15. Buktikan: $(A \cap B) \subset A$ dan $(A \cap B) \subset B$.
Penyelesaian: Misalkan x anggota A irisan B, akibatnya x anggota A dan B. Jadi jika
$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$. Jadi $(A \cap B) \subset A$
Dengan cara yang sama $(A \cap B) \subset B$.

16. Buktikan $A \cap A = A$
Penyelesaian: $(A \cap A) \subset A$ (sifat) ..... *
Misalkan x anggota A, maka jelaslah x menjadi anggota A dan A. Jadi jika $x \in A \Longrightarrow x \in A \cap A$.
Akibatnya $A \subset (A \cap A)$ .....**
* & ** , maka $A \cap A = A$.

17. Buktikan $U \cap A = A$, dimana U himpunan semesta.
Penyelesaian: $U \cap A \subset A$ (sifat) ......*
Misalkan x suatu anggota A. Karena U himpunan semesta, maka x juga anggota U. Karena $x \in A$ dan $x \in U$ sesuai dengan definisi irisan, maka $x \in (U \cap A)$
Kita telah menunjukkan bahwa $x \in A$ mngakibatkan
$x \in (U \cap A) \Longrightarrow A \subset (U \cap A)$ .... **
* & ** menghasilkan $U \cap A = A$.

18. Buktikan $A \cap \emptyset = \emptyset$
Penyelesaian: $(A \cap \emptyset) \subset \emptyset$ -.....*(sesuai dengan sifat $(A \cap B) \subset B$).

Karena $\emptyset$ merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan

$\Longrightarrow \emptyset \subset (A \cap \emptyset)$ .... **

* & ** $\Longrightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$.

SELISIH DUA HIMPUNAN.

19. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$C = \{3, 4, 5, 6\}$

Tentukanlah: a). $A - B$ c). $B - C$ e). $B - B$

b). $C - A$ d). $B - A$

Penyelesaian: a). Himpunan $A - B$ terdiri dari anggota-anggota A yang bukan anggota B.

Karena $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $2, 4 \in B$; maka $A - B = \{1, 3\}$

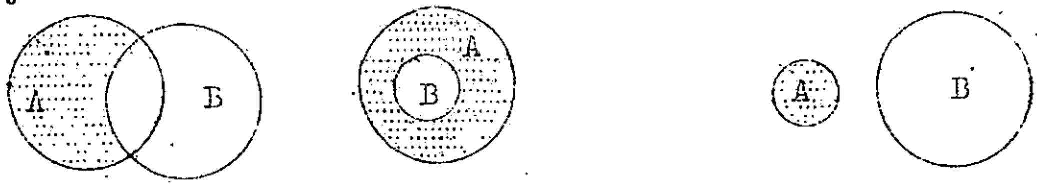
Dengan cara yang sama diperoleh:

b). $C - A = \{5, 6\}$ c). $B - C = \{2, 8\}$

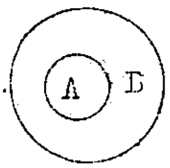
d). $B - A = \{6, 8\}$ e). $B - B = \emptyset$

20. Pada diagram Ven soal no. 1, arsirlah $A - B$.

Penyelesaian:



a) b) c)



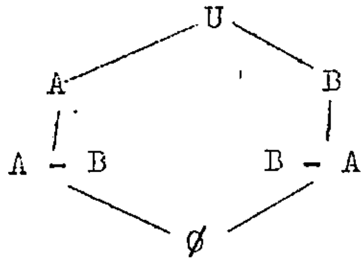
d)

Daerah yang diarsir adalah $A - B$.

21. Misalkan A dan B tidak dapat dibandingkan. Lukiskanlah diagram A, B, (A − B), (B − A) ; $\emptyset$ dan U.

Penyelesaian: $(A - B) \subset A$, $(B - A) \subset B$, $\emptyset$ himpunan bagian dari setiap himpunan $\Longrightarrow \emptyset \subset (A - B)$, $\emptyset \subset (B - A)$. Dalam diagram $\emptyset \subset A$ dan $\emptyset \subset B$ tidak perlu lagi dibuatkan diagram garis langsung, demikian juga buat $\emptyset$, $A - B$ & $B - A$ terhadap U.

Jadi diagramnya adalah:



22. Buktikan $(A - B) \subset A$

Penyelesaian: Misalkan x anggota $A - B$. Dengan pengertian definisi selisih dua buah himpunan, maka $x \in A$ dan $x \notin B$. Kita telah menunjukkan bahwa $x \in (A-B)$ menghasilkan $x \in A \Longrightarrow (A - B) \subset A$.

23. Buktikan. $(A - B) \cap B = \emptyset$

Penyelesaian: Misalkan x anggota $(A - B) \cap B \Longrightarrow x \in (A-B)$ dan $x \in B$. Dengan menggunakan definisi $A-B$, maka $x \in A$ dan $x \notin B$. Karena tidak ada suatu anggota yang memenuhi keduanya $x \in B$ dan $x \notin B$, maka $(A-B) \cap B = \emptyset$.

KOMPLEMEN.

24. Misalkan $U = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{2, 4, 6, 8\}$ $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Tentukanlah: a). $\overline{A}$ b). $\overline{B}$ c). $\overline{A \cap C}$
d). $\overline{A \cup B}$ e). $\overline{\overline{A}}$ f). $\overline{B - C}$

Penyelesaian:

a). $\overline{A}$ terdiri dari elemen-elemen yang ada dalam U, tetapi tidak dalam A. Jadi $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

b). $\overline{B}$ terdiri dari anggota-anggota dalam U tetapi tidak dalam B. Jadi $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

c). $A \cap C = \{3, 4\}$ maka $\overline{(A \cap C)} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$

d). $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ maka $\overline{A \cup B} = \{5, 7, 9\}$

e). $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ maka $\overline{\overline{A}} = \{1, 2, 3, 4\}$
Jadi $\overline{\overline{A}} = A$.

f). $B - C = \{2, 8\}$ maka $\overline{B - C} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

25. Buktikan teori De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Penyelesaian: Misalkan $x \in \overline{A \cup B} \Longrightarrow x \notin A \cup B$

Jadi $x \notin A$ dan $x \notin B \Longrightarrow x \in \bar{A}$ dan $x \in \bar{B} \Longrightarrow x \in (\bar{A} \cap \bar{B})$

Akibatnya $\overline{A \cup B} \subset (\bar{A} \cap \bar{B})$ ....*

Sekarang misalkan $y \in (\bar{A} \cap \bar{B}) \Longrightarrow y \in \bar{A}$ dan $y \in \bar{B}$

Jadi $y \notin A$ dan $y \notin B \Longrightarrow y \notin A \cup B \Longrightarrow y \in \overline{A \cup B}$

$(\bar{A} \cap \bar{B}) \subset \overline{A \cup B}$ ..... **

* & ** menghasilkan $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

SOAL-SOAL CAMPURAN.

26. Misalkan $U = \{a, b, c, d, e\}$ $A = \{a, b, d\}$

$B = \{b, d, e\}$

Tentukanlah : a). $A \cup B$ b). $B \cap A$ c). $\bar{B}$

d). $B - A$ e). $\bar{A} \cap B$ f). $A \cup \bar{B}$

g). $\bar{A} \cap \bar{B}$ h). $\bar{B} - \bar{A}$ i). $\overline{A \cap B}$

j). $\overline{A \cup B}$

Penyelesaian:

a). Gabungan dari himpunan A dan himpunan B terdiri dari anggota-anggota yangada dalam A dan anggota-anggota dalam B. Jadi $A \cup B = \{a, b, d, e\}$

b). $A \cap B = \{b, d\}$

c). $\bar{B} = \{a, c\}$

d). $B - A = \{e\}$

e). $\bar{A} = \{c, e\}$, $B = \{b, d, e\}$ maka $\bar{A} \cap B = \{e\}$

f). $A = \{a, b, d\}$ dan $\bar{B} = \{a, c\}$, maka $A \cup \bar{B} = \{a, b, c, d\}$

g). $\bar{A} = \{c, e\}$ dan $\bar{B} = \{a, c\}$ maka $\bar{A} \cap \bar{B} = \{c\}$

h). $\bar{B} - \bar{A} = \{a\}$

i). $A \cap B = \{b, d\}$ maka $\overline{A \cap B} = \{a, c, e\}$

j). $A \cup B = \{a, b, d, e\}$, maka $\overline{A \cup B} = \{c\}$

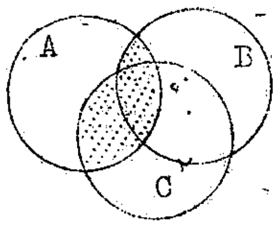
27. Pada diagram Venn dibawah iniarsirlah:

a). $A \cap (B \cup C)$ b). $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

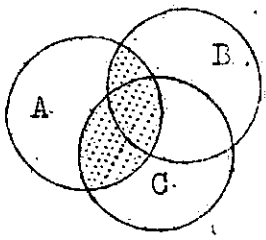
c). $A \cup (B \cap C)$ d). $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Penyelesaian:

a). $A \cap (B \cup C)$ adalah daerah yang diarsir.

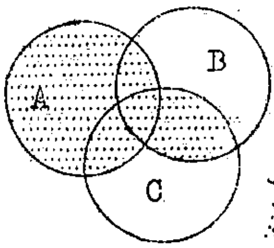


b). $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ adalah daerah yang diarsir.

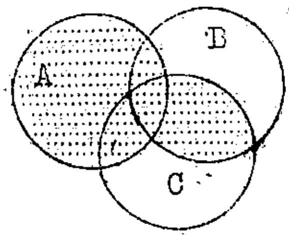


Dari a) & b) kelihatan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

c). $A \cup (B \cap C)$ adalah daerah yang diarsir.



d). $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ adalah daerah yang diarsir.



Dari c) dan d) kelihatan bahwa: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

28. Buktikan $(B - A) \subset \bar{A}$

Penyelesaian: Misalkan x anggota $B - A \Longrightarrow x \in B$ dan $x \notin A$

Jadi $x \in \bar{A}$

Dengan demikian: $(B - A) \subset \bar{A}$

29. Buktikan $B - \bar{A} = B \cap A$

Penyelesaian: $B - \bar{A} = \{x \mid x \in B, x \notin \bar{A}\}$

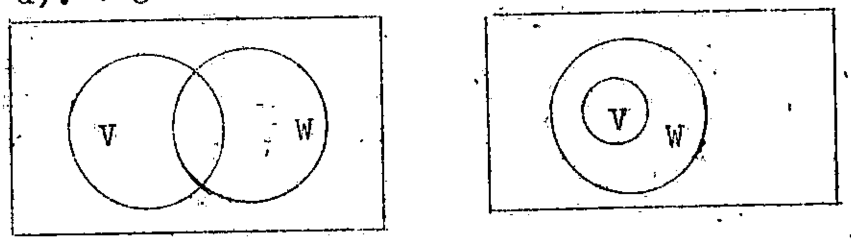
$= \{x \mid x \in B, x \in A\}$

$= B \cap A$

2.8 SOAL-SOAL TAMBAHAN.

30. Misalkan himpunan semesta $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan
    $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, g\}$ dan
    $C = \{b, e, f, g\}$.
    Tentukanlah: a). $A \cup C$ b). $B \cap A$ c). $C - B$
    d). $\overline{B}$ e). $\overline{A} - B$ f). $\overline{\overline{B} \cup C}$
    g). $\overline{A - C}$ h). $\overline{C} \cap A$ i). $A - \overline{B}$
    j). $A \cap \overline{A}$

31. Buktikan jika $A \cap B = \emptyset$, maka $A \subset \overline{B}$
32. Pada diagram Venn dibawah ini arsirlah:
    a). $V \cap W$ b). $\overline{W}$ c). $W - V$
    d). $\overline{V} \cup W$ e) $V \cap \overline{W}$ f). $\overline{V} - \overline{W}$



a) b).

33. Lukiskanlah diagram Venn untuk ketiga himpunan A, B dan C yang tidak kosong, sehingga A, B dan C mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:
    a). $A \subset B$, $C \subset B$, $A \cap C = \emptyset$
    b). $A \subset B$, $C \not\subset B$, $A \cap C \neq \emptyset$
    c). $A \subset C$, $A \neq C$, $B \cap C = \emptyset$.
    d). $A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, $C \neq B$, $A \neq C$.
34. Tentukanlah hasilnya:
    a). $U \cap A$ b). $A \cup A$ c). $\overline{\emptyset}$
    d). $\emptyset \cup A$ e). $\overline{A} \cap A$ f). $\overline{U}$
    g). $U \cup A$ h). $\overline{A} \cap A$ i). $A \cap A$
    j). $\emptyset \cap A$
35. Lengkapkanlah pernyatanpernyataan yang berikut dengan memakaikan salah satu dari tanda-tanda $\subset$, $\supset$, atan n_c(tidak dapat dibandingkan) antara setiap pasang - an-pasangan:

B A B III

HIMPUNAN-HIMPUNAN BILANGAN

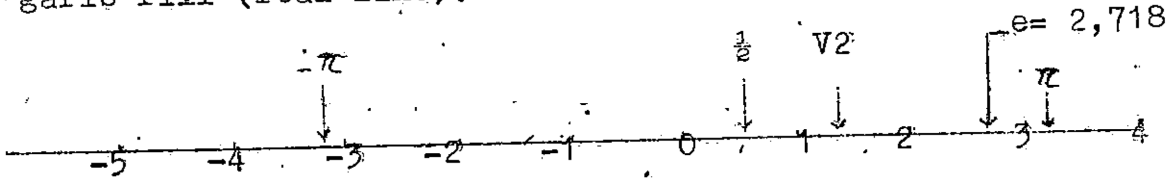
3.1. HIMPUNAN-HIMPUNAN BILANGAN.

Walaupun teori himpunan sangat umum, himpunan-himpunan yang penting yang kita jumpai dalam matematika dasar adalah himpunan dari bilangan-bilangan, dan yang sangat penting adalah himpunan bilangan riil yang dinyatakan dengan $R^{\#}$.

Dalam kenyataan, kita mengasumsikan dalam bab ini, jika sebaliknya tidak dinyatakan, himpunan bilangan riil adalah himpunan semesta dari himpunan yang kita bicarakan. Pertama-tama kita mereview beberapa sifat-sifat dasar pada bilangan-bilangan riil sebelum digunakan prinsip-prinsip dasar teori himpunan pada himpunan bilangan riil tersebut.

3.2. BILANGAN RIIL, $R^{\#}$

Salah satu sifat bilangan riil yang sangat penting adalah bahwa mereka dapat disajikan dengan titik-titik pada sebuah garis lurus. Seperti gambar dibawah ini, kita memilih sebuah titik sebagai titik pangkal untuk menunjukkan 0 dan sebuah titik lain pada sebelah kanan untuk menunjukkan 1. Kemudian ada satu cara untuk memasangkan titik-titik pada garis bilangan dengan bilangan riil, yaitu "setiap titik akan menunjukkan sebuah bilangan riil yang tunggal dan setiap bilangan riil akan ditunjukkan oleh sebuah titik yang tunggal". Kita menamakan garis ini sebagai "garis riil"(real line).



Bilangan-bilangan dikanan 0 adalah positif dan dikiri 0 adalah negatif. 0 sendiri bukan positif dan bukan pula negatif.

3.3. BILANGAN BULAT , Z (INTEGERS)

Bilangan bulat adalah bilangan-bilangan riil yang anggota-anggotanya, ...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Bilangan bulat biasanya dinyatakan dengan Z, sehingga :

$Z = \{\ldots.\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$. Bilangan bulat (Integers) disebut juga "whole numbers". Satu sifat yang terpenting dari integers adalah sifat "tertutup"("closed") dalam operasi-operasi tambah, perkalian dan pengurangan yang maksudnya hasil operasi dari bilangan tersebut dengan menggunakan operasi tersebut adalah anggota Z itu sendiri. Integers ini tidak tertutup dalam operasi "bagi".

3.4. BILANGAN RASIONAL (Q).

Bilangan rasional adalah bilangan riil yang dapat dinyatakan sebagai ratio dari dua buah integer.
Kita nyatakan himpunan bilangan rasional itu dengan Q, sehingga:

$$Q = \{x \mid x = \frac{p}{q} \text{ dimana } p \in Z,\ q \in Z \text{ dan } q \neq 0\}$$

Catatan: Setiap integer juga bilangan rasional, sebagai contoh: $5 = \frac{5}{1}$, dengan demikian $Z \subset Q$.

Bilangan rasional tertutup tidak hanya dibawah operasi tambah, kali dan kurang tetapi juga dibawah operasi bagi(kecuali dengan pembagi 0).
Dengan perkataan lain, jumlah, perkalian, pengurangan dan pembagian (kecuali oleh 0) dari dua buah bilangan rasional adalah juga sebuah bilangan rasional.

3.5. BILANGAN ASLI, N (NATURAL NUMBERS).

Bilangan asli adalah bilangan bulat positif .
Kita nyatakan himpunan bilangan asli ini dengan N, dimana

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\}$$

Bilangan asli ini adalah sistim bilangan yang pertama yang dikembangkan dan digunakan pada suatu kali untuk menghitung. Relasi antara sistim bilangan-sistim bilangan yang kita bicarakan diatas adalah:

$$N \subset Z \subset Q \subset R^{\#}$$

Anggota bilangan asli itu tertutup hanya dibawah operasi-operasi tambah dan perkalian. Pengurangan dan pembagian dari dua bilangan asli belum tentu merupakan bilangan asli.

Bilangan prima adalah bilangan asli p kecuali 1, yang hanya dapat dibagi oleh 1 dan p itu sendiri.

Dengan demikian bilangan prima adalah:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

3.6. BILANGAN IRRASIONAL (Q').

Bilangan irrasional adalah bilangan riil yang bukan rasional. Dengan demikian dapat pula dikatakan himpunan bilangan-bilangan irrasional adalah komplemen dari himpunan bilangan rasional Q pada himpunan bilangan riil $R^{\#}$.

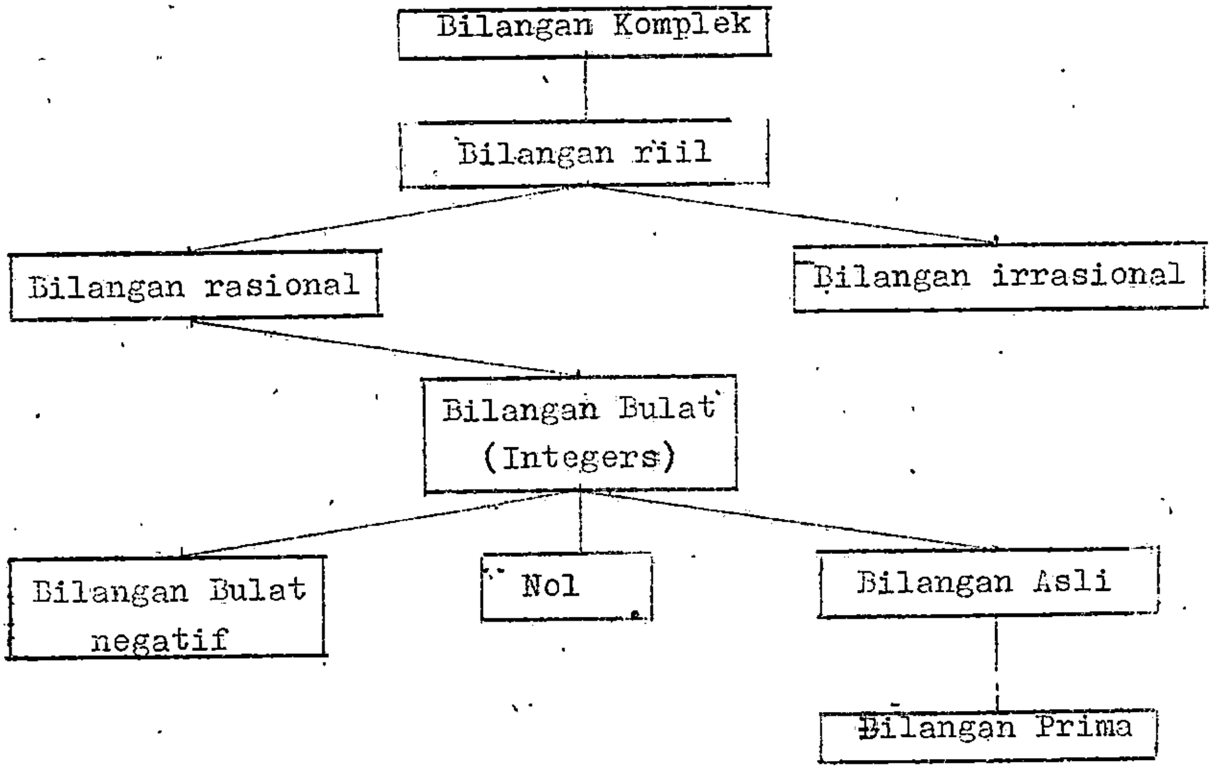
Justru karenaitu himpunan bilangan irrasional dapat dinyatakan dengan Q' atau $\tilde{Q}$.

Contoh bilangan irrasional : $\sqrt{3}$, , $\sqrt{2}$, dsb.

3.7. DIAGRAM GARIS DARI SISTIM BILANGAN.

Gambar dibawah ini adalah diagram garis dari bermacam-macam himpunan bilangan, yang mana bilangan-bilangan itu sudah kita bicarakan. Untuk lebih melengkapkan, diagram ini memuat bilangan kompleks yaitu bilangan-bilangan dalam bentuk $a + bi$ dimana a dan b riil. Bilangan kompleks ini adalah "superset" dari himpunan bilangan riil.

Diagram garis ....



3.8. BILANGAN RIIL DAN DESIMAL

Setiap bilangan riil dapat ditunjukkan dengan sebuah "desimal yang tidak berakhir"(nonterminating decimals). Penyajian desimal dari bilangan rasional p/q dapat diperoleh dengan membagi pembilang p dengan penyebut q. Sebagai contoh, dengan hasil pembagian yang berakhir

$3/8 = 0{,}375$, kita tuliskan $3/8 = 0{,}375000\ldots..$

atau $3/8 = 0{,}374999\ldots..$

Jika ditunjukkan pembagian p dengan q seca ra tidak berakhir maka akan dikenal adanya blok bila ngan-bilangan yang berulang dengan kontinue. Contoh:

$2/11 = 0{,}181818\ldots...$

Kita sekarang dapat melihat hubungan antara desimal dengan bilangan riil, yaitu, bilangan rasional berkorespondensi dengan bilangan desimal dalam blok angka-angka yang berulang secara kontinue, sedangkan bilangan irrasional berkorespondensi dengan bilangan desimal yang tidak berakhir.

3.9. KETIDAK SAMAAN(INEQUALITIES) :

Pengertian dari "order" dalam sistim bilangan riil dikemukakan dengan definisi berikut:

Definisi. Bilangan riil a kurang dari bilangan riil b, dituliskan $a < b$, jika $b - a$ adalah bilangan positif.

Sifat yang berikut dari relasi $a < b$ dapat dibuktikan.

Misalkan a, b dan c bilangan-bilangan riil, maka:

P_1 : Salah satu dari relasi adalah benar, yaitu $a < b$, $a = b$ atau $b < a$.

P_2 : Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$

P_3 : Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$.

P_4 : Jika $a < b$ dan c adalah positif, maka $ac < bc$.

P_5 : Jika $a < b$ dan c negatif, maka $bc < ac$

Pengertian secara geometry, jika $a < b$ maka titik a pada garis bilangan riil terletak pada sebelah kiri titik b.

Kita dapat juga menyatakan $a < b$ dengan $b > a$.

Selanjutnya kita tulis $a \leqslant b$ atau $b \geqslant a$ jika $a < b$ atau $a = b$, yaitu jika a tidak lebih besar dari b.

Contoh:

1. $2 < 5$; $-6 \leqslant -3$ dan $4 \leqslant 4$; $5 > -8$.
2. Notasi $x < 5$ maksudnya adalah x bilangan riil yang kurang dari 5; dan x akan terletak sebelah kiri dari 5 pada garis bilangan . Notasi $2 < x < 7$ maksudnya $2 < x$ dan juga $x < 7$, dan pada garis bilangan x terletak antara 2 dan 7.

Dari definisi diatas, maka:

1. Pengertian dari order dalam sistim bilangan riil adalah relasi $a < b$, yang didefinisikan dalam batasan-batasan bilangan positif. Yang digunakan untuk membuktikan sifat-sifat relasi $a < b$ adalah bilangan-bilangan riil yang positif tertutup dibawah operasi tambah dan kali. Demikian juga halnya bilangan-bilangan asli.
2. Pernyataan-pernyataan yang berikut adalah benar, bila a, b dan c adalah riil.

   1). $a \leqslant a$

   2). jika $a \leqslant b$ dan $b \leqslant a$ maka $a = b$

3). jika $a \leqslant b$ dan $b \leqslant c$ maka $a \leqslant c$.

3.10. NILAI MUTLAK(ABSOLUT)

Nilai mutlak dari bilangan riil x dinyatakan dengan $|x|$ dan didefinisikan sebagai,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geqslant 0 \\ -x & \text{jika } x < 0, \end{cases}$$

Jika x positif atau nol maka $|x| = x$, dan jika x negatif maka $|x| = -x$. Ini berarti bahwa nilai mutlak dari suatu bilangan selalu non-negatif yaitu $|x| \geqslant 0$ untuk setiap $x \in R$. Secara geometris, nilai mutlak x adalah jarak antara titik x dengan titik pangkal 0 pada garis bilangan riil. Selanjutnya jarak antara dua titik bilangan riil, a dan b adalah $|a - b| = |b - a|$

Contoh:

1. $|-2| = 2$; $|7| = 7$; $|-\pi| = \pi$; $|3 - 8| = |-5| = 5$,
   $|8 - 3| = |5| = 5$; $|-3 -4| = |-7| = 7$
2. Pernyataan $|x| < 5$ dapat dimaksudkan jarak x dengan titik pangkal 0, kurang dari 5 $\Longrightarrow$ x terletak antara -5 dengan 5 pada garis bilangan .
   Jadi $|x| < 5$ dan $-5 < x < 5$ mempunyai arti yang sama.

3.11. I N T E R V A L.

Perhatikan himpunan-himpunan bilangan yang berikut:

$A_1 = \{x \mid 2 < x < 5\}$

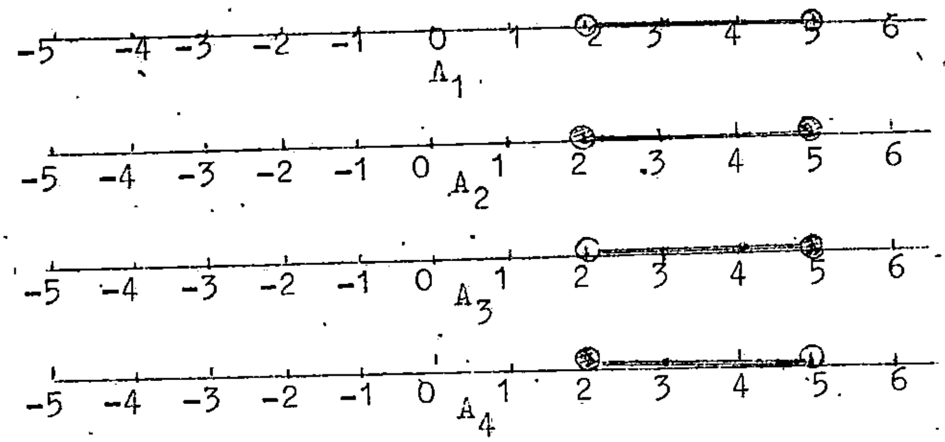
$A_2 = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

$A_3 = \{x \mid 2 < x \leqslant 5\}$

$A_4 = \{x \mid 2 \leqslant x < 5\}$

Keempat himpunan tsb. diatas adalah semua titik-titik yang terletak antara 2 dan 5 dengan kemungkinan pengecualian pada 2 dan atau pada 5. Kita namakan semuanya itu himpunan-himpunan interval, dengan bilangan 2 dan 5 sebagai titik.

titik batas intervalnya. Selanjutnya A_1 adalah interval terbuka dimana titik-titik batasnya tidak merupakan anggota himpunan itu. A_2 disebut interval tertutup dimana titik-titik batasnya merupakan anggota himpunan yang dimaksud.
A_3 dan A_4 disebut interval terbuka-tertutup dan tertutup - terbuka. Grafik masing-masing himpunan itu dalam garis bilangan riil adalah sebagai berikut:



Titik-titik batas yang dilingkari berarti tidak termasuk menjadi anggota himpunan tsb. sedangkan titik batas yang diarsir termasuk anggota himpunan tsb.
Mengingat interval ini sangat sering muncul dalam matematika maka untuk memudahkan menulisnya kadang-kadang digunakan notasi yang lebih pendek, seperti:

$A_1 = (2, 5)$; $A_2 = [2, 5]$

$A_3 = (2, 5]$; $A_4 = [2, 5)$

Jadi (atau) digunakan untuk titik batas terbuka(interval terbuka) sedangkan [atau] untuk titik batas tertutup(interval tertutup).

3.12. SIFAT-SIFAT INTERVAL

Misalkan $\mathfrak{J}$ semua kelas(keluarga) dari semua interval pada garis bilangan riil. Dalam $\mathfrak{J}$ tentu termasuk kedalamnya $\emptyset$ dan titik yang tunggal $a = [a, a]$
Maka interval-interval tersebut mempunyai sifat-sifat sbb:

1). Irisan dari dua buah interval adalah sebuah interval sehingga jika $A \in \Upsilon$ dan $B \in \Upsilon$, maka $A \cap B \in \Upsilon$,
Contoh: Jika $A = [2, 4)$, $B = (3, 8)$ maka
$A \cap B = (3, 4)$

2). Gabungan dari dua buah himpunan interval yang tidak terpisah(tidak lepas) yaitu $A \in \Upsilon$, $B \in \Upsilon$, $A \cap B \neq \emptyset$, maka $A \cup B \in \Upsilon$
Contoh: Dari contoh 1) maka $A \cup B = [2, 8)$

3). Selisih dari dua himpunan interval yang tidak dapat dibandingkan yaitu $A \in \Upsilon$, $B \in \Upsilon$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, maka $(A - B) \in \Upsilon$, dan $(B - A) \in \Upsilon$
Contoh: Dari contoh 1), maka $A - B = [2, 3]$
$B - A = [4, 8)$

3.13. INTERVAL-INTERVAL TIDAK TERHINGGA

Himpunan-himpunan dengan bentuk seperti dibawah ini:

$A = \{x \mid x > 1\}$; $B = \{x \mid x \geq 2\}$

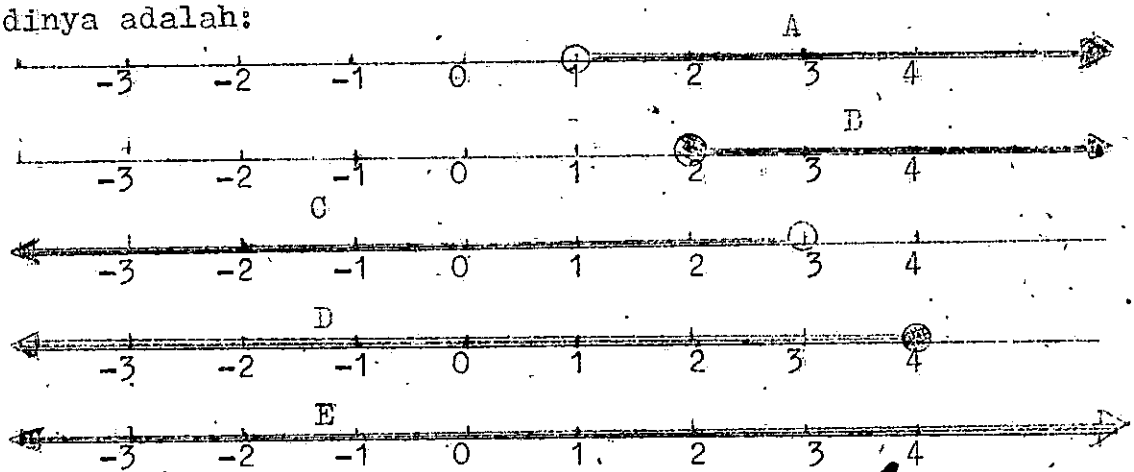
$C = \{x \mid x < 3\}$; $D = \{x \mid x \leq 4\}$

$E = \{x \mid x \in R^{\#}\}$, disebut interval-interval tidak terhingga dan dapat dinyatakan dengan:

$A = (1, \infty)$, $B = [2, \infty)$, $C = (-\infty, 3)$

$D = (-\infty, 4]$, $E = (-\infty, \infty)$

Jika kita gambarkan dalam bentuk garis bilangan, maka jadinya adalah:



A, B, C, D dan E yang memenuhi syarat adalah yang diarsir.

3.14. HIMPUNAN-HIMPUNAN YANG MEMPUNYAI BATAS DAN TIDAK MEMPUNYAI BATAS(BOUNDED AND UNBOUNDED SETS).

Misalkan A adalah sebuah himpunan bilangan, maka A disebut "himpunan mempunyai batas" jika A himpunan bagian dari sebuah interval terhingga.

Definisi ini equivalen dengan definisi: Sebuah himpunan A, adalah mempunyai batas jika ada suatu bilangan positif M, sehingga $|x| \leq M$, untuk semua $x \in A$.

Himpunan A disebut tidakmempunyai batas jika diatidak terbatas. Jadi jika A mempunyai batas maka A himpunan bagian dari interval terhingga $[-M, M]$.

Contoh:

1. $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\ldots\}$, maka A adalah mempunyai batas, karena A himpunan bagian dari interval tertutup $[1, 0]$
2. $A = \{2, 4, 6, \ldots\ldots\}$, maka A tidak mempunyai batas.
3. $A = \{7, 350, -473, 2322, 42\}$, maka himpunan A mempunyai batas.

Dari definisi diatas dapat disimpulkan:

Jika himpunan A terhingga maka dia perlu mempunyai batas. Jika sebuah himpunan tidak terhingga maka dia dapat mempunyai batas seperti contoh 1) dan dapat pula tidak mempunyai batas seperti contoh 2).

3.15.SOAL-SOAL DAN PENYELESAIANNYA .

HIMPUNAN BILANGAN.

Untuk soal-soal yang berikut, misalkan $R^{\#}$, Q, $\bar{Q}$, Z, N dan P menyatakan bilanganriil, bilangan rasional, bilangan irrasional, bilangan bulat, bilangan asli dan bilangan prima.

1. Nayatakanlah bilamana masing-masing pernyataan dibawah ini benar atau salah.

a). $-7 \in N$	b). $\sqrt{2} \in \bar{Q}$	c). $4 \in Z$
d). $9 \in P$	e). $3\pi \in Q$	f). $-6 \in Q$

g). $11 \in P$ h). $1/2 \in Z$ i). $\sqrt{5} \in \bar{Q}$

j). $1 \in R^{\#}$ k). $\sqrt[3]{8} \in N$ l). $\sqrt{9/4} \in \bar{Q}$

m). $-2 \in Z$ n). $\pi^2 \in R^{\#}$ o). $\sqrt{-4} \in R^{\#}$

Penyelesaian:

a). Salah, sebab N memuat hanya bilangan-bilangan bulat positif; -7 adalah negatif

b). Benar, sebab V2 tidak dapat dinyatakan dalam bentuk ratsio (p/q) dari dua buah integer(bilangan bulat), karena V2 tidak rasional.

c). Benar, sebab Z memuat semua bilangan bulat (positif dan negatif).

d). Salah, sebab 3 adalah pembagi 9, jadi jelas 9 bukan bilangan prima.

e). Salah, sebab π bukan rasional, demikian juga 3π .

f). Benar, sebab bilangan-bilangan rasional termasuk juga kedalamnya bilangan bulat(integers) $-6 = \frac{-6}{1}$

g). Benar, sebab 11 tidak mempunyai pembagi kecuali dirinya sendiri dan 1. Jadi jelaslah 11 prima.

h). Salah, sebab 1/2 bukaninteger (bilangan bulat).

i). Salah, sebab V-5 bukan bilangan riil, dalam hal ini bukan pula termasuk bilangan irrasional.

j). Benar, sebab 1 adalah bilangan riil.

k). Benar, sebab $\sqrt[3]{8} = 2$ adalah bilangan positif dan bulat.

l). Salah, $\sqrt{9/4} = 3/2$, merupakan bilangan rasional.

m). Benar, sebab Z memuat semua bilangan bulat positif dan negatif.

n). Benar, sebab π riil demikian juga π^2 .

o). Salah, sebab $\sqrt{-4} = 2i$ bukan riil.

2. Gambarkanlah diagram-diagram dari himpunan-himpunan bilangan $R^{\#}$, N dan $\bar{Q}$.

Pemyelesaian: N dan $\bar{Q}$ adalah himpunan-himpunan bagian dari $R\#$, Walaupun demikian N dan $\bar{Q}$ tidak dapat dibandingkan. Jadi diagram garisnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{tikzcd} & R^{\#} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ N & & \bar{Q} \end{tikzcd}$$

3. $R^{\#}$, Q, $\bar{Q}$, Z, N dan P adalah himpunan-himpunan bilangan seperti disebutkan pada soal no. 1. Termasuk anggota himpunan yang manakah bilangan-bilangan yang berikut:

   a). $-3/4$ b). 13 c). $\sqrt{-7}$

   Penyelesaian:

   a). $-3/4 \in Q$, karena -3 dan 4 bilangan-bilangan bulat (integer). $Q \subset R^{\#}$, maka juga $-3/4 \in R^{\#}$.

   b). $13 \in P$, karena pembagi 13 hanya 13 dan 1. P himpunan bagian dari N, Z, Q dan $R^{\#}$, maka juga $13 \in N$, $13 \in Z$, $13 \in Q$ dan $13 \in R^{\#}$.

   c). $\sqrt{-7}$ bukan bilangan riil, karena $\sqrt{-7}$ bukan anggota salah satu dari himpunan-himpunan bilangan yang diketahui diatas.

4. Misalkan $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ dan $F = \{1, 3, 5, \ldots\}$. Apakah E dan F tertutup dalam operasi tambah dan kali?.

   Penyelesaian:

   a). Jumlah dari dua buah bilangan genap adalah genap. Jadi E tertutup untuk operasi tambah. Jumlah dua buah bilangan ganjil tidak ganjil. Jadi F tidak tertutup untuk operasi tambah.

   b). Hasil perkalian dua buah bilangan genap adalah genap dan hasil perkalian dua buah bilangan ganjil adalah ganjil. Jadi E dan F tertutup dalam operasi kali.

5. Dari himpunan-himpunan $R^{\#}$, Q, $\bar{Q}$, Z, N dan P, yang manakah yang tidak tertutup dalam operasi :

   a). tambah b). kurang

   Penyelesaian:

   a). $\bar{Q}$ dan P

   Contoh: $-\sqrt{2} \in \bar{Q}$ dan $\sqrt{2} \in \bar{Q}$, tetapi $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \notin \bar{Q}$; $3 \in P$ dan $5 \in P$, tetapi $3+5=8 \notin P$.

b). $\bar{Q}$, N dan P

Contoh; $\sqrt{2} \in \bar{Q}$, tetapi $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \notin \bar{Q}$;
$3 \in N$ dan $7 \in N$, tetapi $3-7 = -4 \notin N$; $7 \in P$ dan $3 \in P$,
tetapi $7-3 = 4 \notin P$.

KETIDAK SAMAAN DAN NILAI MUTLAK.

6. Tuliskanlah pernyataan-pernyataan yang berikut dalam bentuk notasi:
   a). a lebih kecil dari b
   b). a tidak lebih besar dari atau tidak sama dengan b
   c). a lebih kecil dari atau sama dengan b.
   d). a tidak lebih kecil dari b
   e). a lebih besar dari atau sama dengan b
   f). a tidak lebih besar dari b

   Penyelesaian:
   a). $a < b$ b). $a \ngeq b$ c). $a \leqslant b$
   d). $a \nless b$ e). $a \geqslant b$ f). $a \ngtr b$

7. Tempatkanlah diantara pasangan-pasangan bilangan yang berikut symbul yang betul : $<$, $>$, atau $=$.
   a). $3 \;....\; -9$ b). $-4 \;....\; -8$ c). $3^2 \;....\; 7$
   d). $-5 \;....\; 3$ e). $3^2 \;....\; 9$ f). $- \;...\; /2$

   Penyelesaian:
   a). $3 > -9$ b). $-4 > -8$ c). $3^2 > 7$
   d). $-5 < 3$ e). $3^2 = 9$ f). $-\pi < \pi/2$

8. Buktikan: jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.

   Penyelesaian: Dengan menggunakan difinisi $a < b$ dan $b < c$ berarti $b - a$ positif dan $c - b$ positif.

   Karena jumlah dua dari dua bilangan positif adalah positif maka $(b-a) + (c-b) = c - a$ adalah positif.

   Jadi $c - a > 0$ atau $a < c$.

9. Buktikan : Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$.

   Penyelesaian: Perhatikan $(b + c) - (a + c) = b - a$
   $a < b$ maka $b - a > 0$

   Jadi $(b + c) - (a + c) > 0$ atau $(b + c) > (a + c)$.

10. Tuliskanlah kembali relasi geometry dibawah ini dengan menggunakan notasi ketidak samaan bilangan riil.

a(. y terletak pada sebelah kanan 8

b). z terletak pada sebelah kiri 0

c). x terletak antara -3 dan 7

d). w terletak antara 5 dan 1

Penyelesaian: Perlu dingat bahwa a $<$ b berarti a terletak sebelah kiri b pada garis bilanganriil .

Dengan demikian :

a). $y > 8$ atau $8 < y$

b). $z < 0$

c). $-3 < x$ dan $x < 7$ atau $-3 < x < 7$.

d). $5 > w$ dan $w > 1$, atau $w < 5$ dan $1 < w$ atau $1 < w < 5$.

11. Sebutkanlah definisi $|x|$

Penyelesaian: Definisi $|x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } \;\; < 0 \end{cases}$

12. Misalkan $|x| \leq 0$, dapatkanlah harga x.

Penyelesaian: Nilai mutlak dari sebuah bilangan selalu positif, jadi buat sembarang bilangan x selalu berlaku $|x| \geq 0$. Jadi $|x| \leq 0$, hanya mungkin yang memenuhi $|x| = 0 \Longrightarrow x = 0$.

13. Tentukanlah nilainya dari masing-masing :

a). $|3 - 5|$ b). $|-3 + 5|$ c). $|-3 - 5|$

d). $|-2| - |-6|$ e). $|3 - 7| - |-5|$. f). $|-8| + |3-1|$

g). $|2 - 5| - |4 - 7|$ h). $|3 + |-1 -4| -3- |-8||$

i). $||- 2| - |- 6||$ j). $|-|- 5||$

Penyelesaian: a). $|3 - 5| = |-2| = 2$

b). $|- 3 + 5| = |2| = 2$

c). $|- 3 - 5| = |-8| = 8$

d). $|- 2| - |- 6| = 2 - 6 = - 4$

e). $|3 - 7| - |- 5| = |-4| - |-5| = 4 - 5 = -1$

f). $|-8| + |3 - 1| = |-8| + |2| = 8 + 2 = 10$

g). $|2 - 5| - |4 - 7| = |-3| - |-3| = 3 - 3 = 0$

h). $13 + |-1 - 4| - 3 - |-8| = 13 + |-5| - 3 - |-8|$
$= 13 + 5 - 3 - 8 = 7$

i). $||-2| - |-6|| = |2 - 6| = |-4| = 4$

j). $|-|-5|| = |-5| = 5$

14. Tuliskanlah kembali sehingga x menjadi tersendiri diantara tanda ketidak samaan tersebut.

a). $3 < x - 4 < 8$ b). $-1 < x + 3 < 2$
c). $-9 < 3x < 12$ d). $-6 < -2x < 4$
e). $3 < 2x - 5 < 7$ f). $-7 < -2x + 3 < 5$

Penyelesaian:

a). Dengan P_3 , tambahkan 4 kepada setiapruas, maka
$7 < x < 12$

b). Dengan P_3, tambahkan -3 pada setiap ruas, maka
$-4 < x < -1$

c). Dengan P_4, kalikan setiap ruas dengan $1/3$, maka
$-3 < x < 4$

d). Dengan P_5, kalikan setiap ruas dengan $-1/2$ maka
$-2 < x < 3$

e). Tambahkan 5 pada setiap ruas maka $8 < 2x < 12$. Kemudian kalikan setiap ruas dengan $1/2$, maka diperoleh $4 < x < 6$

f). Tambahkan -3 kepada setiap ruas, maka $-10 < -2x < 2$. Kemudian kalikan dengan $-1/2$ dan kalikan ketidaksamaannya, maka diperoleh $-1 < x < 5$.

15. Tulislah tanpa dengan tanda mutlak.

a). $|x| < 3$ b). $|x - 2| < 5$ c). $|2x + 3| < 7$

Penyelesaian:

a). $-3 < x < 3$

b). $-5 < x - 2 < 5$ atau $-3 < x < 7$

c). $-7 < 2x + 3 < 7$ atau $-10 < 2x < 4$ atau $-5 < x < 2$

16. Tuliskanlah kembali dengan mengunakan tandamutlak.

a). $-2 < x < 6$ b). $4 < x < 10$

Penyelesaian:

a). $-2 < x < 6 \Longrightarrow -4 < x - 2 < 4 \Longrightarrow |x - 2| < 4$

b). $4 < x < 10 \Longrightarrow -3 < x - 7 < 3 \Longrightarrow |x - 7| < 3$

17. Tempatkanlah diantara pasangan-pasangan bilangan berikut simbol yang betul $\leqslant$ atau $\geqslant$ . . .

a). $1 \ldots -7$ b). $-2 \ldots -9$ c). $2^3 \ldots 8$

d). $3 \ldots 7$ e). $3^2 \ldots 9$ f). $3^2 \ldots -11$

Penyelesaian: $a \leqslant b$ benar jika $a < b$ atau $a = b$., dan
$a \geqslant b$ benar jika $a > b$ atau $a = b$.

a). $1 \geqslant -7$, karena $1 > -7$

b). $-2 \geqslant -9$, karena $-2 > -9$

c). $2^3 \leqslant 8$ dan $2^3 \geqslant 8$ adalah benar, karena $2^3 = 8$

d). $3 \leqslant 7$, karena $3 < 7$

e). $3^2 \leqslant 9$ dan $3^2 \geqslant 9$ adalah benar, karena $3^2 = 9$

f). $3^2 \geqslant -11$ karena $3^2 > -11$.

INTERVAL.

18. Tuliskanlah interval-interval yang berikut dalam bentuk "set builder form" atau bentuk pencirian himpunan.

a). $M = [-3, 5)$ b). $S = (3, 8)$

c). $T = [0, 4]$ d). $W = (-7, -2]$

Penyelesaian:

a). $M = \{x \mid -3 \leqslant x < 5\}$ b). $S = \{x \mid 3 < x < 8\}$

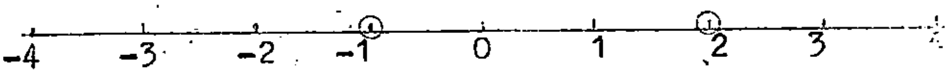
c). $T = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$ d). $W = \{x \mid -7 < x \leqslant -2\}$

19. Tandailah pada garis bilangan riil :

a). $R = (-1, 2]$ b). $S = [-2, 2)$

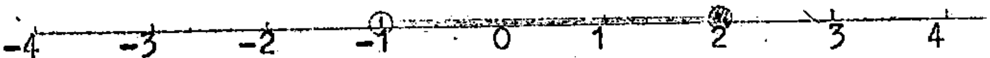
c). $T = (0, 1)$ d). $W = [1, 3]$

Penyelesaian: Titik-titik ujung dari R adalah -1 dan 2 dan dilingkari pada garis bilangan yang dimaksud,



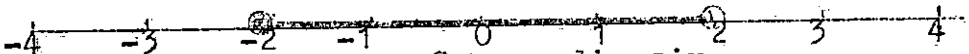
Karena 2 termasuk R , maka 2 dilingkari dan diarsir.

Kemudian kita tebalkan garis antara kedua titik ujung - itu, maka R sudah tergambar.

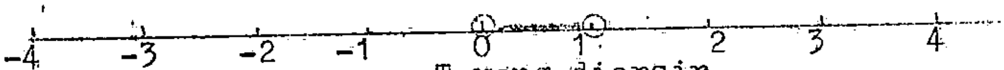


R yang diarsir

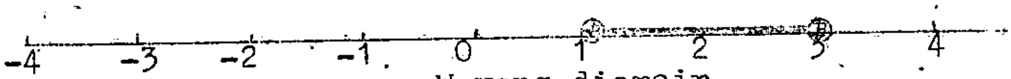
Dengan cara yang sama kita peroleh gambar S, T dan W.



S yang diarsir

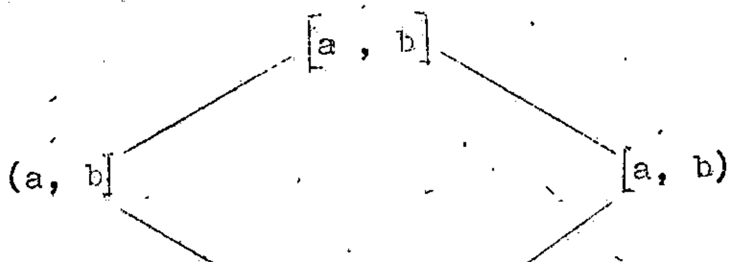


T yang diarsir



W yang diarsir

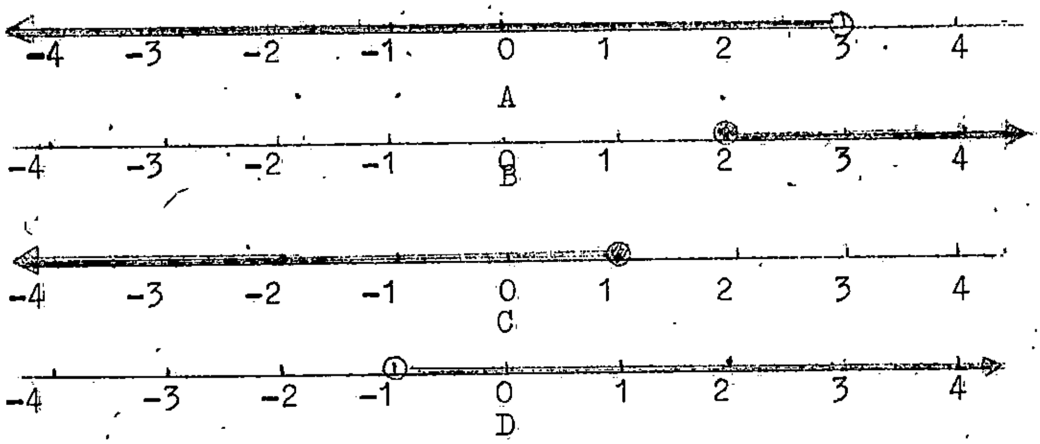
20. Misalkan bilangan riil $a < b$. Susunlah diagram garis untuk 4 interval : (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ dan $[a, b)$.
Penyelesaian: (a, b) adalah himpunan bagian dari $[a, b)$ dan $(a, b]$, sedangkan $[a, b)$ dan $(a, b]$ merupakan himpunan bagian dari $[a, b]$. Dengan demikian diagram garisnya adalah:



21. Misalkan $A = \{x \mid x < 3\}$, $B = \{x \mid x > 2\}$
$C = \{x \mid x \leqslant 1\}$, $D = \{x \mid x > -1\}$

a). Gambarkan masing-masingnya pada garis bilangan
b). Tuliskan masing-masingnya dalam bentuk notasi interval.

Penyelesaian: Semua himpunan bilangan tersebut merupakan interval tidakterhingga. Himpunan-himpunan itu pada garis bilangan dibawah ini gambarnya merupakan sinar dengan titik pangkal pada titik yang dilingkari.

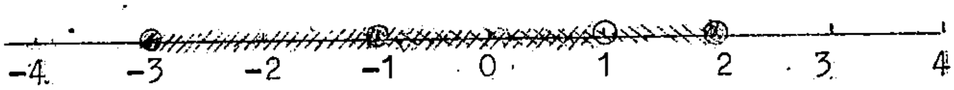


Dalam notasi interval masing-masing himpunan itu didefinisikan sebagai berikut:
$A = (-\infty, 3)$, $B = [2, \infty)$, $C = (-\infty, 1]$ dan $D = (-1, \infty)$.

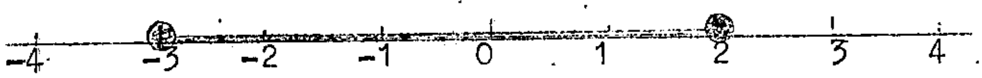
OPERASI PADA INTERVAL.

22. Misalkan $A = [-3, 1)$ dan $B = [-1, 2]$.
   a). Lukiskanlah A dan B pada garis bilangan riil yang sama
   b). Lukiskanlah $A \cup B$, $A \cap B$ dan $A - B$ pada garis bilangan riil.
   c). Tuliskanlah $A \cup B$, $A \cap B$ dan $A - B$ dalam bentuk notasi interval.

Penyelesaian:
   a). Pada garis bilangan dibawah ini, A diarsir dengan //// dan B diarsir dengan \\\\.

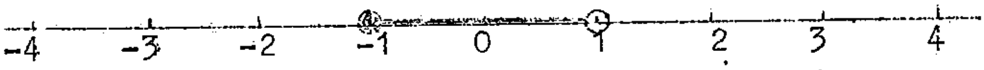


   b). $A \cup B$ terdiri dari titik-titik dalam A, dan atau B.

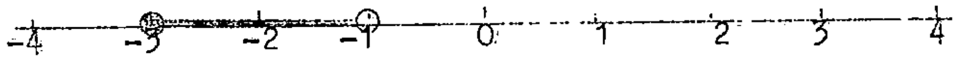


$A \cup B$ adalah bagian garis dari -3 s/d 2 dan termasuk kedua titik -3 dan 2.

$A \cap B$ terdiri dari titik yang rterletak pada kedua ti-
tik A dan B.



$A \cap B$ adalah bagian sebelah kiri 1 s/d -1.
$A - B$ terdiri dari titik-titik dalam A yang bukan da - lam B.



$A - B$ adalah bagian garis sebelah kiri -1 s/d -3.

c). $A \cup B = [-3, 2]$, $A \cap B = [-1, 1)$ dan $A - B = [-3, -1)$.

23. Dalam kondisi yang bagaimanakah gabungan dari kedua interval lepas merupakan suatu interval?.

Penyelesaian: Pertama, titik yang sebelah kanan dari interval yang satu harus mmjadi titik ujung sebelah kiri dari interval yang lain. Kedua titik ujung bersama pada interval yang satu harus tertutup dan titik ujung bersama pada interval yang lain harus terbuka.

Contoh: Misalkan $M = [-3, 4)$ dan $N = [4, 7)$ .. Titik ujung kanan M merupakan titik ujung kiri dari N. M terbuka pada 4 dan N tertutup pada 4.

$M \cup N = [-3, 7)$ dan $M \cap N = \emptyset$.

24. Dalam setiap hal, gambarkanlah pada garis bilangan riil dan tuliskanlah resultant himpunan dalam notasi interval dari:

a). $\{x \mid x \geqslant -1\} \cap \{x \mid -3 < x < 2\}$

b). $\{x \mid x < 2\} \cup \{x \mid x \geqslant 0\}$

c). $\{x \mid -3 < x \leqslant 1\} \cap \{x \mid x > 2\}$

d). $\{x \mid -2 < x \leqslant 3\} \cup \{x \mid x < 1\}$

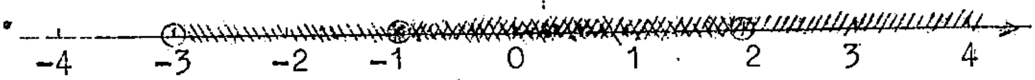
e). $\{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 0\} \cap \{x \mid -2 < x < 3\}$

Contoh:

Resultant himpunan interval $[-1, 2)$.

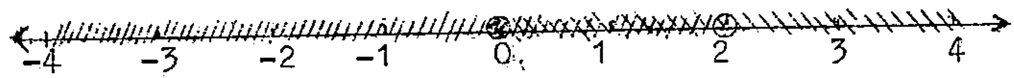
Penyelesaian: Dalam setiap hal, himpunan yang sebelah kiri ditandai dengan //// dan himpunan sebelah kanan dengan tanda \\\\ .

a).



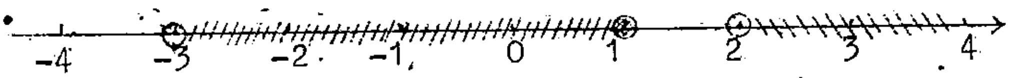
Irisan yang dimaksud terdiri dari himpunan titik-titik yang terletak dalam interval $[-1, 2)$ pada garis bilangan .

b).



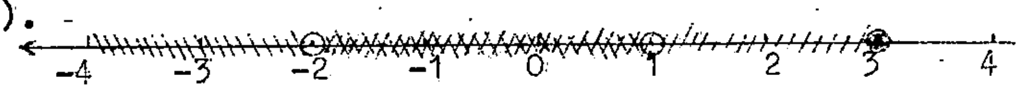
Gabungan kedua himpunan yang dimaksud terdiri dari himpunan titik-titik yang terletak dalam interval $(-\infty, \infty)$ pada garis bilangan.

c).



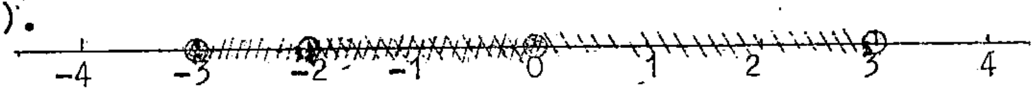
Irisan kedua himpunan yang dimaksud terdiri dari himpunan titik-titik yang terletak dalam interval yang tidak mempunyai anggota atau $\emptyset$.

d).



Gabungan kedua himpunan yang dibaksud terdiri dari himpunan titik-titik yang terletak dalam interval $(-\infty, 3]$.

e).



Irisan kedua himpunan yang dimaksud terdiri dari himpunan titik-titik yang terletak dalam interval $(-2, 0]$.

HIMPUNAN-HIMPUNAN YANG MEMPUNYAI BATAS DAN YANG TIDAK MEMPUNYAI BATAS.

25, Nayatakanlah manakah dari masing-masing himpunan yang berikut yang mempunyai batas dan yang tidak mempunyai batas.

a). $\{x \mid x < 3\}$ b). $\{1, 3, 5, \ldots\}$

c). $\{2^{18}, 3^{-4}, 5, 0, 8^{35}\}$ d). $\{x \mid x$ adalah 2 berpangkat pos dan bulat$\}$

e). $\{2, 5, 2, 5, \ldots\}$ f). $\{1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, \ldots\}$

Penyelesaian:

a). Himpunan ini tidak mempunyai batas , karena sebelah kiri bilangan 3 itu tidak terbatas banyaknya bilangan yang memenuhi syarat. Himpunan ini merupakan sebuah interval tidak terhingga($-\infty$, 3).

b). Himpunan ini merupkknn himpunan bilangan ganjil yang tidak mempunyai batas.

c). Himpunan ini mempunyai batas, karena banyak anggotanya terhingga.

d). Himpunan ini beranggotakan 2, 4, 8, 16 ,....
Jadi tidak mempunyai batas.

e). Himpunan ini hanya mempunyai dua anggota, yaitu 2 dan 5 $\Longrightarrow$ mempunyai batas.

f). Walaupun banyak bilangannya dalam himpunan ini tidak terhingga, himpunan ini masih mempunyai batas yang terletak dalam interval $[-1, 1]$.

26. Jika dua himpunan W dan V mempunyai batas, apakah gabungan dan irisan dari himpunan-himpunan ini mempunyai batas atau tidak ?.

Penyelesaian: Gabungan dan irisan kedua himpunan tsb. mempunyai batas.

27. Jika dua himpunan R dan S adalah tidak mempunyai batas, apakah yang dapat dikatakan tentang gabungan dan irisan tersebut?.

Penyelesaiann: Gabungan R dan S tidak mempunyai batas, tetapi irisan R dan S dapat mempunyai batas atau tidak mempunyai batas. Contoh: Jika R $=(-\infty, 3)$ dan S $=[-2, \infty)$ maka irisannya merupakan interval yang terhingga. Dengan demikian irisannya itu merupakan himpunan yang mempunyai batas dengan interval $[-2, 3)$.
Tetapi jika R $= (3, \infty)$ dan S $= [-2, \infty)$ maka irisannya merupakan interval tidak terhingga. Maka dengan demikian irisan tsb. merupakan himpunan yang tidak mempunyai batas dengan interval (3, ∞).

SOAL-SOAL TAMBAHAN

HIMPUNAN BILANGAN.

28. Nyatakanlah apakah pernyataan-pernyataan dibawah ini benar atau salah.

a). $\pi \in Q$ b). $3 \in Z$ c). $-3 \in N$

d). $\sqrt{-1} \in \overline{Q}$ e). $7 \in P$ f). $\sqrt{9} \in N$

g). $-5 \in Z$ h). $\sqrt{-3} \in R^{\#}$ i). $15 \in P$

j). $\sqrt[3]{2} \in \overline{Q}$ k). $2/3 \in Z$ l). $2 \in Q$

29. Lukiskanlah diagram garis dari himpunan-himpunan $R^{\#}$, Z, $\overline{Q}$, dan P.

30. Dari himpunan-himpunan $R^{\#}$, Q, $\overline{Q}$, Z, N dan P manakah yang tertutup dibawah operasi:

a). perkalian b). pembagian

31. Diketahui:

$A = \{x \mid x = 2^n,\ n \in N\} = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$

$B = \{x \mid x = 3N,\ n \in N\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

$C = \{x \mid x = 3N,\ n \in Z\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

Manakah diantara himpunan-himpunan tsb, yang tertutup dibawah operasi:

a). tambah b). kurang c). kali.

32. Manakah diantara pernyataan yang berikut yang :

a). selalu benar , b). kadang-kadang benar

c). tidak pernah benar dimana $a \neq 0$ dan $b \neq 0$.

1). $a \in Z$, $b \in Q$ dan $a - b \in N$

2). $a \in P$, $b \in \overline{Q}$ dan $ab \in Q$

3). $a \in N$, $b \in Z$ dan $ab \in Z$

4). $a \in N$, $b \in \overline{Q}$ dan $a/b \in Q$

5). $a \in P$, $b \in P$ dan $a + b \in \overline{P}$

6). $a \in N$, $b \in \overline{Q}$ dan $a + b \in Q$

7). $a \in Z$, $b \in Q$ dan $a/b \in N$.

8). $a \in P$, $b \in Z$ dan $b/a \in Q$.

KETIDAKSAMAAN DAN NILAI MUTLAK.

33. Tuliskan pernyataan-pernyataan yang berikut dalam bentuk Notasi:

a). x tidak lebih besar dari y

b). Nilai mutlak dari x kurang dari 4

c). r tidak kurang dari y

d). r tidak lebih besar dari atau sama dengan t

34. Tempatkanlah diantara pasangan-pasangan bilangan berikut simbol yang betul, yaitu salah satu dari. $<, >$ atau $=$ Disini x menyatakan suatu bilangan riil.

a). $5 \ldots\ldots -8$ b). $|x| \ldots\ldots -3$ c). $2^3 \ldots\ldots 8$

d). $-\pi \ldots\ldots \pi/2$ e). $2^3 \ldots\ldots 19$ f). $-|x| \ldots 1$

g). $-7 \ldots\ldots 4$ h). $-2 \ldots\ldots -5$

35. Tuliskanlah kembali relasi geometry antara bilangan-bilangan dengan memakai notasi ketidaksamaan.

a). a terletak sebelah kanan b

b). x terletak sebelah kiri y

c). r terletak antara -5 dan -8

36. Tentukanlah harga:

a). $|4 - 7|$ b). $|-4 -7|$ c). $|-4 + 7|$

d). $|3| - |-5|$ e). $|2 -3| + |-6|$ f). $|-2| + |1-5|$

g). $|3 - 8| - |2 - 1|$ h). $||- 3| - |-9||$ i). $||2-6| - |1-9||$

37. Tuliskanlah kembali sehingga x tersendiri antara tanda ketidaksamaan itu.

a). $-2 < x-3 < 4$ b). $-5 < x+2 < 1$

c). $-12 < 4x < -8$ d). $4 < -2x < 10$

e). $-1 < 2x-3 < 5$ f). $-3 < 5-2x < 7$

38. Tuliskanlah kembali dengan menghilangkan tanda mutlaknya.

a). $|x| \leqslant 8$ b). $|X-3| < 8$ c). $|2x + 4| < 8$

39. Tuliskanlah kembali dengan memakai tanda mutlak:

a). $-3 < x < 9$ b). $2 \leqslant x \leqslant 8$ c). $-7 < x < -1$

40. Buktikan jika $a \leq b$ dan c negatif, maka $bc < ac$.

INTERVAL.

41. Tuliskanlah kembali setiap interval yang berikut dalam bantuk pencirian himpunan: $A = [-3, 1)$, $B = [1, 2]$, $C = (1, 3]$, $D = (-4, 2)$

42. Dari soal no. 41 tentukanlah yang merupakan :
   a). interval terbuka b). interval tertutup

43. Gambarkan dalam garis bilangan riil himpunan-himpunan pada soal no. 41.

44. Tuliskanlah kembali interval tidak terhingga berikut ini dalam notasi interval:
   $R = \{x \mid x \leq 2\}$, $S = \{x \mid x > -1\}$, $T = \{x \mid x < -3\}$

45. Gambarkan dalam garis bilangan riil himpunan-himpunan dalam soal no. 44.

46. Misalkan $A = [-4, 2)$, $B = (-1, 6)$, $C = (-\infty, 1]$.
   Tetukanlah dan tuliskanlah dalam notasi interval:
   a). $A \cup B$ b). $A \cap B$ c). $A - B$
   d). $B - A$ e). $A \cup C$ f). $A \cap C$
   g). $A - C$ h). $C - A$ i). $B \cup C$
   j). $B \cap C$ k). $B - C$ l). $C - B$

HIMPUNAN YANG MEMPUNYAI BATAS DAN YANG TIDAK MEMPUNYAI BATAS.

47. Tuliskanlah setiap himpunan yang berikut dalam "bentuk pendaftaran" dan nyatakanlah bila himpunan itu mempunyai batas atau tidak.
   a). $E = \{x \mid x = (1/n),\ n \in N\}$
   b). $F = \{x \mid x = 3^n,\ n \in N\}$
   c). $G = \{x \mid x = (\frac{1}{2})^n,\ n \in N\}$
   d). $H = \{x \mid x \in N,\ x < 2576\}$

48. Manakah diantara ...

48. Manakah diantara pernyataan yang berikut yang:
a). selalu benar , b). kadang-kadang benar ,
c). tidak pernah benar .
1). Jika A terhingga, maka A mempunyai batas.
2). Jika A tidak terhingga maka A mempunyai batas
3). Jika A himpunan bagian dari $[-23, 79]$, maka A terhingga.
4). Jika A himpunan bagian dari $[-23 , 79]$, maka A tidak mempunyai batas.