TEORI GRAPH

OLEH :

Drs. EDWIN MUSDI, M.Pd
DOSEN FPMIPA IKIP PADANG

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN PADANG
P A D A N G
1 9 9 2

KATA PENGANTAR

Dua dekade terakhir ini minat dan kegiatan dalam teori graph berkembang dengan pesat khususnya dalam hal matematika terapan dan kerekayasaan. Bukti yang jelas untuk ini adalah banyaknya ditemukakan buku-buku dan makalah yang diterbitkan dalam bidang ini.

Teory graph adalah salah satu cabang matematika yang terapannya bisa digunakan untuk ilmu-ilmu yang lain, seperti bidang kerekayasaan, ilmu fisika, sosial, dan ilmu-ilmu biologi.

Karena jarangnya buku-buku berbahasa Indonesia yang mengupas tentang teori graph ini, maka penulis telah mencoba menyusun beberapa topik dari hal yang dipelajari dalam teori graph. Uraian penulis dalam buku ini meliputi:

1. Definisi tentang graph dan jenis graph
2. Lintasan dan sirkuit
3. Pohon dan sirkuit fundamental
4. Penyajian matrik suatu graph.

Harapan penulis semoga buku ini dapat memenuhi kebutuhan terutama bagi mahasiswa jurusan matematika.

Dalam kesempatan ini penulis mengharapkan kritik-kritik yang membangun, saran-saran dan petunjuk-petunjuk yang pada gilirannya nantik dapat merubah isi buku ini mencapai kesempurnaan. Untuk itu penulis ucapkan terima kasih.

Padang, November 1991

Penulis

Daftar Isi

Halaman

Kata Pengantar		ii
Daftar Isi		iii
B A B I	Pendahuluan	1
	1.1 Apa Itu Graph	1
	1.2 Aplikasi dari Graph	5
	1.3 Graph Berhingga dan Tak Berhingga	10
	1.4 Insident dan Derajad	11
	1.5 Titik Isolasi dan Titik Pendant	13
	1.6 Sejarah Ringkas Teori Graph	13
	S o a l	16
B A B II	LINTASAN DAN SIRKUIT	18
	2.1 Isomorphisma	18
	2.2 Graph Bagian	21
	2.3 Perjalanan, Lintasan dan Sirkuit	23
	2.4 Graph Terhubung, Takterhubung, dan Sirkuit	25
	2.5 Graph Euler	28
	2.6 Operasi Pada Graph	30
	2.7 Sirkuit dan Lintasan Hamilton	35

B A B III POHON (TREE) 41

3.1 Pohon 41

3.2 Sifat-sifat Pohon 42

3.3 Jarak dan Pusat Pohon 46

3.4 Akar Pohon Dan Pohon Biner 49

3.5 Menghitung Pohon 53

3.6 Pembangkit Pohon 54

3.7 Pembangkit Pohon dalam Sebuah Graph Terbobot 59

B A B IV PENYAJIAN GRAPH DENGAN MATRIK 64

4.1 Matrik Insident 64

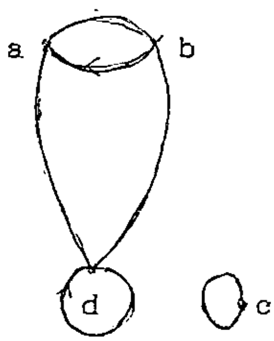
4.2 Matrik Bagian A(G) 68

4.3 Matrik Sirkuit 69

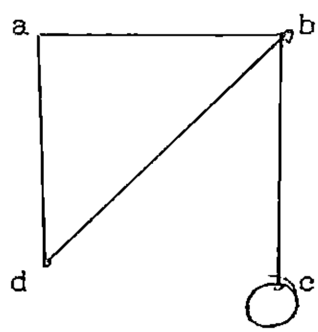
4.4 Matrik Sirkuit Fundamental dan Rank 72

4.5 Matrik Adjacency 74

Graph tidak berarah G didefinisikan secara abstrak sebagai pasangan berurutan (V, E) dimana V adalah sebuah himpunan dan E adalah himpunan ruas garis yang terdiri dari dua unsur di V. Graph tak berarah dapat disajikan secara geometri sebagai sebuah himpunan titik-titik di V dengan sebuah himpunan E antara titik-titik tersebut. Gambar 1-2 menunjukkan graph berarah dan gambar 1-3 menunjukkan graph tak berarah.



gambar 1-2



gambar 1-3

Empat definisi dari teori graph yang telah disebutkan diatas, semuanya menyampaikan konsep teori graph yang berbeda baik dari segi redaksinya maupun penekanannya. Oleh karena ketidakseragaman definisi tersebut, istilah-istilah yang digunakan dalam teori graph tidak standar. Situasi ini menjadi lebih rumit bila kita menemukan suatu istilah khusus yang digunakan oleh berbagai pengarang untuk menjelaskan konsep yang berbeda. Situasi seperti ini adalah wajar karena disebabkan oleh keanekaragaman disiplin ilmu lain dimana teori graph dapat digunakan.

B A B I

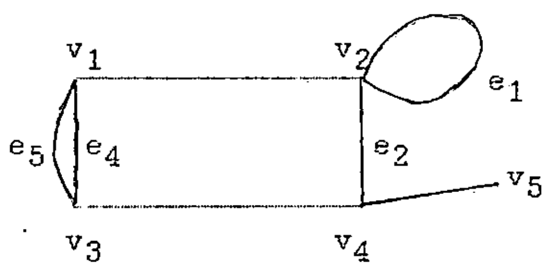
PENDAHULUAN

1-1 Apa itu Graph ?

Menurut Nasingh Deo

Graph $G = (V, E)$ terdiri dari sebuah himpunan $V = \{v_1, v_2, ...\}$ yang disebut himpunan titik-titik, dan himpunan lain $E = \{e_1, e_2, ...\}$ yang mana unsur-unsurnya disebut sisi-sisi, sedemikian sehingga setiap sisi e_k melambangkan sebuah pasangan tidak berurut titik (v_i, v_j). Titik-titik v_i, v_j yang membentuk garis e_k disebut titik-titik ujung e_k.

Penyajian yang sangat umum dari suatu graph adalah dengan menggunakan sebuah diagram dimana sisi e_k dibentuk dengan cara menghubungkan titik-titik ujungnya. Sering diagram itu sendiri dianggap sebagai graph. Objek yang ditunjukan dalam gambar 1-1 sebagai contoh, adalah merupakan sebuah graph.



Gambar 1-1 Graph dengan 5 titik dan 7 sisi.

Menurut Stephen A. Wiitala definisi graph adalah sebuah pasangan berurutan (V, E) dimana V adalah himpunan titik dan E adalah sebuah himpunan yang terdiri dari himpunan bagian V dengan dua unsur. Himpunan E disebut himpunan sisi, dan a dan b dihubungkan oleh sebuah sisi jika $\{ a, b \} \in E$.

Untuk konsistensi bahasan buku ini, maka perlu rasanya membuat definisi standar yang akan digunakan.

Definisi 1-1

Misal V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan sisi-sisi. Graph G = (V, E) adalah terdiri dari sebuah himpunan V dan himpunan E sedemikian sehingga setiap sisi e_k bersesuaian dengan sebuah pasangan tak berurut titi (v_i, v_j). Jika E = Ø maka graph yang terjadi disebut graph null.

Definisi diatas membolehkan sebuah sisi dihubungkan dengan sepasang titik (v_i, v_j). Sisi yang demikian itu memiliki titik-titik ujung yang sama dan disebut sebuah "loop". Definisi diatas juga membolehkan lebih satu sisi menghubungkan sepasang titik yang diketahui. Sebagai contoh sisi e_4 dan e_5 pada gambar 1-1 adalah sisi paralel sedangkan sisi e_1 adalah sebuah "loop".

Definisi 1-2

Graph G (V, E) yang tidak memiliki sisi paralel dan loop disebut Graph sederhana.

Dalam menggambar suatu graph tidaklah penting apakah garis-garis tersebut digambarkan dengan lurus atau bengkok, panjang atau pendek. Yang penting adalah pertemuan antara sisi dan titik. Sebagai contoh dua graph yang digambar pada gambar 1-4(a) dan (b) adalah sama, karena pertemuan antara

J.P Tremblay dan R. Monohar mendifinisikan graph sebagai berikut :
Suatu Graph G = {V, E, O) terdiri dari himpunan yang tidak kosong V yang disebut himpunan titik dari graph, E disebut sebagai himpunan sisi dari graph dan O adalah sebuah pemetaan dari himpunan E ke sebuah pasangan berurutan atau pasangan tidak berurutan dari unsur-unsur V.

Suatu tambahan dari devinisi yang dibuat Tramblay ini terletak pada adanya fungsi O : E ——> V dimana domain O adalah E, sedangkan daerah jelajahnya berupa pasangan berurutan atau pasangan bukan berurutan dari anggota-anggota di V. Namun kalau dibandingkan dengan definisi graph yang dibuat oleh Nasingh Deo, fungsi O dapat diinterpretasikan sebagai hubungan antara sisi e_k dengan pasangan titik berurut (v_i, v_j).

Dari ketiga definisi diatas, tidak disebutkan apakah graph tersebut berarah atau tidak. Namun C.L Liu mendifinisikan graph sesuai dengan arahnya dan definisi lengkapnya adalah sebagai berikut:

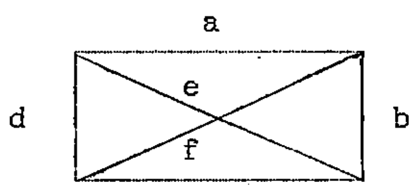
> Graph berarah G adalah didefinisikan secara abstrak sebagai sebuah pasangan berurut (V, E), dimana V adalah sebuah himpunan dan E adalah sebuah relasi biner pada V. Sebuah graph berarah dapat disajikan secara geometri sebagai sebuah himpunan titik-titik V dengan sebuah himpunan garis berarah E yang menghubungkan sepasang titik.

garis-garis dan titik-titik adalah sama dalam kedua kasus tersebut.

(a) (b)

Gambar 1-4 Graph yang sama digambar berbeda.

Dalam sebuah diagram dari sebuah graph seringkali dua sisi kelihatannya berpotongan pada sebuah titik, padahal dia tidak menyatakan sebuah titik. Sebagai contoh adalah sisi e dan f dalam gambar 1-5. Sisi-sisi tersebut seharusnya digambar pada bidang yang berbeda, sehingga jelas dia tidak mempunyai titik potong.



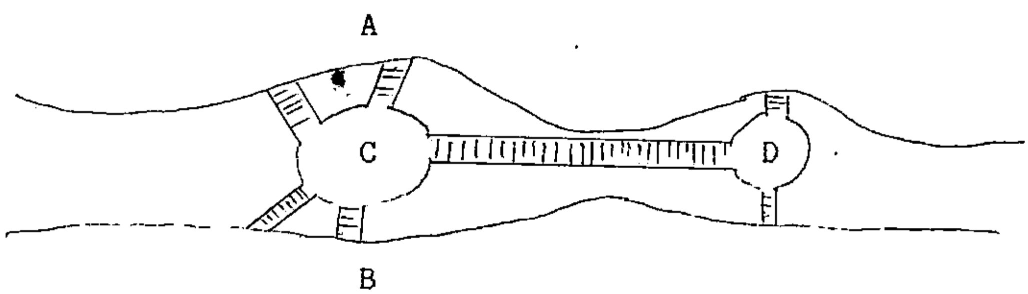
Gambar 1-5. Sisi-sisi e dan f tidak memiliki titik persekutuan.

1.2 Aplikasi dari Graph

Teori graph banyak digunakan dalam bidang teknik, fisika, sosial, ilmu biologi, bahasa dan dalam berbagai bidang lainnya. berikut ini adalah empat contoh diantara banyaknya aplikasi graph.

1. **Masalah Jembatan Konigsberg:**

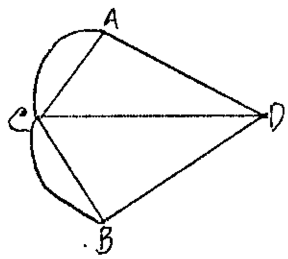
Masalah Jembatan Konigsberg barangkali contoh yang terkenal dalam teori graph. Masalah ini lama sekali bisa terselesaikan, dan pada tahun 1736 masalah ini dapat diselesaikan oleh Leonhard Euler (1707 - 1783) dengan menggunakan sebuah graph. Dialah orang yang pertama kali memperkenalkan teori graph. Masalah tersebut seperti gambar 1-6.



Gambar 1-6 Masalah Jembatan Konogsberg

Dua pulau C dan D, yang dibentuk oleh sungai Pregel di Konigsberg (kemudian menjadi ibu kota Prussia timur dan sekarang berubah nama menjadi Koliningrad dan berada di Sovyet Timur) dihubungkan masing-masingnya dengan sebuah jembatan dan juga terhadap tepi-tepi sungai A dan B, sehingga jumlah jembatan seluruhnya 7. Masalahnya adalah jalur mana yang harus ditempuh mulai dari salah satu daratan A, B, C, atau D dan berakhir pada tempat berangkat, sedemikian sehingga seluruh jembatan dilalui tepat satu kali (tanpa berenang melintasi sungai, tentunya).

Euler mempresentasikan situasi ini menggunakan graph seperti gambar 1-7. Titik-titik menyatakan daerah daratan dan sisi menyatakan jembatan.

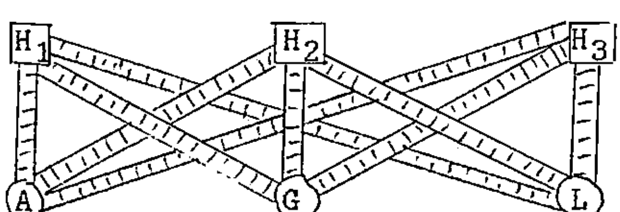


Gambar 1-7 Graph dari Jembatan Konigsberg

Masalah jembatan Konigsberg sama halnya dengan masalah menggambar suatu coretan tanpa mengangkat pena dari kertas dan tanpa mengulangi goresan yang telah dibuat sebelumnya.

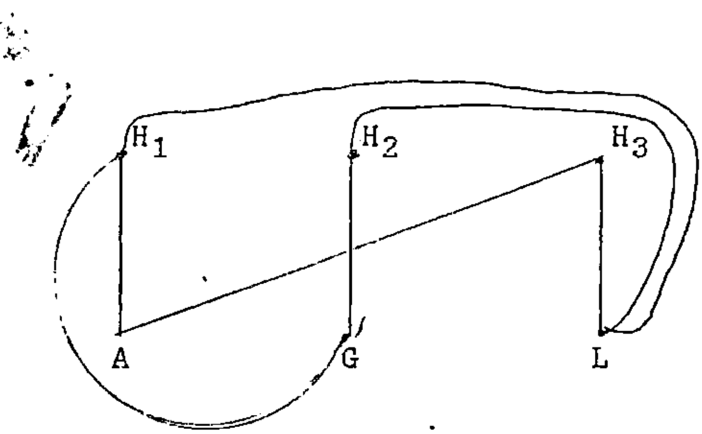
2. **Masalah kebutuhan.**

Ada tiga rumah (gambar 1-8) H_1, H_2 dan H_3 masing-masingnya dihubungkan dengan tiga kebutuhan yaitu air (A), Gas (G), dan listrik (L) menggunakan saluran pipa. Apakah mungkin membuat hubungan tersebut tanpa saling memotong diantara saluran pipa tersebut ?



Gambar 1-8 Masalah tiga kebutuhan

Gambar 1-9 menunjukkan bagaimana masalah ini dapat digambarkan dengan graph. Saluran pipa dilambangkan dengan sisi sedangkan rumah dan kebutuhan dilambangkan dengan titik.



Gambar 1-9

Graph masalah tiga kebutuhan

Graph dalam gambar 1-9 tidak dapat digambarkan dalam bidang tanpa saling memotong sisi-sisinya. Jadi jawaban masalah ini tidak ada.

3. **Masalah Jaringan Kerja (Network) Listrik**

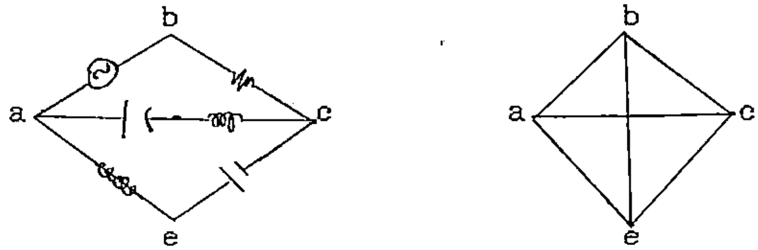
Sifat-sifat jaringan kerja listrik dipengaruhi oleh dua faktor antara lain :

a. Keadaan dan nilai unsur-unsur yang membentuk jaringan tersebut seperti resistor, induktor, transistor, dan sebagainya.

b. Cara unsur-unsur ini dihubungkan sesamanya yaitu topologi dari jaringan kerjanya.

Topologi dari sebuah jaringan kerja dipelajari dengan menggunakan graph. Dalam menggambar sebuah graph jaringan kerja listrik, junctions dilambangkan dengan titik dan cabang-cabangnya (yang mana terdiri dari unsur-unsur listrik) dilambangkan dengan sisi-sisi tanpa menghiraukan keadaan dan ukuran dari unsur-unsur listriknya. Sebuah jaringan listrik dan graphnya ditunjukkan dalam gambar

1-10 berikut ini



Gambar 1-10

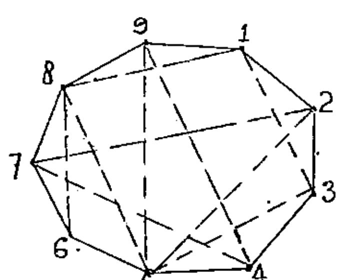
Jaringan kerja listrik dan graphnya

4. **Masalah Tempat Duduk**

Sembilan anggota suatu klub bertemu setiap hari dalam rangka makan siang di meja bundar. Mereka memutuskan duduk sedemikian rupa sehingga setiap peserta memiliki teman yang berbeda duduk di sampingnya setiap kali makan siang. Berapa carakah ini ?

Situasi ini dapat disajikan dengan menggunakan graph dengan 9 titik sedemikian rupa sehingga setiap titik menyatakan seorang anggota, dan garis hubung dua titik menyatakan posisi yang duduk disampingnya.

gambar 1-11 menunjukkan dua kemungkinan susunan duduk yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1 (garis utuh) dan 1, 3, 5, 2, 7, 4, 9, 6, 8, 1 (garis putus-putus)



Gambar 1-11 Susunan pada sebuah meja bundar.

Pada umumnya susunan diatas dapat dilanjutkan bahwa untuk n orang, banyaknya susunan yang mungkin adalah :

$$\frac{n-1}{2} \quad \text{jika n ganjil}$$

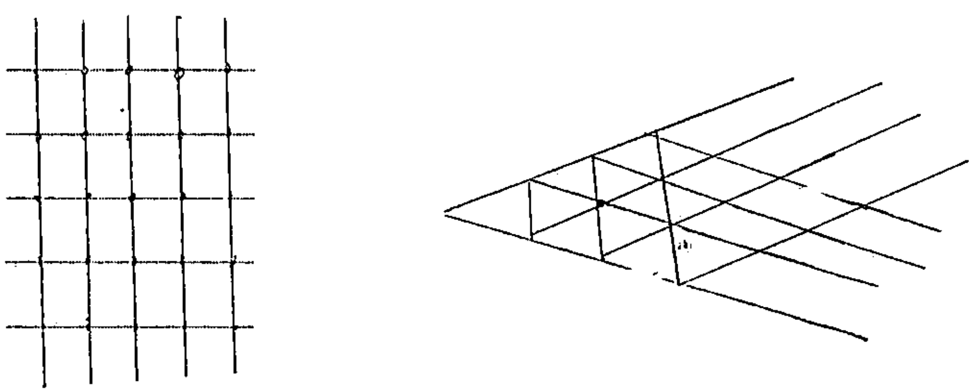
$$\frac{n-2}{2} \quad \text{jika n genap}$$

1-3 <u>Graph berhingga dan tak hingga</u>

Definisi 1-3

<u>Sebuah graph adalah berhingga</u> jika graph tersebut memiliki banyaknya titik-titik dan sisi-sisi yang berhingga. Sebaliknya dikatakan tak hingga.

Graph 1-11 diatas adalah salah satu contoh graph berhingga, sedangkan gambar 1-12 adalah contoh graph tak berhingga.



Gambar 1-12

Bagian dari dua graph tak berhingga.

1-4 Insiden dan Derajad

Definisi 1-4 (Menurut Stephen A. Witala:183)

Sebuah titik v adalah <u>insiden</u> terhadap sebuah sisi e_j jika v merupakan salah satu ujung dari garis e_j.

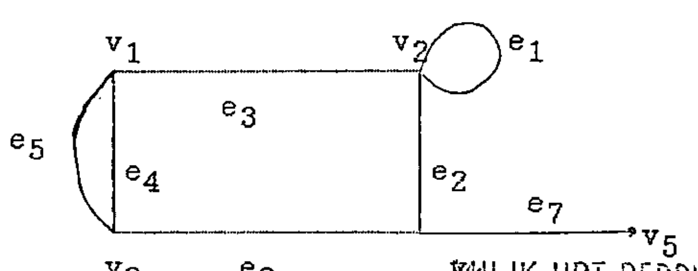
<u>Derajat sebuah titik</u> v dilambangkan dengan d(v) adalah banyaknya sisi yang mana titik v sebagai insidennya.

<u>Dua garis yang tidak sejajar</u> e_i dan e_j adalah <u>adjacent</u> jika garis-garis tersebut memiliki titik insiden yang sama. Dua titik dikatakan <u>adjasent</u> jika titik-titik tersebut merupakan titik-titik ujung dari sisi-sisi yang sama.

Pada gambar 1-13 sisi e_2 dan e_6 dan e_7 adalah insiden dengan titik v_4. e_2 dan e_7 adalah adjasent. v_4 dan v_5 adalah adjasent tetapi v_1 dan v_4 tidak. $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 3$ dan $d(v_2) = 4$, $d(v_5) = 1$. Derajat sebuah titik sering juga diartikan sebagai valensinya.

Perhatikan sebuah graph G dengan sisi e dan n titik v_1, v_2, ..., v_n. Karena setiap sisi membentuk dua titik, maka jumlah derajat seluruh titik di G adalah dua kali banyaknya sisi di G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e \qquad (1\text{-}1)$$



Gambar 1-13 Sebuah Graph dengan 5 titik dan 7 sisi

Sebagai contoh pada gambar 1-13 $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 4 + 3 + 3 + 1 = 14$ = dua kali banyak sisi.

Teorema 1-1

Banyak titik berderajad ganjil dalam sebuah graph selalu genap.

Bukti : Andaikan titik berderajad ganjil dan genap terpisah . Ruas kiri dari persamaan 1-1 dapat dinyatakan sebagai dua jumlah masing-masingnya adalah titik derajad ganjil dan genap.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{\text{genab}} d(v_j) + \sum_{\text{ganjil}} d(v_k) \qquad (1\text{-}2)$$

Karena ruas kiri persamaan (1-2) genap dan suku pertama pada ruas kanan adalah genap, maka suku kedua ruas kanan juga genap atau

$$\sum_{\text{ganjil}} d(v_k) = \text{sebuah bil. genap} \qquad (1\text{-}3)$$

Karena masing-masing $d(v_k)$ dalam persamaan (1-3) adalah ganjil dan $d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_k)$ genap, maka tentulah banyak suku-sukunya genap atau k genap. Jadi banyak titik berderajad ganjil tersebut adalah genap (qed).

1-5 Titik isolasi, Titik Pendant dan graph nol.

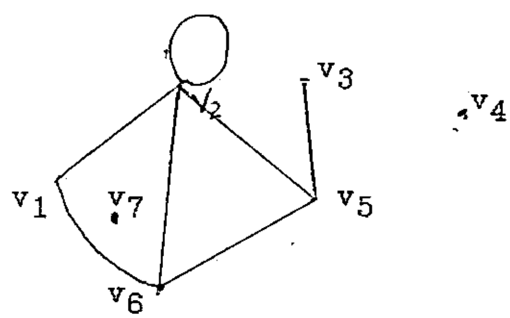
Definisi 1.5

Titik isolasi adalah sebuah titik yang berderajat nol.

Titik pendant adalah sebuah titik yang berderajat satu

Dua sisi yang adjacent dikatakan rangkaian seri jika titik persekutuannya berderajat dua.

Dalam gambar 1-14 titik v_4 dan v_7 adalah titik isolasi, dua sisi yang beradjacent di v_1 adalah rangkaian seri dan titik v_3 adalah titik pendant.



Gambar 1-14. Graph yang memuat titik isolasi, sisi rankaian seri, dan pendant.

1-6 Sejarah Ringkas Teori Graph

Teori graph diciptakan pertama kali tahun 1736 oleh Euler dalam rangka menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg seperti dalam 1-2. setelah itu kira-kira 100 tahun kemudian tidak satupun para ahli yang mendalami bidang ini.

Pada tahun 1847, G R Kirchhoff (1824-1887) mengembangkan "Teori Pohon" (trees) untuk diterapkannya dalam Jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian , A. Cayley (1821-1895) menemukan "teori pohon" dalam menghitung isomer-isomer dari C_nH_{2n2}. Pada waktu itu Kirchhoff dan Cayley dianggap sebagai dua tonggak sejarah lainnya dalam perkembangan teori graph.

Setelah nama-nama tokoh-tokoh diatas ada lagi ahli lain yang ikut berandil dalam teori graph. Dia adalah A.F Mobius (1790-1866). Mobius yang pertama kali mempresentasikan masalah empat warna (four-color problem) yaitu menyatakan bahwa empat warna cukup untuk mewarnai atlas (peta pada bidang datar) sehingga negara-negara yang berbatasan memiliki warna yang berbeda. Dia mempresentasikan topik tersebut dalam satu kuliahnya pada tahun 1840. Kira-kira 10 tahun kemudian, A. De Morgan (1804-1871) telah mendiskusikan masalah ini dengan temannya yang juga seorang matematikawan di london. Tulisan De Morgan itulah yang menjadi literatur autentik yang pertama terhadap masalah empat warna. Masalah tersebut menjadi terkenal setelah setelah Cayley mmpublikasikannya pada tahun 1979 dalam "Proceedings of the Royal Geographic Society" volume I. Sejak saat itu dugaan empat warna tersebut betul-betul menjadi masalah yang terselesaikan dalam teori graph.

Tonggak sejarah lainnya adalah Sir W R Hamilton (1805-1865). Pada tahun 1859 dia menginventariskan sebuah teka teki dan menjualnya sebanyak 25 mutiara ke pengusaha sebuah pabrik di Dublin. Teki teki itu terbuat dari kayu berbentuk bidang banyak beraturan dengan 12 sisi dan 20 titik sudut. Titik-titik sudut tersebut ditandai dengan nama-nama 20 kota seperti London, New York, Delhi, Paris, an seterusnya. Tujuan dari teka teki ini adalah untuk menemukan sebuah jalur sepanjang rusuk-rusuk bidang banyak tersebut agar melalu seluruh kota tepat satu kali. Meskipun pemecahan masalah yang khusus ini sudah diperoleh, untuk membuat model secara umum tidak seorangpun yang menemukannya. Sarat cukup dan perlu akan keberadaan dari jalur tersebut dalam sebarang graph.

Periode setengah abad setelah itu kegiatan dalam bidang ini agak tidak aktif. Kemudian minat dalam graph ini muncul dalam tahun 1920-an. Satu ahlinya dalam periode ini adalah D.Konig. Dia telah menyusun buku yang pertamanya berdasarkan kerja dari metematikawan lainnya dan mempublikasikannya pada tahun 1936.

Tiga puluh tahun setelah itu adalah periode aktifnya kembali teori graph dipelajari baik disegi ilmu murninya maupun terapan. Sejumlah riset telah dan sedang dilakukan dalam lapangan ini. Ribuan makalah telah dipublikasikan dan lebih selusin buku telah ditulis pada saat itu. Diantara para ahli dalam lapangan tersebut adalah Claude Berge, Oystein Ore, Paul Erdos, William Tutte dan Frank Harary.

SOAL-SOAL

1. Gambarlah seluruh graph sederhana dengan satu, dua, tiga, dan empat titik.
2. Gambarlah graph yang menyajikan masalah dari:

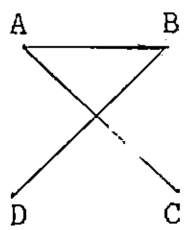
   a. dua rumah dan tiga keperluan

   b. empat rumah dan empat keperluan (air, gas, listrik,telepon)
3. Carilah 10 situasi (permainan, aktifitas, masalah kehidupan dan lain-lain) yang dapat disajikan dengan menggunakan graph. Jelaskan apa yang dilambangkan titik-titik dan garis-garis !
4. Gambarlah graph dari unsur kimia berikut.

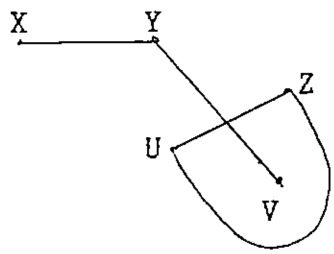
   a. CH_4 b. C_2H_6 c. C_6H_6 d. N_2O_3
5. Gambarlah sebuah graph dengan 64 titik sebagai wakil dari bujur sangkar-bujur sangkar pada papan catur. Hubungkan titik-titik tersebut masing-masingnya menyajikan sebuah pergerakan buak catur kuda. Berapa banyakah titik-titik yang berderajad satu, dua, tiga, empat, enam, atau delapan ?
6. Diberikan 3 bejana A, B dan dengan kapasitas 8,5, dan 3 liter masing-masingnya. A penuh terisi sementara B dan C kosong. Bagilah cairan dalam bejana A kedalam dua bejana lainnya [misalnya a,b,dan c adalah banyaknya cairan dalam A, B, dan C berturut-turut. Diperoleh a+b+c=8 pada setiap saat sebab minimal satu dari bejana-bejana tersebut selalu kosong atau penuh dan sekurang-kurangnya satu dari persamaan berikut harus dipenuhi. a-0,a=8; b=0,b=5; c=0,c=3. Jadi ada 16 kemungkinan. Sajikan masalah ini dengan menggunakan 16 titik dari suatu graph. Setiap titik melambangkan sebuah pernyataan yang dibolehkan antara dua titik-titik ujungnya.

7. Buktikan derajad maksimum sebarang titik dalam graph sederhana dengan n titik adalah n-1.
8. Tunjukan bahwa maksimum banyaknya sisi dalam graph sederhana dengan n titik adalah n(n-1)/2
9. Manakah dari penyajian berikut ini yang merupakan graph sesuai dengan yang didefinisikan.

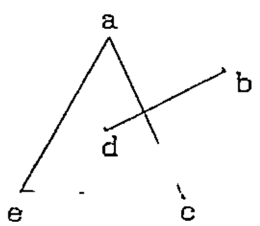
(a)



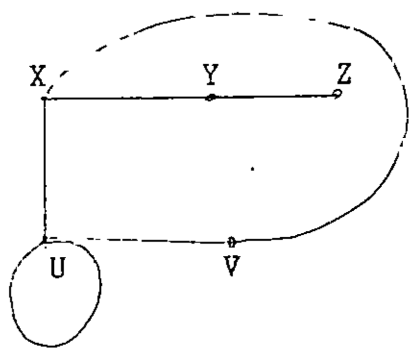
(b)



(c)



(d)



810.5
Mus

BAB II

LINTASAN DAN SIRKUIT

Bagian ini memiliki dua tujuan :

1. Memperkenalkan konsep-konsep dan istilah-istilah tambahan dalam teori graph seperti lintasan (path), sirkuit (circuits) dan graph euler. Konsep-konsep ini bertahan dengan hakekat keterhubungan suatu graph.
2. Mingilustrasikan dengan contoh-contoh bagaimana menyelesaikan soal-soai aktual dengan menggunakan teori graph. masalah Jembatan Konigsberg yang diperkenalkan dalam bab I akan diselesaikan. Pemecahan dari masalah tempat duduk dalam Bab I juga akan dibahas dalam bab ini dengan menggunakan sirkuit Hamiltonian.

2-1 ISOMORPHISMA

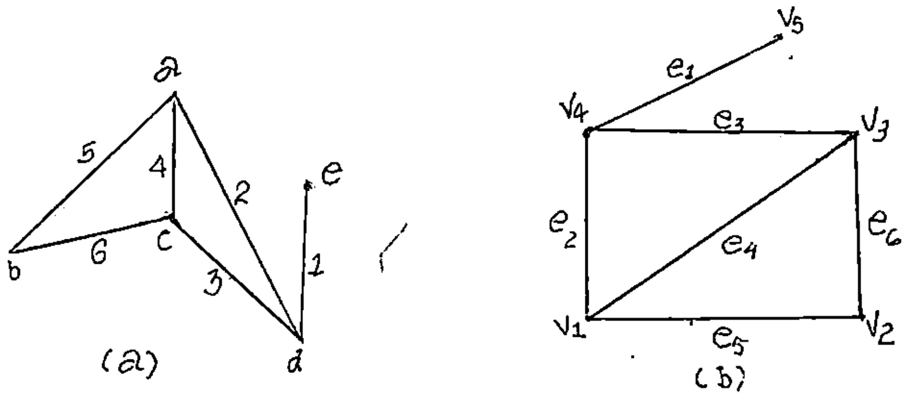
<u>Definisi 2.1</u> (menurut Gary Chartrand)
Dua graph $G = (V_1, E_2)$ dan $G_1 = (V_2, E_2)$ dikatakan isomorphisma jika ada fungsi satu-satu dan onto dari $O : V_1 \longrightarrow V_2$ sedemikian sehingga dua titik u_1 dan v_1 adjacent di G_1 jika dan hanya jika $O(u_1)$ dan $O(v_1)$ adalah adjacent di G_2.

Gambar 2-1 berikut menunjukkan dua graph yang isomorphisma dengan $V_1 = \{a,b,c,d,e\}$, $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$0 (a) = v_1$

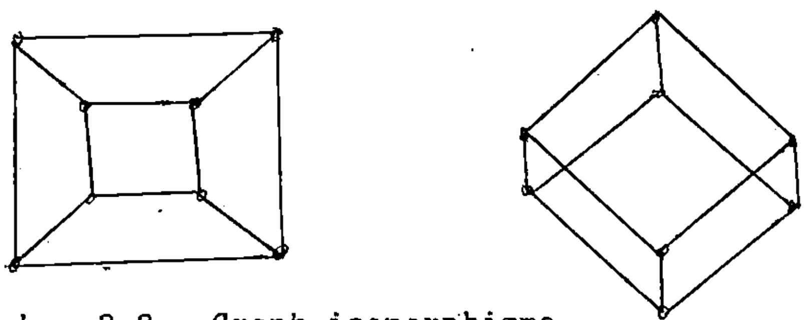
$0 (b) = v_2$ $\quad$ $0 (d) = v_4$

$0 (c) = v_3$ $\quad$ $0 (e) = v_5$



Gambar 2-1 Graph Isomorphisma

Kecuali untuk nama titik-titik dan sisi-sisinya, graph yang isomorphisma disebut juga graph yang sama, tetapi digambar dengan cara yang berbeda. Jadi bisa saja sebuah graph digambarkan dengan cara yang berbeda. Gambar 2-2 menunjukkan dua cara yang berbeda dalam menggambarkan graph yang sama.



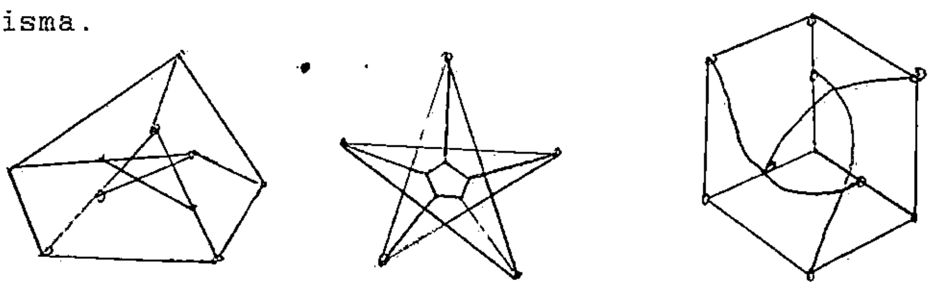
gambar 2-2 Graph isomorphisma.

Tidaklah mudah untuk menentukan apakah dua graph yang diberikan isomorphisma atau tidak. Sebagai contoh seluruh graph pada gambar 2-3 adalah isomorphisma, tapi kalau dilihat sepintas lalu kita tidak bisa menyatakan hal tersebut. Hal ini bisa dilihat dengan memberi nama seluruh titik-titik dan sisi-sisi ketiga ganbar tersebut lalu dibuat $0 : V_1 \longrightarrow V_2$ yang satu-satu dan onto dengan titik u_1 dan v_1 adjacent di sebuah graph jika dan hanya jika $0(u_1)$ $0(v_1)$ adjasen dengan graph yang lain.

Dari definisi isomorphisma, jelaslah bahwa graph yang isomorphisma harus mempunyai :

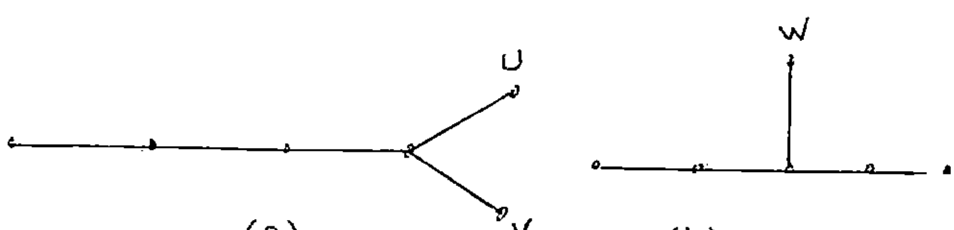
1. banyak titik yang sama
2. Banyak sisi yang sama
3. Titik-titik yang berderajat tertentu sama banyak.

Namun kondisi yang ketiga itu bukan merupakan syarat yang cukup dari isomorphisma. Sebagai contoh dua graph pada gambar 2-4 memenuhi kondisi di atas tetapi keduanya tidak isomorphisma.



(a) (b) (c)

Gambar 2-3 graph isomorphisma



(a) (b)

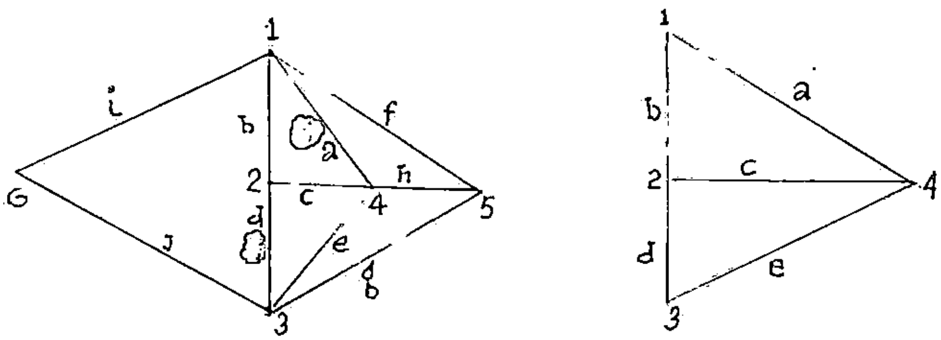
Gambar 2-4 Dua Graph yang tidak Isomorphisma

2-2 Graph bagian (SUBGRAPH)

<u>Definisi 2-2</u> (menurut Stephen A Witelat)

Graph G′= (V′, E′) adalah graph bagian (subgraph) dari graph G = (G, E) jika V′ himpunan bagian dari V dan E′ terdiri dari sisi-sisi di E yang hanya menghubungkan titik-titik di V′

Graph pada gambar 2-5(b) adalah graph bagian dari graph pada gambar 2-5(a).



(a) (b)

gambar 2-5 Graph (a) dan satu diantara subgraphnya (b)

Konsep dari graph bagian adalah sama dengan konsep dari himpunan bagian pada Teori Himpunan . Simbol dari teori himpunan, g $\subset$ G digunakan untuk menyatakan g adalah sebuah graph bagian dari G.

Berikut ini sifat-sifat yang berlaku pada graph

1. Setiap graph adalah graph bagian dari dirinya sendiri.

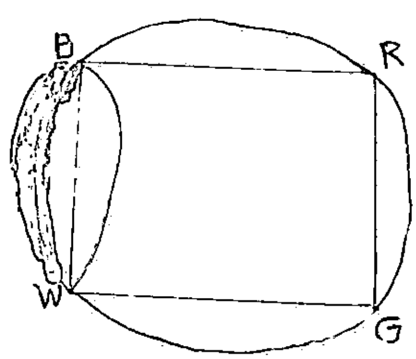
2. Sebuah graph bagian dari suatu graph bagian G juga merupakan graph bagian dari G.
3. Sebuah titik tunggal dalam sebuah graph G adalah graph bagian dari G
4. Sebuah sisi yang tunggal di G, beserta titik-titik ujungnya, juga merupakan graph bagian dari G.

<u>Definisi 2-3</u>

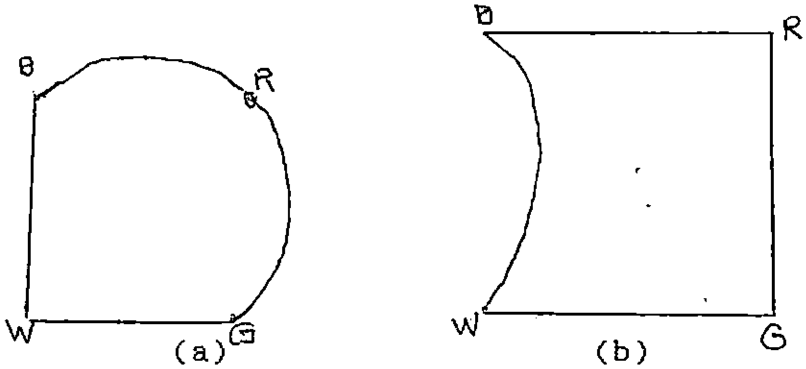
Dua graph bagian g_1 dan g_2 dari graph G dikatakan disjoint jika g_1 dan g_2 tidak memiliki sisi persekutuan.

Dua graph bagian g_1 dan g_2 dari graph G dikatakan disjoint titik jika g_1 dan g_2 tidak memiliki titik-persekutuan.

Dari definisi diatas, jelaslah bahwa graph yang tidak memiliki titik persekutuan tentu tidak memiliki sisi persekutuan. Graph pada gambar 2-7(a) dan (b) adalah graph bagian yang disjoint sisi dari graph dalam gambar 2-6.



Gambar 2-6 Graph dengan 8 sisi dan 4 titik.



Gambar 2-7 Dua graph bagian yang disjoint sisi dari graph 2-6

2-4 Perjalanan (Walks), Lintasan (Path) dan Sirkuit.

Sebuah <u>perjalanan</u> (walks) adalah rentetan secara bergantian dari titik-tititk dan garis-garis yang banyaknya berhingga, diawali dan diakhiri oleh titik-titik sedemikian sehingga setiap sisi bertemu dengan sisi yang terdahulu dan titik yang mengikuti sisi tersebut. Tidak ada sisi yang dilalui lebih dari satu kali.

<u>Titik Ujung</u> dari sebuah perjalanan adalah titik dimana perjalanan itu dimulai dan diakhiri.

<u>Perjalanan Tertutup</u> adalah perjalanan diawalai dan diakhiri pada titik yang sama.

<u>Perjalanan buka</u> adalah perjalanan yang titik awal dan titik akhirnya berbeda

<u>Lintasan</u> (Path) adalah suatu perjalanan buka dimana tidak ada titik yang diulang lebih dari satu kali.

<u>Panjang Lintasan</u> adalah banyaknya sisi yang dilalui dalam suatu lintasan.

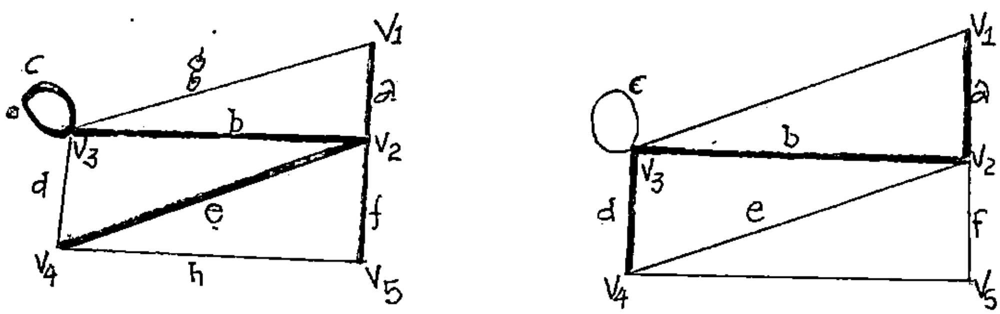
<u>Sirkuit</u> adalah sebuah perjalanan tertutup dimana tidak ada

titik yang diulang lebih sekali kecuali titik ujung.

Dalam gambar 2-8(a), v_1 a v_2 b v_3 c v_3 d v_4 e v_2 f v_5 adalah sebuah perjalanan yang ditunjukkan oleh garis tebal. Himpunan dari titik-titik dan sisi-sisi yang membentuk suatu perjalanan jelas merupakan graph bagian dari G.

Titik v_1 dan v_5 pada gambar 2-8(a) adalah contoh dari titik ujung. Dan pada gambar itu juga v_1 a v_2 b v_3 d v_4 merupakan sebuah lintasan sedangkan v_1 a v_2 b v_3 c v_3 d v_4 e v_2 f v_5 bukan merupakan sebuah lintasan. Dengan kata lain sebuah lintasan tidak memotong dirinya sendiri.

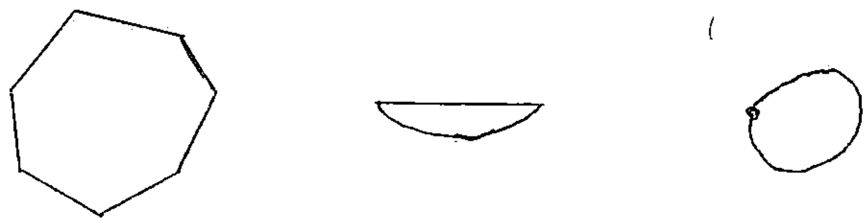
Titik-titik ujung sebuah lintasan berderajat satu sedangkan titik lainnya berderajat dua. Derajat ini tentunya hanya dihitung dengan memandang sisi-sisi yang terdapat dalam lintasan tersebut dan tidak titik-titik dikeseluruhan graph dimana lintasan bisa dibuat.



(a)Perjalanan buka (b) Lintasan dengan panjang tiga

Gambar 2-8 Perjalanan dan Lintasan

Dalam gambar 2-8 (a) v_2 b v_3 d v_4 e v_2 merupakan sebuah sirkuit. Tiga sirkuit yang berbeda ditunjukkan dalam gambar 2-9. Jelaslah setiap titik dalam sebuah sirkuit berderajat dua, tetapi jika sirkuit tersebut merupakan graph bagian dari graph yang lain, maka menghitung derajat titik tersebut tentunya hanya berdasarkan pada sisi dalam sirkuit tersebut.



Gambar 2-9 Tiga Sirkuit yang berbeda.

Berikut ini adalah hubungan skematika terhadap konsep yang telah dipelajari dalam bagian ini.

Grap bagian dari g

Perjalanan di G

Lintasan di G

Sirkuit di G

Gambar 2-10 Perjalanan, Lintasan dan Sirkuit sebuah graph bagian

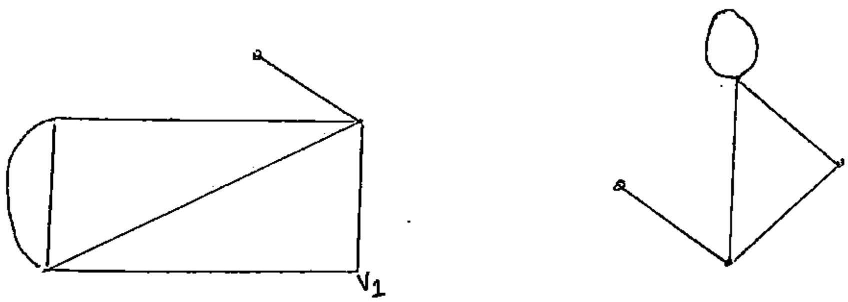
2-5 Graph Terhubung (Connected), Tak Terhubung (disconnected) dan komponen.

Definisi 2-5

Suatu graph g adalah terhubung jika ada minimal satu lintasan (path) antara sepasang

Suatu graph G adalah tak terhubung jika tidak memenuhi syarat-syarat terhubung.

Graph pada gambar 2-8(a) adalah terhubung tetapi graph pada gambar 2-11 adalah tak terhubung. Graph yang tak terhubung jelas mempunyai dua atau lebih graph yang terhubung. Masing-masing graph bagian yang terhubung tersebut dinamakan komponen. Graph pada gambar 2-11 terdiri dari dua komponen.



Gambar 2-11. Graph tak terhubung dengan dua komponon

Teorema 2-1

Sebuah graph G = (V, E) tak terhubung jika dan hanya jika himpunan titik-titik V dapat dipartisikan dalam dua himpunan bagian v_1 dan v_2 yang saling lepas.
Demikian sehingga tidak ada sisi di G yang satu titik ujungnya di v_1 dan lainnya di v_2

Teorema 2-2

Jika sebuah graph (terhubung atau tidak terhubung) mempunyai tepat dua titik yang berderajat ganjil maka pasti ada sebuah lintasan yang menghubungkan dua titik tersebut.

Teorema 2-3

Sebuah graph sederhana dengan n titik dan k komponen mempunyai paling banyak (n - k)(n - k + 1)/2 sisi.

Bukti : Misalkan banyaknya titik disetiap komponen k dari graph G adalah $n_1, n_2, \ldots n_k$, maka $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ dimana $n_i \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)\right)^2 = n^2 - 2nk + k^2$$

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i^2 - 2n_i) + k + \text{bil. tidak negatif} = n^2 - 2nk + k^2$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leqslant n^2 + k^2 - 2nk - k + 2n$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leqslant n^2 - (k - 1)(2n - k) \ldots\ldots\ldots\ldots *$$

Banyak maksimum sisi dalam komponen ke i dari G (yang mana adalah graph tersambung sederhana) adalah $1/2\, n_i(n_i - 1)$. Karena itu banyak maksimum sisi di G adalah

$$1/2 \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)n_i = 1/2 \sum_{i=1}^{k} n_i^2 - 1/2\, n$$

$$\leq 1/2\, [\, n^2 - (k - 1)(2n - k)] - 1/2\, n$$

$$\leq 1/2\, n\, (n - k)(\, n - k + 1)$$

2.6 Graph Euler

Sebagaimana yang telah disebutkan pada bab I,teori graph dilahirkan oleh Euler tahun 1736 melalui masalah jembatan Konigsberg. Dalam waktu yang sama Euler menjanjikan dan menyelesaikan masalah yang lebih umum: Dalam hal yang bagaimanakah grafik G dapat dibuat suatu perjalanan tertutup melalui setiap sisi tepat sekali ?. Perjalanan (walk) yang seperti itu disebut **garis Euler** dan Graph yang memuat garis Euler disebut **Graph Euler.**

Defenisi 2.6

Garis Euler adalah suatu perjalanan tertutup dalam sebuah graph yang memuat seluruh sisi-sisi graph tersebut. Graph yang demikian dinamakan Graph Euler.

Berikut ini adalah teorema yang memungkinkan kita untuk mengatakan dengan segera apakah suatu graph merupakan graph euler atau tidak.

Teorema 2.4

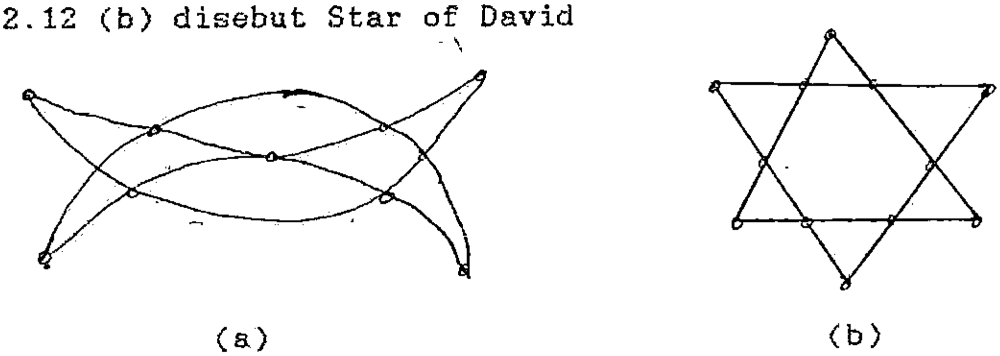
Suatu graph G yang terhubung merupakan Graph Euler jika dan hanya jika seluruh titik G berderajat genap.

asalah Jembatan Konigs Berg

Dengan melihat pada jembatan KonigsBerg (gambar 1.7) ditentukan bahwa tidak semua titik berderajat genap. Oleh sebab itu jembatan konigsberg tidak merupakan sebuah Graph

Euler. Jadi tidak mungkin untuk menelusuri setiap jalur tepat sekali dan kembali ke titik awal.

Garis Euler ini seringkali kita temukan dalam berbagai teka-teki. Dalam teka-teki tersebut kita disuruh untuk menelusuri suatu graph dengan pensil tanpa mengangkatnya dan mengulangi jalur yang pernah ditempuh sebelumnya. Dua gambar tersebut ditunjukan dalam gambar 2.12. Gambar 2.12 (a) disebut Scimitars Mohammed yang berasal dari Arab sedangkan gambar 2.12 (b) disebut Star of David

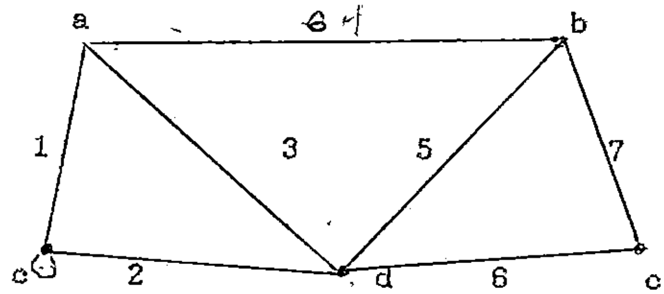


Gambar 2.12 Graph Euler

Defenisi 2.7

Garis Unicursal adalah sebuah perjalanan buka yang memuat seluruh sisi pada suatu graph. Graph yang memiliki garis unicursal disebut Graph Unicursal.

Karena Garis Unicursal adalah sebuah perjalanan buka maka sebarang sisi dalam garis tersebut tidak diulang lebih dari sekali. Suatu perjalanan 1c2d3a4b5d6e7b dalam gambar 2.13 adalah suatu garis Unicursal. Dengan menambahkan sebuah sisi antara titik awal dan titik akhir dalam sebuah garis Unicursal akan diperoleh sebuah garis Euler. Jadi sebuah graph yang terhubung adalah Unicursal jika dan hanya jika graph tersebut memiliki tepat dua titik yang berderajat ganjil. Generalisasi dari pernyataan ini dibuat oleh teorem berikut



Gambar 2-13 Graph Unicursal

Teorema 2-5

Dalam sebuah graph terhubung G dengan banyaknya titik yang berderajat ganjil adalah 2k, ada k graph bagian yang disjoint.

2.7. Operasi Pada Graph

Karena graph didefenisikan dalam batas-batas himpunan titik-titik dan sisi maka kita dapat menggunakan batasan himpunan untuk mendefenisikan operasi-operasi pada graph.

Definisi 2-8

Gabungan dari dua graph $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2; E_2)$ adalah Graph G_3 (ditulis $G_3 = G_1 \cup G_2$) yang memiliki himpunan

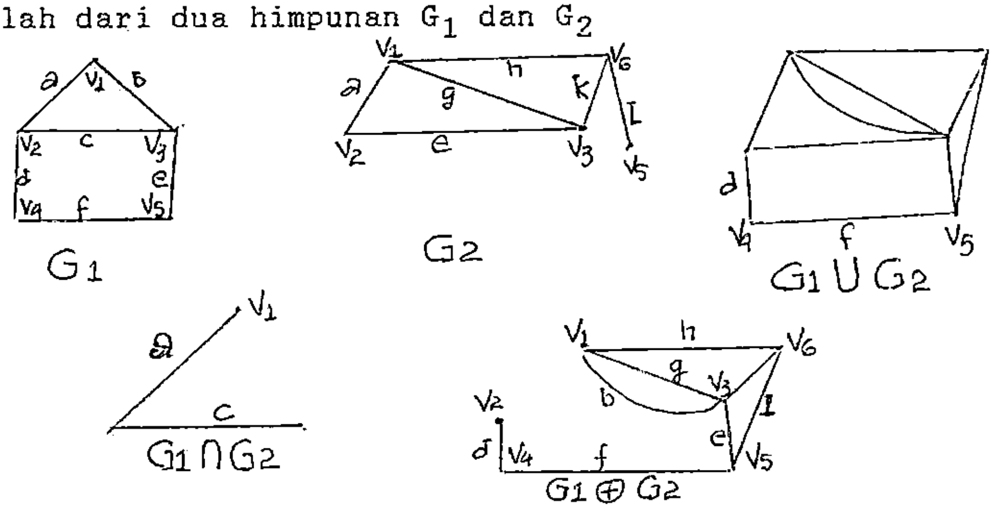
titik-titik $V_3 = V_1 \cup V_2$ dan himpunan sisi-sisi $E_3 = E_1 \cup E_2$.
<u>Irisan</u> G_1 dan G_2 (ditulis $G_4 = G_1 \cap G_2$) adalah sebuah graph G_4 yang memiliki titik-titik dan sisi-sisi yang berada di kedua graph G_1 dan G_2.
Jumlah dua Graph G_1' dan G_2 (ditulis $G_1 \oplus G_2$) adalah sebuah graph yang terdiri dari himpunan titik-titik $V_1 \cup V_2$ dan sisi-sisi yang berada di G_1 atau G_2 tetapi tidak pada kedua G_1 dan G_2.
Dari definisi 2-8 diperoleh :

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$$
$$G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$$
$$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$$

Jika G_1 dan G_2 disjoint sisi,maka $G_1 \cap G_2$ merupakan graph nol, dan $G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$.
Jika G_1 dan G_2 adalah disjoint titik, maka G_1 G_2 adalah kosong.Untuk sebarang graph G

$$G \cup G = G \quad G = G$$
$$G + G = \text{graph nol}$$

Gambar 2-14 adalah contoh dari operasi gabungan,irisan dan jumlah dari dua himpunan G_1 dan G_2



Gambar 2-14 Gabungan, Irisan dan Jumlah dari graph.

Definisi 2-9

Suatu graph G dikatakan dekomposisi kedalam dua graph bagian g_1 dan g_2, jika :

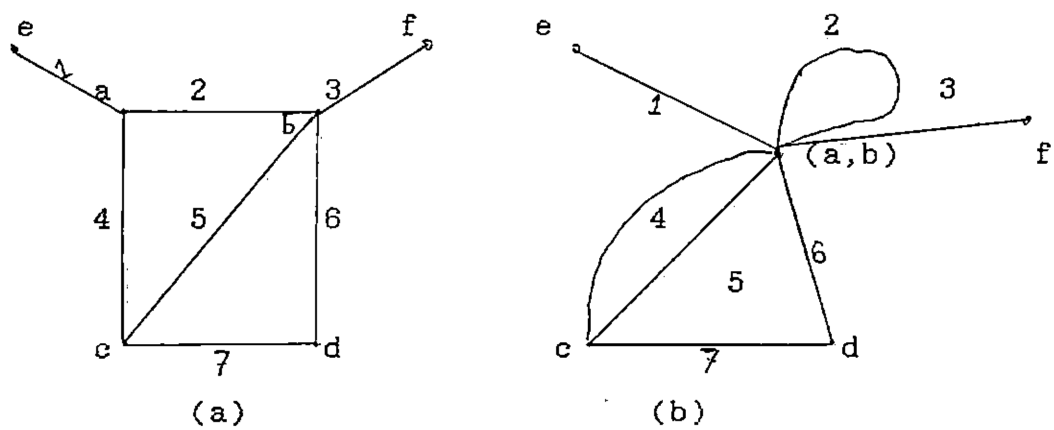
$$g_1 \cup g_2 = G$$

$$g_1 \cap g_2 = \text{graph nol.}$$

Sepasang titik a,b dalam sebuah graph dikatakan Fusi (fusion), jika dua titik digantikan dengan sebuah titik baru sedemikian sehingga setiap sisi yang insiden pada a atau b atau pada kedua-duanya juga insiden pada titik-titik baru tersebut.

Sebuah graph yang memuat m sisi dapat dikomposisikan dalam $2^{m-1} - 1$ pasang graph bagian g_1, g_2 yang berbeda.

Dengan fusi dua titik tidaklah merubah banyaknya sisi, tetapi mengurangi banyaknya titik sebanyak 1.



Gambar 2-15 : Fusi dua titik a dan b

Teorema 2-6

Sebuah graph terhubung G adalah sebuah graph euler, jika dan hanya jika G dapat dikomposisikan kedalam sirkuit-sirkuit.

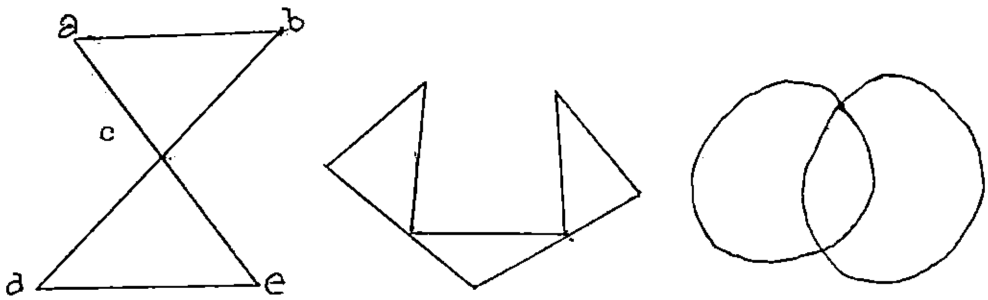
Bukti :

Misalkan graph G dapat dikomposisikan kedalam sirkuit-sirkuit, yaitu G adalah sebagai gabungan sirkuit-sirkuit yang disjoint sisi. Karena derajat setiap titik dalam sebuah sirkuit adalah dua, maka derajat setiap titik di G adalah genap, oleh karena itu G adalah graph Euler.

Sebaliknya jika G adalah sebuah graph Euler, misalnya $V_1 \in G$ maka sekurang-kurangnya dua sisi insident di V_1. Andaikan satu dari sisi-sisi ini menghubungkan V_1 dan V_2

Karena V_2 juga berderajat genap maka sekurang-kurangnya ada sisi lain lagi. Misalnya sisi tersebut menghubungkan V_2 dan V_3. Lanjutkan model ini, akhirnya kita sampai pada sebuah titik yang telah dilalui sebelumnya dan oleh karena itu membentuk sebuah sirkuit Γ. Pindahkan Γ dari G dan seluruh titik yang tinggal di G harus juga berderajat genap. Dari titik-titik sisanya tadi dipindahkan pula sirkuit yang lain persis dengan cara yang sama sebagaimana memindahkan Γ dari G. Lanjutkan proses ini sampai tidak ada sisi yang tinggal.

Perhatikan gambar 2-16 (a) yang mana adalah graph Euler. Andaikan kita jelajahi mulai dari titik a dan melalui lintasan a,b,c. Saat di c ada tiga pilihan yaitu ke a, d dan e. Jika dipilih ke a akan terbentuk sirkuit yang bukan garis Euler. Jadi dengan memulai dari a kita tidak dapat menjela-



(a) (b) (b)

Gambar 2-16

hi keseluruh garis Euler sepanjang sisi-sisi yang belum pernah dilalui sebelumnya.

Sifat apakah yang harus dimiliki oleh sebuah titik V dalam sebuah graph Euler sedemikian sehingga sebuah garis Euler selalu dapat diperoleh bila seseorang menjelajahi sebarang perjalanan dengan bebas memilih jalur mana yang diikuti asalkan belum ditempuh sebelumnya. Graph tersebut dinamakan graph yang dapat ditelusuri dari mana saja mulai dari titik V (arbitararily traceable graph from vertex V). Gambar 2-16(a) adalah graph yang dapat ditelusuri dari mana saja yang dimulai dari titik C, tetapi tidak untuk titik yang lain. Sedangkan graph Euler pada gambar 2-16 (b) tidak dapat ditelusuri dari titik manapun dan gambar 2-16 (c) dapat ditelusuri dari titik manapun.

Teorema 2.7

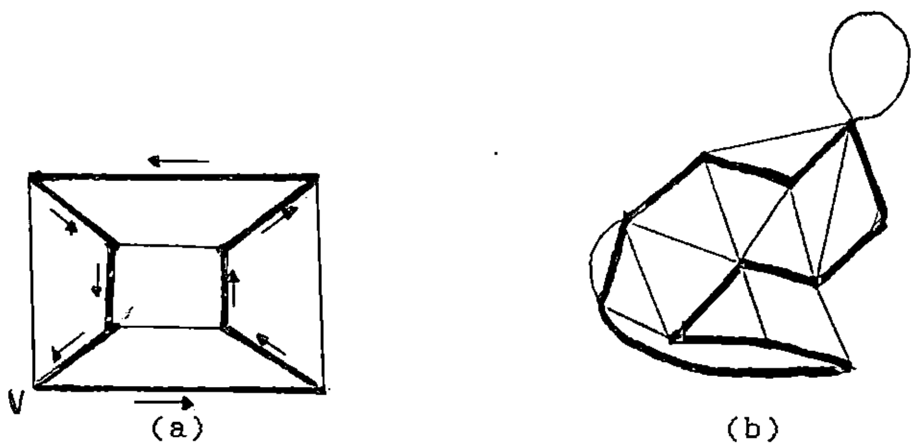
Sebuah graph Euler G adalah dapat ditelusuri dari titik V jika dan hanya jika setiap sirkuit di G memuat titik V

2-8 Sirkuit dan Lintasan Hamilton

Definisi 2-10

<u>Sirkuit Hamilton</u> dalam sebuah graph terhubung adalah sebuah perjalanan tertutup yang melalui setiap titik di G tepat satu kali, kecuali titik awal.

Pada gambar 2-17 (a), jika kita menelusuri sepanjang sisi-sisi bergaris tebal dengan dimulai di titik v kita akan memiliki sebuah sirkuit hamilton . Begitu juga pada gambar 2-17(b) sirkuit hamilton dilukis dengan garis tebal.

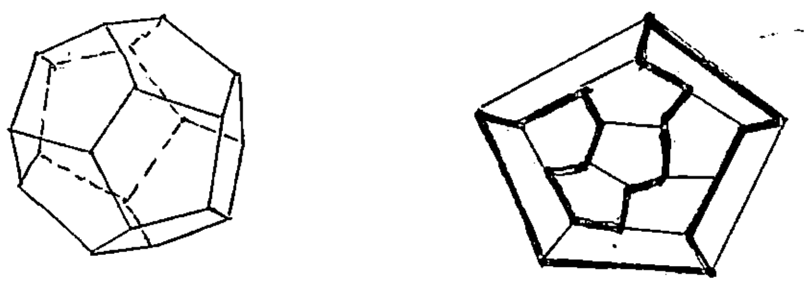


Gambar 2-17 Sirkuit Hamilton

Sebuah sirkuit dalam graph terhubung G dikatakan Hamilton jika sirkuit tersebut meliputi setiap titik di G. Oleh karena itu sebuah sirkuit Hamilton dalam sebuah graph dengan n titik terdiri dari n sisi.

Ahli matematika terkenal Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1859 telah membuat bidang banyak beraturan dari kayu,masing-masing dari 20 sudutnya diberi nama sebuah kota. Teka tekinya adalah mencari jalur yang melalui setiap kota tersebut tepat satu kali dan kembali pada tempat mula-mula berangkat.

Graph dari bidang tersebut diberikan pada gambar 2-18(b) dan satu dari sekian banyaknya jalur (sirkuit Hamilton) yang mungkin, ditunjukkan oleh garis tebal.



(a) (b)

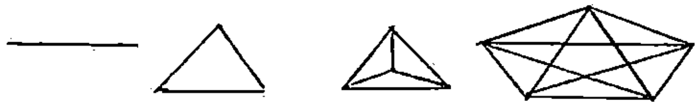
Gambar 2-18 Graph tanpa Sirkuit Hamilton

Jika dihilangkan sebarang satu sisi dari sirkuit hamilton, maka akan terjadi sebuah lintasan. Lintasan ini disebut lintasan hamilton. Jika setiap yang memiliki sirkuit hamilton juga memiliki lintasan hamilton. Panjang dari sebuah lintasan hamilton (jika ada) dalam sebuah graph terhubung n titik adalah n-1

Definisi 2-11

Sebuah graph sederhana disebut graph lengkap (comlete graph) jika setiap pasang titik dihubungi oleh sebuah garis.

Graph lengkap bertitik dua, tiga, empat dam lima digambarkan dalam gambar 2-19. Graph lengkap sering kali disebut graph universal. Derajat setiap titik dalam graph lengkap G adalah n-1 dan banyaknya sisi adalah n(n-1)/2.



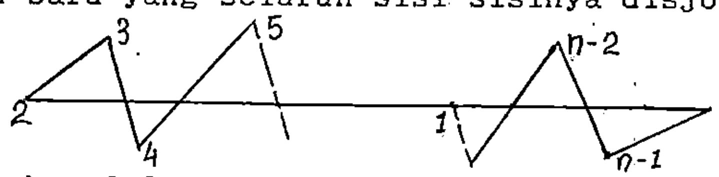
Gambar 2.19

Teorema 2-8

Dalam sebuah graph lengkap dengan n titik ada (n-1)/2 sirkuit hamilton yang disjoint sisi, jika n $\geq$ 3 dan n bilangan ganjil.

Bukti: Graph lengkap G dengan n titik memiliki n(n-1)/2 sisi dan sebuah sirkuit hamilton di G terdiri dari n sisi. Oleh karena itu banyak sirkuit hamilton disjoint sisi di G tidak lebih dari (n-1)/2. Untuk menunjukkan ada (n-1)/2 sirkuit hamilton disjoint sisi dengan n ganjil ditunjukkan seperti gambar berikut.

Graph bagian dalam gambar 2-20 adalah sirkuit hamilton. Pertahankan titik-titiknya tetap (konstan) pada sebuah lingkaran, rotasikan segi banyak tersebut berlawanan arah jarum jam dengan sudut putaran 360/(n-1), 2.360/(n-1), 3.360/(n-1)..., (n-3)/2.360/(n-1) derajat. Setiap rotasi tersebut akan membentuk sebuah sirkuit yang tidak memiliki sisi persekutuan dengan yang sebelumnya. Jadi kita mempunyai (n-3)/2 sirkuit hamilton baru yang seluruh sisi-sisinya disjoint.



Gambar 2-20 Sirkuit Hamilton, n ganjil.

Teorema ini memungkinkan kita menyelesaikan masalah tempat duduk pada bab I. dengan melambangkan setiap anggota x dengan sebuah titik dan kemungkinan tempat duduknya disebelah anggota yang lain dengan sebuah garis antara x dan y, terjadilah sebuah graph G. Karena setiap anggota dibolehkan duduk disebelah anggota yang lain, maka G merupakan graph lengkap dengan 9 titik. Sembilan mengatakan banyaknya orang-orang yang duduk disekeliling meja. Setiap susunan tempat duduk disekeliling meja membentuk sebuah sirkuit hamilton.

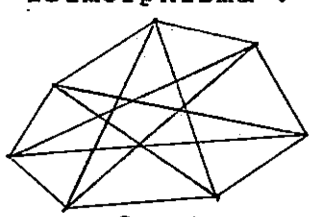
Hari pertama pertemuan mereka duduk dalam sebarang urutan, dan akan membentuk sebuah sirkuit hamilton H_1. hari kedua, jika mereka dengan cara yang, setiap anggota harus memiliki teman sebelah yang berbeda maka mereka harus menemukan sirkuit hamilton lain H_2 di G, dengan seluruh sisinya berbeda dengan H_1 atau H_1 dan H_2 disjoint sisi.

<u>Teorema 2-9</u>

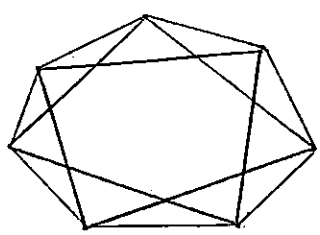
Syarat cukup bagi graph sederhana G, memiliki sebuah sirkuit Hamilton adalah derajat titik tersebut di G sekurang-kurangnya n/2 dengan n banyaknya titik di G.

Soal-soal

1 Tunjukan bahwa dua graph pada gambar 2-21 (a) dan (b) isimorphisma !



a



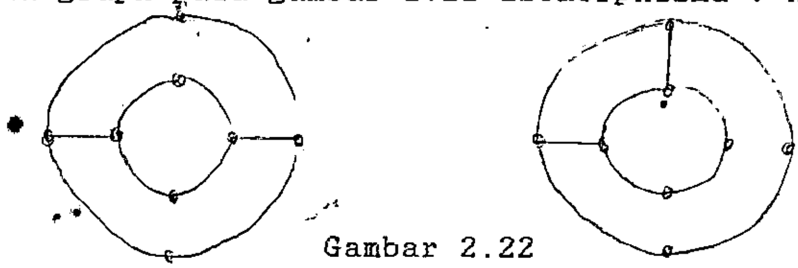
b

Gambar 2-21

2. Buatlah tiga contoh untuk menunjukan syarat 1,2 dan 8 dalam bagian 2.1 adalah tidak cukup untuk isomorphisma antara graph.

3. Buktikan sebarang dua graph terhubung dengan n titik, seluruhnya berderajad dua, adalah isomorphisma.

4. Apakah dua graph pada gambar 2.22 isomorphisma ? Mengapa ?



Gambar 2.22

5. Buktikan teorema 2-1

6. Buktikan teorema 2-2

7. Buktikan teorema 2-4

8. Buktikan bahwa graph sederhana dengan n titik harus terhubung jika graph tersebut memiliki lebih dari $[(n-1)(n-2)]/2$ sisi (gunakan teorema 2-3).

9. Buktikan bahwa jika sebuah graph terhubung G di komposisikan ke dalam dua graph bagian g_1 dan g_2 maka ada sekurang-kurangnya satu titik persekutuan anatara g_1 dan g_2.

10. Buktikan bahwa sebuah graph terhubung G tetap terhubung setelah diambil sebuah sisi e_i di G, jika dan hanya jika e_i berada dalam suatu sirkuit di G.

11. Gambarlah sebuah graph terhubung yang menjadi tak terhubung bila sebarang satu sisinya diambil.

12. Buktikan bahwa sebuah graph dengan n titik yang memenuhi kondisi soal 11 adalah (a) sederhana (b) mempunyai tepat n-1 sisi.

13. Buatlah seluruh lintasan yang berbeda antara titik 5 dan 6 pada gambar 2-5(a). Carilah panjang masing-masingnya.

14. Kelompokan lintasan-lintasan yang terdapat pada soal 13 ke dalam himpunan-himpunan lintasan yang disjoint sisi. Tunjukan bahwa gabungan dua lintasan disjoint sisi antara sepasang titik membentuk sirkuit.
15. Dalam sebuah graph G jika p_1 dan p_2 dua lintasan yang berbeda antara dua titik, buktikan bahwa $p_1 + p_2$ adalah sebuah sirkuit atau himpunan sirkuit-sirkuit di G.
16. Jika a,b;,dan c adalah tiga titik yang berbeda dalam sebuah graph. Disana ada lintasan antara a dan b dan juga lintasan antara b dan c. Buktikan bahwa ada lintasan antara a dan c.
17. Jika irisan dua lintasan merupakan graph terhubung, tunjukan bahwa gabungan dua lintasan memiliki sekurang-kurangnya satu sirkuit.

BAB III

POHON (TREE)

Konsep pohon adalah sangat penting dalam teori graph, khususnya untuk bidang-bidang penerapannya. Pohon sangat bermanfaat dalam menguraikan sesuatu struktur yang melibatkan hirarki (tingkatan). Contoh yang sederhana seperti silsilah keturunan seseorang dalam suatu famili dan hirarki posisi dalam sebuah organisasi dan lain-lain.

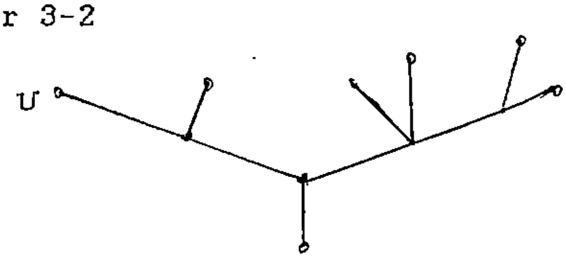
Bagian awal bab ini akan mambahas tentang pohon dan sifat-sifatnya dan bagian akhir akan memperkenalkan pohon pembangkit (spanning tree) dan keterkaitan antara sirkuit, pohon dalam sebuah graph.

3.1 Pohon (Tree)

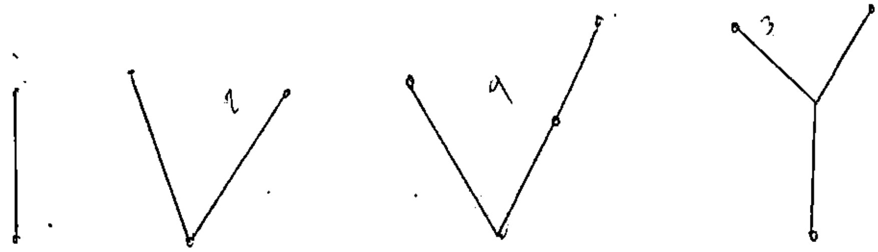
Definisi 3-1

Pohon adalah sebuah graph terhubung tanpa sirkuit.

Dari definisi diatas jelas bahwa sebuah pohon harus merupakan graph sederhana, yaitu tidak memiliki loop atau sisi paralel (karena kedua-duanya membentuk sirkuit). Gambar 3-1, adalah contoh sebuah pohon. Pohon dengan dua, tiga dan empat titik tertera pada gambar 3-2

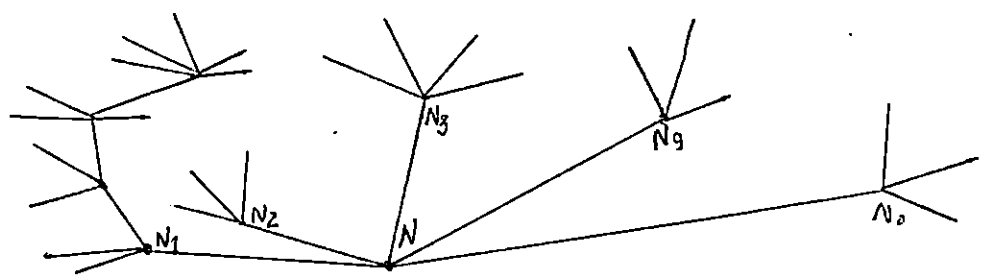


Gambar 3-1



Gambar 3-2 Pohon dengan satu, dua, tiga dan empat titik.

Sebuah sungai dengan anak-anak sungai dapat disajikan dengan pohon. Pengiriman surat sesuai dengan kode pos dapat dikerjakan dengan menggunakan pohon. Gambar 3-3 menyajikan pendistribusian surat ke alamat masing-masing. Seluruh surat sampai pada kantor N dan kode pos surat tersebut dibaca dan dibagikan ke 10 cabang N_1 , N_2 , , N_9 , N_0 , tergantung kode pos masing-masing. Sampai di cabang N_i dibagikan lagi sesuai dengan nomor kode pos dan begitu seterusnya.



Gambar 3-3 Pohon pendistribusian surat

3-2. Sifat-sifat Pohon

Teorema 3-1

Ada satu dan hanya satu lintasan antara setiap pasang titik di dalam sebuah pohon T

Bukti:

Karena T graph terhubung, maka harus ada sekurang-kurangnya satu lintasan antara setiap pasang titik di T. Sekarang anggaplah bahwa antara dua titik a dan b di T ada dua lintasan yang berbeda. Gabungan dua lintasan ini akan memuat sebuah sirkuit dan T tidak merupakan sebuah pohon.

Teorema 3-2

Jika dalam graph G ada satu dan hanya satu lintasan antara setiap pasang titik, G adalah sebuah pohon.

Bukti:

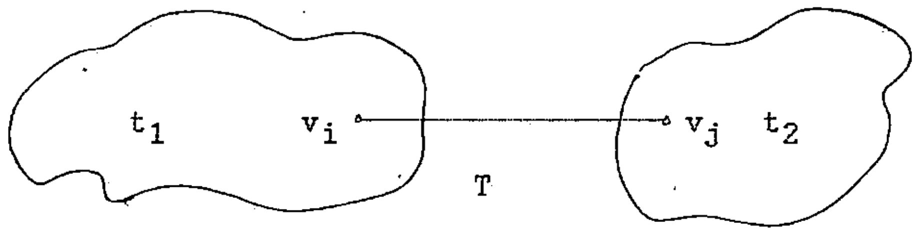
Keberadaan sebuah lintasan antara setiap pasang titik menjamin bahwa G terhubung. Sebuah sirkuit dalam suatu graph (dengan dua atau lebih) mengakibatkan sekurang-kurangnya ada sepasang titik a dan b yang dihubungkan oleh dua lintasan yang berbeda dari a ke b. Karena G memiliki satu dan hanya satu lintasan antara setiap pasang titik, G tidak memiliki sirkuit. Karena itu G adalah pohon.

Teorama 3-3

Sebuah pohon dengan n titik mempunyai n-1 sisi

Bukti:

Teorema tersebut akan dibuktikan melalui induksi pada sejumlah titik-titik. Teorema diatas jelas berlaku untuk n=1,2, dan 3 (lihat gambar 3-2). Anggaplah bahwa teorema tersebut memenuhi untuk seluruh pohon yang bertitik kecil dari n. Dalam T, misalkan e_k adalah sebuah sisi dengan titik-titik ujungnya v_i dan v_j. Menurut teorema 3-1, tidak ada lintasan lain antara v_i dan v_j kecuali e_k. Karena itu dengan membuang e_k dari T akan terjadi graph tak terhubung seperti gambar 3-4



Gambar 3-4 Pohon dengan n titik

Selanjutnya $T-e_k$ terdiri dari tepat dua komponen dengan tidak ada sirkuit di T. Setiap komponen tersebut tentu merupakan sebuah pohon. Kedua pohon t_1 dan t_2 ini memiliki sisi yang kecil dari n masing-masingnya dan karena itu melalui hipotesis induksi masing-masing pohon tersebut berisi n-1 sisi. Jadi $T-e_k$ terdiri dari n-2 sisi. dengan menambahkan satu sisi e_k jumlah sisi dengan n titik adalah n-1.

Teorema 3-4

Graph terhubung dengan n titik dan n-1 sisi adalah sebuah pohon.

Bukti:

Bukti teorema ini ditinggalkan bagi pembaca sebagai latihan.

Definisi 3-2

Sebuah graph terhubung disebut terhubung minimum jika dibuang sebarang satu sisi dari graph tersebut akan membentuk graph tak terhubung.

Teorema 3-5

Sebuah graph adalah pohon jika dan hanya jika graph tersebut terhubung minimum.

Bukti:

Misal G adalah graph terhubung minimum, berarti dibuang sebarang satu sisinya, G akan membentuk graph tak terhubung.

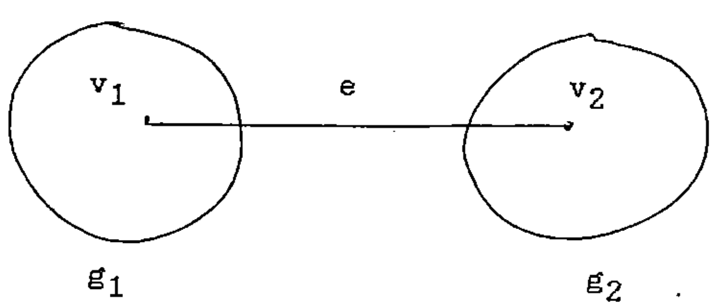
Dengan arti kata G tak mempunyai sirkuit atau G adalah pohon. Sebaliknya andaikan G graph terhubung tak minimal, maka harus ada sebuah sisi e_i di G sedemikian sehingga G-e_i terhubung. Oleh karena itu e_i berada dalam suatu sirkuit, atau G tidak merupakan pohon.

Teorema 3-6

Graph G dengan n titik, n-1 sisi dan tidak ada sirkuit adalah terhubung.

Bukti:

Andaikan ada G tanpa sirkuit yang tak terhubung dengan n titik. Dalam hal ini tentu G terdiri dari beberapa komponen. Andaikan terdiri dari komponen g_1 dan g_2. Tambahkan sebuah sisi e antara titik v_1 di g_1 dan v_2 di g_2 (Gambar 3-5). Karena tidak ada lintasan antara v_1 dan v_2 di G, dengan menambahkan e tidaklah membentuk sebuah sirkuit. Jadi G U e adalah graph tanpa sirkuit yang terhubung dengan n titik dan n sisi yang mana kontradiksi dengan jumlah sisinya n-1 sisi.



Gambar 3-5 Sisi e ditambahkan ke G = g_1 U g_2

Keenam teorema yang telah disebutkan diatas dapat diringkas dengan mengatakan bahwa berikut ini adalah 5 definisi pohon yang setara. Sebuah graph G dengan n titik disebut pohon jika :

1. G terhubung dan tanpa sirkuit, atau

2. G terhubung dan memiliki n-1 sisi, atau

3. G tanpa sirkuit dan memiliki n-1 sisi. atau

4. Ada tepat satu lintasan antara setiap pasang titik di G, atau

5. G adalah graph terhubung minimal.

Setiap pohon memiliki beberapa titik pendant (yaitu titik yang berderajad satu). Berapa banyaknya titik pendant dalam sebuah pohon dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3-7

Dalam sebarang pohon T (dengan dua atau lebih titik) ada sekurang-kurangnya dua titik pendant.

Bukti:

Dari teorema 3-3 diketahui bahwa banyaknya sisi pohon T dengan n titik adalah n-1. Jadi seandainya $x_i \in T$ maka

$d(x_1)+d(x_2)+\dots\dots\dots+d(x_n) = 2(n-1)$ .....*

Karena tidak ada yang berderajad nol maka sekurang-kurangnya ada dua titik yang berderajad satu atau sekurang-kurangnya ada dua titik pendant di T.

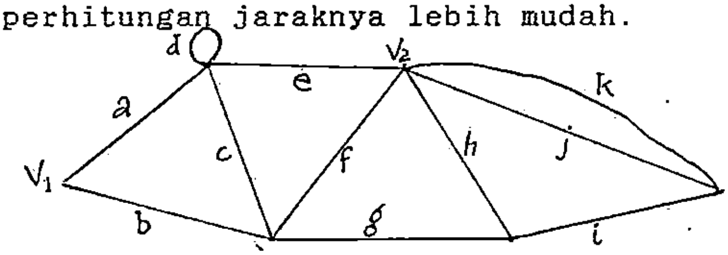
3-3. Jarak Dan Pusat Pohon

Definisi 3-3

Dalam Graph terhubung G jarak $d(v_i,v_j)$ antara dua titik v_i dan v_j adalah panjang lintasan terpendek dari v_i dan v_j

Dalam gambar 3-6 beberapa lintasan dari V_1 sampai v_2 adalah (a,e), (a,c,f), (b,c,e), (b,f), (b,g,h), dan (b,g,i,k). Dari semua lintasan tersebut yang terpendek adalah dua sisi. Oleh karena itu $d(v_1,v_2) = 2$.

Dalam sebuah pohon, karena ada tepat satu lintasan antara dua titik, perhitungan jaraknya lebih mudah.



Gambar 3-6 Jarak Antara V_1 dan v_2

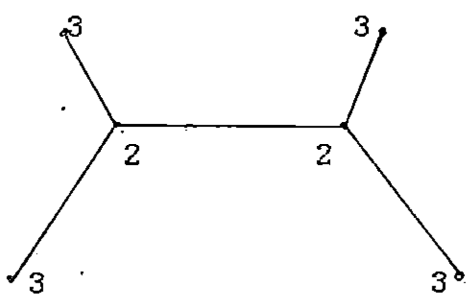
Definisi 3-4

Eksentrisitas E(v) sebuah titik v pada graph G adalah jarak dari v ke titik yang terjauh dari v, atau

$$E(v) = \max (d(v,v_i))$$

Pusat G adalah titik $v_i \in G$ yang eksentrisitasnya paling kecil.

Pada Gambar 3-7 eksentrisitas masing-masing titik ditulis disebelah titik tersebut. Pohon ini memiliki dua titik yang eksentrisitasnya sama. Oleh karena itu pohon ini memiliki dua pusat.



Gambar 3-7 Eksentrisitas titik sebuah pohon

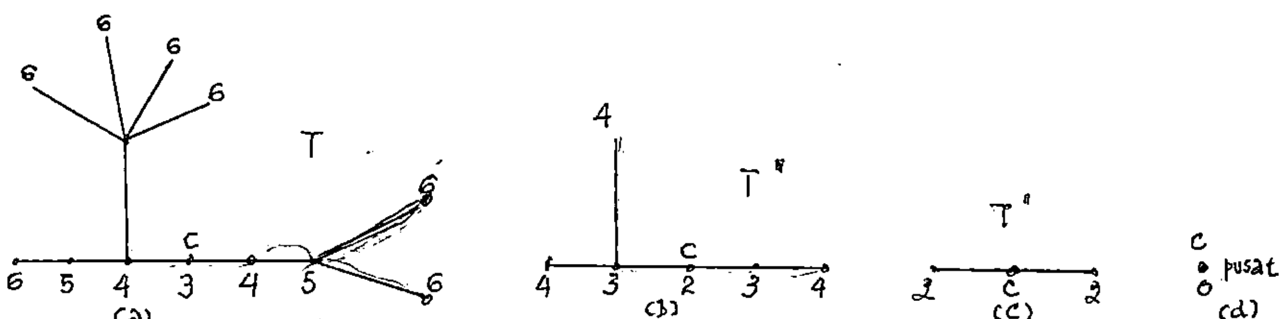
Teorema 3-9

Setiap pohon memiliki satu atau dua pusat.

Bukti:

Jarak maksimum, Max $d(v,v_i)$ dari suatu titik v terhadap titik v_i terjadi hanya jika v_i adalah titik pendant. Dengan pengamatan ini andaikan kita mulai dengan sebuah pohon T yang memiliki lebih dua titik. Menurut teorema 3-7 pohon tersebut harus mempunyai dua atau lebih titik pendant. Hilangkan seluruh titik pendant dari T. Hasilnya graph T' masih merupakan pohon. Bagaimana tentang eksentrisitas titik-titik di T' ? Dengan menghilangkan seluruh titik pendant dari T akan mengurangi eksentrisitas titik-titik di T' sebanyak satu. Karena itu seluruh titik-titik yang berperan sebagai pusat di T, akan tetap menjadi pusat juga di T'. Dari T' kita buang lagi seluruh titik pendantnya dan diperoleh pohon T''. Teruskan proses ini (seperti Gbr. 3-7) sampai tinggal sebuah titik (yang mana sebagai pusat T) atau sebuah sisi (yang titik-titik ujungnya adalah pusat T).

Dari teorema diatas jelas bahwa jika sebuah pohon T memiliki dua pusat, pusat-pusat tersebut haruslah adjacent.



Gambar 3-7 Menemukan Pusat Pohon

Penerapan tentang pusat suatu graph dapat dilihat dalam komunikasi diantara 14 peserta yang kondisinya seperti pada gambar 3-7(a), tiap peserta diwakili oleh sebuah titik dan hubungan komunikasi antara dua peserta ditunjukan oleh sisi. Karena graph tersebut terhubung, maka seluruh anggota dapat dicapai oleh sebarang peserta, baik secara langsung maupun melalui peserta lain. Eksentrisitas setiap titik, dalam hal ini, menunjukan betapa dekatnya seseorang dengan anggota yang terjauh. Dalam gambar

3-7(a), titik c seharusnya menjadi pemimpin group tersebut jika keterdekatan komunikasi menjadi kreteria untuk menjadi pemimpin.

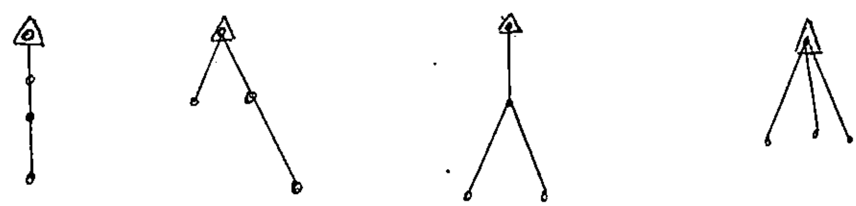
Definisi 3-5

Radius pohon adalah eksentrisitas dari titik pusatnya.

Diameter pohon adalah panjang lintasan yang maksimum.

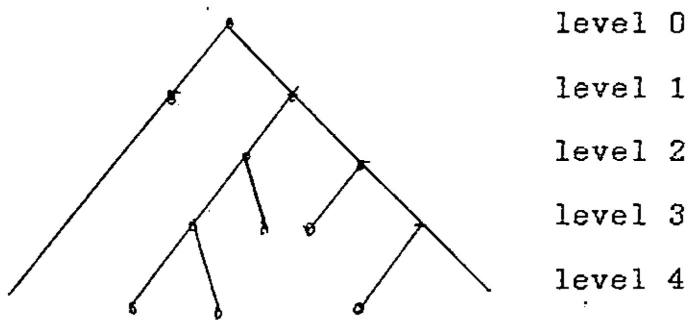
3-4 Akar Pohon dan Pohon Biner

Sebuah titik dalam suatu pohon disebut akar pohon jika ia dibedakan dengan seluruh titik-titik lainnya. Sebagai contoh pada gambar 3-3 titik N dibedakan dengan titik-titik lainnya. Oleh karena itu N dapat dianggap akar dari pohon tersebut. Dalam sebuah diagram pohon, akar tersebut akan digambar berbeda dengan titik lainnya yaitu dengan melingkungi titik tersebut dengan segitiga. Seluruh akar pohon dengan empat titik ditunjukan pada gambar 3-8.



Gambar 3-8 Akar Pohon dengan 4 titik

Hal khusus dari akar pohon disebut **akar pohon biner**. Pohon biner didefinisikan sebagai sebuah pohon dimana ada tepat satu titik yang berderajad dua dan sisanya berderajad satu atau tiga (Gambar 3-9).



Gambar 3-9 Tiga Belas titik pohon biner level 4

Karena titik yang berderajad dua berbeda dengan seluruh titik yang lain maka titik ini berfungsi sebagai sebuah akar. Jadi setiap pohon biner adalah akar pohon. Dari definisi pohon biner tersebut dapat dihasilkan dua sifat pohon biner, yaitu:

1. Banyaknya titik n dalam sebuah pohon biner selalu ganjil. Ini karena adanya tepat satu titik berderajad genap dan sisanya n-1 titik berderajad ganjil. Karena menurut teorema 1-1 banyaknya titik berderajad ganjil adalah genap maka n-1 adalah genap. Oleh karena itu n adalah ganjil.
2. Andaikan p adalah banyaknya titik pendant dalam pohon biner T, maka n-p-1 adalah banyaknya titik berderajad tiga. Karena itu banyaknya sisi dalam T sama dengan

$$1/2 \{p + 3(n-p-1)+2\} = n-1$$

$$p = (n+1)/2$$

Titik nonpendant dalam sebuah pohon disebut **titik internal**. Dari Persamaan diatas dapat disimpulkan banyaknya titik internal dalam pohon biner adalah satu kurangnya dari banyak titik pendant (mengapa ?). Dalam pohon biner sebuah titik v_i disebut berada pada level L_i jika v_i berada pada jarak L_i dari akar. Jadi akar berada pada level nol. Gambar 3-9 menunjukan 13 titik pada pohon biner berlevel 4. Banyaknya titik pada level 1,2,3 dan 4 berturut-turut adalah 2,2,4 dan 4.

Dalam pohon biner hanya ada satu titik (akar) pada level 0, paling banyak dua titik pada level 1, paling banyak 4 titik pada level 2 dan seterusnya. Karena itu banyak maksimum titik yang mungkin dalam pohon biner berlevel k adalah:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^k \geq n \quad \ldots\ldots(*)$$

Level maksimum, L_{max}, dari sebarang titik pada sebuah pohon biner disebut **tinggi pohon**.

Dari (*) diperoleh, dengan rumus jumlah deret ukur

$$2^{k+1} - 1 \geq n$$

$$2^{k+1} \geq (n + 1)$$

$$k + 1 \geq {}^{2}\log(n+1)$$

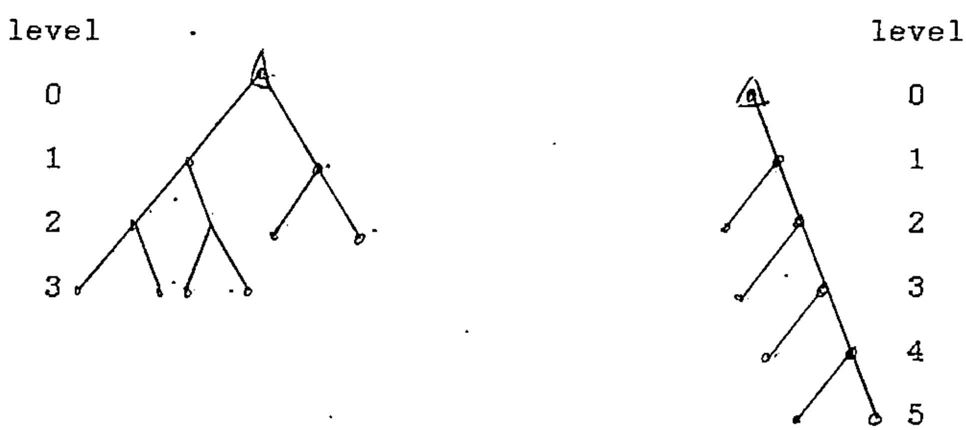
$$k \geq {}^{2}\log(n+1) - 1$$

$$\text{minimum } k = \text{Min } L_{maks} = [{}^{2}\log(n+1) - 1]$$

Untuk membangun pohon biner sehingga ada titik yang paling terjauh dari akar, maká haruslah setiap level mengandung tepat dua titik, kecuali level 0. Karena itu

$$\text{Maks } L_{maks} = (n-1)/2$$

Untuk n = 11, min L_{maks} dan maks L_{maks} dapat ditunjukan pada gambar 3-10 dibawah ini.



min L_{maks} = $[({}^{2}\log 12)-1]$ maks L_{maks} =(11-1)/2

(a) (b)

Gambar 3-10 Pohon Biner dengan 11 titik

Definisi 3-6

Panjang lintasan luar sebuah pohon adalah panjang lintasan dari akar ke seluruh titik pendant.

Pada gambar 3-9 panjang lintasan luar pohon tersebut adalah:

$1 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 = 23$

Panjang Lintasan Berbobot

Dalam penerapannya, setiap titik pendant v_j dari pohon biner dihubungkan dengan bilangan real positif w_j. Jika diketahui $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m$, masalahnya adalah bagaimana mengkonstruksi sebuah pohon biner (dengan m titik pendant) sehingga

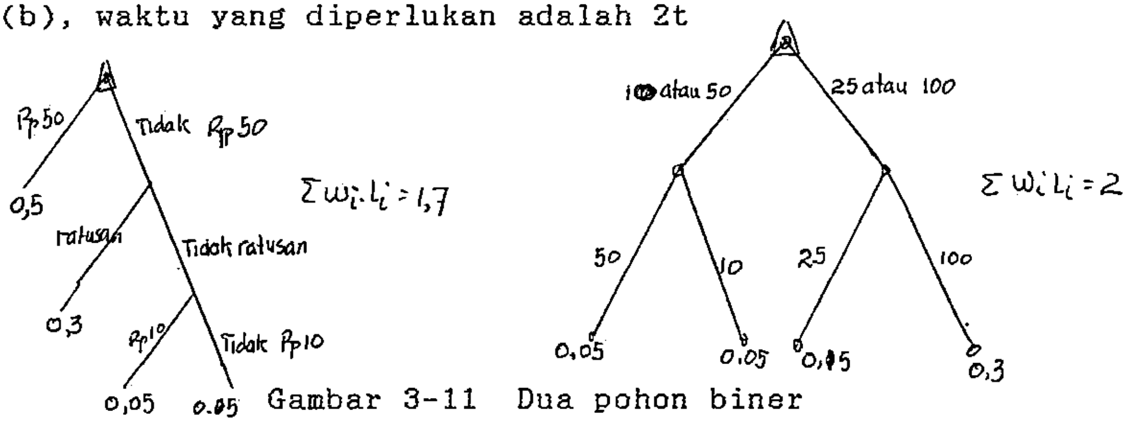
$$\sum w_j L_j \qquad \text{minimum, dengan } L_j \text{ adalah level titik}$$

pendant v_j, dan jumlah tersebut diambil untuk seluruh titik pendant. Sebagai contoh perhatikan ilustrasi berikut.

Sebuah mesin dibuat untuk memisahkan (melalui serentetan percobaan) mata uang logam yang dimasukan kedalam mesin tersebut. Hanya mata uang Rp.5, Rp.25, Rp.50 dan Rp.100 yang dapat lewat dalam mesin tersebut. Andaikan peluang mata uang Rp.5, Rp.25, Rp.50 dan Rp.100 berturut-turut 0,05, 0,15, 0,5, dan 0,30. Setiap percobaan menghasilkan pemisahan 4 jenis uang logam tersebut kedalam dua himpunan saling lepas dan meletakan mata uang yang tidak dikenal pada satu dari dua himpunan tersebut. Jadi untuk 4 mata uang ada $2^3 - 1$ percobaan. Jika waktu yang diperlukan untuk setiap percobaan adalah sama, reentetan percabaan manakah yang menghasilkan waktu terkecil untuk memisahkan mata uang tersebut ?

Pemecahan tersebut memerlukan konstruksi pohon biner dengan 4 titik pendant v_1, v_2, v_3 dan v_4 dengan bobotnya masing-masing w_1=0,05, w_2=0,15, w_3=0,5 dan w_4=0,3 sedemikian sehingga

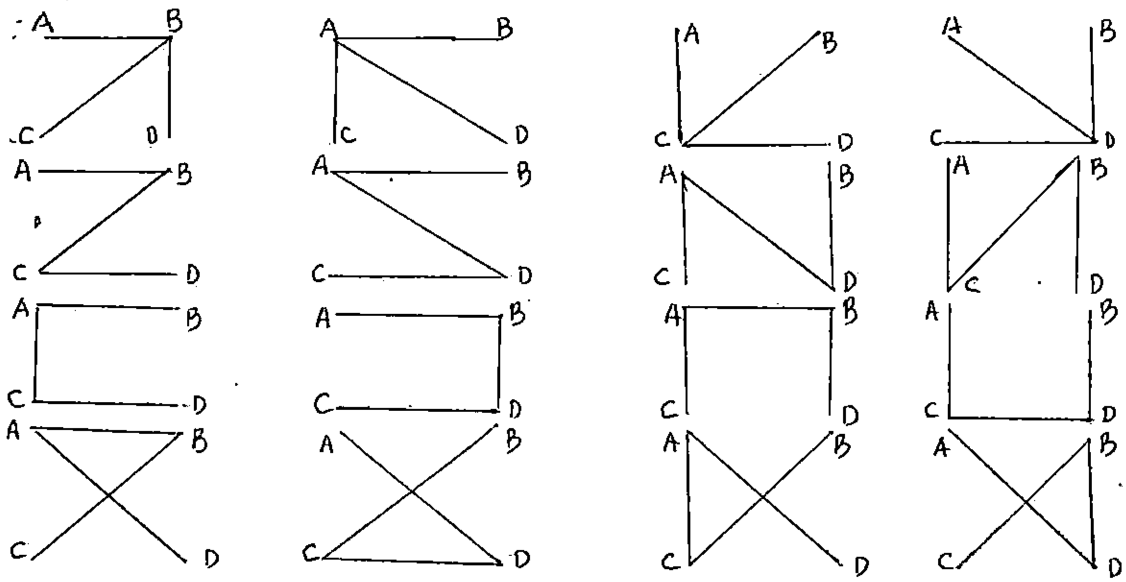
$\sum L_i \; w_i$ minimum. Pemecahan tersebut diberikan pada gambar 3-11(a) dengan waktu yang diharapkan adalah 1,7 t dengan t adalah waktu yang diperlukan setiap percobaan. Berbeda dengan gambar 3-11(b), waktu yang diperlukan adalah 2t



Gambar 3-11 Dua pohon biner

3.5 Menghitung Pohon

Pertanyaan tentang banyak pohon yang berbeda dapat dibentuk dengan n titik pertama kali diajukan oleh Arthur Cayley pada tahun 1857. Jika n=4 sebagai contoh, diperolah 16 pohon (Gambar 3-12).



Gambar 3-12 Enam Belas Pohon dari 4 titik

Sebuah graph, dimana setiap titik diberikan sebuah nama atau label yang khusus (tidak ada dua titik memiliki label yang sama) disebut **graph berlabel**. Perbedaan antara graph berlabel dan tak berlabel adalah sangat penting bila hendak menghitung banyaknya graph yang berbeda. Sebagai contoh empat graph baris pertama pada gambar 3-12 dihitung empat pohon yang berbeda (meskipun graph-graph tersebut isomorphisma) karena titik-titiknya berlabel. Jika tidak ada perbedaan antara A,B,C dan D, empat pohon ini dihitung satu macam. Jadi seandainya graph tersebut tidak berlabel maka banyaknya pohon yang terjadi adalah empat.

Teorema 3-10 (Teorema Cayley)

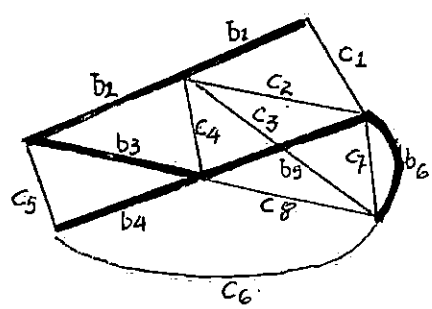
Banyaknya pohon berlabel dengan n titik ($n \geq 2$) adalah n^{n-2}

3.6 Pembangkit Pohon (Spanning Trees)

Definisi 3-7

Sebuah pohon T disebut pembangkit pohon graph terhubung G jika T merupakan graph bagian G dan T memuat seluruh titik-titik G.

Sebagai contoh graph bagian dengan garis tebal pada gambar 3-13 adalah pembangkit pohon. Pembangkit pohon merupakan pohon maksimum (dengan banyak sisinya maksimum) diantara seluruh pohon di G. Oleh karena itu pembangkit pohon disebut juga dengan pohon maksimum dari G.



Gambar 3-13 Pembangkit Pohon

Teorema 3-11

Setiap graph terhubung G memiliki sekurang-kurangnya satu pembangkit pohon.

Bukti:

Jika G memiliki sebuah sirkuit, buang sebuah sisi dari sirkuit tersebut dan graph yang terjadi tetap terhubung sekaligus sebagai pembangkit pohon. Jika G mengandung banyak sirkuit, ulangi operasi diatas sampai sebuah sisi dari sirkuit yang terakhir dibuang dan terjadilah graph terhubung tanpa sirkuit dan melalui semua titik di G. Graph yang terakhir ini membentuk pembangkit pohon.

Definisi 3-8

Sebuah sisi dalam sebuah pembangkit pohon T disebut **dahan** (branch). Sebuah sisi G yang tidak berada pada pembangkit pohon disebut **ranting** (chord).

Pada gambar 3-13 sisi b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 dan b_6 disebut **dahan** (branch) dari pembangkit pohon, sedangkan sisi-sisi c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 dan c_8 disebut ranting (chord). Dahan dan ranting yang didefinisikan diatas hanya memandang terhadap pembangkit pohon yang diketahui. Mungkin saja terjadi sebuah sisi menjadi dahan pada pohon T_1 dan ranting pada T_2.

Jika T adalah pembangkit pohon dan $\overline{T}$ adalah himpunan ranting-ranting dari sebuah graph terhubung G maka

$$T \cup \overline{T} = G$$

Teorema 3-12

Dengan memperhatikan terhadap sebarang pembangkit pohonnya, sebuah graph terhubung G dengan n titik dan e sisi memiliki n-1 dahan dan e-n+1 ranting.

Definisi 3-9

Jika n adalah banyak titik di G dan e banyaknya sisi di G dan k banyaknya komponen di G maka

Rank r = n - k

Kenolan (nulity) u = e - n + k

Dari definisi diatas jelas bahwa rank dari graph terhubung adalah n-1 dan kenolan e-n+1. Kalau dilihat definisi 3-9 tersebut dapat disimpulkan bahwa arti dari kedua istilah tersebut adalah :

Rank G = banyaknya dahan pada pembangkit pohon

Kenolan G = banyaknya ranting di G

Rank + Kenolan = banyak sisi di G

Teorema 3-13

Graph terhubung G adalah pohon jika dan hanya jika penambahan sebuah sisi antara sebarang dua titik di G membentuk tepat satu sirkuit.

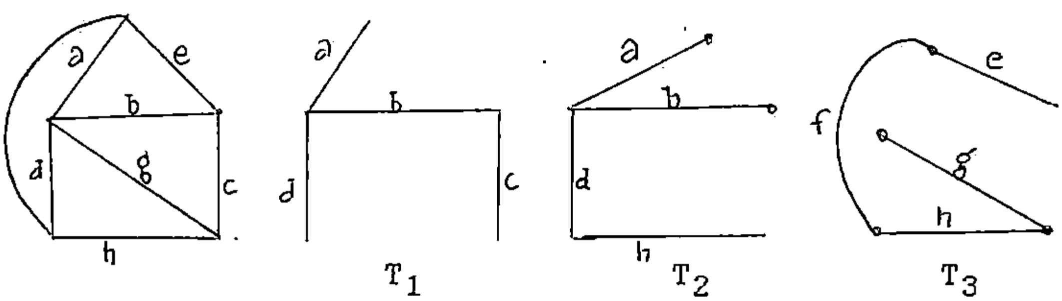
Bukti:

Andaikan G tersebut pohon. Dari sini kita peroleh bahwa untuk setiap pasang x_i dan x_j di G hanya ada tepat satu lintasan. Tambahan sisi e yang menghubungkan x_i dan x_j berarti ada tepat dua lintasan dari x_i ke x_j atau ada tepat satu sirkuit di G. Sebaliknya andaikan ada tepat satu sirkuit di G akibat penambahan sebuah sisi yang menghubungkan x_i dan x_j . Berarti ada tepat dua lintasan dari x_i ke x_j. Ambil salah satu sisi antara x_i dan x_j maka berakibatkan ada tepat satu lintasan dari x_i ke x_j atau G adalah pohon.

Definisi 3-10

Misal T adalah pembangkit pohon pada graph terhubung G. *Sirkuit fundamental* adalah sirkuit yang dibentuk dengan penambahan sebuah ranting pada T.

Biasanya dalam graph terhubung G terdapat sejumlah besar pembangkit pohon. Dalam berbagai penerapan kita memerlukan seluruh pembangkit pohon. Satu cara menghasilkan pembangkit pohon pada suatu graph dimulai dari sebuah pembangkit pohon yang sudah diketahui, katakanlah pohon T_1 (a b c d pada gambar 3-14). Tambahkan sebuah ranting, katakan h, terhadap pohon T_1. Hasil yang terakhir ini akan membentuk sirkuit fundamental (b c h d pada gambar 3-14). Hilangkan sebarang dahan, katakan c, dari sirkuit fundamental b c h d, dan akan membentuk sebuah pembangkit pohon T_2 yang baru. Menciptakan sebuah pembangkit pohon dari pembangkit yang lain melalui penambahan ranting atau menghilangkan cabang-cabang yang tepat disebut *transformasi pohon elementer*.



Gambar 3-14 Graph dan tiga pembangkit pohonnya

Definisi 3-11

Jarak antara dua pembangkit pohon T_i dan T_j, dilambangkan dengan $d(T_i,T_j)$, dari sebuah graph G adalah banyaknya sisi sisi G yang berada pada satu pohon tetapi tidak pada yang lainnya.

Sebagai contoh pada gambar 3-14 $d(T_2,T_3) = 3$. Jika $T_i \oplus T_j$ adalah jumlah pembangkit pohon T_i dan T_j di G, maka $T_i \oplus T_j$ adalah graph bagian G yang memuat seluruh sisi-sisi di graph G yang berada di T_i atau T_j tetapi tidak pada kedua-duanya. Jika N(g) melambangkan banyaknya sisi-sisi di graph G, maka dari definisi

$$d(T_i,T_j) = {}^1/_2\ N(T_i \oplus T_j)$$

Bilangan $d(T_i,T_j)$menunjukan banyaknya transformasi pohon elementer minimum dari T_i ke T_j

Teorema 3-14

Jarak antara pembangkit pohon dari sebuah graph adalah metrik, yaitu memenuhi :

$$d(T_i,T_j) \geq 0 \text{ dan } d(T_i,T_j) = 0 \text{ jhj } T_i=T_j$$

$$d(T_i,T_j) = d(T_j,T_i)$$

$$d(T_i,T_j) \leq d(T_i,T_k) + d(T_k,T_j)$$

Teorema 3-15

Diawali dari sebarang pembangkit pohon dari sebuah graph G, kita bisa memperoleh setiap pembangkit pohon G dengan menggunakan transformasi pohon elementer.

Karena dalam sebuah graph terhubung G ber-rank r, (bertitik r+1) sebuah pembangkit pohon memiliki r sisi, maka diperoleh hasil berikut:

<u>Jarak maksimum antara sepasang dua pembangkit pohon di G adalah</u>

$$\max d(T_i,T_j)= {}^1/_2 \max N(T_i \oplus T_j) \leq r \quad ....*$$

Juga, jika u adalah kenolan dari G, maka tidak lebih u sisi dari pembangkit pohon T_i yang dapat ditempatkan lagi untuk mendapatkan pohon T_j yang lain. OLeh karena itu

$$\max d(T_i,T_j) \leq u \quad ....(**)$$

Dari (*) dan (**) diperoleh

$$\max d(T_i,T_j) \leq \min(u,r),$$

dimana (u,r) adalah bilangan terkecil dari dua u dan r graph tersebut.

Definisi 3-12

Misalkan T_o adalah sebuah pembangkit pohon dari graph G, dan max $d(T_o,T_i)$ melambangkan jarak maksimum antara T_o dan sebarang pembangkit pohon G yang lain. Maka T_o disebut *pohon pusat* (central tree) G jika

$$\max_i d(T_o,T_i) \leq \max_j d(T,T_j)$$

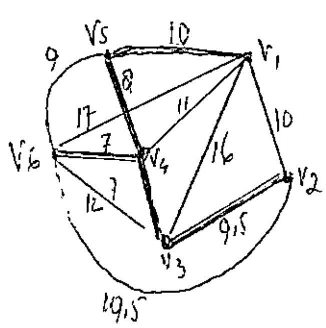
untuk setiap pohon T di G

Konsep pohon pusat bermanfaat dalam menghitung seluruh pohon dari suatu graph. Pohon pusat dalam sebuah graph pada umumnya tidaklah tunggal.

3-7. Pembangkit Pohon dalam Sebuah Graph Terbobot

Sebagaimana yang telah dibahas pada bagian yang terdahulu, sebuah pembangkit pohon dalam sebuah graph G merupakan graph bagian minimal yang menghubungkan seluruh titik-titik di G. Jika graph G adalah graph terbobot (yaitu jika ada bilangan real yang dikaitkan dengan sisi-sisi di G) maka **bobot pembangkit pohon T** di G didefinisikan sebagai jumlah bobot seluruh dahan-dahan di T. Pada umumnya pembangkit yang berbeda akan memiliki bobot yang berbeda pula. Pembangkit pohon yang memiliki bobot terkecil dalam sebuah graph terbobot disebut *pembangkit pohon terpendek* atau *jarak pembangkit pohon terpendek* atau *pembangkit pohon minimal*.

Ada beberapa algoritma untuk mencari pembangkit pohon yang terpendek dalam sebuah graph yang diketahui. Salah satunya dibuat oleh Kruskal adalah sebagai berikut. Daftarkan semua sisi-sisi graph G dengan urutan naik bobotnya. Selanjutnya, pilihlah sebuah sisi G yang terkecil. Kemudian untuk setiap langkah berikutnya pilihlah (dari sisi G yang tersisa) sisi terkecil lainnya yang tidak membuat sirkuit dengan pemilihan sisi sebelumnya. Lanjutkan sampai n-1 sisi yang terpilih dan sisi-sisi inilah yang membentuk pembangkit pohon terpendek. Algoritma lain adalah sebagai berikut. Awali dari titik v_1 dan hubungkan titik tersebut dengan titik yang terdekat (yaitu terhadap titik yang memiliki bobot terkecil dibaris 1 pada tabel), katakan v_k. Sekarang anggaplah v_1 dan v_k sebagai satu graph bagian, dan hubungkan graph bagian ini ke titik yang paling terdekat (yaitu terhadap titik selain dari v_1 dan v_k yang memiliki bobot terkecil diantara seluruh bobot-bobot pada baris 1 dan k). Misalkan titik ini adalah v_i. Selanjutnya anggaplah pohon dengan titik v_1, v_k dan v_i sebagai sebuah graph bagian dan lanjutkan proses ini sampai seluruh titik-titik n dihubungkan dengan n-1 sisi. Berikut ini adalah ilustrasi dari metoda ini.



(a)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	-	10	16	11	10	17
v_2	10	-	9,5			19,5
v_3	16	9,5	-	7		12
v_4	11		7	-	8	7
v_5	10			8	-	9
v_6	17	19,5	12	7	9	-

(b)

Gambar 3-15 Pembangkit Pohon Terpendek pada Graph Terbobot

Graph terbobot yang terhubung dengan 6 titik dan 12 sisi ditunjukan pada gambar 3-15(a) dan bobot masing-masing sisinya di tabulasi pada gambar 3-15(b). Kita ambil dari N_1 dan pilih bobot terkecil pada baris 1, yaitu (v_1,v_2) atau (v_1,v_2). Misalkan dipilih (v_1,v_5) (kalau memilih (v_1,v_2) juga akan diperoleh pohon terpendek yang berbeda dengan bobot yang sama). Titik yang terdekat dari graph bagian (v_1,v_5) adalah v_4, sebagaimana dilihat pada sebuah bobot baris 1 dan 5. Selanjutnya tiga sisi yang lainnya dipilih sesuai dengan prosedur diatas yaitu (v_4,v_6), (v_4,v_3) dan (v_3,v_2). Pembangkit pohon terpendek yang dihasilkan ditunjukan pada gambar 3-15(a) yang bergaris tebal.

SOAL-SOAL

1. Gambar seluruh pohon yang berlabel dengan n titik untuk n=1,2,3,4 dan 5
2. Gambar seluruh pohon tak berlabel dengan n titik untuk n=1,2,3,4 dan 5
3. Gambarlah seluruh akar pohon yang tak berlabel dan n titik untuk n=1,2,3,4 dan 5
4. Ada 6 pohon yang berbeda (tidak isomorphisma) dengan 6 titik. Dua diantaranya sudah diberikan pada gambar 2-4. Gambarkan yang lainnya.
5. Buktikan teorema 3.4
6. Tunjukan pada sebuah pohon bahwa diameter tidak sama dengan dua kali radius. Dalam kondisi bagaimanakah hal ini bisa terjadi ?

7. Gambarlah seluruh pohon (tak berlabel)biner dengan 6 titik pendant. Carilah panjang masing-masingnya. Ada 6 pohon biner tersebut, dan dua diantaranya digambar pada Gambar 3-10.
8. Gambar seluruh pembangkit pohon dari graph pada gambar 2-1.
9. Buktikan bahwa sebuah sisi pendant (sebuah sisi yang mana satu titik ujungnya berderajat satu) dalam graph terhubung G termuat dalam setiap pembangkit pohon G.
10. Buktikan teorema 3-8
11. Buktikan teorema 3-12
12. Buktikan bahwa sebarang graph bagian g dari graph terhubung G termuat dalam pembangkit pohon jika dan hanya jika g tidak memuat sirkuit.
13. Berapakah ke-nol-an dari graph lengkap dengan n titik ?
14. Tunjukan bahwa sebuah lintasan Hamilton adalah sebuah pembangkit pohon.
15. Buktikan bahwa sebarang sirkuit di graph G sekurang-kurangnya ada satu sisi persekutuan dengan himpunan ranting-ranting.
16. Buktikan teoprema 3-12.
17. Carilah sebuah pembangkit pohon yang berjarak 4 dengan pembangkit pohon $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 . b_6\}$ pada gambar 3-13. Buatlah seluruh sirkuit fundamental dengan memandang terhadap pembangkit yang baru tersebut.
18. Tunjukan bahwa jarak antara dua pembangkit pohon sebagaimana yang didefinisikan dalam bagian ini adalah metrik.
19. Misal v adalah sebuah titik dalam graph terhubung G. Buktikan bahwa ada sebuah pembangkit pohon Tdi G sedemikian sehingga jarak setiap titik dari v sama dengan di G dan T.
20. Misal T_1 dan T_2 adalah dua pembangkit pohon dari sebuah graph

terhuhung G. Jika sisi e berada di T_1 tetapi tidak di T_2 buktikanlah bahwa ada sisi f lain di T_2 tetapi tidak di T_1 sedemikian sehingga graph bagian:

$(T_1 - e) \cup f$ dan $(T_2 - f) \cup e$ juga merupakan pembangkit pohon G

BAB IV

Penyajian Graph dengan Matrik

Meskipun penyajian piktorial sebuah graph sangat memudahkan untuk studi visual, masih ada penyajian lain yang lebih baik yaitu dengan matrik. Melalui matrik, kita dapat juga menerapkan sifat-sifat aljabar matrik untuk mempelajari sifat-sifat struktural sebuah graph dari segi aljabar.

Dalam bab ini akan dibahas dua penyajian matrik sebuah graph yang serig digunakan. Juga korespondensi antara sifat-sifat teoritis graph dan sifat-sifat matrik akan dipelajari.

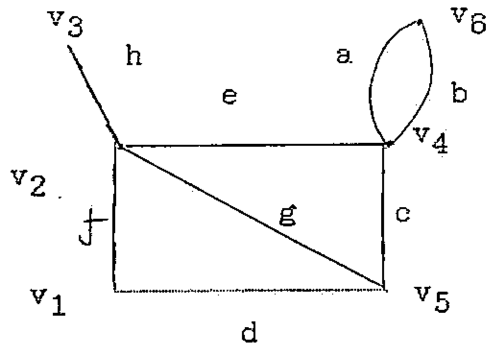
4-1. Matrik Insident

Definisi 4-1

Misal G adalah graph dengan n titik , e sisi, dan tidak ada loop. Matrik $A = [a_{ij}]$ dengan n baris dan e kolom yang unsur-unsurnya diberikan oleh:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika sisi } e_j \text{ insiden pada titik } v_i \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

disebut **matrik insiden** sisi-titik atau secara singkat matrik insiden.



(a)

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

(b)

Gambar 4-1 Graph dan Matrik Insidennya

Matrik A untuk sebuah graph G seringkali ditulis A(G). Sebuah graph dan matrik insidennya ditunjukan pada gambar 4-1.

Matrik insiden hanya memuat dua unsur 0 dan 1. Matrik yang seperti itu disebut matrik biner atau matrik-(0,1). Kalau diberikan representasi geometri sebuah graph kita dapat dengan mudah membuat matrik insidennya. Begitu juga sebaliknya, jika diberikan matrik insiden A(G), kita dapat mengkonstruksi graph G secara geometris. Jadi matrik insiden dan graph secara geometris mengandung informasi yang sama. Kedua-duanya merupakan dua cara penyajian grafik yang sederhana.

Dari matrik insiden diperoleh sebagai berikut.

1. Karena setiap sisi adalah insiden hanya pada dua titik, setiap

kolom A mempunyai tepat dua angka 1.

2. Banyaknya angka 1 disetiap baris sama dengan derajad titik yang bersesuaian.
3. Baris yang seluruhnya mengandung angka 0 maka titik yang bersesuaian adalah titik isolasi.
4. Sisi yang sejajar dalam sebuah graph menghasilkan kolom yang sama dalam matrik insidennya, sebagai contoh kolom 1 dan 2 dalam gambar 4-1.
5. Jika sebuah graph G tak terhubung dan terdiri dari dua komponen g_1 dan g_2, matrik insiden A(G) graph G dapat ditulis dalam bentuk blok diagonal

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c} A(g_1) & 0 \\ \hline 0 & A(g_2) \end{array}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

dimana $A(g_1)$ dan $A(g_2)$ adalah matrik insident dari komponen g_1 dan g_2. Ini berarti bahwa tidak ada sisi di g_1 insiden dengan titik-titik di g_2 atau sebaliknya.

Teorema 4-1

Dua graph G_1 dan G_2 adalah isomorphisma jika dan hanya jika matrik insidennya $A(G_2)$ berbeda hanya melalui permutasi baris dan kolom.

Rank Matrik Insident

Setiap baris dalam matrik insident A(G) bisa dianggap sebagai vektor-vektor dalam ruang vektor graph G. Misalkan vektor dalam baris pertama disebut A_1, dalam baris kedua A_2, dan seterusnya. Jadi

$$A(G) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

Karena ada tepat dua angka 1 disetiap kolom A, jumlah seluruh vektor ini adalah 0. Jadi vektor-vektor $A_1, A_2, \ldots. A_n$ adalah tidak bebas linier. Karena itu rank A kurang dari n, atau rank $A \leq n-1$

Sekarang perhatikan jumlah sebarang m dari n vektor ini ($m \leq n-1$). Jika graph tersebut terhubung, A(G) tidak dapat dipartisi, sebagaimana (*), sehingga $A(g_1)$ terdiri m baris dan $A(g_2)$ terdiri n-m baris. Dengan kata lain, tidak ada m melalui m submatrik A(G) dapat ditemukan, untuk $m \leq n-1$, sehingga jumlah modulo 2 dari m baris tersebut sama dengan nol.

Karena hanya ada dua konstanta 0 dan 1 dalam matrik ini, penambahan seluruh vektor yang diambil m pada saat $m=1,2,\ldots,n-1$ menghasilkan seluruh kombinasi linier dari n-1 vektor baris. Jadi kita telah menunjukan bahwa tidak ada kombinasi linier dari m vektor baris A ($m \leq n-1$) yang sama dengan nol. Karena rank A(G) tidak lebih dari n-1 dan tidak kurang dari n-1 maka rank A(G) tepat sama dengan n-1. Oleh karena itu timbullah teorema 4-2.

Teorema 4-2

Jika A(G) adalah matrik insiden dari graph terhubung G dengan n titik, rank A(G) = n-1

Jika kita menghilangkan sebarang satu sisi dari matrik insident graph terhubung, sisa n-1 vektor baris adalah submatrik dengan rank n-1. Dengan kata lain, sisa n-1 vektor baris adalah bebas linier. Jadi kita hanya perlu n-1 baris dari matrik insident untuk membentuk graph komplit yang bersesuaian. Dengan kata lain diberikan n-1 baris, kita dapat dengan mudah membangun kembali baris yang hilang, karena setiap kolom dalam matrik memiliki tepat dua angka 1.

Submatrik A_f dari A yang terdiri (n-1) baris disebut *matrik insiden tereduksi*. Titik yang bersesuaian terhadap baris yang dibuang di A_f disebut *titik referensi*. Jelaslah bahwa sebarang titik pada graph terhubung dapat dibuat sebagai titik referensi. Karena sebuah pohon merupakan graph terhubung dengan n titik dan n-1 sisi, matrik insident tereduksinya merupakan matrik bujur sangkar berorder n dan rank n-1.

Corollary

Matrik insident tereduksi dari sebuah pohon adalah non singgular.

4-2 Matrik Bagian A(G)

Definisi 4-2

Misalkan g adalah sebuah graph bagian G dan misalkan A(g) dan A(G) masing-masing adalah matrik insident dari g dan G. Maka A(g) adalah matrik bagian dari A(G).

Dari definisi diatas jelas bahwa matrik bagian A(G) bersesuaian dengan jenis khusus dari graph bagian seperti pembangkit pohon.

Teorema 4-3

Misal A(G) adalah matrik insident sebuah graph terhubung G dengan n titik. Matrik bagian dari A(G) dengan n-1 baris adalah non singgular jika dan hanya jika (n-1) sisi bersesuaian dengan (n-1) kolom dan matrik ini membentuk pembangkit pohon di C.

Bukti

Setiap matrik bagian bujur sangkar berordo (n-1) di A(G) adalah matrik insident tereduksi dari graph bagian yang sama di G dengan (n-1) sisi dan begitu juga sebaliknya. Menurut uraian sebelumnya, jelas bahwa matrik bagian bujur sangkar A(G) adalah non singgular jika dan hanya jika graph bagian yang bersesuaian adalah pohon. Pohon dalam hal ini merupakan pembangkit pohon, karena memuat n-1 sisi dari graph n titik.

4-3 Matrik Sirkuit

Definisi 4-3

Misal banyak sirkuit yang berbeda dalam sebuah graph G adalah q dan banyaknya sisi G adalah e. Matrik sirkuit $B=[b_{ij}]$ dari G adalah sebuah matrik berordo q x e dengan sifat sebagai berikut.

$$b_{ij} \begin{cases} = 1 \text{ jika sirkuit ke-i meliputi sisi ke-j} \\ = 0 \text{ lainnya} \end{cases}$$

Untuk menekankan bahwa B adalah matrik sirkuit dari graph G, matrik sirkuit bisa juga ditulis sebagai B(G). Graph pada gambar 4-1 (a) memiliki 4 sirkuit yang berbeda, {a,b}, {c,e,g}, {d,f,g} dan {c,d,f,e}. Karena itu, matrik sirkuitnya terdiri 4 baris dan 8 kolom, atau

$$B(G)\quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Berikut ini adalah sifat-sifat yang berlaku pada matrik sirkuit B(G)

1. Suatu kolom dengan nol semuanya berarti sisi yang bersesuaian tidak anggota sebarang.
2. Setiap baris B(G) adalah vektor sirkuit.
3. Tidak seperti matrik insident, sebuah matrik sirkuit bisa menyajikan sebuah loop, baris yang bersesuaian memiliki angka 1 yang tunggal.
4. Banyak angka 1 dalam sebuah baris sama dengan banyaknya sisi dalam lintasan yang bersesuaian.
5. Jika graph G dapat dipisahkan (tak terhubung) dan terdiri dua blok (komponen) g_1 dan g_2, matrik sirkuit B(G) dapat ditulis dalam bentuk block-diagonal seperti

$$B(G) = \left[\begin{array}{c|c} B(g_1) & 0 \\ \hline 0 & B(g_2) \end{array}\right]$$

dimana $B(g_1)$ dan $B(g_2)$ adalah matrik sirkuit g_1 dan g_2

6. Permutasi sebarang dua baris atau kolom dalam sebuah matrik sirkuit bersesuaian dengan penamaan kembali (relabelling) sirkuit-sirkuit dan sisi-sisi.

Teorema 4-4

Misal B dan A adalah masing-masing matrik sirkuit dan matrik insident (dari graph tanpa loop) yang kolomnya disusun menggunakan urutan sisi yang sama. Maka setiap baris B adalah ortogonal dengan setiap baris A

atau

$$A.B^T = B.\ A^T = 0 (\mathrm{mod}\ 2) \text{ dengan } A^T = \text{Tranpose } A$$

Bukti:

Anggaplah sebuah titik v dan sebuah sirkuit S berada di graph G, baik v di T atau tidak. Jika v tidak di L, maka tidak ada sisi pada sirkuit S yang insident pada v. Sebaliknya, jika v berada di S maka banyaknya sisi tersebut di sirkuit S yang insident pada v adalah dua.

Anggaplah baris ke-i di A dan baris ke-j di B. Karena sisi disusun dalam urutan yang sama, unsur-unsur matrik yang tidak nol pada posisi yang bersesuain terjadi haya jika sisi tertentu insident pada titik ke-i dan juga berada di sirkuit ke-j. Jika titik ke-i tidak di sirkuit ke-j, maka tidak ada unsur yang tidak nol tersebut dan perkalian titik dua baris tersebut adalah nol. Jika titik ke-i berada di sirkuit ke-j, maka akan ada tepat dua angka 1 pada jumlah dari hasil kali unsur-unsur matrik tersebut. Karena 1+1=0 (mod 2), perkalian titik sebarang dua baris dengan satu baris di A dan lainnya di B adalah nol (terbukti)

Sebagai contoh, ambil matrik insident dan sirkuit tranpos dari graph pada pada gambar 4-1(a). Setelah sisi-sisinya berada pada urutan yang sama disetiap di setiap masing-masingya diperoleh sebagai berikut:

$$A.\ddot{B}^T = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&1&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

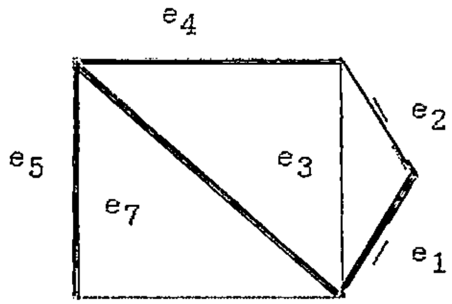
4-4 Matrik Sirkuit Fundamental dan Rank

Himpunan sirkuit-sirkuit fundamental dengan memperhatikan sebarang pembangkit pohon dan sebuah graph terhubung, seperti yang telah didiskusikan pada bab 3, hanya sirkuit yang bebas dalam sebuah graph. Sisa dari sirkuit-sirkuit tersebut dapat diperoleh dengan jumlah (kombinasi linier) dari sirkuit-sirkuit ini.

Definisi 4-4

Sebuah matrik bagian (dari matrik sirkuit) dimana seluruh barisnya bersesuaian dengan himpunan sirkuit fundamental disebut *marik sirkuit fundamental* B_f

Gambar 4-2 menunjukan sebuah graph dan matrik sirkuit fundamentalnya dengan memandang terhadap sebuah pembangkit pohon (yang ditujukan oleh garis tebal)



(a)

$$
\begin{array}{ccc|cccc}
e_2 & e_3 & e_6 & e_1 & e_4 & e_5 & e_7
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

(b)

Gambar 4-2 Graph dan Matrik Sirkuit Fundamental

Sebagaimana dalam matrik A dan B, permutasi baris (atau kolom)tidak mempengaruhi B_f. Jika n banyaknya titik dan e banyaknya sisi dalam graph terhubung maka B_f adalah matrik dengan e-n+1 baris dan e kolom, karena banyaknya sirkuit fundamental adalah e-n+1 dan setiap sirkuit fundamental dihasilkan oleh satu ranting.

Susun kolom di B_f sedemikian sehingga seluruh e-n+1 ranting bersesuaian dengan e-n+1 kolom pertama. Selanjutnya susun lagi baris-baris tersebut sedemikian sehingga baris pertama bersesuaian dengan sirkuit fundamental yang dibuat oleh ranting pada kolom pertama, baris kedua terhadap sirkuit fundamental dibuat oleh ranting kolom kedua dan seterusnya. Gambar 4-2(b) adalah cara bagaimana matrik sirkuit fundamental disusun.

Matrik B_f dapat ditulis dengan

$$B_f = [I_u | B_t]$$

dimana I_u adalah matrik identitas berordo u = e-n+1 dan B_f adalah matrik bagian sisanya yang berordo u x (n-1), bersesuaian dengan dahan-dahan pembangkit pohon.

Jadi rank B_f = u = e-n+1

Karena B_f adalah matrik bagian dari matrik sirkuit B, maka rank B $\geq$ e-n+1, sehingga timbulah teorema berikut.

Teorema 4.5

Jika B adalah matrik sirkuit graph terhubung G dengan e sisi dan n titik, maka rank B=e-n+1

<u>Bukti:</u>

Jika A adalah sebuah matrik insident G

$$A.B^T = 0 \pmod 2$$

Oleh karena itu

rank A + rank B $\leq$ e

rank B $\leq$ e - rank A karena

rank A = n-1 maka rank B $\leq$e-n+1 tetapi

rank B $\geq$ e-n+1

oleh karena itu rank B = e-n+1

4-5 Matrik Adjacency

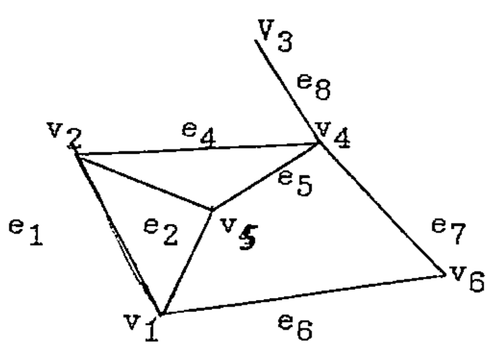
Definisi 4-5

Jika G=<V,E> adalah graph sederhana dengan V = $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ dan E adalah himpunan titik-titik. Matrik A berordo nxn yang unsur-unsurnya a_{ij} dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika ada sisi antara titik ke-i dan ke-j} \\ 0 & \text{jika tidak ada sisi antaranya} \end{cases}$$

disebut matrik adjacency.

Sebuah graph sederhana dan matrik adjancency ditunjukan pada gambar 4-3 .



$$X = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 4-3 Graph Sederhana dengan Matrik Adjacency-nya

Dari matrik adjacency diperoleh sebagai berikut.

1. Unsur pada diagonal utama semuanya angka nol jika dan hanya jika graph tersebut tidak memiliki loop. Sebuah loop pada titik ke-i bersesuaian dengan $x_{ii} = 1$
2. Dari definisi matrik adjacency tidak bisa diketahui apakah graph tersebut memiliki sisi yang sejajar. Oleh karena itulah mengapa matrik adjacency ini didefinisikan untuk graph tanpa sisi sejajar.
3. Jika graph tidak memiliki loop dan tentu saja tidak memiliki sisi sejajar), derajat sebuah titik sama dengan banyaknya angka 1 pada baris atau kolom yang bersesuaian dari X.
4. Permutasi baris dan kolom yang bersesuaian mengakibatkan penyusunan kembali titik-titiknya. Harus diketahui bahwa baris dan kolom harus disusun dalam urutan yang sama. Ini berarti, jika dua baris saling dipertukarkan di X, kolom bersesuaian harus juga dipertukarkan. Oleh karena itu dua graph G_1 dan G_2 dengan tidak ada sisi yang sejajar adalah isomorphisma jika dan hanya jika matrik adjacency $X(G_1)$ dan $X(G_2)$ bersifat
$$X(G_2) = R^{-1}\, X(G_1)\, R$$
dimana R adalah matrik permutasi.
5. Sebuah graph G adalah tak terhubung dan berada dalam dua komponen g_1 dan g_2 jika dan hanya jika matrik adjacencynya X(G) dapat dipartisi sebagai
$$X(G) = \left[\begin{array}{c|c} X(g_1) & 0 \\ \hline 0 & X(g_2) \end{array}\right]$$
dimana $X(g_1)$ adalah matrik adjacency komponen g_1 dan $X(g_2)$ adalah matrik adjacency komponen g_2. Partisi ini mengakibatkan

bahwa tidak ada sisi yang menghubungkan sebarang titik di g_1 ke sebarang titik di g_2.

6. Diketahui sebarang matrik biner bujursangkar Q yang simetris berorde n, kita selalu dapat membuat sebuah graph G dengan n titik (tidak ada sisi sejajar) sedemikian sehingga Q adalah matrik adjacency dari G.

Pangkat dari X

Misalkan matrik 6x6 pada gambar 4-3 dikalikan dengan dirinya sendiri. Hasilnya dilambangkan dengan X^2 yaitu sebuah matrik 6x6 yang simetris seperti berikut.

$$X^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Nilai unsur di X^2 selain pada diagonal utama

= Banyaknya angka 1 dalam perkalian titik (dot product) baris ke i dan kolom ke j (atau baris ke j) dari X

= Banyaknya posisi dimana kedua baris i dan j dari X memiliki angka 1

= Banyaknya titik-titik yang adjacent dengan kedua titik ke i dan j

= Banyaknya lintasan berbeda yang panjangnya dua antara titik ke i dan j.

Dengan cara yang sama, unsur-unsur diagonal di X^2 merupa-kan banyaknya angka 1 pada baris ke i (kolom ke i) dari matrik X. Jadi nilai setiap unsur diagonal di X^2 sama dengan derajad titik yang bersesuaian, jika graph tersebut tidak memiliki loop.

Perhatikan sekarang perkalian berikut.

$$X \cdot X^2 = X^2 \cdot X = X^3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Mari kita perhatikan unsur ke ij dari X^3

Unsur ke-ij dari X^3 = Perkalian titik baris ke i dari X^2 dan kolom ke j dari X

= $\sum_{k=1}^{n}$ unsur ke-ik dari X^2 . unsur ke-kj dari X

= $\sum_{k=1}^{n}$ Banyaknya seluruh sisi berurutan yang berbeda dengan 3 sisi dari titik ke-i sampai titik ke-j melalui titik ke-k

= Banyaknya sisi berurutan yang berbeda dengan tiga sisi antara titik ke-i dan ke-j

Sebagai contoh, perhatikan unsur baris ke 1 dan baris ke 5 pada X^3 untuk graph gambar 4-3.

Baris 1 dari X^2 . baris 5 dari X = (3,1,0,3,1,0).(1,1,0,1,0,0)

= 3+1+0+3+0+0 = 7

Tujuh macam sisi berurutan yang masing-masingnya terdiri tiga sisi antara v_1 dan v_5 adalah

$\{e_1, e_1, e_2\}$, $\{e_2, e_2, e_2\}$, $\{e_6, e_6, e_2\}$, $\{e_2, e_3, e_3\}$, $\{e_6, e_7, e_5\}$, $\{e_2, e_5, e_5\}$, $\{e_1, e_4, e_5\}$

Jelaslah ini meliputi seluruh lintasan yang panjangnya tiga antara v_1 dan v_5 yaitu $\{e_6, e_7, e_5\}$ dan $\{e_1, e_4, e_5\}$

Teorema 4-6

Jika X adalah matrik adjacency sebuah graph sederhana G, maka unsur baris i kolom j pada X^r merupakan banyaknya sisi berurut yang berbeda terdiri dari r sisi antara titik v_i dan titik v_j.

Bukti:

Teorema tersebut memenuhi untuk r=1, dan telah dibuktikan untuk r=2 dan r=3. Dengan induksi dapat dibuktikan teorema tersebut berlaku untuk sebarang bilangan positif r. Dengan kata lain anggaplah memenuhi untuk r dan kemudian hitung unsur ke ij di X, dengan bantuan hubungan

$$X^r = X^{r-1} . X$$

sebagaimana halnya yang dilakukan untuk X^3. Lanjutan bukti ini diserahkan kepada pembaca.

Teorema 4-7

Dalam graph terhubung, jarak antara dua titik v_i dan v_j (untuk $i \neq j$) adalah k jika dan hanya jika k merupakan bilangan bulat terkecil dimana unsur ke ij di X^k tidak nol

Teorema 4-8

Jika X adalah matrik adjacency sebuah graph G dengan n titik dan

$$Y = X + X^2 + X^3 + \ldots\ldots + X^{n-1}$$

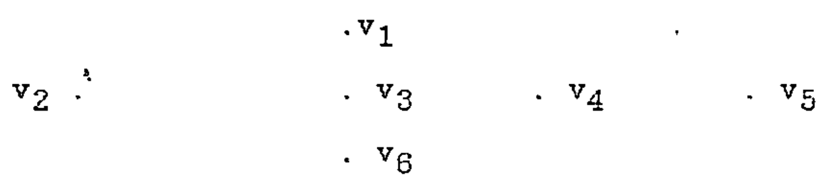
maka G adalah tak terhubung jika dan hanya jika ada sekurang-kurangnya satu unsur di matrik Y adalah nol.

Hubungan A(G) dan X(G)

Jika graph G tidak punya loop, matrik insident A(G) memuat seluruh informasi tentang G. Sebaliknya, jika G tidak punya sisi sejajar, matrik adjacencynya X(G) memuat seluruh informasi tentang G. Karena itu, jika sebuah graph G tidak memiliki loop maupun sisi paralel (G graph sederhana) kedua A(G) dan X(G) memuat seluruh informasi. Jadi jika graphnya sederhana, matrik A(G) bisa diperoleh dari matrik X(G) dan sebaliknya.

S O A L - S O A L

1. Tuliskan matrik insidenet untuk graph sederhana berlabel pada gambar 4-4



Gambar 4-4 Graph nol dengan 4 titik

2. Tunjukan bahwa matrik graph sederhana tak terhubung dengan k komponen, n titik dan e sisi, rank matrik A dan B berturut-turut adalah n-k dan e-n+k.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, Gary, **Introduction Graph Theory**, Dover Publication INC, New York, 1977.

Deo, Narsingh, **Graph Theory with Applications for Enggineering and Computer Science**, Prentice Hall of India, New Delhi, 1987.

Liu, C. L, **Elements of Discrete Mathematics (Second Edition)**,McGraw Hill International Editions, New York, 1986.

Tremblay, J.P dan Manohar, R, **Discrete Mathematical Structures with Application to Computer Science**, McGraw Hill Company, New York, 1988.

Witala, Stephen, A, **Discrete Mathematics A Unified Approach**, McGraw Hill International Edition, New York, 1987.