# PENERAPAN ESTIMATOR BAYES PADA DISTRIBUSI BURR (c,k) TIPE XII DENGAN PENDEKATAN LINDLEY

MAKALAH



OLEH :

DRS. ATUS AMADI PUTRA, M.Si.

Dosen Jurusan Pendidikan Matematika

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA
ILMU PENGETAHUAN ALAM
IKIP PADANG

1998

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT, karena atas rahmat dan karuniaNyalah penulis dapat menyelesaikan makalah ini yang berjudul "Penerapan Estimator Bayes Pada Distribusi Burr(c,k) Tipe XII Dengan Pendekatan Lindley".

Dalam menyelesaikan makalah ini penulis banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Drs. Mukhni, M. Pd. yang tak henti-hentinya memberikan semangat dan masukkan pada penulis sehingga makalah ini dapat diselesaikan.
2. Bapak Drs. Lutfian Almash, M. S. yang telah bersedia memberikan saran-saran dan perbaikan untuk lebih sempurnanya makalah ini.
3. Para Bapak dan Ibu dosen yang turut memberikan bimbingan, baik secara langsung maupun tidak langsung.
4. Para Bapak dan Ibu karyawan Pustaka IKIP Padang, yang telah memberikan sarana untuk penulis.
5. Semua pihak yang telah memberikan bantuan, baik secara moril maupun secara spirituil.

Penulis menyadari bahwa isi dari makalah ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu diharapkan kepada semua pihak untuk dapat memberikan kritik dan saran untuk menyempurnakan makalah ini. Akhirnya penulis berharap mudah-mudahan makalah ini ada manfaatnya, amin !

Padang, Mei 1998

Penulis

# DAFTAR ISI

# I. PENDAHULUAN

Analisis Bayesian mempunyai peranan yang sangat penting dalam pembangunan saat ini, karena analisis Bayesian telah menjadi bagian yang tak dapat dipisahkan dalam memproduksi suatu barang. Hal ini terlihat jelas bahwa analisis Bayesian telah menjadi topik yang menarik bagi para statistikawan dan praktisi yang bekerja dibidang-bidang seperti Kedokteran (ramalan medis, pengujian-pengujian kadar logam antibiotik dan diagnosa medis sebelum operasi), Teknik (pemindahan alat-alat mesin, kontrol kualitas, dan maksimalisasi hasil proses industri) dan Bisnis (menentukan perbedaan dalam hasil mean masa depan dari pasangan produk dan syarat batas garansi untuk hasil yang akan datang untuk suatu jumlah sistem yang khusus).

Tak kalah pentingnya untuk memperoleh jaminan bahwa produk yang baru mempunyai keandalan lebih baik bari produk lama yang sejenis, juga diperhatikan daya tahan hidup suatu barang. Perusahaan bahkan bersedia mengeluarkan biaya yang besar untuk menjamin bahwa produk yang dihasilkan mempunyai keandalan yang lebih tinggi. Misalnya seorang manager suatu produk tertarik pada proporsi cacat yang dinyatakan dengan $\tilde{P}$ menjalani empat harga yaitu 0,01, 0,05, 0,1 dan 0,5. Manager mengetahui bahwa salah satu dari keempat harga itu pasti terjadi tetapi ia tidak tahu pasti mana yang betul-betul akan terjadi.

Untuk memperoleh hasil yang baik, cara yang paling sesuai adalah dengan menggunakan analisis Bayesian atau dengan kata lain dengan distribusi posterior. Di samping perhitungan distribusi posterior, agar perusahaan tidak mengalami kerugian yang besar dengan harapan untuk mendapatkan keuntungan yang maxsimal, diperlukan harga harapan dari distribusi posterior yang dinamakan dengan estimasi Beyesian.

Pada masa lampau, beberapa distribusi telah dikenalkan dan dibahas sebagai suatu model kegagalan dari sudut pandang Bayes. S.k.Bhattacharya (1967) memper- timbangkan model eksponensial. Soland (1969) mendiskusikan distribusi weibull sebagai suatu model kegagalan, bila dua buah parameter menunjukkan sebagai variabel random. Distribusi gamma dipertimbangkan oleh Holla (1966) dan Canavos bersama Tsokos (1971). Namun setelah Dubay (1972,1973) yang pertamakali meng- usulkan bahwa distribusi Burr (c,k), dimana c dan k parameter yang tidak diketahui adalah suatu model uji hidup. Lewiss (1981) mencatat bahwa distribusi weibull dan eksponensial adalah kasus pendekatan khusus dari nilai-nilai parameter dari distribusi Burr(c,k). Ia menggusulkan untuk mempergunakan distribusi Burr (c,k) sebagai suatu model data uji hidup dipercepat suatu model kegagalan sudut pandang Bayes.

Jadi tujuan dari pembahasan ini adalah untuk lebih memperkenalkan distribusi Burr(c,k) sebagai model kegagalan dari suatu pendekatan Bayes, yaitu distribusi Burr(c,k) dengan dua parameter. Distribusi Burr(c,k) ini pertamakali diperkenalkan oleh Burr.

Berdasarkan hal di atas penelitian ini mencoba membahas "Penerapan Estimator Bayes Pada Distribusi Burr(c,k) Tipe XII Dengan Pendekatan Lindley".

Banyak pakar statistikawan yang mengadakan penelitian tentang analisis Bayesian. Dalam hal ini akan disebutkan beberapa hasil penelitian yang berkenaan dengan estimator Bayes pada distribusi Burr(c,k) dengan dua parameter c dan k. Diantaranya distribusi dua parameter Burr tipe XII ditulis Burr(c,k), dengan fungsi densitas probability (pdf) adalah $f(x) = c\,k\,x^{c-1}(1 + x^{c})^{-(k-1)}$, $x > 0$, $c > 0$, $k > 0$. Pertamakali diperkenalkan dalam literatur oleh Burr (1942). Dubey (1972,1973) membahas kegunaan dan sifat-sifat dari distribusi Burr(c,k) sebagai suatu model kegagalan. Evans dan Simons (1975) membahas lebih jauh sifat-sifat dari distribusi Burr(c,k) sebagai suatu model kegagalan dan mereka juga menurunkan Maksimum Likelihood Estimator (MLE). Nigm (1988) membanding kan batas-batas prediksi Bayes untuk order statistik dalam sampel yang akan datang, dia memakai bivariat prior yang merupakan diskrit dalam c dan kontiniu dalam k. Al-Husaini dan Jaheen (1995) memperoleh batas-batas prediksi Bayes untuk order statistik berdasarkan satu sampel dan deret sampel independen (m+1) observasi yang akan datang. Mereka menggunakan bivariat prior yang kontiniu dalam dua parameter c dan k. Selanjutnya Papadopaulos (1978) mengembangkan suatu estimator Bayes dari k menggunakan konyugat prior gamma berdasarkan pada sampel lengkap. Sedangkan Evans dan Ragab estimator Bayesnya pada sampel tersensor tipe-2. Al-Husaini, Moussa dan Jaheen (1992) memperoleh estimator yang lain dari k.

## II. MASALAH

Berdasarkan yang dikemukan di atas, maka masalah yang akan dibahas dalam penelitian sebagai berikut :

1. Penerapan Estimator Bayes pada Distribusi Burr(c,k) tipe XII.
2. Mendapatkan hasil dalam (1) di atas ini digunakan bentuk pendekatan Lindley.

# III. PEMBAHASAN

## 1. Maksimum Likelihood Estimator (MLE)

Sebagai pendahuluan terlebih dahulu dicari Maksimum Likelihood Estimator (MLE) dari c dan k yang berdasarkan pada sampel tersensor tipe-2 yang berukuran r, $X_1 < X_2 < .... < X_r$ diperoleh dari suatu uji hidup dari n item yang waktu hidupnya mempunyai distribusi Burr(c,k) tipe XII dengan dua parameter yang tidak diketahui, mempunyai fungsi kepadatan probability (fkp) dalam bentuk : $f(x) = c\,k\,x^{c-1}(1 + x^c)^{-(k+1)}, \quad x > 0, c > 0, k > 0.$ (1)

dan fungsi distribusi komulatif (CDF) dari persamaan (1) adalah :

$$F(t) = \int_0^t ckx^{c-1}\left(1+x^c\right)^{-(k+1)} dx, \qquad x > 0, c > 0, k > 0$$

$$= \frac{k}{-k}\left(1+x^c\right)^{-k} \Big]_0^t$$

$$= 1 - (1 + t^c)^{-k}, \qquad t > 0, c > 0, k > 0 \qquad (2)$$

Selanjutnya fungsi reliability dan fungsi rata-rata kegagalan dari persamaan (1) dan (2) masing-masing diberikan sebagai berikut :

$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \le t) = 1 - F(t)$ maka,

$$R(t) = (1 + t^c)^{-k} \qquad t > 0, c > 0, k > 0 \qquad (3)$$

dan $H(t) = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)}$ maka,

$$H(t) = \frac{ckt^{c-1}}{1+t^c}, \qquad t > 0, c > 0, k > 0 \qquad (4)$$

Selanjutnya fungsi likelihood dari persamaan (1) sebagai berikut :

$$l = l(c,k;\underline{x}) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[1 - F(x_r)\right]^{n-r}\prod_{i=1}^{r} f(y_i), \quad -\infty \le a < y_i < b \le \infty \tag{5}$$

Dengan mengsubtitusikan persamaan (1) dan (2) ke dalam (5) diperoleh :

$$l = l(c,k;\underline{x}) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[1 - \left(1 - (1+x^c)^{-k}\right)\right]^{n-r}\prod_{i=1}^{r} ckx_i^{c-1}(1+x_i^c)^{-(k+1)}$$

$$l = l(c,k;\underline{x}) = \frac{n!}{(n-r)!}\, c^r k^r\, v(c,k;\underline{x})\, e^{-kT} \tag{6}$$

dengan $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ $\quad v(c,k;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{r}\frac{x_i^{c-1}}{1+x_i^c}$ (7)

dan $T = T(c;\underline{x}) = \sum_{i=1}^{r}\ln(1+x_i^c) + (n-r)\ln(1+x_r^c)$ (8)

Selanjutnya fungsi logaritma likelihood (LLF) dari persamaan (6) adalah

$$L = \ln l = r\ln c + r\ln k + \ln\{v(c,k,\underline{x})\} - kT \tag{9}$$

atau dengan mengsubtitusi (7) dan (8) kedalam (9) diperoleh

$$L = \ln l = r\ln c + r\ln k + \ln\prod_{i=1}^{r}\frac{x_i^{c-1}}{1+x_i^c} - k\left\{\sum_{i=1}^{r}\ln(1+x_i^c) + (n-r)\ln(1+x_r^c)\right\}$$

$$L = r\ln c + r\ln k + (c-1)\sum_{i=1}^{r}\ln(x_i) - (k+1)\sum_{i=1}^{r}\ln(1+x_i^c) - (n-r)k\ln(1+x_r^c) \tag{10}$$

Selanjutnya turunan pertama dari (10) adalah :

$$\frac{\partial l}{\partial k} = \frac{r}{k} - \sum_{i=1}^{r}\ln(1+x_i^c) - (n-r)\ln(1+x_r^c) \tag{11}$$

$$\frac{\partial l}{\partial c} = \frac{r}{c} + \sum_{i=1}^{r}\ln(x_i) - (n-r)k\frac{x_r^c\ln x_r}{1+x_r^c} - (k+1)\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^c\ln x_i}{1+x_i^c} \tag{12}$$

Dengan menyamakan persamaan (11) dan (12) sama dengan nol maka diperoleh dua persamaan non linier. Untuk menyelesaikan persamaan likelihood dua non linier diatas dengan mempergunakan metode iterasi seperti Newton-Raphson, menghasilkan MLE dari c dan k ditulis $\hat{C}_{ML}$ dan $\hat{K}_{ML}$. Sedangkan MLE dari R(t) dan H(t) yang sesuai diberikan masing-masing oleh persamaan (3) dan (4) setelah mengganti c dan k dengan $\hat{C}_{ML}$ dan $\hat{K}_{ML}$.

**2. Estimator Bayes**

Dibawah asumsi bahwa kedua parameter tidak diketahui, dalam hal ini Al-Husaini dan Jaheen (1992) mengusulkan untuk mendapatkan fungsi densitas posterior bersama c dan k, dengan menggunakan densitas prior bersama c dan k diberikan oleh :

$$g(c,k) = g_1(k/c)\, g_2(c) \tag{13}$$

dengan

$$g_1(k/c) = \frac{c^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)\gamma^{\alpha+1}} k^{\alpha} e^{-kc/\gamma}, \quad \alpha > -1, \gamma > 0 \tag{14}$$

adalah konjugat prior gamma yang pertama kali dipakai oleh Papadopaulus(1978), dan selanjutnya oleh Evans dan Ragab (1983) dan Al-Husaini, Mossa dan Jaheen (1992) dimana c diasumsikan diketahui dan

$$g_2(c) = \frac{c^{\delta-1} e^{-c/\beta}}{\Gamma(\delta)\beta^{\delta}}, \qquad c > 0, \delta > 0, \beta > 0 \tag{15}$$

adalah fungsi densitas gamma ($\delta$, $\beta$). Pergandaan $g_1(k/c)$ dan $g_2(c)$ diperoleh densitas prior bersama dari c dan k diberikan dari persamaan (13) sehingga :

$$\begin{aligned} g(c,k) &= \frac{c^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)\gamma^{\alpha+1}} k^{\alpha} e^{-kc/\gamma} \frac{c^{\delta-1} e^{-c/\beta}}{\Gamma(\delta)\beta^{\delta}}, \\ &= A\, c^{\alpha+\delta} k^{\alpha} e^{-(k/\gamma + 1/\beta)}, \qquad c > 0, k > 0 \end{aligned} \tag{16}$$

dimana $\alpha > -1, \delta > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ dan $A = \left[\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\delta)\gamma^{\alpha+1}\beta^{\delta}\right]^{-1}$

dari (6) yaitu fungsi likelihood dan (16) yaitu fungsi densitas prior bersama c dan k sehingga diperoleh fungsi densitas posterior bersama c dan k sebagai berikut :

$$y(c,k;\underline{x}) = \frac{\frac{n!}{(n-r)!} c^r k^r v(c;\underline{x}) e^{-kT} A c^{\alpha+\delta} k^{\alpha} e^{-c\left[\frac{k}{\gamma}+\frac{1}{\beta}\right]}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{n!}{(n-r)!} c^r k^r v(c;\underline{x}) e^{-kT} A c^{\alpha+\delta} k^{\alpha} e^{-c\left[\frac{k}{\gamma}+\frac{1}{\beta}\right]} \, dkdc}$$

Jadi fungsi densitas posterior bersama c dan k yaitu :

$$y(c,k;\underline{x}) = B c^{r+\alpha+\delta} k^{r+\alpha} v(c;\underline{x}) e^{\left\{-\left[k\left(T+\frac{c}{\gamma}\right)+\frac{c}{\beta}\right]\right\}} \quad (17)$$

dengan $B^{-1} = \Gamma(r+\alpha+1)\int_0^\infty c^{r+\alpha+\delta} v(c;\underline{x})\left(T+\frac{c}{\gamma}\right)^{-(r+\alpha+1)} e^{-\frac{c}{\beta}} \, dc, \quad c > 0, k > 0$ (18)

dan $\alpha > -1, \delta > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$

Selanjutnya (17) menghasilkan estimator bayes suatu fungsi u(c,k) dari parameter c dan k dari distribusi Burr(c,k) diberikan sebagai berikut :

$$\hat{U}_B = \int_0^\infty \int_0^\infty u(c,k)\, y(c,k;\underline{x})\, dcdk \quad (19)$$

dimana $y(c, k; \underline{x})$ adalah fungsi densitas posterior yang ditunjukkan pada (17).

Dengan menggunakan fungsi densitas posterior bersama c dan k pada (17) dalam hal ini Al-Husaini dan Jaheen (1992) mengembangkan estimator bayes dari parameter c dan k, yang berdasarkan pada bentuk pendekatan dari perbandingan dua intgeral Lindley (1980).

Estimator bayes $\hat{U}_B$ dari suatu fungsi $u = u(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda_m) \in \Omega$ diberikan di bawah berikut melalui mean posterior.

$$\hat{U}_B = E[u(\lambda)/\underline{x}] = \frac{\int_\Omega u(\lambda) e^{q(\lambda)+\rho(\lambda)}\, d\lambda}{\int_\Omega e^{q(\lambda)+\rho(\lambda)}\, d\lambda} \tag{20}$$

atau $$\hat{U}_B = E[u(\lambda)/\underline{x}] = \frac{\int_\Omega u(\lambda) e^{Q(\lambda)}\, d\lambda}{\int_\Omega e^{Q(\lambda)}\, d\lambda} \tag{21}$$

dengan $\rho(\lambda) = \ln g(\lambda)$, $g(\lambda)$ adalah fungsi densitas prior dan $Q(\lambda) = q(\lambda) + \rho(\lambda)$ adalah logaritma dari fungsi densitas posterior dari $\lambda$ diberikan oleh $\underline{x}$ kecuali untuk konstanta normal. Integral-integral tidak selalu dapat diperoleh dalam bentuk tertutup, bahkan untuk m kecil seperti 2. Melalui perluasan $q(\lambda)$ dan $\rho(\lambda)$ dari (20) kedalam ekpansi deret tailor tentang MLE dari $\lambda$ atau $Q(\lambda)$ dari (21) tentang model posterior. Lindley (1980) mendapatkan suatu bentuk pendekatan dari $\hat{U}_B$. Al-Husaini dan Jaheeri (1992) menggunakan bentuk pendekatan Lindley terhadap MLE dari parameter c dan k dari distribusi Burr(c,k) untuk memperoleh "Estimator Bayesnya".

## 3. Bentuk Pendekatan Dari Lindley

Dalam tulisan ini Lindley (1980) membentuk suatu prosedur pendekatan untuk evaluasi sebuah perbandingan dua integral berbentuk :

$$\frac{\int_\Omega w(\lambda) e^{L(\lambda)}\, d\lambda}{\int_\Omega g(\lambda) e^{L(\lambda)}\, d\lambda} \tag{22}$$

dengan $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \Omega$, merupakan sebuah parameter dan $L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i|\lambda)$ adalah logaritma dari fungsi likelihood untuk n observasi dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$, dengan membentuk sebuah sampel random dari densitas $f(x_i | \lambda)$. Jika $g(\lambda)$ adalah fungsi densitas prior untuk $\lambda$ dan $w(\lambda) = u(\lambda)g(\lambda)$ maka persamaan (22) menghasilkan estimator posterior $u(\lambda)$.

$$\mathbf{E[u(\lambda)/\underline{x}]} = \frac{\int_{\Omega} u(\lambda)e^{L(\lambda)+\rho(\lambda)}\, d\lambda}{\int_{\Omega} e^{L(\lambda)+\rho(\lambda)}\, d\lambda} \tag{23}$$

$$\mathbf{E[u(\lambda)/\underline{x}]} = \frac{\int_{\Omega} u(\lambda)e^{Q(\lambda)}\, d\lambda}{\int_{\Omega} e^{Q(\lambda)}\, d\lambda} \tag{24}$$

Dengan estimator Bayes $u(\lambda)$ di bawah fungsi loss squared error, dimana $\rho(\lambda) = \ln[g(\lambda)]$ dan $Q(\lambda) = L(\lambda) + \rho(\lambda)$ adalah logaritma fungsi densitas posterior $\lambda$ yang menghasilkan $\underline{x}$ kecuali untuk peormalan konstanta. Perluasan $L(\lambda)$ dan $\rho(\lambda)$ dalam persamaan (23) kedalam ekpansi deret tailor tentang MLE $\lambda$, atau $Q(\lambda)$ dalam (24) tentang model posterior $\lambda$.

Dalam kasus dua parameter $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (c, k)$ bentuk pendekatan Lindley direduksi sebagai berikut :

$$\hat{U}_B = u(\lambda) + ½\{A + Q_{30}B_{12} + Q_{21}C_{12} + Q_{12}C_{21} + Q_{03}B_{21}\} \tag{25}$$

dengan $A = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} u_{ij}\tau_{ij}$ $\qquad Q_{\eta\zeta} = \frac{\partial^{\eta+\zeta} Q}{\partial\lambda_1^{\eta}\partial\lambda_2^{\zeta}}, \eta, \zeta = 0,1,2,3, \eta+\zeta = 3$

untuk i , j = 1,2 maka $u_i = \frac{\partial u}{\partial \lambda_i}$ dan untuk $i \neq j$ maka $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j}$

$$B_{ij} = (u_i\tau_{ii} + u_j\tau_{ij})\tau_{ii} \qquad C_{ij} = 3u_i\tau_{ii}\tau_{ij} + u_j(\tau_{ii}\tau_{jj} + 2\tau^2_{ij})$$

$\tau_{ij}$ adalah elemen ke (i , j) dalam invers dari matrik $Q^* = (-Q^*_{ij})$, i , j = 1, 2

sehingga $Q^*_{ij} = \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}$ . Dari (25) untuk diuji pada ($\lambda_1 + \lambda_2$) model dari densitas posterior.

Dalam kasus $(\lambda_1, \lambda_2) \equiv (c, k)$ dan Q logaritma dari fungsi densitas posterior adalah model posterior dinotasikan dengan ($\hat{C}_D$, $\hat{K}_D$) diperoleh melalui penyelesaian secara simultan dua parameter. Karena Q adalah logaritma fungsi densitas posterior maka dari (17) diperoleh

$$Q(c,k;\underline{x}) = (r+\alpha+\delta)\ln c + (r+\alpha)\ln k + (c-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i - \sum_{i=1}^{r}\ln(1+x_i^c) - k(T+\frac{c}{\gamma}) - \frac{c}{\beta} \quad (26)$$

selanjutnya turunan pertama dari persamaan (26) diperoleh :

$$\frac{\partial Q}{\partial c} = \frac{r+\alpha+\delta}{c} + \sum_{i=1}^{r}\ln x_i - \sum_{i=1}^{r}\ln x_i^c a_i - k\left(\frac{\partial T}{\partial c} + \frac{1}{\gamma}\right) - \frac{1}{\beta} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{r+\alpha}{k} - (T + \frac{c}{\gamma}) = 0 \quad (28)$$

Dengan mengsubtitusikan nilai k yang diperoleh dari (28) kedalam (27) kita memperoleh sebuah persamaan non linier dalam c, diberikan h(c) = 0 sebagai berikut :

$$h(c) = \frac{r+\alpha+\delta}{c} + \sum_{i=1}^{r}\ln x_i - \sum_{i=1}^{r}\ln x_i^c a_i - \frac{\gamma(r+\alpha)}{\gamma T + c}\left(\frac{\partial T}{\partial c} + \frac{1}{\gamma}\right) - \frac{1}{\beta} = 0 \quad (29)$$

untuk menunjukkan bahwa fungsi densitas posterior "unimodel" cukup dengan menunjukkan bahwa persamaan h(c) = 0, dimana h(c) yang ditunjukkan pada (29) memiliki sebuah akar tunggal katakan c*. Kemudian menurut (27) bahwa (c*, k*) hanyalah model densitas posterior.

Kita harus menunjukkan bahwa kurva dari fungsi y = h(c) adalah monoton turun, sehingga jika melalui sumbu horizontal c maka kurva akan melalui hanya satu titik katakan c*, sehingga memenuhi h(c*) = 0.

Kurva y = h(c) monoton turun jika dy/dc < 0, untuk setiap nilai c positif.

Dari (8) kita punya $T = \sum_{i}^{r} \ln(1+x_i^c) + (n-r)\ln(1+x_r^c)$

maka
$$\frac{\partial T}{\partial c} = \sum_{i}^{r} x_i^c a_i + (n-r)x_r^c a_r \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial c^2} = \sum_{i}^{r} x_i^c a_i^2 + (n-r)x_r^c a_r^2 \tag{31}$$

dengan
$$a_i = \frac{\ln x_i}{1+x_i^c}, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, r \tag{32}$$

Dari persamaan (29 ) turunan pertamanya diperoleh :

$$\frac{\partial y}{\partial c} = -\frac{r+\alpha+\delta}{c^2} - \sum_{i}^{r} x_i^c a_i^2 - \frac{\gamma(r+\alpha)}{\gamma T + c}\frac{\partial^2 T}{\partial c^2} + \frac{r+\alpha}{(\gamma T + c)^2}\left[1+\gamma\frac{\partial T}{\partial c}\right]^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial c} = -[A_1 + A_2 - A_3] \tag{33}$$

dimana untuk setiap nilai c positif

$$A_1 = \frac{r+\alpha+\delta}{c^2} + \sum_{i}^{r} x_i^c a_i^2 > 0 \qquad A_2 = \frac{\gamma(r+\alpha)}{\gamma T + c}\frac{\partial^2 T}{\partial c^2} > 0$$

$$A_3 = \frac{r+\alpha}{(\gamma T + c)^2}\left[1+\gamma\frac{\partial T}{\partial c}\right]^2 > 0 \tag{34}$$

Karena itu, jika $A_1 + A_2 > A_3$, maka $\frac{dy}{dc} < 0$, untuk setiap c > 0.

Dari relasi-relasi (34) dapat ditunjukkan bahwa $A_1 + A_2 = \eta_1 + \eta_2 A_3$ (35)

dengan $\eta_1 = \dfrac{\delta}{c^2} + \sum_{i}^{r} x_i^c a_i^2 > 0$ (36)

$$\eta_2 = \left[\frac{c+\gamma T}{1+\gamma\dfrac{\partial T}{\partial c}}\right]^2 \left[\frac{1}{c^2} + \frac{\gamma}{c+\gamma T}\frac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right] \tag{37}$$

menurut persamaan (34), (36) dan (37) bahwa $\eta_2 > 1$ maka $A_1 + A_2 > A_3$.

Dari persamaan (37) bahwa $\eta_2$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\eta_2 = \left[\frac{1+\dfrac{\gamma T}{c}}{1+\gamma\dfrac{\partial T}{\partial c}}\right]^2 \left[1 + \frac{\gamma c^2}{c+\gamma T}\frac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right]$$

dari sini suku kedua dari $\eta_2$ yaitu $\left[1 + \dfrac{\gamma c^2}{c+\gamma T}\dfrac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right]$ selalu lebih dari 1 untuk

$\left[\dfrac{\gamma c^2}{c+\gamma T}\dfrac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right] > 0$ untuk setiap nilai c positif (c>0)

Jika $T - c\dfrac{\partial T}{\partial c} > 0$, untuk setiap c positif maka $\eta_2 > 1$ (38)

Dari persamaan (38) dapat dicatat bahwa untu $x_i > 0$, untuk setiap i = 1, 2,...,r

maka, $\left(1+x_i^c\right)\left[1+\dfrac{1}{x_i^c}\right]^{x_i^c} > 1,\ x_i > 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, r$

$$\left(1+x_i^c\right)\left[\frac{x_i^c+1}{x_i^c}\right]^{x_i^c} > 1$$

$$\left(1+x_i^c\right)\left[1+x_i^c\right]^{x_i^c} > \left(x_i^c\right)^{x_i^c}$$

$$\left(1+x_i^c\right)^{1+x_i^c} \rangle \left(x_i^c\right)^{x_i^c}$$

$$(1+x_i^c)\ln(1+x_i^c) \rangle x_i^c \ln x_i^c$$

$$\ln(1+x_i^c) \rangle \frac{c x_i^c \ln x_i}{1+x_i^c}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \ln(1+x_i^c) \rangle \sum_{i=1}^{r} \frac{c x_i^c \ln x_i}{1+x_i^c}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \ln(1+x_i^c) - c\sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^c \ln x_i}{1+x_i^c} \rangle 0 \qquad (39)$$

disamping itu diperoleh $(n-r)\left[\ln(1+x_r^c) - c x_r^c \frac{\ln x_r}{1+x_r^c}\right] \rangle 0$ (40)

Jadi pernyataan (38) diperoleh dengan menambahkan (39) kedalam (40). Oleh karena $\eta_2 > 1$ dan dari persamaan (35) dengan (36) sehingga $A_1 + A_2 > A_3$. Dari sini mengakibatkan (33) terbukti bahwa $\frac{dy}{dc} < 0$, untuk setiap c positif.

Sekarang dapat ditunjukkan bahwa h(c) kontinu pada $(0, \infty)$, bahwa h(c) menuju $+\infty$ Jika $c \to 0^+$ dan menuju suatu nilai negatif jika $c \to \infty$. Karena pada $(0, \infty)$ h(c) adalah fungsi kontinu secara monoton turun dari nilai positif ke nilai negatif, maka kurva $y = h(c)$ pasti akan memotong sumbu c secara horizontal tepat pada satu titik katakan $c^*$. Dari persamaan (28) diperoleh bahwa $k^* = \frac{\gamma(r+\alpha)}{c+\gamma T}$ diujikan pada $c^*$ merupakan nilai yang terkait dengan $c^*$ karena itu $(c^*, k^*)$ merupakan model tunggal densitas posterior $y(c,k \mid x)$.

Sekarang untuk mengaplikasikan bentuk Lindley dari persamaan (25) pertama kita peroleh elemen-elemen $\tau_{ij}$ dari matrik invers $Q^{*} = (-Q^{*}_{ij})$, i, j = 1,2 sebagai berikut. Dari (26) yaitu

$$Q(c,k;\underline{x}) = (r+\alpha+\delta)\ln c + (r+\alpha)\ln k + (c-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i - \sum_{i=1}^{j}\ln(1+x_i^c) - k(T+\frac{c}{\gamma}) - \frac{c}{\beta}$$

dan karena $Q_{\eta\zeta} = \dfrac{\partial^{\eta+\zeta}Q}{\partial c^{\eta}\partial k^{\zeta}}$, $\eta,\zeta = 0,1,2,3,\quad \eta+\zeta = 3$

sehingga dipareoleh :

$$Q_{01} = \frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{r+\alpha}{k} - (T+\frac{c}{\gamma})$$

$$Q_{02} = \frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} = -\left(\frac{r+\alpha}{k^2}\right) = Q^{*}_{22}$$

$$Q_{03} = \frac{\partial^3 Q}{\partial k^3} = 2\frac{r+\alpha}{k^3}$$

$$Q_{10} = \frac{\partial Q}{\partial c} = \frac{r+\alpha+\delta}{c} + \sum_{i=1}^{r}\ln x_i^{?} - \sum_{i=1}^{r?} x_i^c a_i - k\left[\frac{\partial T}{\partial c} + \frac{1}{\gamma}\right] - \frac{1}{\beta}$$

$$Q_{20} = \frac{\partial^2 Q}{\partial c^2} = -\frac{r+\alpha+\delta}{c^2} - \sum_{i=1}^{r} x_i^c a_i^2 - k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right]$$

dengan mengsubtitusikan (30) dan (31) ke dalam $Q_{20} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial c^2}$ maka diperoleh :

$$Q_{20} = \frac{\partial^2 Q}{\partial c^2} = -\frac{r+\alpha+\delta}{c^2} - \sum_{i=1}^{r} x_i^c a_i^2 - k\ \{\sum_{i}^{r} x_i^c a_i^2 + (n-r)x_r^c a_r^2\}$$

$$Q_{20} = \frac{\partial^2 Q}{\partial c^2} = -\frac{r+\alpha+\delta}{c^2} - (k+1)\sum_{i=1}^{r} x_i^c a_i^2 - (n-r)k x_r^c a_r^2 = Q^{*}_{11}$$

$$Q_{30} = \frac{\partial^3 Q}{\partial c^3} = 2\frac{r+\alpha+\delta}{c^3} - (k+1)\sum_{i=1}^{r} x_i^c(1-x_i^c)a_i^3 - (n-r)k x_r^c(1-x_r^c)a_r^3$$

$$Q_{30} = \frac{\partial^3 Q}{\partial c^3} = 2\frac{r+\alpha+\delta}{c^3} - s$$

dengan $s = (k+1)\sum_{i=1}^{r} x_i^c(1-x_i^c)a_i^3 + (n-r)kx_r^c(1-x_r^c)a_r^3$

selanjutnya diperoleh :

$$Q_{11} = \frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial k} = -\left[\frac{\partial T}{\partial c} + \frac{1}{\gamma}\right] = -\sum_{i=1}^{r} x_i^c a_i - (n-r)x_r^c a_r - \frac{1}{\gamma} = Q_{12}^* = Q_{21}^*$$

$$Q_{12} = \frac{\partial^3 Q}{\partial c \partial k^2} = 0$$

$$Q_{21} = \frac{\partial^3 Q}{\partial c^2 \partial k} = -\left[\frac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right] = -\sum_{i=1}^{r} x_i^c a_i^2 - (n-r)x_r^c a_r^2$$

Dari relasi-relasi diatas diperoleh $Q^* = \left(-Q_{ij}^*\right) = -\begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* \\ Q_{21}^* & Q_{22}^* \end{bmatrix}$

dengan $Q_{11}^* = \frac{\partial^2 Q}{\partial c^2} = -\frac{r+\alpha+\delta}{c^2} - M = -\frac{r+\alpha+\delta+Mc^2}{c^2}$

$$Q_{22}^* = -\frac{r+\alpha}{k^2}$$

$$Q_{21}^* = Q_{12}^* = -B$$

dan dengan $a_i = \frac{\ln x_i}{1+x_i^c}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, r$

$$N = \sum_{i=1}^{r} x_i^c a_i^2$$

$$M = (k+1)N + (n-r)kx_r^c a_r^2$$

$$B = \sum_{i=1}^{r} x_i^c a_i + (n-r)x_r^c a_r + \frac{1}{\gamma}$$

519.2
PUT
p

akibatnya $Q^* = \left(-Q^*_{ij}\right) = \begin{bmatrix} \frac{r+\alpha+\delta+Mc^2}{c^2} & B \\ B & \frac{r+\alpha}{k^2} \end{bmatrix}$ (41)

$$D = c^2k^2 \det Q^* = \frac{c^2k^2[(r+\alpha+\delta+Mc^2)(r+\alpha)-(Bck)^2]}{c^2k^2}$$

$$D = (r+\alpha+\delta+Mc^2)(r+\alpha)-(Bck)^2$$

Jadi $\sigma = (\sigma_{ij}) = \frac{c^2k^2}{D}\begin{bmatrix} \frac{r+\alpha}{k^2} & -B \\ -B & \frac{r+\alpha+\delta+Mc^2}{c^2} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{c^2(r+\alpha)}{D} & \frac{-c^2k^2B}{D} \\ \frac{-c^2k^2B}{D} & \frac{k^2(r+\alpha+\delta+Mc^2)}{D} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = -\frac{c^2(r+\alpha)}{D}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{Bc^2k^2}{D}, \quad \sigma_{22} = \frac{k^2(r+\alpha+\delta+Mc^2)}{D}$$

dan $Q_{12} = 0$, $Q_{21} = \frac{(M-N)}{k}$, $Q_{03} = \frac{2(r+\alpha)}{k^3}$, $Q_{30} = \frac{2(r+\alpha+\delta)}{c^3} - s$

Subtitusikan nilai-nilai diatas dalam persamaan (25) menghasilkan estimator Bayes. Menggunakan metode Lindley ditulis $\hat{U}_{BL}$ dari suatu fungsi $u = u(c,k)$

ditunjukkan dengan $\hat{U}_{BL} = E[u(c,k)\,|\,x] = u(c,k) + -\frac{W}{2D} + \frac{cW_1u_1 + kW_2u_2}{2D^2}$ (42)

dengan : $W = c^2\,[(r+\alpha)u_{11} - Bk^2(u_{12}+u_{21})] + k^2(r+\alpha+\delta+Mc^2)u_{22}$

$W_1 = (r+\alpha)^2[2(r+\alpha+\delta) - sc^3] + 3(M-N)Bkc^3(r+\alpha) - 2Bkc(r+\alpha)(r+\alpha+\delta+Mc^2)$

$W_2 = 2(r+\alpha)(r+\alpha+\delta+Mc^2)^2 - Bkc(r+\alpha)[2(r+\alpha+\delta) - sc^3] - 2B^2k^2c^4(M-N)$

$- \; c^2(r+\alpha)(M-N)\,(r+\alpha+\delta+Mc^2)$

**Kejadian-kejadian khusus**

1). Jika dalam (42) untuk $u(c,k) = c$ maka diperoleh :

$u_1 = \frac{\partial u}{\partial c} = 1$, sedangkan turunan yang lain sama dengan nol. Subtitusikan nilai-nilai diatas pada (42) sehingga $\hat{U}_{BL} = c + \frac{cW_1 1}{2D^2} = c\,(1 + \frac{W_1}{2D^2})$

Akibatnya $\hat{C}_{BL} = c\,(1 + \frac{W_1}{2D^2})$ nilai pada $(\hat{C}_D, \hat{K}_D)$

2). Jika dalam persamaan (42) untuk $u(c,k) = k$ maka diperoleh :

$u_2 = \frac{\partial u}{\partial k} = 1$, sedangkan turunan yang lain sama dengan nol. Subtitusikan nilai-nilai di atas pada (42) sehingga $\hat{U}_{BL} = k + \frac{kW_2 1}{2D^2} = k(1 + \frac{W_2}{2D^2})$

Akibatnya $\hat{K}_{BL} = k(1 + \frac{W_2}{2D^2})$ nilai pada $(\hat{C}_D, \hat{K}_D)$

3). Jika dalam (42) untuk $u(c,k) = R(t) = (1 + t^c)^{-k}$, maka diperoleh

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial c} = \frac{-k\ln(1+t^c)}{(1+t^c)^{k+1}} = R(t)\frac{-k\ln(1+t^c)}{(1+t^c)},$$

$$u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = \frac{k^2 t^{2c}\ln^2 t - kt^c \ln^2 t}{(1+t^c)^{k+2}} = R(t)\frac{k^2 t^{2c}\ln^2 t - kt^c \ln^2 t}{(1+t^c)^2}$$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial k} = -(1+t^c)^{-k}\ln(1+t^c) = -R(t)\ln(1+t^c)$$

$$u_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial k^2} = (1+t^c)^{-k}\ln^2(1+t^c) = R(t)\ln^2(1+t^c)$$

$$u_{21} = \frac{\partial^2 u}{\partial k \partial c} = u_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial k} =$$

$$\frac{kt^c \ln t \ln(1+t^c) - t^c \ln t}{(1+t^c)^{k+1}} = R(t)\frac{kt^c \ln t \ln(1+t^c) - t^c \ln t}{(1+t^c)}$$

Subtitusikan nilai-nilai di atas pada (42) sehingga

$$\hat{U}_{BL} = R(t) + \frac{W}{2D} + \frac{1}{2D^2}\left[cw_1 R(t)\frac{-kt^c \ln t}{(1+t^c)} + kw_2\{-R(t)\ln(1+t^c)\}\right]$$

dengan $W = c^2\ [(r+\alpha)R(t)\dfrac{k^2t^{2c}\ln^2 t - kt^c\ln^2 t}{(1+t^c)^2} - 2Bk^2R(t)\dfrac{kt^c \ln t \ln(1+t^c) - t^c \ln t}{(1+t^c)}]$

$$+ k^2(r+\alpha+\delta+Mc^2)R(t)\ln^2(1+t^c)$$

$$= R(t)c^2[(r+\alpha)kt^c(kt^c-1)\left(\frac{\ln t}{1+t^c}\right)^2 - 2Bk^2\{k\ln(1+t^c)-1\}\frac{t^c \ln t}{1+t^c}]$$

$$+ k^2(r+\alpha+\delta+Mc^2)R(t)\ln^2(1+t^c)$$

$$\hat{R}_{BL}(t) = R(t)\left[1 + \frac{z_1}{2D} + (c-\hat{C}_{BL})\frac{kt^c \ln t}{1+t^c} + (k-\hat{K}_{BL})\ln(1+t^c)\right] \text{ nilai pada } (\hat{C}_D, \hat{K}_D)$$

dimana $z_1 = c^2[(r+\alpha)kt^c(kt^c-1)\left(\frac{\ln t}{1+t^c}\right)^2 - 2Bk^2\{k\ln(1+t^c)-1\}\frac{t^c \ln t}{1+t^c}]$

$$+ k^2(r+\alpha+\delta+Mc^2)[\ln(1+t^c)]^2$$

4). Jika dalam (42) untuk $u(c,k) = H(t) = \dfrac{ckt^{c-1}}{1+t^c}$ maka diperoleh :

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial c} = \frac{kt^{c-1}(1+t^c+c\ln t)}{(1+t^c)^2} = H(t)\frac{1+t^c+c\ln t}{c(1+t^c)} = H(t)[\frac{1}{c} + \frac{\ln t}{1+t^c}]$$

$$u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = \frac{kt^{c-1}[2\ln t(1+t^c) + c\ln^2 t(1-t^c)}{(1+t^c)^3} = H(t)\left[\frac{2\ln t}{c(1+t^c)} + \left(\frac{\ln t}{1+t^c}\right)^2(1-t^c)\right]$$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial k} = \frac{ct^{c-1}}{(1+t^c)} = H(t)\frac{1}{k}$$

$$u_{21} = \frac{\partial^2 u}{\partial k \partial c} = u_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial c \partial k} = \frac{t^{c-1}(1+t^c + c\ln t)}{(1+t^c)^2} = H(t)[\frac{1}{ck} + \frac{\ln t}{k(1+t^c)}]$$

$$u_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial k^2} = 0$$

Subtitusikan nilai-nilai di atas pada (42) sehingga

$$\hat{U}_{BL} = E[u(c,k)\,|\,x] = H(t) + \frac{W}{2D} + \frac{1}{2D^2}\left[cw_1 H(t)[\frac{1}{c} + \frac{\ln t}{1+t^c}] + kw_2 H(t)\frac{1}{k}\right]$$

dengan $W = c^2[(r+\alpha)\,H(t)[\frac{2\ln t}{c(1+t^c)} + \left(\frac{\ln t}{1+t^c}\right)^2(1-t^c)] - 2Bk^2 H(t)[\frac{1}{ck} + \frac{\ln t}{k(1+t^c)}]]$

$$\hat{H}_{BL}(t) = H(t)\left[1 + \frac{c^2 z_2}{2D} - \left(\frac{1}{c} + \frac{\ln t}{1+t^c}\right)(c - \hat{C}_{BL}) - \frac{1}{k}(k - \hat{K}_{BL})\right] \text{nilai pada } (\hat{C}_D, \hat{K}_D)$$

dimana $z_2 = (r+\alpha)[\frac{2\ln t}{c(1+t^c)} + (\frac{\ln t}{1+t^c})^2(1-t^c)] - 2Bk[\frac{1}{c} + \frac{\ln t}{1+t^c}]$

# IV. PENUTUP

## 1. Kesimpulan

Sesuai dengan permasalahan yang diajukan, berdasarkan hasil penelitian yang telah dibahas pada pembahasan dapat dikemukakan beberapa kesimpulan sebagai berikut :

Dalam menyelesaikan persamaan likelihood dua non linier dipergunakan metode iterasi seperti Newton-Raphson, sehingga menghasilkan MLE dari c dan k ditulis $\hat{C}_{ML}$ dan $\hat{K}_{ML}$. Sedangkan MLE dari R(t) dan H(t) yang diberikan masing-masing oleh (3) dan (4) setelah mengganti c dan k dengan $\hat{C}_{ML}$ dan $\hat{K}_{ML}$.

Dibawah asumsi bahwa kedua parameter tidak diketahui, dalam hal ini Al-Husaini dan Jaheen (1992) mengusulkan untuk mendapatkan fungsi densitas posterior bersama c dan k, digunakan densitas prior bersama c dan k diberikan oleh $g(c,k) = A\, c^{\alpha+\delta}\, k^{\alpha}\, e^{-(k/\gamma + 1/\beta)}, \quad c > 0, k > 0$

dimana $\alpha > -1, \delta > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ dan $A = \left[\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\delta)\gamma^{\alpha+1}\beta^{\delta}\right]^{-1}$

Dengan menggabungkan fungsi likelihood dengan fungsi densitas prior bersama c dan k diperoleh fungsi densitas posterior bersama c dan k sebagai berikut:

$$y(c,k;\underline{x}) = B\, c^{r+\alpha+\delta} k^{r+\alpha} v(c;\underline{x}) e^{\left\{-\left[k\left(T+\frac{c}{\gamma}\right)+\frac{c}{\beta}\right]\right\}}$$

dengan $B^{-1} = \Gamma(r+\alpha+1)\int_0^\infty c^{r+\alpha+\delta} v(c;\underline{x}) \left(T+\frac{c}{\gamma}\right)^{-(r+\alpha+1)} e^{-\frac{c}{\beta}}\, dc, c > 0, k > 0$

dan $\alpha > -1,\ \delta > 0,\ \beta > 0, \gamma > 0.$

Selanjutnya menghasilkan estimator Bayes suatu fungsi u(c,k) dari parameter c dan k dari distribusi Burr(c,k) tipe XII diberikan sebagai berikut :

$$\hat{U}_B = \int_0^\infty \int_0^\infty u(c,k)\, y(c,k;\underline{x})\, dcdk$$

dimana y(c, k; $\underline{x}$) adalah fungsi densitas posterior yang ditunjukkan pada Integral-integral tidak selalu dapat diperoleh dalam bentuk tertutup, bahkan untuk m kecil seperti 2. Al-Husaini dan Jaheen (1992) menggunakan bentuk pendekatan Lindley terhadap MLE dari parameter c dan k dari distribusi Burr(c,k) untuk memperoleh "Estimator Bayesnya".

Dalam kasus dua parameter $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ bentuk pendekatan Lindley direduksi sebagai berikut :

$$\hat{U}_B = u(\lambda) + \tfrac{1}{2}\{A + Q_{30}B_{12} + Q_{21}C_{12} + Q_{12}C_{21} + Q_{03}B_{21}\}$$

dengan $A = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} u_{ij}\tau_{ij}$ $\quad Q_{\eta\zeta} = \dfrac{\partial^{\eta+\zeta}Q}{\partial\lambda_1^{\eta}\partial\lambda_2^{\zeta}}, \eta,\zeta = 0,1,2,3, \eta+\zeta = 3$

untuk i , j = 1,2 maka $u_i = \dfrac{\partial u}{\partial\lambda_i}$ dan untuk $i \neq j$ maka $u_{ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}$

$$B_{ij} = (u_i\tau_{ii} + u_j\tau_{ij})\tau_{ii} \qquad C_{ij} = 3u_i\tau_{ii}\tau_{ij} + u_j(\tau_{ii}\tau_{jj} + 2\tau^2_{ij})$$

$\tau_{ij}$ adalah elemen ke (i , j) dalam invers dari matrik $Q^* = (-Q^*_{ij})$, i , j = 1, 2 maka $Q^*_{ij} = \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}$ untuk diuji pada $(\lambda_1+\lambda_2)$ model dari densitas posterior.

Dalam kasus $(\lambda_1, \lambda_2) \equiv (c, k)$ dan Q logaritma dari fungsi densitas posterior dan adalah model posterior dinotasikan dengan $(\hat{C}_D, \hat{K}_D)$ diperoleh melalui penyelesaian secara simultan dua parameter sehingga diperoleh

$$\hat{U}_{BL} = E[u(c,k) \mid x] = u(c,k) + -\frac{W}{2D} + \frac{cW_1u_1 + kW_2u_2}{2D^2}$$

dengan : $W = c^2\,[(r+\alpha)u_{11} - Bk^2(u_{12}+u_{21})] + k^2(r+\alpha+\delta+Mc^2)u_{22}$

$W_1 = (r+\alpha)^2[2(r+\alpha+\delta) - sc^3] + 3(M-N)Bkc^3(r+\alpha) - 2Bkc(r+\alpha)(r+\alpha+\delta+Mc^2)$

$W_2 = 2(r+\alpha)(r+\alpha+\delta+Mc^2)^2 - Bkc(r+\alpha)[2(r+\alpha+\delta) - sc^3] - 2B^2k^2c^4(M-N)$

$\quad - c^2(r+\alpha)(M-N)\,(r+\alpha+\delta+Mc^2)$

Kejadian-kejadian khusus

1). Jika dalam persamaan (42) untuk $u(c,k) = c$ maka diperoleh :

$$\hat{C}_{BL} = c\,(1 + \frac{W_1}{2D^2})\ \text{nilai pada}\ (\hat{C}_D, \hat{K}_D)$$

2). Jika dalam persamaan (42) untuk $u(c,k) = k$ maka diperoleh :

$$\hat{K}_{BL} = k(1 + \frac{W_2}{2D^2})\ \text{nilai pada}\ (\hat{C}_D, \hat{K}_D)$$

3). Jika dalam persamaan (42) untuk $u(c,k) = R(t) = (1 + t^c)^{-k}$, maka diperoleh

$$\hat{R}_{BL}(t) = R(t)\left[1 + \frac{z_1}{2D} + (c - \hat{C}_{BL})\frac{kt^c \ln t}{1+t^c} + (k - \hat{K}_{BL})\ln(1+t^c)\right]\ \text{nilai pada}\ (\hat{C}_D, \hat{K}_D)$$

dimana $z_1 = c^2[(r+\alpha)kt^c(kt^c - 1)(\frac{\ln t}{1+t^c})^2 - 2Bk^2\{k\ln(1+t^c) - 1\}\frac{t^c \ln t}{1+t^c}]$

$\quad + k^2(r+\alpha+\delta+Mc^2)[\ln(1+t^c)]^2$

4). Jika dalam persamaan (42) untuk $u(c,k) = H(t) = \frac{ckt^{c-1}}{1+t^c}$ maka diperoleh :

$$\hat{H}_{BL}(t) = H(t)\left[1 + \frac{c^2 z_2}{2D} - \left(\frac{1}{c} + \frac{\ln t}{1+t^c}\right)(c - \hat{C}_{BL}) - \frac{1}{k}(k - \hat{K}_{BL})\right]\text{nilai pada}\ (\hat{C}_D, \hat{K}_D)$$

dimana $z_2 = (r+\alpha)\left[\frac{2\ln t}{c(1+t^c)} + \left(\frac{\ln t}{1+t^c}\right)^2 (1-t^c)\right] - 2Bk\left[\frac{1}{c} + \frac{\ln t}{1+t^c}\right]$

**2. Saran**

Diharapkan adanya penelitian lebih lanjut yang menyangkut estimator Bayes pada distribusi Burr(c,k), khususnya menggunakan bentuk pendekatan Lindley, sehingga akan memberikan landasan ilmiah yang lebih luas dan kuat, serta mendukung pemakaian nyata pada perkembangan teknologi.

Diharapkan adanya penelitian yang serupa yang mengkaitkan penerapan pendekatan estimator Bayes pada distribusi Burr(c,k) dengan inferensi Bayesian sehingga pemahaman tentang konsep-konsep yang disajikan dapat dengan mudah diaplikasikan dan dipakai oleh pengguna statistik.

## DAFTAR PUSTAKA


**Al-Hussaini, E. K. and Jaheen, Z. F.**(1992). Bayesian estimation of the parameter reliability and failure rate fungctions of the Burr type XII failure model. *J. Statist. Comput. Simul.*, 41, 31 – 40.

**Al-Hussaini, E. K., Moussa, M. A. and Jaheen, Z. F.** (1992). Estimation under the Burr type XII failure model based on censored data : A comparative study. *Test,* 1, 33 – 42.

**Al-Hussaini, E. K., Moussa, M. A. and Jaheen, Z. F.** (1995). Bayesian prediction bounds for the Burr type XII failure model. *Comm. Statist. Theory Meethods* 24 (7) 1829 – 1842.

**Bain, L. J. and Engelhardt, M.**(1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* Duxbury, Belmont California.

**Berger, J. O.** (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analisis,* Springer-Verlag, New york.

**Burr, I. W.** (1942). Cumulative freguency functions. *Ann. Math. Statist.* 13, 215-232.

**De Bruijn, N.G.**(1961). *Asymptotic Methods in Analysis.* Amsterdam: North-Holland

**Evans, I. G. and Ragab, A. S.** (1983). Bayesian inferences given a type-2 censored sample from Burr distribution. *Commun. Statist. Theor.-Meth.*, 12, 1569-1580.

**Lindley, D. V.** (1980). Approximate Bayesian method. *Trabajos de Estadistica,* 31, 223 – 237.

**Papadopoulos, A. S.**(1978). The Burr distribution as a failure model from a Bayesian approach. *IEEE trans. Rel.*, R-5, 369-371.

**Raussas, G.G.** (1973). *A First Course in Mathematical Statistics;* Addison Wesley Publishing Company, Inc. Taipei-Taiwan.

**Tierney, L. and Kadane, J. B.** (1986). Accurate approximations for posterior moments and marginal densities. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 81, 82-86.

**Soejoeti, Z dan Subanar,** (1988). *Inferensi Bayesian.* Jakarta, universitas terbuka.