Pengadaan Buku Ajar
No. 060/PUNP/2000

ANALISIS RIIL 2

Oleh :

Drs. Yerizon, M.Si

Editor :

Drs. Mukh

FAK. MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG

DIP Universitas Negeri Padang
Nomor : 071/XXIII/008/4/--/1999
Tanggal : 1 April 1999

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah memberikan rahmat dan karuniaNya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar " Analisis Riil 2" ini.

Buku ajar ini penulis susun dengan maksud agar mahasiswa pengikut mata kuliah Analisis Riil 2 dapat lebih mudah mempelajari dan memahami materi mata kuliah ini, karena materi Analisis Riil agak sulit dipahami dibandingkan dengan materi matematika lainnya. Untuk itu buku ajar ini disusun sedemikian rupa sehingga lebih mudah dipahami.

Untuk setiap kegiatan belajar dalam buku ajar ini disediakan latihan sekaligus dengan jawabannya yang bertujuan untuk melatih mahasiswa dalam memahami konsep yang terkandung dalam setiap kegiatan belajar. Di samping itu, setiap kegiatan belajar juga dibuatkan ringkasan dari materi yang dibahas. Setiap akhir kegiatan belajar disediakan tes formatif, yang bertujuan untuk menguji kemampuan mahasiswa tentang materi yang sedang dipelajarinya.

Disamping manfaat bagi mahasiswa, diharapkan buku ajar ini juga bermanfaat bagi dosen yang mengajarkan mata kuliah ini. Karena materi dalam buku ajar ini telah dibagi atas beberapa kegiatan belajar, yang dilengkapi dengan tujuan pembelajaran umum dan tujuan pembelajaran khusus.

Dalam menyelesaikan buku ajar ini, penulis banyak mendapatkan bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu pada kesempatan ini penulis ucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. Mukhni, M. Pd, sebagai editor dalam penulisan buku ajar ini.
2. Bapak Drs. Edwin Musdi, M. Pd, sebagai Ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang.
3. Bapak Drs. H. Idrus Ramli, sebagai Dekan FMIPA Universitas Negeri Padang.
4. Bapak Drs. Amran Gambut, M. A, sebagai Pimpinan Proyek Universitas Negeri Padang.

Dan semua pihak yang telah ikut membantu dalam penyelesaian buku ajar ini. Semoga semua jasa baik beliau dibalasi oleh Allah SWT, Amin.

Penulis menyadari, bahwa buku ajar ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak, demi kesempurnaan buku ajar ini pada edisi-edisi berikutnya.

Akhirnya penulis mengharapkan agar buku ajar ini dapat bermanfaat sebagai mana mestinya.

Padang, Januari 2000

Penulis

DAFTAR ISI

	hal
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
BAB I LIMIT FUNGSI	1
A. Pengantar	1
B. Tujuan Intruksional Umum	1
C. Tujuan Intruksional Khusus	1
D. Uraian Materi Kegiatan	2
1. Limit Fungsi	2
2. Teorema-teorema Limit	18
3. Perluasan Konsep Limit	32
BAB II FUNGSI KONTINU	50
A. Pengantar	50
B. Tujuan Intruksional Umum	50
C. Tujuan Intruksional Khusus	50
D. Uraian Materi Kegiatan	51
1. Fungsi Kontinu	51
2. Kombinasi Fungsi Kontinu	60
3. Fungsi Kontinu Pada Interval	68
4. Kontinu Seragam	81
5. Fungsi Monoton dan Invers	94
DAFTAR KEPUSTAKAAN	104

BAB I

LIMIT FUNGSI

A. Pengantar

Konsep limit sangat penting dalam matematika, karena banyak topik-topik matematika yang memerlukan konsep limit. Pada bab ini kita akan menyajikan konsep limit secara formal. Setelah itu kita akan menentukan kriteria atau kondisi yang harus dipenuhi agar suatu fungsi mempunyai limit di suatu titik.

Dalam menghitung limit kita akan menggunakan aturan-aturan atau sifat-sifat yang akan diberikan pada pasal 1.2. Diantaranya penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan kelipatan dari beberapa limit fungsi.

Pada bagian akhir dari bab ini kita akan memperluas konsep-konsep limit. Perluasan tersebut antara lain limit satu sisi (one-sided), limit tak hingga, dan limit di tak hingga. Materi ini akan dipelajari selama 7 pertemuan.

B. Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu menguasai konsep limit dan trampil menggunakannya dalam soal-soal.

C. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu

- membuktikan limit suatu fungsi dengan menggunakan definisi limit yaitu dengan menggunakan ε-δ.
- membuktikan limit suatu fungsi dengan menggunakan konsep barisan.
- membuktikan suatu fungsi tidak mempunyai limit di suatu titik
- membuktikan sifat-sifat limit suatu fungsi dengan menggunakan ε-δ.
- menggunakan teorema apit dalam menghitung limit suatu fungsi.
- membuktikan suatu soal dengan menggunakan sifat-sifat limit.

- membuktikan limit kanan dari suatu fungsi yang mempunyai limit kanan.
- membuktikan limit kiri dari suatu fungsi yang mempunyai limit kiri.
- membuktikan soal-soal dengan menggunakan konsep perluasan limit.

D. Uraian Materi Kegiatan

1.1 Limit Fungsi

1.1.1 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $c \in R$.

Titik c disebut titik cluster (timbun) dari A jika untuk setiap $\delta > 0$ maka ada lingkungan-δ, $V_\delta(c) = (c-\delta, .c+\delta)$, dari c memuat paling sedikit satu titik dari A yang berbeda dengan c atau $[V_\delta(c) \cap A] \setminus \{c\} \neq \varnothing$.

Perlu dicatat bahwa titik c mungkin anggota A mungkin juga tidak anggota A.

1.1.2Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $c \in R$.

Titik c disebut titik cluster (timbun) dari A jika dan hanya jika terdapat barisan (a_n) di A dengan $a_n \neq c$, $\forall n \in N \ni \lim (a_n) = c$.

Bukti.

($\Rightarrow$). Misalkan c adalah titik cluster (timbun) dari A.

Maka untuk setiap $n \in N$, $[V_{1/n}(c) \cap A] \setminus \{c\} \neq \varnothing$ atau $[(c-1/n, c+1/n) \cap A] \setminus \{c\} \neq \varnothing$.

Maka terdapat suatu titik di $[V_{1/n}(c) \cap A] \setminus \{c\}$. Misalkan titik tersebut a_n maka

$a_n \in A$ dan $a_n \neq c$ dan $\lim (a_n) = c$.

($\Leftarrow$). Misalkan terdapat barisan (a_n) di A dengan $a_n \neq c$, $\forall n \in N \ni \lim(a_n) = c$.

Karena $\lim(a_n) = c$ maka $\forall \delta > 0$, $\exists K(\delta) \in N \ni \forall n \geq K(\delta)$ berlaku $|a_n - c| < \delta$.

Atau $-\delta < a_n - c < \delta$ atau $c - \delta < a_n < c + \delta$.

Jadi $a_n \in (c-\delta, c+\delta)$. Akibatnya $[(c-\delta, c+\delta) \cap A] \setminus \{c\} \neq \varnothing$.

Jadi terbukti bahwa c adalah titik cluster dari A.

1.1.3 Definisi

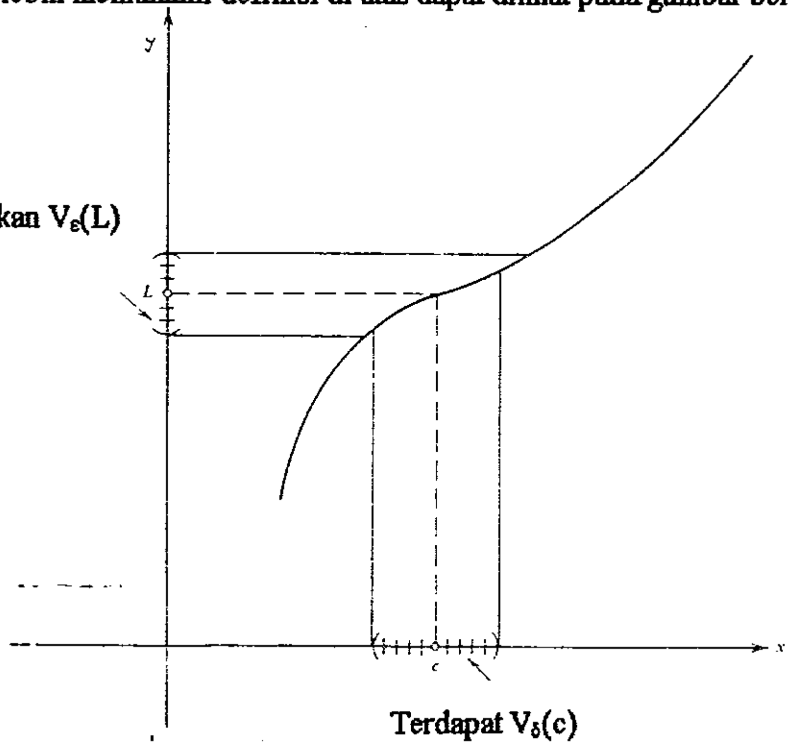
Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \rightarrow R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Bilangan L disebut limit dari f di c jika untuk setiap lingkungan-ε, $V_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, dari L terdapat sebuah lingkungan-δ, $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ dari c sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, $x \neq c$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Jika L adalah limit dari f di c untuk x mendekati c, biasa ditulis dengan $f(x) \rightarrow L$ apabila $x \rightarrow c$ atau $\lim_{x \to c} f = L$.

Untuk lebih memahami definisi di atas dapat dilihat pada gambar berikut.

Diberikan $V_\varepsilon(L)$



Terdapat $V_\delta(c)$

1.1.4 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \rightarrow R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Jika $\lim_{x \to c} f$ ada, maka $\lim_{x \to c} f$ tunggal.

Bukti.

Andaikan $\lim\limits_{x \to c} f$ tidak tunggal.

Misalkan $\lim\limits_{x \to c} f = L_1$ dan $\lim\limits_{x \to c} f = L_2$ dengan $L_1 \neq L_2$.

Karena $\lim\limits_{x \to c} f = L_1$ maka $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$. (*)

Karena $\lim\limits_{x \to c} f = L_2$ maka $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$. (**)

Pilih $\varepsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{3}$.

Maka dari (*) dan (**) diperoleh

$$|f(x) - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3} \text{ dan } |f(x) - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}.$$

Selanjutnya pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A, 0 < |x-c| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3} \text{ dan } |f(x) - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} 0 < |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \\ &< \frac{|L_1 - L_2|}{3} + \frac{|L_1 - L_2|}{3} \\ &= \frac{2|L_1 - L_2|}{3}. \end{aligned}$$

Jadi diperoleh $|L_1 - L_2| < \dfrac{2|L_1 - L_2|}{3}$.

Hal ini tidak mungkin terjadi, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi pengandaian salah.

Maka haruslah $L_1 = L_2$.

Kriteria ε - δ Untuk Limit

1.1.5 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to c} f = L$

(ii). Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bukti.

(i)$\Rightarrow$(ii)

Misalkan $\lim_{x \to c} f = L$

Maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, $x \neq c$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Karena,

$$x \in V_\delta(c) \cap A,\ x \neq c \Leftrightarrow 0 < |x - c| < \delta(\varepsilon) \text{ dan}$$

$$f(x) \in V_\varepsilon(L) \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(i)$\Leftarrow$(ii)

Misalkan untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pilih $V_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ dan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$. Maka untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, $x \neq c$ berlaku $f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Hal ini membuktikan bahwa $\lim_{x \to c} f = L$

Contoh.

(a). Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} b = b \in R$.

Bukti.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $f(x) = b$.

Pilih $\delta(\varepsilon) = 1$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon) = 1$ berlaku $|f(x) - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon$.

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} b = b$.

(b). Buktikan $\lim_{x \to c} x = c$.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $g(x) = x$.

Akan dicari $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$|g(x) - c| = |x - c| < \varepsilon$. Karena $|x - c| < \varepsilon$ maka kita dapat memilih $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ berlaku $|g(x) - c| = |x - c| < \varepsilon$.

Hal ini membuktikan bahwa $\lim_{x \to c} x = c$.

(c). Buktikan $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$.

Bukti.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $h(x) = x^2$.

Perhatikan

$$|h(x) - c^2| = |x^2 - c^2| = |x + c||x - c| \qquad (*)$$

Dari persamaan (*) di atas kita punya suku $|x + c|$. Kita harus mencari bilangan yang lebih besar atau sama dengan $|x + c|$. Untuk memperoleh ini kita pilih $\delta \leq 1$.

Maka $|x - c| < 1$ dan diperoleh

$$|x| - |c| \leq \big| |x| - |c| \big| \leq |x - c| < 1$$

$$|x| < 1 + |c|$$

Jadi $|x + c| \leq |x| + |c| \leq 1 + |c| + |c|$

$= 1 + 2|c|$.

Maka dari (*) kita peroleh

$$|h(x) - c^2| = |x^2 - c^2| = |x + c||x - c|$$
$$\leq (1 + 2|c|)| x - c | < \varepsilon.$$

Dari sini kita dapat memilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + 2 | c |}$.

Karena kita memilih δ dua kali maka kita harus pilih yang paling kecil.

Jadi pilih $\delta = \inf\{ 1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 2 | c |} \}$.

Maka $\forall x \in A$, $0<|x - c| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$$| h(x) - x^2| = | x^2 - x^2|$$
$$= |x + c||x - c|$$
$$\leq (1 + 2|c|)| x - c |$$
$$< (1 + 2|c|)\{ \frac{\varepsilon}{1 + 2 | c |})$$
$$= \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{x \to c} h(x) = \lim\limits_{x \to c} x^2 = c^2$.

(d). Buktikan $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{c}$ untuk $c> 0$.

Bukti.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $k(x) = \dfrac{1}{x}$.

Perhatikan, $| k(x) - \dfrac{1}{c} | = | \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{c} |$

$$= | \frac{1}{xc} (x - c) |$$
$$= | \frac{1}{xc} | | x - c |$$
$$= \frac{1}{xc} | x - c | \qquad (*)$$

Kita akan menentukan suatu bilangan yang lebih besar atau sama dengan $\frac{1}{xc}$.

Untuk itu kita pilih $\delta \leq c/2$.

Maka $$|x - c| < c/2$$

$$-\ c/2 < x - c < c/2$$

$$c/2 < x < 3c/2$$

sehingga diperoleh

$$\frac{1}{xc} < \frac{1}{c.c/2} = \frac{2}{c^2}$$

Maka persamaan (*) menjadi

$$|k(x) - \frac{1}{c}| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{c}|$$

$$= |\frac{1}{xc}(x - c)|$$

$$= |\frac{1}{xc}||x - c|$$

$$= \frac{1}{xc}|x - c|$$

$$< \frac{2}{c^2}|x - c|$$

Dari sini kita dapat memilih $\delta = c^2 \varepsilon /2$.

Karena kita memilih δ dua kali maka kita harus pilih yang paling kecil.

Jadi pilih $\delta = \inf\{1, c^2 \varepsilon /2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0<|x - c| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$$|k(x) - \frac{1}{c}| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{c}|$$

$$= |\frac{1}{xc}(x - c)|$$

$$= |\frac{1}{xc}||x - c|$$

$$= \frac{1}{xc} \, | x - c |$$

$$< \frac{2}{c^2} \, | x - c |$$

$$< (\frac{2}{c^2})(\frac{c^2\varepsilon}{2})$$

$$= \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ untuk $c > 0$.

(e). Buktikan $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$.

Bukti.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $q(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$.

Perhatikan

$$| q(x) - \frac{4}{5} | = | \frac{5x^3 - 4x^2 - 24}{5(x^2 + 1)} |$$

$$= | \frac{(5x^2 + 6x + 12)(x - 2)}{5(x^2 + 1)} |$$

$$= \frac{| 5x^2 + 6x + 12 |}{5(x^2 + 1)} | x - 2 | \qquad (*)$$

Pilih $\delta \leq 1$. Maka $\quad | x - 2 | < 1$

$$-1 < x - 2 < 1$$

$$1 < x < 3$$

sehingga diperoleh

$$5x^2 + 6x + 12 \leq 5.3^2 + 6.3 + 12 = 75$$

$$5(x^2 + 1) \geq 5 (1^2 + 1) = 10.$$

Akibatnya

$$\frac{|5x^2 + 6x + 12|}{5(x^2 + 1)} \leq \frac{75}{10} = \frac{15}{2}$$

Jadi (*) menjadi

$$|q(x) - \frac{4}{5}| = |\frac{5x^3 - 4x^2 - 24}{5(x^2 + 1)}|$$

$$= |\frac{(5x^2 + 6x + 12)(x - 2)}{5(x^2 + 1)}|$$

$$= \frac{|5x^2 + 6x + 12|}{5(x^2 + 1)} |x - 2|$$

$$\leq \frac{15}{2} |x - 2|$$

Pilih $\delta = \inf\{ 1, 2\varepsilon /15\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0<|x-2| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$$|q(x) - \frac{4}{5}| = |\frac{5x^3 - 4x^2 - 24}{5(x^2 + 1)}|$$

$$= |\frac{(5x^2 + 6x + 12)(x - 2)}{5(x^2 + 1)}|$$

$$= \frac{|5x^2 + 6x + 12|}{5(x^2 + 1)} |x - 2|$$

$$\leq \frac{15}{2} |x - 2|$$

$$< (\frac{15}{2})(\frac{2\varepsilon}{15})$$

$$= \varepsilon$$

Jadi terbuktibahwa $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$.

Kriteria Barisan Untuk Limit

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to c} f = L$

(ii). Untuk sebarang barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Bukti.

(i)$\Rightarrow$(ii)

Misalkan $\lim_{x \to c} f = L$.

Maka jika $\varepsilon > 0$ diberikan $\exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Misalkan (x_n) adalah sebuah barisan di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c.

Karena (x_n) konvergen ke c maka terdapat $K \in N \ni \forall n \geq K \Rightarrow |x_n - c| < \delta$.

Akibatnya $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

(i)$\Leftarrow$(ii)

Kita akan gunakan kontra positif dari pernyataan teorema yaitu jika (i) tidak benar maka (ii) tidak benar.

Misalkan (i) tidak benar yaitu $\lim_{x \to c} f \neq L$

Maka terdapat $\varepsilon_0 > 0 \ni \forall \delta > 0, 0 < | x - c | < \delta$ dan $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$.

Karena itu $\forall n \in N, x_n \in A, 0 < | x_n - c | < 1/n$ berlaku $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$.

Hal ini menunjukkan bahwa barisan (x_n) di $A \setminus \{c\}$ konvergen ke c tapi barisan $(f(x_n))$ tak konvergen ke L. Jadi (ii) tidak benar. Maka terbukti (i)$\Leftarrow$(ii).

Kriteria Divergen

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

(i). $\lim_{x \to c} f \neq L \in R$ jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c tapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L.

(ii). $\lim_{x \to c} f$ tidak ada di R jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c tapi $\lim (f(x_n))$ tidak ada

(iii) $\lim_{x \to c} f$ tidak ada di R jika dan hanya jika terdapat dua barisan (x_n) dan (y_n) di A dengan $x_n, y_n \neq c$ dan (x_n), (y_n) konvergen ke c tapi $\lim (f(x_n)) \neq \lim (f(y_n))$.

Contoh.

(a). Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada di R.

Bukti.

Kita akan tunjukkan bahwa terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke 0 tapi $\lim (f(x_n))$ tidak ada

Pilih $x_n = 1/n$, $x_n \neq c$.

Maka x_n konvergen 0 dan $(f(x_n)) = (n)$. Kita tahu bahwa $\lim (f(x_n)) = \lim(n)$ tidak ada di R. Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada di R.

(b). Misalkan f adalah fungsi signum (sgn) dengan

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

Buktikan $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ tidak ada di R.

Bukti.

Pilih $x_n = (-1)^n / n$.

Maka $\lim (x_n) = 0$ dan $f(x_n) = \dfrac{(-1)^n/n}{|(-1)^n/n|} = (-1)^n$.

Karena $f(x_n) = \dfrac{(-1)^n/n}{|(-1)^n/n|} = (-1)^n$ divergen maka dapat disimpulkan bahwa

$\lim\limits_{x \to 0} \text{sgn}(x)$ tidak ada di R.

(c). Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$ tidak ada di R.

Bukti.

Misalkan $g(x) = \sin(1/x), x \neq 0$

Untuk membuktikan ini kita akan menunjukkan terdapat dua barisan (x_n) dan (y_n) di A dengan $x_n, y_n \neq 0$ dan $(x_n), (y_n)$ konvergen ke 0 tapi $\lim (f(x_n)) \neq \lim (f(y_n))$.

Pilih $(x_n) = (1/n\pi)$ dan $(y_n) = (2/(4n+1)\pi)$.

Maka (x_n) dan (y_n) konvergen ke 0 dan

$\lim f(x_n) = \lim \sin(n\pi) = 0$ dan $\lim f(y_n) = \lim \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$.

Karena $\lim (f(x_n)) \neq \lim (f(y_n))$ maka $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$ tidak ada di R.

Ringkasan.

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

1. $\lim\limits_{x \to c} f = L$ jika dan hanya jika untuk setiap lingkungan $V_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ terdapat sebuah lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, $x \neq c$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(L)$ atau untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$ atau untuk sebarang barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

2. (i). $\lim_{x \to c} f \neq L \in R$ jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c tapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L.

(ii). $\lim_{x \to c} f$ tidak ada di R jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c tapi $\lim (f(x_n))$ tidak ada

(iii) $\lim_{x \to c} f$ tidak ada di R jika dan hanya jika terdapat dua barisan (x_n) dan (y_n) di A dengan $x_n, y_n \neq c$ dan (x_n), (y_n) konvergen ke c tapi $\lim (f(x_n)) \neq \lim (f(y_n))$.

Latihan 1.

1. Misalkan $f: R \to R$ dan $c \in R$. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to 0} f(x+c) = L$.
2. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} x^3 = c^3$.
3. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.
4. Buktikan $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{1-x} = -1$ $(x > 1)$.
5. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ tidak ada di R.

Jawaban latihan 1.

1. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

   $(\Rightarrow)$. $\lim_{x \to c} f(y) = L \Leftrightarrow \exists \delta_1 > 0 \ni 0 < |y - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - L| < \varepsilon$.

   Misalkan $y = x + c$. Jika $y \to c$ maka $x+c \to c$ atau $x \to 0$.

   Pilih $\delta = \delta_1$. Maka jika $0 < |x+c - c| = |x| < \delta$ maka berlaku $|f(x+c) - L| < \varepsilon$.

   Jadi $\lim_{x \to 0} f(x+c) = L$.

   $(\Leftarrow)$. $\lim_{x \to 0} f(x+c) = L \Leftrightarrow \exists \delta_2 > 0 \ni 0 < |x| < \delta_2 \Rightarrow |f(x+c) - L| < \varepsilon$.

   Misalkan $y = x + c$ atau $x = y-c$. Jika $x \to 0$ maka $y-c \to 0$ atau $y \to c$.

Pilih $\delta = \delta_2$. Maka jika $0 < |y - c| = |x| < \delta$ maka berlaku $|f(y) - L| < \varepsilon$.

Jadi $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

2. Perhatikan,

$|x^3 - c^3| = |x - c|\,|x^2 + cx + c^2|$ dan

$$|x^2 + cx + c^2| = |(x^2 - 2cx + c^2) + 3cx - 3c^2 + 3c^2|$$
$$\leq |x - c|^2 + 3|c||x - c| + 3c^2$$

Jika $|x - c| < 1$ maka $|x^2 + cx + c^2| = |(x^2 - 2cx + c^2) + 3cx - 3c^2 + 3c^2|$

$$\leq |x - c|^2 + 3|c||x - c| + 3c^2$$
$$\leq 1 + 3|c| + 3c^2$$

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Pilih $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 3|c| + 3c^2}\}$. Maka untuk $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$|x^3 - c^3| = |x - c|\,|x^2 + cx + c^2| = |(x^2 - 2cx + c^2) + 3cx - 3c^2 + 3c^2||x - c|$$
$$\leq (|x - c|^2 + 3|c||x - c| + 3c^2)\,|x - c|$$
$$\leq (1 + 3|c| + 3c^2)\left(\frac{\varepsilon}{1 + 3|c| + 3c^2}\right).$$
$$= \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka terbukti $\lim_{x \to c} x^3 = c^3$.

3. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Perhatikan,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = |\sqrt{x} - \sqrt{c}|\left|\frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{c}|}|x - c|$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{c}}|x - c|$$

Kasus 1, $c = 0$.

Pilih $\delta = \varepsilon^2$. Maka untuk $0 < |x| < \delta$ berlaku $|\sqrt{x}| < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$.

Kasus 2, $c > 0$.

Pilih $\delta = \min\{1, \sqrt{c}\,\varepsilon\}$.

Maka untuk $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = |\sqrt{x} - \sqrt{c}|\,|\frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}| = \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{c}|}|x - c|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{c}}|x - c| < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka terbukti $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

4. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

   Perhatikan,

$$|\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}| = |\frac{2x - x - 1}{2(x+1)}| = |\frac{x-1}{2(x+1)}|$$

$$= \frac{1}{2|x+1|}|x - 1| = \frac{1}{2(x+1)}|x - 1|$$

   Jika $|x - 1| < ½$ maka $-1/2 < x - 1 < ½$ atau $½ < x < 3/2$.

   Maka $3/2 < x + 1 < 5/2$ atau $2/5 < \frac{1}{(x+1)} < 2/3$

Pilih $\delta = \min\{1/2, 3\varepsilon\}$.

Maka Maka untuk $0 < |x - 1| < \delta$ berlaku

$$|\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}| = |\frac{2x - x - 1}{2(x+1)}| = |\frac{x-1}{2(x+1)}|$$

$$= \frac{1}{2|x+1|}|x - 1| = \frac{1}{2(x+1)}|x - 1|$$

$$< \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka terbukti $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{1-x} = -1$.

5. Pilih $(x_n) = (1/n)$. Maka x_n konvergen ke 0.

   Tapi $(f(x_n)) = (n^2)$ divergen. Hal ini menunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ tidak ada di R.

Tes Formatif 1.

1. Misalkan c adalah titik cluster dari $A \subseteq R$ dan $f: A \to R$. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to 0} |f(x) - L| = 0$.
2. Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f: I \to R$ dan $c \in I$. Misalkan terdapat bilangan K dan L sedemikian sehingga $|f(x) - L| \leq K\,|x - c|$ untuk setiap $c \in I$. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.
3. Buktikan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$ $(x > 0)$ dengan menggunakan ε-δ dan formula barisan.
4. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} (x + \operatorname{sgn}(x))$ tidak ada di R.
5. Misalkan fungsi $f: R \to R$ mempunyai limit L di 0 dan $g: R \to R$ yang didefinisikan dengan $g(x) = f(ax)$ untuk semua $x \in R$. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} g = L$.

1.2. Teorema-teorema Limit

1.2.1. Definisi

Misalkan $A \subseteq R$, $f:A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Fungsi f dikatakan terbatas pada lingkungan c, jika terdapat lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ dan $M > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$.

1.1.2. Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f:A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Jika $\lim\limits_{x \to c} f$ ada maka f terbatas pada lingkungan c.

Bukti.

Misalkan $\lim\limits_{x \to c} f = L$.

Maka $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Pilih $\varepsilon = 1$.

Maka $|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1$

$$|f(x)| \leq 1 + |L|$$

Jadi $|f(x)| \leq 1 + |L|$, $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \neq c$.

Jika $c \notin A$ maka kita bisa pilih $M = |L| + 1$.

Tapi jika $c \in A$ maka kita pilih $M = \sup\{|f(c)|, |L| + 1\}$.

Akibatnya $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$.

Jadi f terbatas pada lingkungan $V_\delta(c)$.

1.2.3. Definisi

Misalkan $A \subseteq R$, $b \in R$, $f,g : A \to R$. Maka

(i). Jumlah dari f dan g didefinisikan dengan

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ untuk setiap } x \in A$$

(ii). Selisih dari f dan g didefinisikan dengan

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ untuk setiap } x \in A$$

(iii). Perkalian dari f dan g didefinisikan dengan

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ untuk setiap } x \in A$$

(iv). Kelipatan dari b dan f didefinisikan dengan

$$(bf)(x) = bf(x) \text{ untuk setiap } x \in A$$

(v). Pembagian f/h, $h \neq 0$ untuk setiap $x \in A$ definisikan dengan

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \text{ untuk setiap } x \in A$$

1.2.4. Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f, g : A \to R$ dan $b, c \in R$ dengan c adalah titik cluster dari A.

(a). Jika $\lim\limits_{x \to c} f = L$ dan $\lim\limits_{x \to c} g = M$ maka

(i). $\lim\limits_{x \to c} (f+g) = L + M$

(ii). $\lim\limits_{x \to c} (f-g) = L - M$

(iii). $\lim\limits_{x \to c} (fg) = LM$

(iv). $\lim\limits_{x \to c} (bf) = bL$

(b). Jika $h : A \to R$, $h(x) \neq 0\ \forall x \in A$ dan $\lim\limits_{x \to c} h = H \neq 0$ maka

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}$$

Bukti.

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

(a). Karena $\lim\limits_{x \to c} f = L$ maka $\exists \delta_1 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2$.

Karena $\lim\limits_{x \to c} g = M$ maka $\exists \delta_2 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2$.

(i). Selanjutnya perhatikan ketaksamaan berikut,

$$
\begin{aligned}
|(f+g)(x)-(L+M)| &= |f(x)+g(x)-L-M| \\
&= |f(x)-L+g(x)-M| \\
&\le |f(x)-L|+|g(x)-M|
\end{aligned}
$$

Pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x-c| < \delta$ berlaku

$$
\begin{aligned}
|(f+g)(x)-(L+M)| &= |f(x)+g(x)-L-M| \\
&= |f(x)-L+g(x)-M| \\
&\le |f(x)-L|+|g(x)-M| \\
&< \varepsilon/2+\varepsilon/2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\lim\limits_{x\to c}(f+g) = L+M$.

(ii). Perhatikan ketaksamaan berikut

$$
\begin{aligned}
|(f-g)(x)-(L-M)| &= |f(x)-g(x)-L+M| \\
&= |(f(x)-L)-(g(x)-M)| \\
&\le |f(x)-L|+|g(x)-M|
\end{aligned}
$$

Pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x-c| < \delta$ berlaku

$$
\begin{aligned}
|(f-g)(x)-(L-M)| &= |f(x)-g(x)-L+M| \\
&= |(f(x)-L)-(g(x)-M)| \\
&\le |f(x)-L|+|g(x)-M| \\
&< \varepsilon/2+\varepsilon/2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\lim\limits_{x\to c}(f\text{-}g) = L-M$.

(iii). Karena $\lim\limits_{x\to c} f$ ada di R maka f terbatas pada A. Maka terdapat $B > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \le B$, $\forall x \in A$.

Karena $\lim_{x \to c} f = L$ maka $\exists \delta_1 > 0 \ni 0 < | x - c | < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$

($|M|$ perlu ditambah 1 karena jika $M = 0$ maka $\frac{\varepsilon}{2|M|}$ tak terdefinisi)

Karena $\lim_{x \to c} g = M$ maka $\exists \delta_2 > 0 \ni 0 < | x - c | < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2B$.

Perhatikan ketaksamaan berikut

$$
\begin{aligned}
|(f\,g)(x) - (L\,M)| &= | f(x)\, g(x) - LM | \\
&= | f(x)\, g(x) - f(x)M + f(x)M - LM | \\
&= | f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\
&\le |f(x)||\, g(x) - M | + |M||\, f(x) - L |
\end{aligned}
$$

Pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < | x - c | < \delta$ berlaku

$$
\begin{aligned}
|(f\,g)(x) - (L\,M)| &= | f(x)\, g(x) - LM | \\
&= | f(x)\, g(x) - f(x)M + f(x)M - LM | \\
&= | f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\
&\le |f(x)||\, g(x) - M | + |M||\, f(x) - L | \\
&< (B)\left(\frac{\varepsilon}{2B}\right) + |M| \left\{ \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} \right\} \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to c} (f\,g) = L\ M$.

(iv). Misalkan $b \in \mathbb{R}$.

Karena $\lim_{x \to c} f = L$ maka $\exists \delta > 0 \ni 0 < | x - c | < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{(|b|+1)}$

Perhatikan ketaksamaan berikut

$| bf(x) - bL | = | bf(x) - bL |$

$= | b(f(x) - L) |$

$= | b || f(x) - L |$

Maka $\forall x \in A, 0 < | x - c | < \delta$ berlaku

$$| bf(x) - bL | = | bf(x) - bL |$$
$$= | b(f(x) - L) |$$
$$= | b || f(x) - L |$$
$$< | b | \{ \frac{\varepsilon}{(| b | + 1)} \}$$
$$< \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to c} (bf) = bL.$

(b). Misalkan $(\frac{f}{h})(x) = f(x)(\frac{1}{h(x)}).$

Untuk membuktikan $\lim_{x \to c} (\frac{f}{h}) = \frac{L}{H}$, maka kita cukup membuktikan bahwa

$\lim_{x \to c} (\frac{1}{h}) = \frac{1}{H}$. Setelah ini terbukti maka kita gunakan bagian (a)(iii).

Selanjutnya perhatikan persamaan berikut

$$| (\frac{1}{h})(x) - \frac{1}{H} | = | \frac{1}{h}(x) - \frac{1}{H} |$$

$$= | \frac{H - h(x)}{Hh(x)} |$$

$$= \{ \frac{1}{| Hh(x) |} \} \{| h(x) - H |\}$$

Selanjutnya kita akan memperkirakan nilai dari $\frac{1}{| Hh(x) |}$.

Karena $\lim_{x \to c} h = H$ maka $\exists \delta > 0 \ni 0 < | x - c | < \delta \Rightarrow |h(x) - H| < \frac{| H |^2 \varepsilon}{2}$.

Pilih $\varepsilon = \frac{|H|}{2}$.

Maka

$$||h(x)| - |H|| \leq |h(x) - H| < \frac{|H|}{2}$$

$$||h(x)| - |H|| < \frac{|H|}{2}$$

$$-\frac{|H|}{2} < |h(x)| - |H| < \frac{|H|}{2}$$

$$\frac{|H|}{2} < |h(x)| < 3\frac{|H|}{2}$$

Dari sini kita peroleh

$$\frac{1}{|Hh(x)|} = \frac{1}{|H||h(x)|} \leq \frac{1}{|H||H|/2|} = \frac{2}{|H|^2}$$

Maka $\forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$|(\frac{1}{h})(x) - \frac{1}{H}| = |\frac{1}{h}(x) - \frac{1}{H}|$$

$$= |\frac{H - h(x)}{Hh(x)}|$$

$$= \{\frac{1}{|Hh(x)|}\}\{|h(x) - H|\}$$

$$< (\frac{2}{|H|^2})(\frac{|H|^2 \varepsilon}{2})$$

$$= \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to c} (\frac{1}{h}) = \frac{1}{H}$.

Karena $\lim_{x \to c} f = L$ dan $\lim_{x \to c} (\frac{1}{h}) = \frac{1}{H}$ maka dengan menggunakan bagian (a)(iii)

maka diperoleh $\lim_{x \to c} (\frac{f}{h}) = \lim_{x \to c} f.\ \lim_{x \to c} (\frac{1}{h})$

$$= L.\ (\frac{1}{H}) = \frac{L}{H}.$$

Contoh.

(a). Untuk menghitung $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 4)$ kita dapat menggunakan teorema 1.2.4

bagian (a)(iii) yaitu

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 4) &= \lim_{x \to 2} (x^2 + 1) \lim_{x \to 2} (x^3 - 4) \\ &= (2^2 + 1)(2^3 - 4) \\ &= 20 \end{aligned}$$

(b). Hitunglah $\lim_{x \to 2} (x^3 - 4) / (x^2 + 1)$.

Untuk menghitung limit ini kita gunakan teorema 1.2.4.(b) yaitu

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 4) / (x^2 + 1) = \frac{\lim_{x \to 2} (x^3 - 4)}{\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)} = \frac{4}{5}$$

1.2.5 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f : A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Misalkan $a \leq f(x) \leq b$ untuk setiap $x \in A$, $x \neq c$.

Jika $\lim_{x \to c} f$ ada maka $a \leq \lim_{x \to c} f(x) \leq b$.

Bukti.

Untuk membuktikan ini kita akan gunakan teorema berikut

"Jika (x_n) adalah suatu barisan yang konvergen dan $a \leq (x_n) \leq b$ untuk setiap $n \in N$ maka $a \leq \lim(x_n) \leq b$" (*)

Misalkan $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Maka untuk setiap barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in N$ dengan (x_n) konvergen ke c berlaku $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Karena $a \leq f(x_n) \leq b$ untuk setiap $n \in N$ maka menurut (*) diperoleh

$$a \leq \lim_{x \to c} f(x_n) \leq b \text{ atau } a \leq L \leq b.$$

1.2.6 Teorema Apit

Misalkan $A \subseteq R$, $f,g : A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Misalkan $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in A$, $x \neq c$.

Jika $\lim_{x \to c} f = L = \lim_{x \to c} h$ maka $\lim_{x \to c} g = L$.

Bukti.

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Karena $\lim_{x \to c} f = L$ maka $\exists \delta_1 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Atau $|f(x) - L| < \varepsilon$ dapat ditulis menjadi $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$.

Karena $\lim_{x \to c} h = L$ maka $\exists \delta_2 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$.

Atau $|h(x) - L| < \varepsilon$ dapat ditulis menjadi $-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$.

Pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ kita punya

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \text{ dan } -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon.$$

Karena $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in A$, $x \neq c$ maka

$$-\varepsilon < f(x) - L < g(x) - L < h(x) - L < \varepsilon.$$

Akibatnya

$$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \text{ atau } |g(x) - L| < \varepsilon.$$

Jadi $\exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$.

Hal ini membuktikan bahwa $\lim\limits_{x \to c} g = L$.

Contoh.

Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} x^{3/2} = 0$, $(x > 0)$.

Bukti.

Untuk $0 < x < 1$ berlaku $x < x^{1/2} < 1$. Dengan mengalikannya dengan x diperoleh $x^2 < x^{3/2} < x$. Karena $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ dan $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim\limits_{x \to 0} x^{3/2} = 0$.

1.2.7 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f : A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Jika $\lim\limits_{x \to c} f > 0$ [berturut-turut, $\lim\limits_{x \to c} f < 0$] maka terdapat lingkungan-δ, $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ dari c sedemikian sehingga $f(x) > 0$ [berturut-turut, $f(x) < 0$] $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$ $x \neq c$.

Bukti.

Misalkan $\lim\limits_{x \to c} f = L$

Maka $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \ni 0 < | x - c | < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Kita akan tinjau 2 kasus yaitu $L > 0$ dan $L < 0$.

Kasus 1. $L > 0$.

Pilih $\varepsilon = L / 2$

$$\text{Maka } \forall x \varepsilon A,\ 0 < | x - c | < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < L / 2$$
$$\Rightarrow - L / 2 < f(x) - L < L / 2$$
$$\Rightarrow 0 < L / 2 < f(x) < 3L / 2.$$

Jadi terdapat lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$ $x \neq c$ berlaku $f(x) > 0$.

Kasus 2. $L < 0$.

Pilih $\varepsilon = -L/2$.

Maka $\forall x \in A,\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < -L/2$

$$\Rightarrow L/2 < f(x) - L < -L/2$$

$$\Rightarrow 3L/2 < f(x) < L/2 < 0.$$

Jadi terdapat lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$ $x \neq c$ berlaku $f(x) < 0$.

Ringkasan.

Misalkan $A \subseteq R$, $f, g, h : A \to R$ dan $b, c \in R$ dengan c adalah titik cluster dari A.

1. Jika $\lim\limits_{x\to c} f = L$ dan $\lim\limits_{x\to c} g = M$ maka $\lim\limits_{x\to c} (f+g) = L + M$, $\lim\limits_{x\to c} (f-g) = L - M$,

   $\lim\limits_{x\to c} (fg) = LM$, $\lim\limits_{x\to c} (bf) = bL$

2. Jika $h : A \to R$, $h(x) \neq 0\ \forall x \in A$ dan $\lim\limits_{x\to c} h = H \neq 0$ maka $\lim\limits_{x\to c} \left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}$.

3. Jika $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in A$, $x \neq c$ dan $\lim\limits_{x\to c} f = L = \lim\limits_{x\to c} h$ maka

   $\lim\limits_{x\to c} g = L$.

Latihan 2.

1. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1/x)$ tidak ada tapi $\lim\limits_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0$.
2. Hitunglah $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{x + 2x^2}$ dengan $x > 0$!.
3. Misalkan $f, g : A \to R$ dan c titik cluster dari A.

   (a). Tunjukkan bahwa jika $\lim\limits_{x\to c} f$ dan $\lim\limits_{x\to c} (f+g)$ ada maka $\lim\limits_{x\to c} g$ ada.

   (b). Jika $\lim\limits_{x\to c} f$ dan $\lim\limits_{x\to c} fg$ ada apakah $\lim\limits_{x\to c} g$ ada?.

4. Buktikan bahwa jika $\lim\limits_{x \to c} f_k = L_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ maka

$\lim\limits_{x \to c} (f_1 + \ldots + f_n) = (L_1 + \ldots + L_n)$ dan $\lim\limits_{x \to c} (f_1 \ldots f_n) = (L_1 \ldots L_n)$.

Jawaban Latihan 2.

1. Misalkan $f(x) = \cos(1/x)$. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ tidak ada jika terdapat dua buah barisan (x_n) dan (y_n) dengan $x_n \neq 0$ dan $y_n \neq 0$ sedemikian sehingga $\lim(x_n) = 0$ dan $\lim(y_n) = 0$ tapi $\lim(f(x_n)) \neq \lim(f(y_n))$.

   Misalkan $x_n = 1/2n\pi$ dan $y_n = 2/(4n+1)\pi$. Maka $\lim(x_n) = 0$ dan $\lim(y_n) = 0$ tapi $\lim(f(x_n)) = \lim(\cos 2n\pi) = 1 \neq 0 = \lim(\cos(4n+1)\pi/2) = \lim(f(y_n))$.

   Jadi $\lim\limits_{x \to 0} \cos(1/x)$ tidak ada di R.

   Selanjutnya perhatikan

   $-1 \le \cos(1/x) \le 1$ atau $-x \le x\cos(1/x) \le x$

   Karena $\lim(-x) = 0$ dan $\lim(x) = 0$ maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim\limits_{x \to 0} x\cos(1/x) = 0$.

2. Perhatikan

$$\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{x+2x^2} = \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{x+2x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x}}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x}}\right)$$

$$= \frac{1+2x-1-3x}{(x+2x^2)(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x})}$$

$$= \frac{-x}{x(1+2x\ )(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x})}$$

$$= \frac{-1}{(1+2x\ )(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x})}$$

4. Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ dengan c adalah titik cluster dari A.

   Misalkan $|f|$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $|f|(x) = |f(x)|$ untuk $x \in R$

   Buktikan bahwa jika $\lim\limits_{x \to c} f$ ada maka $\lim\limits_{x \to c} |f| = |\lim\limits_{x \to c} f|$.

5. Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ dengan c adalah titik cluster dari A.

   Misalkan $\sqrt{f}$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$ untuk $x \in R$ dan $f(x) \geq 0$.

   Buktikan bahwa jika $\lim\limits_{x \to c} f$ ada maka $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f} = \sqrt{\lim\limits_{x \to c} f}$.

1.3 Perluasan Konsep Limit

Limit Satu Sisi

1.3.1 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

(i). Misalkan c adalah titik cluster dari $A \cap (c, \infty) = \{x \in A | x > c\}$.

$L \in R$ dikatakan **limit kanan** dari f di c jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in A \cap (c, \infty)$, $0 < x - c < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$.

Jika L adalah limit dari f untuk x mendekati c dari kanan, biasa ditulis $f(x) \to L$ apabila $x \to c^+$ atau $\lim\limits_{x \to c^+} f = L$

(ii). Misalkan c adalah titik cluster dari $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A | x < c\}$.

$L \in R$ dikatakan **limit kiri** dari f di c jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in A \cap (-\infty, c)$, $0 < c - x < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$.

Jika L adalah limit dari f untuk x mendekati c dari kiri, biasa ditulis $f(x) \to L$ apabila $x \to c^-$ atau atau $\lim\limits_{x \to c^-} f = L$

Catatan.

- $\lim\limits_{x \to c^+} f$ dan $\lim\limits_{x \to c^-} f$ disebut **limit satu-sisi** (one-sided limits) dari f di c. Limit ini mungkin ada dan mungkin juga tidak ada. Jika ada limit ini mungkin sama dan mungkin juga berbeda.
- Jika A adalah sebuah interval dengan c titik ujung kiri interval tersebut maka $f : A \to R$ mempunyai limit di c jika dan hanya jika f mempunyai limit kanan di c.

Dalam hal ini $\lim\limits_{x \to c} f = \lim\limits_{x \to c^+} f$.

Hal seperti di atas juga terjadi jika c adalah titik ujung kanan dari interval tersebut, maka $\lim\limits_{x \to c} f = \lim\limits_{x \to c^-} f$.

.

1.3.2 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \rightarrow R$ dan c adalah titik cluster dari

$A \cap (c, \infty) = \{x \in A | x > c\}$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to c^+} f = L$

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) yang konvergen ke c dengan $x_n \in A \cap (c, \infty)$ $x_n > c$ untuk setiap $n \in N$, maka $f(x_n)$ konvergen ke L.

1.3.3 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \rightarrow R$ dan c adalah titik cluster dari

$A \cap (-\infty, c) = \{x \in A | x < c\}$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to c^-} f = L$

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) yang konvergen ke c dengan $x_n \in A \cap (-\infty, c)$ $x_n < c$ untuk setiap $n \in N$, maka $f(x_n)$ konvergen ke L.

1.3.4 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f: A \rightarrow R$ dan c adalah titik cluster dari

$A \cap (c, \infty) = \{x \in A | x > c\}$ dan $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A | x < c\}$. Maka

$$\lim_{x \to c} f = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f = L = \lim_{x \to c^-} f$$

Contoh.

(a). Misalkan $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$

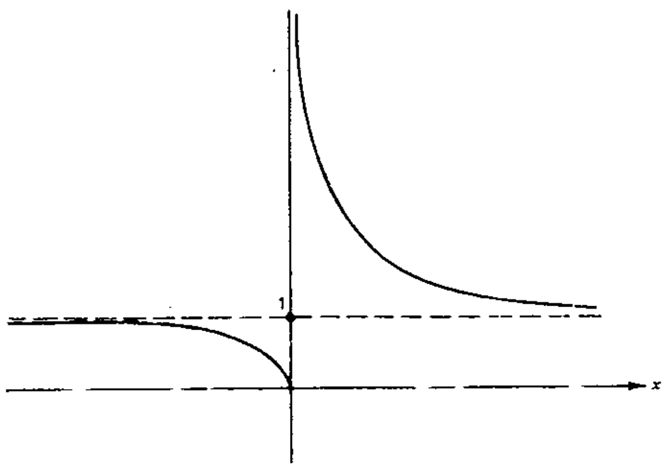
Maka $\lim_{x \to 0^+} f = 1$ dan $\lim_{x \to 0^-} f = -1$.

Karena nilai kedua limit ini berbeda maka dikatakan $\lim_{x\to 0} \text{sgn}(x)$ tidak ada (karena tidak sesuai dengan teorema 1.3.4).

(b). Misalkan $g(x) = e^{1/x}, x \neq 0$.

Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ tidak ada dan $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$.

Bukti.



Grafik $g(x) = e^{1/x}, x \neq 0$

Dari grafik kita dapat memperkirakan bahwa $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ tidak ada dan $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$.

Untuk membuktikannya kita gunakan ketaksamaan berikut,

(*) $\qquad 0 < t < e^{1/t}$ untuk $t > 0$

Untuk $x > 0$ maka $1/x > 0$ dan

$$0 < 1/x < e^{1/x}$$

Pilih $x_n = 1/n$, $x_n \to 0$.

Maka $g(x_n) = e^n > n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Akibatnya $(g(x_n))$ divergen. Maka $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}$ tidak ada di R.

Selanjutnya kita akan menunjukkan bahwa untuk $x < 0$ maka $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$.

Dari (*) kita bisa ambil $t = -1/x$, $x < 0$.

Maka diperoleh

$$0 < -1/x < e^{-1/x}$$

Karena x < 0 maka $\qquad 0 < e^{1/x} < -x$

Karena $\lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$ maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$.

(c). Misalkan $h(x) = \dfrac{1}{(e^{1/x}+1)}$ untuk $x \neq 0$.

Tunjukkan $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$ dan $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$.

Bukti.

Dari contoh (b) kita punya ketaksamaan

$0 < 1/x < e^{1/x}$ atau $0 < 1/x < e^{1/x} < e^{1/x} + 1$, untuk $x > 0$.

Maka

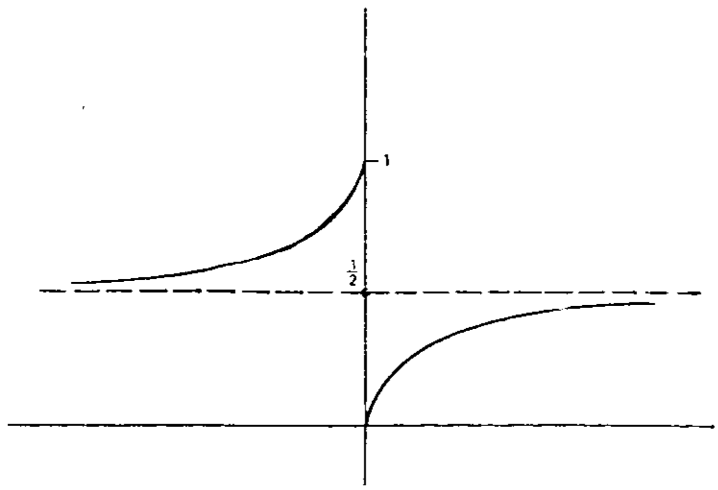
$$0 < \frac{1}{e^{1/x}+1} < \frac{1}{e^{1/x}} < x.$$

Karena $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ maka $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^{1/x}+1} = 0$.

Pada contoh (b) kita juga punya $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$. Maka

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^{1/x}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{1/x}+1)} = \frac{1}{0+1} = 1$$

Jadi dari soal ini bisa kita lihat bahwa limit kiri dan limit kanan dari h ada tapi tidak sama.



Grafik $h(x) = \dfrac{1}{(e^{1/x}+1)}$, $x \neq 0$

Limit Tak Hingga

1.3.5 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan c adalah titik cluster dari A.

(i). Fungsi f dikatakan **menuju ∞** bila x mendekati c jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $\delta = \delta(\alpha)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) > \alpha$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c} f = \infty$.

(i). Fungsi f dikatakan **menuju - ∞** bila x mendekati c jika untuk setiap $\beta \in R$ terdapat $\delta = \delta(\beta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) < \beta$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c} f = - \infty$.

Contoh.

(a). Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = \infty$.

Misalkan $\alpha \in R$ diberikan.

Perhatikan

$$\frac{1}{x^2} > \alpha \text{ atau } x^2 < \frac{1}{\alpha} \text{ atau } x^2 - \frac{1}{\alpha} < 0 \text{ atau } (x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})(x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}) < 0.$$

Maka $-\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < x < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ atau $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Pilih $\delta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Maka jika $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ berlaku $\frac{1}{x^2} > \alpha$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = \infty$.

1.3.6 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f,g : A \to R$ dan c adalah titik cluster dari A. Anggap $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in A, x \ne c$.

(i). Jika $\lim_{x\to c} f = \infty$ maka $\lim_{x\to c} g = \infty$

(ii). Jika $\lim_{x\to c} g = -\infty$ maka $\lim_{x\to c} f = -\infty$

Bukti.

(i). Misalkan $\alpha \in R$ diberikan.

Karena $\lim_{x\to c} f = \infty$ maka terdapat $\delta = \delta(\alpha) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) > \alpha$. Karena $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in A, x \ne c$ maka $g(x) \ge f(x) > \alpha$.

Jadi terdapat $\delta = \delta(\alpha) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ maka $g(x) > \alpha$.

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x\to c} g = \infty$.

(ii). Misalkan $\beta \in R$ diberikan.

Karena $\lim_{x \to c} g = -\infty$ maka terdapat $\delta = \delta(\beta) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ maka

$g(x) < \beta$. Karena $f(x) \le g(x)\ \forall x \in A, x \ne c$ maka $\beta > g(x) \ge f(x)$.

Jadi terdapat $\delta = \delta(\alpha) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) < \beta$.

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to c} f = -\infty$.

1.3.7 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

(i). Misalkan c adalah titik cluster dari $A \cap (c, \infty) = \{x \in A \mid x > c\}$.

Fungsi f dikatakan **menuju ∞** bila x mendekati c dari kanan jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $\delta = \delta(\alpha)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A, 0 < x - c < \delta$ maka $f(x) > \alpha$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c^+} f = \infty$

Fungsi f dikatakan **menuju - ∞** bila x mendekati c dari kanan jika untuk setiap $\beta \in R$ terdapat $\delta = \delta(\beta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A, 0 < x - c < \delta$ maka $f(x) < \beta$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c^+} f = -\infty$

(ii). Misalkan c adalah titik cluster dari $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A \mid x < c\}$.

Fungsi f dikatakan **menuju ∞** bila x mendekati c dari kiri jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $\delta = \delta(\alpha)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A, 0 < c - x < \delta$ maka $f(x) > \alpha$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c^-} f = \infty$.

Fungsi f dikatakan **menuju - ∞** bila x mendekati c dari kiri jika untuk setiap $\beta \in R$ terdapat $\delta = \delta(\beta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A, 0 < c - x < \delta$ maka $f(x) < \beta$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c^-} f = -\infty$.

Contoh.

(a). Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0^+} (1/x) = \infty$.

(b). Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0^-} (1/x) = -\infty$.

Bukti.

(a). Misalkan $\alpha \in R$ diberikan.

Perhatikan, $\frac{1}{x} > \alpha$ atau $x < \frac{1}{\alpha}$

Pilih $\delta = \frac{1}{\alpha}$.

Maka jika $0 < x < \frac{1}{\alpha}$ berlaku $\frac{1}{x} > \alpha$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0^+} (1/x) = \infty$.

(b). Misalkan $\beta \in R$ diberikan.

Perhatikan, $\frac{1}{x} < \beta$ atau $x > \frac{1}{\beta}$ atau $-x < -\frac{1}{\beta}$

Pilih $\delta = -\frac{1}{\beta}$.

Maka jika $0 < -x < \frac{1}{\beta}$ berlaku $\frac{1}{x} < \beta$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0^-} (1/x) = -\infty$.

Limit di Tak Hingga.

1.3.8 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$

(i). Misalkan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

$L \in R$ adalah limit dari f untuk x mendekati ∞ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K = K(\varepsilon) > a$ sedemikian sehingga untuk setiap $x > K$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim\limits_{x \to \infty} f = L$

(ii). Misalkan $(-\infty, b) \subseteq A$ untuk suatu $b \in R$.

$L \in R$ adalah limit dari f untuk x mendekati $-\infty$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K = K(\varepsilon) < b$ sedemikian sehingga untuk setiap $x < K$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim\limits_{x \to -\infty} f = L$

1.3.9 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim\limits_{x \to \infty} f = L$

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (a, \infty)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

1.3.10 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(-\infty, a) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim\limits_{x \to -\infty} f = L$

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (-\infty, a)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Contoh.

1. Misalkan $g(x) = 1/x$, $x \neq 0$. Buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} g(x)$.

Bukti.

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Perhatikan,

$$|g(x) - 0| = |1/x - 0| = |1/x| < \varepsilon.$$

Untuk $x > 0$ maka diperoleh $x > 1/\varepsilon$. Dengan memilih $K = 1/\varepsilon$ maka diperoleh untuk $x > K$ berlaku $|g(x) - 0| = |1/x - 0| = |1/x| = 1/x < \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Selanjutnya untuk $x < 0$ maka diperoleh $x < -1/\varepsilon$.

Dengan memilih $K = -1/\varepsilon$ maka diperoleh untuk $x < K < 0$ berlaku $|g(x) - 0| = |1/x - 0| = |1/x| = -1/x < \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

2. Misalkan $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$. Buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Bukti.

Untuk membuktikan ini kita gunakan ketaksamaan berikut, yaitu

$0 \leq 1/x^2 \leq 1/x$, untuk $x \geq 1$. Selanjutnya dengan menggunakan teorema apit dan soal nomor 1 maka terbukti $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

1.3.11 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

(i). Misalkan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Fungsi f dikatakan menuju ∞ (berturut-turut, $-\infty$) untuk x mendekati ∞ jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $K = K(\alpha) > a$ sedemikian sehingga untuk setiap $x > K$ maka $f(x) > \alpha$ (berturut-turut, $f(x) < \alpha$).

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x\to\infty} f = \infty$ (berturut-turut, $\lim_{x\to\infty} f = -\infty$)

(ii). Misalkan $(-\infty, b) \subseteq A$ untuk suatu $b \in R$.

Fungsi f dikatakan menuju ∞ (berturut-turut, $-\infty$) untuk x mendekati $-\infty$ jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $K = K(\alpha) < b$ sedemikian sehingga untuk setiap $x < K$ maka $f(x) > \alpha$ (berturut-turut, $f(x) < \alpha$).

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to -\infty} f = \infty$

(berturut-turut, $\lim_{x \to -\infty} f = -\infty$).

Dua teorema berikut akan diberikan definisi 1.3.11 dengan menggunakan kriteria barisan.

1.3.12 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to \infty} f = \infty$ (berturut-turut, $\lim_{x \to \infty} f = -\infty$)

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (a, \infty)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka $\lim (f(x_n)) = \infty$ (berturut-turut, $\lim (f(x_n)) = -\infty$).

1.3.13 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(-\infty, a) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to -\infty} f = \infty$ (berturut-turut, $\lim_{x \to -\infty} f = -\infty$)

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (-\infty, a)$ dan $\lim(x_n) = -\infty$ maka barisan $\lim (f(x_n)) = \infty$ (berturut-turut, $\lim (f(x_n)) = -\infty$).

Ringkasan.

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan c adalah titik cluster dari

$A \cap (c, \infty) = \{x \in A | x > c\}$ dan $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A | x < c\}$.

1. Maka pernyataan berikut ekivalen.

   (i). $\lim_{x \to c} f = \lim_{x \to c^+} f = \lim_{x \to c^-} f = L$

   (ii). Untuk setiap barisan (x_n) yang konvergen ke c dengan $x_n \in A \cap (c, \infty)$ atau $x_n \in A \cap (-\infty, c)$ maka $f(x_n)$ konvergen ke L.

2. Anggap $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in A, x \ne c$.

   (i). Jika $\lim_{x \to c} f = \infty$ maka $\lim_{x \to c} g = \infty$

   (ii). Jika $\lim_{x \to c} g = -\infty$ maka $\lim_{x \to c} f = -\infty$

3. Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(-\infty, a) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

   Maka pernyataan berikut ekivalen.

   (i). $\lim_{x \to -\infty} f = L$

   (ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (-\infty, a)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

4. Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

   Maka pernyataan berikut ekivalen.

   (i). $\lim_{x \to \infty} f = \infty$ (berturut-turut, $\lim_{x \to \infty} f = -\infty$)

   (ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (a, \infty)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka $\lim(f(x_n)) = \infty$ (berturut-turut, $\lim(f(x_n)) = -\infty$).

5. Misalkan $A \subseteq R$ dan $f, g : A \to R$ dan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

   Misalkan $g(x) > 0$ untuk setiap $x > a$ dan

   $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

   untuk suatu $L \in R, L \ne 0$.