Pengadaan Buku Ajar
No. 060/PUNP/2000

ANALISIS RIIL 2

Oleh :

Drs. Yerizon, M.Si

Editor :

Drs. Mukh[illegible]

FAK. MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG

DIP Universitas Negeri Padang
Nomor : 071/XXIII/008/4/--/1999
Tanggal : 1 April 1999

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah memberikan rahmat dan karuniaNya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar " Analisis Riil 2" ini.

Buku ajar ini penulis susun dengan maksud agar mahasiswa pengikut mata kuliah Analisis Riil 2 dapat lebih mudah mempelajari dan memahami materi mata kuliah ini, karena materi Analisis Riil agak sulit dipahami dibandingkan dengan materi matematika lainnya. Untuk itu buku ajar ini disusun sedemikian rupa sehingga lebih mudah dipahami.

Untuk setiap kegiatan belajar dalam buku ajar ini disediakan latihan sekaligus dengan jawabannya yang bertujuan untuk melatih mahasiswa dalam memahami konsep yang terkandung dalam setiap kegiatan belajar. Di samping itu, setiap kegiatan belajar juga dibuatkan ringkasan dari materi yang dibahas. Setiap akhir kegiatan belajar disediakan tes formatif, yang bertujuan untuk menguji kemampuan mahasiswa tentang materi yang sedang dipelajarinya.

Disamping manfaat bagi mahasiswa, diharapkan buku ajar ini juga bermanfaat bagi dosen yang mengajarkan mata kuliah ini. Karena materi dalam buku ajar ini telah dibagi atas beberapa kegiatan belajar, yang dilengkapi dengan tujuan pembelajaran umum dan tujuan pembelajaran khusus.

Dalam menyelesaikan buku ajar ini, penulis banyak mendapatkan bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu pada kesempatan ini penulis ucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. Mukhni, M. Pd, sebagai editor dalam penulisan buku ajar ini.
2. Bapak Drs. Edwin Musdi, M. Pd, sebagai Ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang.
3. Bapak Drs. H. Idrus Ramli, sebagai Dekan FMIPA Universitas Negeri Padang.
4. Bapak Drs. Amran Gambut, M. A, sebagai Pimpinan Proyek Universitas Negeri Padang.

Dan semua pihak yang telah ikut membantu dalam penyelesaian buku ajar ini. Semoga semua jasa baik beliau dibalasi oleh Allah SWT, Amin.

Penulis menyadari, bahwa buku ajar ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak, demi kesempurnaan buku ajar ini pada edisi-edisi berikutnya.

Akhirnya penulis mengharapkan agar buku ajar ini dapat bermanfaat sebagai mana mestinya.

Padang, Januari 2000

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

LIMIT FUNGSI

A. Pengantar

Konsep limit sangat penting dalam matematika, karena banyak topik-topik matematika yang memerlukan konsep limit. Pada bab ini kita akan menyajikan konsep limit secara formal. Setelah itu kita akan menentukan kriteria atau kondisi yang harus dipenuhi agar suatu fungsi mempunyai limit di suatu titik.

Dalam menghitung limit kita akan menggunakan aturan-aturan atau sifat-sifat yang akan diberikan pada pasal 1.2. Diantaranya penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan kelipatan dari beberapa limit fungsi.

Pada bagian akhir dari bab ini kita akan memperluas konsep-konsep limit. Perluasan tersebut antara lain limit satu sisi (one-sided), limit tak hingga, dan limit di tak hingga. Materi ini akan dipelajari selama 7 pertemuan.

B. Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu menguasai konsep limit dan trampil menggunakannya dalam soal-soal.

C. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu

- membuktikan limit suatu fungsi dengan menggunakan definisi limit yaitu dengan menggunakan ε-δ.
- membuktikan limit suatu fungsi dengan menggunakan konsep barisan.
- membuktikan suatu fungsi tidak mempunyai limit di suatu titik
- membuktikan sifat-sifat limit suatu fungsi dengan menggunakan ε-δ.
- menggunakan teorema apit dalam menghitung limit suatu fungsi.
- membuktikan suatu soal dengan menggunakan sifat-sifat limit.

- membuktikan limit kanan dari suatu fungsi yang mempunyai limit kanan.
- membuktikan limit kiri dari suatu fungsi yang mempunyai limit kiri.
- membuktikan soal-soal dengan menggunakan konsep perluasan limit.

D. Uraian Materi Kegiatan

1.1 Limit Fungsi

1.1.1 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $c \in R$.

Titik c disebut titik cluster (timbun) dari A jika untuk setiap $\delta > 0$ maka ada lingkungan-δ, $V_\delta(c) = (c-\delta, .c+\delta)$, dari c memuat paling sedikit satu titik dari A yang berbeda dengan c atau $[V_\delta(c) \cap A] \setminus \{c\} \neq \emptyset$.

Perlu dicatat bahwa titik c mungkin anggota A mungkin juga tidak anggota A.

1.1.2Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $c \in R$.

Titik c disebut titik cluster (timbun) dari A jika dan hanya jika terdapat barisan (a_n) di A dengan $a_n \neq c$, $\forall n \in N \ni \lim(a_n) = c$.

Bukti.

($\Rightarrow$). Misalkan c adalah titik cluster (timbun) dari A.

Maka untuk setiap $n \in N$, $[V_{1/n}(c) \cap A] \setminus \{c\} \neq \emptyset$ atau $[(c-1/n, c+1/n) \cap A] \setminus \{c\} \neq \emptyset$.

Maka terdapat suatu titik di $[V_{1/n}(c) \cap A] \setminus \{c\}$. Misalkan titik tersebut a_n maka

$a_n \in A$ dan $a_n \neq c$ dan $\lim(a_n) = c$.

($\Leftarrow$). Misalkan terdapat barisan (a_n) di A dengan $a_n \neq c$, $\forall n \in N \ni \lim(a_n) = c$.

Karena $\lim(a_n) = c$ maka $\forall \delta > 0$, $\exists K(\delta) \in N \ni \forall n \geq K(\delta)$ berlaku $|a_n - c| < \delta$.

Atau $-\delta < a_n - c < \delta$ atau $c - \delta < a_n < c + \delta$.

Jadi $a_n \in (c-\delta, c+\delta)$. Akibatnya $[(c-\delta, c+\delta) \cap A] \setminus \{c\} \neq \emptyset$.

Jadi terbukti bahwa c adalah titik cluster dari A.

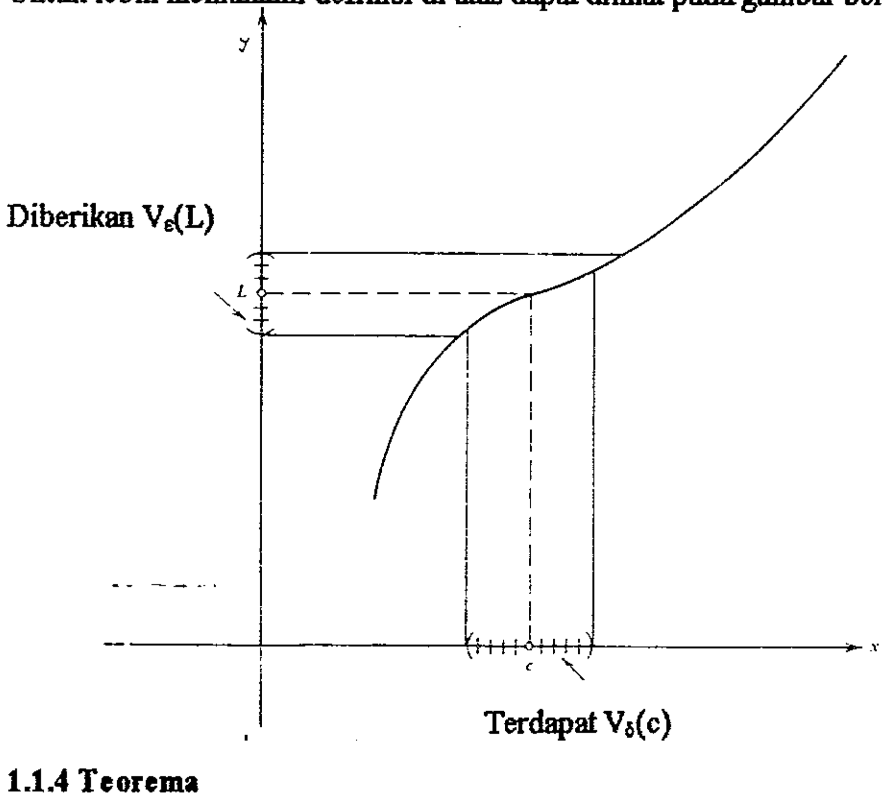
1.1.3 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Bilangan L disebut limit dari f di c jika untuk setiap lingkungan-ε, $V_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, dari L terdapat sebuah lingkungan-δ, $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ dari c sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, $x \neq c$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Jika L adalah limit dari f di c untuk x mendekati c, biasa ditulis dengan $f(x) \to L$ apabila $x \to c$ atau $\lim_{x \to c} f = L$.

Untuk lebih memahami definisi di atas dapat dilihat pada gambar berikut.



1.1.4 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Jika $\lim_{x \to c} f$ ada, maka $\lim_{x \to c} f$ tunggal.

Bukti.

Andaikan $\lim_{x \to c} f$ tidak tunggal.

Misalkan $\lim_{x \to c} f = L_1$ dan $\lim_{x \to c} f = L_2$ dengan $L_1 \neq L_2$.

Karena $\lim_{x \to c} f = L_1$ maka $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$. (*)

Karena $\lim_{x \to c} f = L_2$ maka $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$. (**)

Pilih $\varepsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{3}$.

Maka dari (*) dan (**) diperoleh

$$|f(x) - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3} \text{ dan } |f(x) - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}.$$

Selanjutnya pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A, 0 < |x-c| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3} \text{ dan } |f(x) - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} 0 < |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \\ &< \frac{|L_1 - L_2|}{3} + \frac{|L_1 - L_2|}{3} \\ &= \frac{2|L_1 - L_2|}{3}. \end{aligned}$$

Jadi diperoleh $|L_1 - L_2| < \dfrac{2|L_1 - L_2|}{3}$.

Hal ini tidak mungkin terjadi, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi pengandaian salah.

Maka haruslah $L_1 = L_2$.

Kriteria ε - δ Untuk Limit

1.1.5 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \rightarrow R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim\limits_{x \to c} f = L$

(ii). Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, $0<|x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bukti.

(i)$\Rightarrow$(ii)

Misalkan $\lim\limits_{x \to c} f = L$

Maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, $x \neq c$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Karena,

$$x \in V_\delta(c) \cap A,\ x \neq c \Leftrightarrow 0<|x - c| < \delta(\varepsilon) \text{ dan}$$

$$f(x) \in V_\varepsilon(L) \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0<|x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(i)$\Leftarrow$(ii)

Misalkan untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, $0<|x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pilih $V_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ dan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$. Maka untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, $x \neq c$ berlaku $f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Hal ini membuktikan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f = L$

Contoh.

(a). Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} b = b \in R$.

Bukti.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $f(x) = b$.

Pilih $\delta(\varepsilon) = 1$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon) = 1$ berlaku $|f(x) - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon$.

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} b = b$.

(b). Buktikan $\lim_{x \to c} x = c$.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $g(x) = x$.

Akan dicari $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$|g(x) - c| = |x - c| < \varepsilon$. Karena $|x - c| < \varepsilon$ maka kita dapat memilih $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ berlaku $|g(x) - c| = |x - c| < \varepsilon$.

Hal ini membuktikan bahwa $\lim_{x \to c} x = c$.

(c). Buktikan $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$.

Bukti.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $h(x) = x^2$.

Perhatikan

$$|h(x) - c^2| = |x^2 - c^2| = |x + c||x - c| \qquad (*)$$

Dari persamaan (*) di atas kita punya suku $|x + c|$. Kita harus mencari bilangan yang lebih besar atau sama dengan $|x + c|$. Untuk memperoleh ini kita pilih $\delta \leq 1$.

Maka $|x - c| < 1$ dan diperoleh

$$|x| - |c| \leq \big||x| - |c|\big| \leq |x - c| < 1$$

$$|x| < 1 + |c|$$

Jadi $|x + c| \leq |x| + |c| \leq 1 + |c| + |c|$

$= 1 + 2|c|$.

Maka dari (*) kita peroleh

$|h(x) - c^2| = |x^2 - c^2| = |x + c||x - c|$

$\leq (1 + 2|c|)| x - c | < \varepsilon.$

Dari sini kita dapat memilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|c|}$.

Karena kita memilih δ dua kali maka kita harus pilih yang paling kecil.

Jadi pilih $\delta = \inf\{ 1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|c|} \}$.

Maka $\forall x \in A$, $0<|x - c| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$$
\begin{aligned}
| h(x) - x^2| &= | x^2 - x^2| \\
&= |x + c||x - c| \\
&\leq (1 + 2|c|)| x - c | \\
&< (1 + 2|c|)\{ \frac{\varepsilon}{1 + 2|c|}) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{x \to c} h(x) = \lim\limits_{x \to c} x^2 = c^2$.

(d). Buktikan $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{c}$ untuk $c > 0$.

Bukti.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $k(x) = \dfrac{1}{x}$.

Perhatikan,
$$
\begin{aligned}
| k(x) - \frac{1}{c} | &= | \frac{1}{x} - \frac{1}{c} | \\
&= | \frac{1}{xc} (x - c) | \\
&= | \frac{1}{xc} | | x - c | \\
&= \frac{1}{xc} | x - c | \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Kita akan menentukan suatu bilangan yang lebih besar atau sama dengan $\frac{1}{xc}$.

Untuk itu kita pilih $\delta \leq c/2$.

Maka $|x - c| < c/2$

$$-c/2 < x - c < c/2$$

$$c/2 < x < 3c/2$$

sehingga diperoleh

$$\frac{1}{xc} < \frac{1}{c.c/2} = \frac{2}{c^2}$$

Maka persamaan (*) menjadi

$$
\begin{aligned}
|k(x) - \tfrac{1}{c}| &= |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{c}| \\
&= |\tfrac{1}{xc}(x - c)| \\
&= |\tfrac{1}{xc}||x - c| \\
&= \tfrac{1}{xc}|x - c| \\
&< \tfrac{2}{c^2}|x - c|
\end{aligned}
$$

Dari sini kita dapat memilih $\delta = c^2 \varepsilon /2$.

Karena kita memilih δ dua kali maka kita harus pilih yang paling kecil.

Jadi pilih $\delta = \inf\{1, c^2 \varepsilon /2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0<|x - c| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$$
\begin{aligned}
|k(x) - \tfrac{1}{c}| &= |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{c}| \\
&= |\tfrac{1}{xc}(x - c)| \\
&= |\tfrac{1}{xc}||x - c|
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{xc} \; | x - c |$$

$$< \frac{2}{c^2} \, | x - c |$$

$$< (\frac{2}{c^2})(\frac{c^2 \varepsilon}{2})$$

$$= \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ untuk $c > 0$.

(e). Buktikan $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$.

Bukti.

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan $q(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$.

Perhatikan

$$| q(x) - \frac{4}{5} | = | \frac{5x^3 - 4x^2 - 24}{5(x^2 + 1)} |$$

$$= | \frac{(5x^2 + 6x + 12)(x - 2)}{5(x^2 + 1)} |$$

$$= \frac{| 5x^2 + 6x + 12 |}{5(x^2 + 1)} | x - 2 | \qquad (*)$$

Pilih $\delta \leq 1$. Maka $| x - 2 | < 1$

$$-1 < x - 2 < 1$$

$$1 < x < 3$$

sehingga diperoleh

$$5x^2 + 6x + 12 \leq 5.3^2 + 6.3 + 12 = 75$$

$$5(x^2 + 1) \geq 5 (1^2 + 1) = 10.$$

Akibatnya

$$\frac{|5x^2+6x+12|}{5(x^2+1)} \le \frac{75}{10} = \frac{15}{2}$$

Jadi (*) menjadi

$$|q(x) - \frac{4}{5}| = |\frac{5x^3-4x^2-24}{5(x^2+1)}|$$

$$= |\frac{(5x^2+6x+12)(x-2)}{5(x^2+1)}|$$

$$= \frac{|5x^2+6x+12|}{5(x^2+1)}|x-2|$$

$$\le \frac{15}{2}|x-2|$$

Pilih $\delta = \inf\{1, 2\varepsilon/15\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0<|x-2|<\delta(\varepsilon)$ berlaku

$$|q(x) - \frac{4}{5}| = |\frac{5x^3-4x^2-24}{5(x^2+1)}|$$

$$= |\frac{(5x^2+6x+12)(x-2)}{5(x^2+1)}|$$

$$= \frac{|5x^2+6x+12|}{5(x^2+1)}|x-2|$$

$$\le \frac{15}{2}|x-2|$$

$$< (\frac{15}{2})(\frac{2\varepsilon}{15})$$

$$= \varepsilon$$

Jadi terbuktibahwa $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-4}{x^2+1} = \frac{4}{5}$.

Kriteria Barisan Untuk Limit

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to c} f = L$

(ii). Untuk sebarang barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Bukti.

(i)$\Rightarrow$(ii)

Misalkan $\lim_{x \to c} f = L$.

Maka jika $\varepsilon > 0$ diberikan $\exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A,\ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Misalkan (x_n) adalah sebuah barisan di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c.

Karena (x_n) konvergen ke c maka terdapat $K \in N \ni \forall n \geq K \Rightarrow |x_n - c| < \delta$.

Akibatnya $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

(i)$\Leftarrow$(ii)

Kita akan gunakan kontra positif dari pernyataan teorema yaitu jika (i) tidak benar maka (ii) tidak benar.

Misalkan (i) tidak benar yaitu $\lim_{x \to c} f \neq L$

Maka terdapat $\varepsilon_0 > 0 \ni \forall \delta > 0,\ 0 < | x - c | < \delta$ dan $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$.

Karena itu $\forall n \in N,\ x_n \in A,\ 0 < | x_n - c | < 1/n$ berlaku $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$.

Hal ini menunjukkan bahwa barisan (x_n) di $A \backslash \{c\}$ konvergen ke c tapi barisan $(f(x_n))$ tak konvergen ke L. Jadi (ii) tidak benar. Maka terbukti (i)$\Leftarrow$(ii).

Kriteria Divergen

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

(i). $\lim_{x \to c} f \neq L \in R$ jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c tapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L.

(ii). $\lim_{x \to c} f$ tidak ada di R jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c tapi lim $(f(x_n))$ tidak ada

(iii) $\lim_{x \to c} f$ tidak ada di R jika dan hanya jika terdapat dua barisan (x_n) dan (y_n) di A dengan $x_n, y_n \neq c$ dan (x_n), (y_n) konvergen ke c tapi $\lim (f(x_n)) \neq \lim (f(y_n))$.

Contoh.

(a). Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada di R.

Bukti.

Kita akan tunjukkan bahwa terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke 0 tapi lim $(f(x_n))$ tidak ada

Pilih $x_n = 1/n$, $x_n \neq c$.

Maka x_n konvergen 0 dan $(f(x_n)) = (n)$. Kita tahu bahwa $\lim (f(x_n)) = \lim(n)$ tidak ada di R. Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada di R.

(b). Misalkan f adalah fungsi signum (sgn) dengan

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

Buktikan $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ tidak ada di R.

Bukti.

Pilih $x_n = (-1)^n / n$.

Maka $\lim (x_n) = 0$ dan $f(x_n) = \dfrac{(-1)^n / n}{|(-1)^n / n|} = (-1)^n$.

Karena $f(x_n) = \dfrac{(-1)^n / n}{|(-1)^n / n|} = (-1)^n$ divergen maka dapat disimpulkan bahwa

$\lim\limits_{x \to 0} \text{sgn}(x)$ tidak ada di R.

(c). Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$ tidak ada di R.

Bukti.

Misalkan $g(x) = \sin(1/x), x \neq 0$

Untuk membuktikan ini kita akan menunjukkan terdapat dua barisan (x_n) dan (y_n) di A dengan $x_n, y_n \neq 0$ dan (x_n), (y_n) konvergen ke 0 tapi $\lim (f(x_n)) \neq \lim (f(y_n))$.

Pilih $(x_n) = (1 / n\pi)$ dan $(y_n) = (2 /(4n + 1)\pi)$.

Maka (x_n) dan (y_n) konvergen ke 0 dan

$\lim f(x_n) = \lim \sin (n\pi) = 0$ dan $\lim f(y_n) = \lim \sin (\pi/2 + 2n\pi) = 1$.

Karena $\lim (f(x_n)) \neq \lim (f(y_n))$ maka $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$ tidak ada di R.

Ringkasan.

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

1. $\lim\limits_{x \to c} f = L$ jika dan hanya jika untuk setiap lingkungan $V_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ terdapat sebuah lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, $x \neq c$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(L)$ atau untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$ atau untuk sebarang barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

2. (i). $\lim\limits_{x \to c} f \neq L \in \mathbb{R}$ jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c tapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L.

(ii). $\lim\limits_{x \to c} f$ tidak ada di R jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ dan (x_n) konvergen ke c tapi $\lim (f(x_n))$ tidak ada

(iii) $\lim\limits_{x \to c} f$ tidak ada di R jika dan hanya jika terdapat dua barisan (x_n) dan (y_n) di A dengan $x_n, y_n \neq c$ dan (x_n), (y_n) konvergen ke c tapi $\lim (f(x_n)) \neq \lim (f(y_n))$.

Latihan 1.

1. Misalkan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $c \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa

   $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to 0} f(x+c) = L$.

2. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to c} x^3 = c^3$.

3. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

4. Buktikan $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1-x} = -1$ $(x > 1)$.

5. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ tidak ada di R.

Jawaban latihan 1.

1. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

   $(\Rightarrow)$. $\lim\limits_{x \to c} f(y) = L \Leftrightarrow \exists \delta_1 > 0 \ni 0 < |y - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - L| < \varepsilon$.

   Misalkan $y = x + c$. Jika $y \to c$ maka $x+c \to c$ atau $x \to 0$.

   Pilih $\delta = \delta_1$. Maka jika $0 < |x+c - c| = |x| < \delta$ maka berlaku $|f(x+c) - L| < \varepsilon$.

   Jadi $\lim\limits_{x \to 0} f(x+c) = L$.

   $(\Leftarrow)$. $\lim\limits_{x \to 0} f(x+c) = L \Leftrightarrow \exists \delta_2 > 0 \ni 0 < |x| < \delta_2 \Rightarrow |f(x+c) - L| < \varepsilon$.

   Misalkan $y = x + c$ atau $x = y-c$. Jika $x \to 0$ maka $y-c \to 0$ atau $y \to c$.

Pilih $\delta = \delta_2$. Maka jika $0 < |y - c| = |x| < \delta$ maka berlaku $|f(y) - L| < \varepsilon$.

Jadi $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.

2. Perhatikan,

$|x^3 - c^3| = |x - c|\,|x^2 + cx + c^2|$ dan

$$|x^2 + cx + c^2| = |(x^2 - 2cx + c^2) + 3cx - 3c^2 + 3c^2|$$
$$\leq |x - c|^2 + 3|c||x - c| + 3c^2$$

Jika $|x - c| < 1$ maka $|x^2 + cx + c^2| = |(x^2 - 2cx + c^2) + 3cx - 3c^2 + 3c^2|$

$$\leq |x - c|^2 + 3|c||x - c| + 3c^2$$
$$\leq 1 + 3|c| + 3c^2$$

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Pilih $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 3|c| + 3c^2}\}$. Maka untuk $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$|x^3 - c^3| = |x - c|\,|x^2 + cx + c^2| = |(x^2 - 2cx + c^2) + 3cx - 3c^2 + 3c^2||x - c|$$
$$\leq (|x - c|^2 + 3|c||x - c| + 3c^2)\,|x - c|$$
$$\leq (1 + 3|c| + 3c^2)\left(\frac{\varepsilon}{1 + 3|c| + 3c^2}\right).$$
$$= \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka terbukti $\lim\limits_{x \to c} x^3 = c^3$.

3. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Perhatikan,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = |\sqrt{x} - \sqrt{c}|\left|\frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{c}|}|x - c|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{c}}|x - c|$$

Kasus 1, $c = 0$.

Pilih $\delta = \varepsilon^2$. Maka untuk $0 < |x| < \delta$ berlaku $|\sqrt{x}| < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$.

Kasus 2, $c > 0$.

Pilih $\delta = \min\{1, \sqrt{c}\,\varepsilon\}$.

Maka untuk $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = |\sqrt{x} - \sqrt{c}|\,|\frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}| = \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{c}|}|x - c|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{c}}|x - c| < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka terbukti $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

4. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

   Perhatikan,

$$|\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}| = |\frac{2x - x - 1}{2(x+1)}| = |\frac{x-1}{2(x+1)}|$$

$$= \frac{1}{2|x+1|}|x - 1| = \frac{1}{2(x+1)}|x - 1|$$

   Jika $|x - 1| < ½$ maka $-1/2 < x - 1 < ½$ atau $½ < x < 3/2$.

   Maka $3/2 < x + 1 < 5/2$ atau $2/5 < \frac{1}{(x+1)} < 2/3$

Pilih $\delta = \min\{1/2, 3\varepsilon\}$.

Maka Maka untuk $0 < |x - 1| < \delta$ berlaku

$$|\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}| = |\frac{2x - x - 1}{2(x+1)}| = |\frac{x-1}{2(x+1)}|$$

$$= \frac{1}{2|x+1|}|x - 1| = \frac{1}{2(x+1)}|x - 1|$$

$$< \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka terbukti $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{1-x} = -1$.

5. Pilih $(x_n) = (1/n)$. Maka x_n konvergen ke 0.

   Tapi $(f(x_n)) = (n^2)$ divergen. Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ tidak ada di R.

Tes Formatif 1.

1. Misalkan c adalah titik cluster dari $A \subseteq R$ dan $f: A \to R$. Buktikan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to 0} |f(x) - L| = 0$.
2. Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f: I \to R$ dan $c \in I$. Misalkan terdapat bilangan K dan L sedemikian sehingga $|f(x) - L| \leq K\, |x - c|$ untuk setiap $c \in I$. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$.
3. Buktikan $\lim_{x \to 1} \dfrac{x}{1 + x} = \dfrac{1}{2}$ $(x > 0)$ dengan menggunakan ε-δ dan formula barisan.
4. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} (x + \text{sgn}(x))$ tidak ada di R.
5. Misalkan fungsi $f: R \to R$ mempunyai limit L di 0 dan $g : R \to R$ yang didefinisikan dengan $g(x) = f(ax)$ untuk semua $x \in R$. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} g = L$.

1.2. Teorema-teorema Limit

1.2.1. Definisi

Misalkan $A \subseteq R$, $f:A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Fungsi f dikatakan terbatas pada lingkungan c, jika terdapat lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ dan $M > 0$ sedemikian sehingga $| f(x) | \leq M$, $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$.

1.1.2. Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f:A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Jika $\lim\limits_{x \to c} f$ ada maka f terbatas pada lingkungan c.

Bukti.

Misalkan $\lim\limits_{x \to c} f = L$.

Maka $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni 0 < | x - c | < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Pilih $\varepsilon = 1$.

Maka $|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1$

$$|f(x)| \leq 1 + |L|$$

Jadi $|f(x)| \leq 1 + |L|$, $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \neq c$.

Jika $c \notin A$ maka kita bisa pilih $M = |L| + 1$.

Tapi jika $c \in A$ maka kita pilih $M = \sup\{|f(c)|, |L| + 1\}$.

Akibatnya $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$.

Jadi f terbatas pada lingkungan $V_\delta(c)$.

1.2.3. Definisi

Misalkan $A \subseteq R$, $b \in R$, $f,g : A \to R$. Maka

(i). Jumlah dari f dan g didefinisikan dengan

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ untuk setiap } x \in A$$

(ii). Selisih dari f dan g didefinisikan dengan

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ untuk setiap } x \in A$$

(iii). Perkalian dari f dan g didefinisikan dengan

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ untuk setiap } x \in A$$

(iv). Kelipatan dari b dan f didefinisikan dengan

$$(bf)(x) = bf(x) \text{ untuk setiap } x \in A$$

(v). Pembagian f/h, $h \neq 0$ untuk setiap $x \in A$ definisikan dengan

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \text{ untuk setiap } x \in A$$

1.2.4. Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f, g : A \to R$ dan $b, c \in R$ dengan c adalah titik cluster dari A.

(a). Jika $\lim\limits_{x \to c} f = L$ dan $\lim\limits_{x \to c} g = M$ maka

(i). $\lim\limits_{x \to c} (f+g) = L + M$

(ii). $\lim\limits_{x \to c} (f-g) = L - M$

(iii). $\lim\limits_{x \to c} (fg) = LM$

(iv). $\lim\limits_{x \to c} (bf) = bL$

(b). Jika $h : A \to R$, $h(x) \neq 0\ \forall x \in A$ dan $\lim\limits_{x \to c} h = H \neq 0$ maka

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}$$

Bukti.

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

(a). Karena $\lim\limits_{x \to c} f = L$ maka $\exists \delta_1 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2$.

Karena $\lim\limits_{x \to c} g = M$ maka $\exists \delta_2 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2$.

(i). Selanjutnya perhatikan ketaksamaan berikut,

$$
\begin{aligned}
|(f+g)(x)-(L+M)| &= |f(x)+g(x)-L-M| \\
&= |f(x)-L+g(x)-M| \\
&\leq |f(x)-L|+|g(x)-M|
\end{aligned}
$$

Pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x-c| < \delta$ berlaku

$$
\begin{aligned}
|(f+g)(x)-(L+M)| &= |f(x)+g(x)-L-M| \\
&= |f(x)-L+g(x)-M| \\
&\leq |f(x)-L|+|g(x)-M| \\
&< \varepsilon/2+\varepsilon/2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\lim\limits_{x \to c} (f+g) = L+M$.

(ii). Perhatikan ketaksamaan berikut

$$
\begin{aligned}
|(f-g)(x)-(L-M)| &= |f(x)-g(x)-L+M| \\
&= |(f(x)-L)-(g(x)-M)| \\
&\leq |f(x)-L|+|g(x)-M|
\end{aligned}
$$

Pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x-c| < \delta$ berlaku

$$
\begin{aligned}
|(f-g)(x)-(L-M)| &= |f(x)-g(x)-L+M| \\
&= |(f(x)-L)-(g(x)-M)| \\
&\leq |f(x)-L|+|g(x)-M| \\
&< \varepsilon/2+\varepsilon/2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\lim\limits_{x \to c} (f-g) = L-M$.

(iii). Karena $\lim\limits_{x \to c} f$ ada di R maka f terbatas pada A. Maka terdapat $B > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \leq B$, $\forall x \in A$.

Karena $\lim_{x \to c} f = L$ maka $\exists \delta_1 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$

(|M| perlu ditambah 1 karena jika M = 0 maka $\frac{\varepsilon}{2|M|}$ tak terdefinisi)

Karena $\lim_{x \to c} g = M$ maka $\exists \delta_2 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2B$.

Perhatikan ketaksamaan berikut

$$\begin{aligned} |(f\,g)(x) - (L\,M)| &= |f(x)\,g(x) - LM| \\ &= |f(x)\,g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\ &= |f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \end{aligned}$$

Pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned} |(f\,g)(x) - (L\,M)| &= |f(x)\,g(x) - LM| \\ &= |f(x)\,g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\ &= |f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\ &< (B)\left(\frac{\varepsilon}{2B}\right) + |M|\left\{\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}\right\} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to c} (f\,g) = L\ M$.

(iv). Misalkan $b \in \mathbb{R}$.

Karena $\lim_{x \to c} f = L$ maka $\exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{(|b|+1)}$

Perhatikan ketaksamaan berikut

$$|bf(x) - bL| = |bf(x) - bL|$$

$= | b(f(x) - L) |$

$= | b || f(x) - L |$

Maka $\forall x \in A$, $0 < | x - c | < \delta$ berlaku

$$
\begin{aligned}
| bf(x) - bL | &= | bf(x) - bL | \\
&= | b(f(x) - L) | \\
&= | b || f(x) - L | \\
&< | b | \{ \frac{\varepsilon}{(| b | + 1)} \} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to c} (bf) = bL$.

(b). Misalkan $(\frac{f}{h})(x) = f(x)(\frac{1}{h(x)})$.

Untuk membuktikan $\lim_{x \to c} (\frac{f}{h}) = \frac{L}{H}$, maka kita cukup membuktikan bahwa

$\lim_{x \to c} (\frac{1}{h}) = \frac{1}{H}$. Setelah ini terbukti maka kita gunakan bagian (a)(iii).

Selanjutnya perhatikan persamaan berikut

$$
\begin{aligned}
| (\frac{1}{h})(x) - \frac{1}{H} | &= | \frac{1}{h}(x) - \frac{1}{H} | \\
&= | \frac{H - h(x)}{Hh(x)} | \\
&= \{ \frac{1}{| Hh(x) |} \} \{ | h(x) - H | \}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya kita akan memperkirakan nilai dari $\frac{1}{| Hh(x) |}$.

Karena $\lim_{x \to c} h = H$ maka $\exists \delta > 0 \ni 0 < | x - c | < \delta \Rightarrow |h(x) - H| < \frac{| H |^2 \varepsilon}{2}$.

Pilih $\varepsilon = \frac{|H|}{2}$.

Maka

$$||h(x)| - |H|| \le |h(x) - H| < \frac{|H|}{2}$$

$$||h(x)| - |H|| < \frac{|H|}{2}$$

$$-\frac{|H|}{2} < |h(x)| - |H| < \frac{|H|}{2}$$

$$\frac{|H|}{2} < |h(x)| < 3\frac{|H|}{2}$$

Dari sini kita peroleh

$$\frac{1}{|Hh(x)|} = \frac{1}{|H||h(x)|} \le \frac{1}{|H||H|/2|} = \frac{2}{|H|^2}$$

Maka $\forall x \in A,\ 0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$\left|\left(\frac{1}{h}\right)(x) - \frac{1}{H}\right| = \left|\frac{1}{h}(x) - \frac{1}{H}\right|$$

$$= \left|\frac{H - h(x)}{Hh(x)}\right|$$

$$= \left\{\frac{1}{|Hh(x)|}\right\}\{|h(x) - H|\}$$

$$< \left(\frac{2}{|H|^2}\right)\left(\frac{|H|^2\varepsilon}{2}\right)$$

$$= \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to c} \left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{H}$.

Karena $\lim\limits_{x \to c} f = L$ dan $\lim\limits_{x \to c} (\frac{1}{h}) = \frac{1}{H}$ maka dengan menggunakan bagian (a)(iii)

maka diperoleh $\lim\limits_{x \to c} (\frac{f}{h}) = \lim\limits_{x \to c} f \lim\limits_{x \to c} (\frac{1}{h})$

$$= L. (\frac{1}{H}) = \frac{L}{H}.$$

Contoh.

(a). Untuk menghitung $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 4)$ kita dapat menggunakan teorema 1.2.4

bagian (a)(iii) yaitu

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 4) &= \lim_{x \to 2} (x^2 + 1) \lim_{x \to 2} (x^3 - 4) \\ &= (2^2 + 1)(2^3 - 4) \\ &= 20\end{aligned}$$

(b). Hitunglah $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 4) / (x^2 + 1)$.

Untuk menghitung limit ini kita gunakan teorema 1.2.4.(b) yaitu

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 4) / (x^2 + 1) = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 4)}{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1)} = \frac{4}{5}$$

1.2.5 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f : A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Misalkan $a \leq f(x) \leq b$ untuk setiap $x \in A$, $x \neq c$.

Jika $\lim\limits_{x \to c} f$ ada maka $a \leq \lim\limits_{x \to c} f(x) \leq b$.

Bukti.

Untuk membuktikan ini kita akan gunakan teorema berikut

"Jika (x_n) adalah suatu barisan yang konvergen dan $a \leq (x_n) \leq b$ untuk setiap

$n \in N$ maka $a \leq \lim(x_n) \leq b$" (*)

Misalkan $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Maka untuk setiap barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in N$ dengan (x_n) konvergen ke c berlaku $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Karena $a \leq f(x_n) \leq b$ untuk setiap $n \in N$ maka menurut (*) diperoleh

$$a \leq \lim_{x \to c} f(x_n) \leq b \text{ atau } a \leq L \leq b.$$

1.2.6 Teorema Apit

Misalkan $A \subseteq R$, $f, g : A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Misalkan $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in A$, $x \neq c$.

Jika $\lim_{x \to c} f = L = \lim_{x \to c} h$ maka $\lim_{x \to c} g = L$.

Bukti.

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Karena $\lim_{x \to c} f = L$ maka $\exists \delta_1 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Atau $|f(x) - L| < \varepsilon$ dapat ditulis menjadi $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$.

Karena $\lim_{x \to c} h = L$ maka $\exists \delta_2 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$.

Atau $|h(x) - L| < \varepsilon$ dapat ditulis menjadi $-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$.

Pilih $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$.

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ kita punya

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \text{ dan } -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon.$$

Karena $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in A$, $x \neq c$ maka

$$-\varepsilon < f(x) - L < g(x) - L < h(x) - L < \varepsilon.$$

Akibatnya

$$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \text{ atau } |g(x) - L| < \varepsilon.$$

Jadi $\exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$.

Hal ini membuktikan bahwa $\lim_{x \to c} g = L$.

Contoh.

Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} x^{3/2} = 0$, $(x > 0)$.

Bukti.

Untuk $0 < x < 1$ berlaku $x < x^{1/2} < 1$. Dengan mengalikannya dengan x diperoleh $x^2 < x^{3/2} < x$. Karena $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ dan $\lim_{x \to 0} x = 0$ maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim_{x \to 0} x^{3/2} = 0$.

1.2.7 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f : A \to R$ dan $c \in R$ adalah titik cluster dari A.

Jika $\lim_{x \to c} f > 0$ [berturut-turut, $\lim_{x \to c} f < 0$] maka terdapat lingkungan-δ, $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ dari c sedemikian sehingga $f(x) > 0$ [berturut-turut, $f(x) < 0$] $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$ $x \neq c$.

Bukti.

Misalkan $\lim_{x \to c} f = L$

Maka $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Kita akan tinjau 2 kasus yaitu $L > 0$ dan $L < 0$.

Kasus 1. $L > 0$.

Pilih $\varepsilon = L/2$

Maka $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < L/2$

$$\Rightarrow -L/2 < f(x) - L < L/2$$

$$\Rightarrow 0 < L/2 < f(x) < 3L/2.$$

Jadi terdapat lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$ $x \neq c$ berlaku $f(x) > 0$.

Kasus 2. $L < 0$.

Pilih $\varepsilon = -L/2$.

Maka $\forall x \in A,\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < -L/2$

$$\Rightarrow L/2 < f(x) - L < -L/2$$

$$\Rightarrow 3L/2 < f(x) < L/2 < 0.$$

Jadi terdapat lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A \cap V_\delta(c)$ $x \neq c$ berlaku $f(x) < 0$.

Ringkasan.

Misalkan $A \subseteq R$, $f, g, h : A \to R$ dan $b, c \in R$ dengan c adalah titik cluster dari A.

1. Jika $\lim\limits_{x \to c} f = L$ dan $\lim\limits_{x \to c} g = M$ maka $\lim\limits_{x \to c} (f+g) = L + M$, $\lim\limits_{x \to c} (f-g) = L - M$,

   $\lim\limits_{x \to c} (fg) = LM$, $\lim\limits_{x \to c} (bf) = bL$

2. Jika $h : A \to R$, $h(x) \neq 0\ \forall x \in A$ dan $\lim\limits_{x \to c} h = H \neq 0$ maka $\lim\limits_{x \to c} \left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}$.

3. Jika $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in A$, $x \neq c$ dan $\lim\limits_{x \to c} f = L = \lim\limits_{x \to c} h$ maka

   $\lim\limits_{x \to c} g = L$.

Latihan 2.

1. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} \cos(1/x)$ tidak ada tapi $\lim\limits_{x \to 0} x \cos(1/x) = 0$.

2. Hitunglah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 + 3x}}{x + 2x^2}$ dengan $x > 0$!.

3. Misalkan $f, g : A \to R$ dan c titik cluster dari A.

   (a). Tunjukkan bahwa jika $\lim\limits_{x \to c} f$ dan $\lim\limits_{x \to c} (f+g)$ ada maka $\lim\limits_{x \to c} g$ ada.

   (b). Jika $\lim\limits_{x \to c} f$ dan $\lim\limits_{x \to c} fg$ ada apakah $\lim\limits_{x \to c} g$ ada?.

4. Buktikan bahwa jika $\lim_{x \to c} f_k = L_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ maka

$\lim_{x \to c} (f_1 + \ldots + f_n) = (L_1 + \ldots + L_n)$ dan $\lim_{x \to c} (f_1 \ldots f_n) = (L_1 \ldots L_n)$.

Jawaban Latihan 2.

1. Misalkan $f(x) = \cos(1/x)$. $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada jika terdapat dua buah barisan (x_n) dan (y_n) dengan $x_n \neq 0$ dan $y_n \neq 0$ sedemikian sehingga $\lim(x_n) = 0$ dan $\lim(y_n) = 0$ tapi $\lim(f(x_n)) \neq \lim(f(y_n))$.

   Misalkan $x_n = 1/2n\pi$ dan $y_n = 2/(4n+1)\pi$. Maka $\lim(x_n) = 0$ dan $\lim(y_n) = 0$ tapi $\lim(f(x_n)) = \lim(\cos 2n\pi) = 1 \neq 0 = \lim(\cos(4n+1)\pi/2) = \lim(f(y_n))$.

   Jadi $\lim_{x \to 0} \cos(1/x)$ tidak ada di R.

   Selanjutnya perhatikan

   $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$ atau $-x \leq x\cos(1/x) \leq x$

   Karena $\lim(-x) = 0$ dan $\lim(x) = 0$ maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim_{x \to 0} x\cos(1/x) = 0$.

2. Perhatikan

$$\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{x+2x^2} = \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{x+2x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x}}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x}}\right)$$

$$= \frac{1+2x-1-3x}{(x+2x^2)(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x})}$$

$$= \frac{-x}{x(1+2x\ \ )(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x})}$$

$$= \frac{-1}{(1+2x\ \ )(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x})}$$

4. Misalkan $A \subseteq R$, $f : A \to R$ dan $c \in R$ dengan c adalah titik cluster dari A.

   Misalkan $|f|$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $|f|(x) = |f(x)|$ untuk $x \in R$

   Buktikan bahwa jika $\lim\limits_{x \to c} f$ ada maka $\lim\limits_{x \to c} |f| = |\lim\limits_{x \to c} f|$.

5. Misalkan $A \subseteq R$, $f : A \to R$ dan $c \in R$ dengan c adalah titik cluster dari A.

   Misalkan $\sqrt{f}$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$ untuk $x \in R$ dan $f(x) \geq 0$.

   Buktikan bahwa jika $\lim\limits_{x \to c} f$ ada maka $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f} = \sqrt{\lim\limits_{x \to c} f}$.

1.3 Perluasan Konsep Limit

Limit Satu Sisi

1.3.1 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

(i). Misalkan c adalah titik cluster dari $A \cap (c, \infty) = \{x \in A | x > c\}$.

$L \in R$ dikatakan **limit kanan** dari f di c jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in A \cap (c, \infty)$, $0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Jika L adalah limit dari f untuk x mendekati c dari kanan, biasa ditulis $f(x) \to L$ apabila $x \to c^+$ atau $\lim\limits_{x \to c^+} f = L$

(ii). Misalkan c adalah titik cluster dari $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A | x < c\}$.

$L \in R$ dikatakan **limit kiri** dari f di c jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in A \cap (-\infty, c)$, $0 < c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Jika L adalah limit dari f untuk x mendekati c dari kiri, biasa ditulis $f(x) \to L$ apabila $x \to c^-$ atau atau $\lim\limits_{x \to c^-} f = L$

Catatan.

- $\lim\limits_{x \to c^+} f$ dan $\lim\limits_{x \to c^-} f$ disebut **limit satu-sisi** (one-sided limits) dari f di c. Limit ini mungkin ada dan mungkin juga tidak ada. Jika ada limit ini mungkin sama dan mungkin juga berbeda.
- Jika A adalah sebuah interval dengan c titik ujung kiri interval tersebut maka $f : A \to R$ mempunyai limit di c jika dan hanya jika f mempunyai limit kanan di c.

Dalam hal ini $\lim\limits_{x \to c} f = \lim\limits_{x \to c^+} f$.

Hal seperti di atas juga terjadi jika c adalah titik ujung kanan dari interval tersebut, maka $\lim\limits_{x \to c} f = \lim\limits_{x \to c^-} f$.

1.3.2 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan c adalah titik cluster dari

$A \cap (c, \infty) = \{x \in A | x > c\}$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to c^+} f = L$

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) yang konvergen ke c dengan $x_n \in A \cap (c, \infty)$ $x_n > c$ untuk setiap $n \in N$, maka $f(x_n)$ konvergen ke L.

1.3.3 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan c adalah titik cluster dari

$A \cap (-\infty, c) = \{x \in A | x < c\}$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to c^-} f = L$

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) yang konvergen ke c dengan $x_n \in A \cap (-\infty, c)$ $x_n < c$ untuk setiap $n \in N$, maka $f(x_n)$ konvergen ke L.

1.3.4 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f: A \to R$ dan c adalah titik cluster dari

$A \cap (c, \infty) = \{x \in A | x > c\}$ dan $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A | x < c\}$. Maka

$$\lim_{x \to c} f = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f = L = \lim_{x \to c^-} f$$

Contoh.

(a). Misalkan $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$

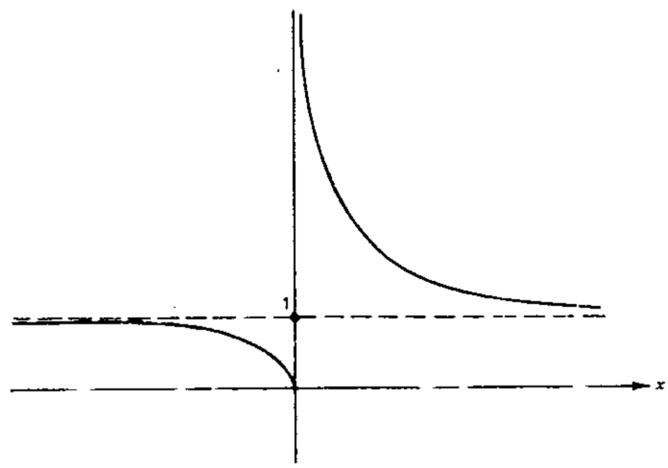
Maka $\lim_{x \to 0^+} f = 1$ dan $\lim_{x \to 0^-} f = -1$.

Karena nilai kedua limit ini berbeda maka dikatakan $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ tidak ada (karena tidak sesuai dengan teorema 1.3.4).

(b). Misalkan $g(x) = e^{1/x}$, $x \neq 0$.

Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ tidak ada dan $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$.

Bukti.



Grafik $g(x) = e^{1/x}$, $x \neq 0$

Dari grafik kita dapat memperkirakan bahwa $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ tidak ada dan $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$.

Untuk membuktikannya kita gunakan ketaksamaan berikut,

(*) $$0 < t < e^{1/t} \text{ untuk } t > 0$$

Untuk $x > 0$ maka $1/x > 0$ dan

$$0 < 1/x < e^{1/x}$$

Pilih $x_n = 1/n$, $x_n \to 0$.

Maka $g(x_n) = e^n > n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Akibatnya $(g(x_n))$ divergen. Maka $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}$ tidak ada di R.

Selanjutnya kita akan menunjukkan bahwa untuk $x < 0$ maka $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$.

Dari (*) kita bisa ambil $t = -1/x$, $x < 0$.

Maka diperoleh

$$0 < -1/x < e^{-1/x}$$

Karena x < 0 maka $$0 < e^{1/x} < -x$$

Karena $\lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$ maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$.

(c). Misalkan $h(x) = \dfrac{1}{(e^{1/x} + 1)}$ untuk $x \neq 0$.

Tunjukkan $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 0$ dan $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$.

Bukti.

Dari contoh (b) kita punya ketaksamaan

$0 < 1/x < e^{1/x}$ atau $0 < 1/x < e^{1/x} < e^{1/x} + 1$, untuk $x > 0$.

Maka

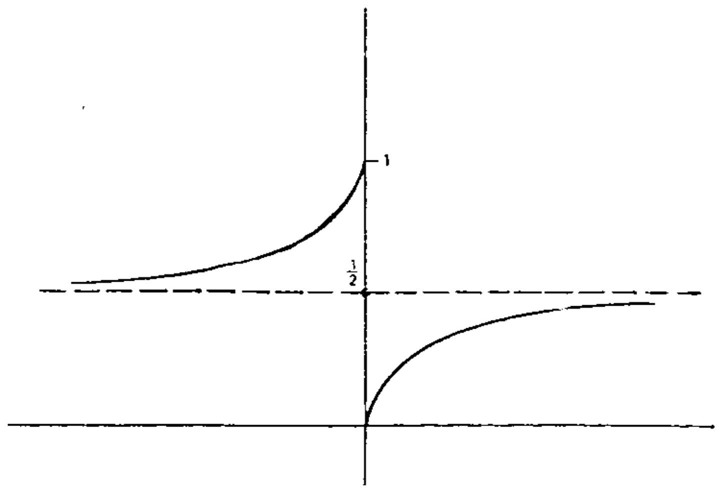
$$0 < \frac{1}{e^{1/x} + 1} < \frac{1}{e^{1/x}} < x.$$

Karena $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ maka $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{e^{1/x} + 1} = 0$.

Pada contoh (b) kita juga punya $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$. Maka

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{e^{1/x} + 1} = \frac{1}{\lim_{x \to 0^-}(e^{1/x} + 1)} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

Jadi dari soal ini bisa kita lihat bahwa limit kiri dan limit kanan dari h ada tapi tidak sama.



Grafik $h(x) = \dfrac{1}{(e^{1/x}+1)}$, $x \neq 0$

Limit Tak Hingga

1.3.5 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan c adalah titik cluster dari A.

(i). Fungsi f dikatakan **menuju ∞** bila x mendekati c jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $\delta = \delta(\alpha)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) > \alpha$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim\limits_{x \to c} f = \infty$.

(i). Fungsi f dikatakan **menuju - ∞** bila x mendekati c jika untuk setiap $\beta \in R$ terdapat $\delta = \delta(\beta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) < \beta$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim\limits_{x \to c} f = - \infty$.

Contoh.

(a). Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = \infty$.

Misalkan $\alpha \in$ R diberikan.

Perhatikan

$$\frac{1}{x^2} > \alpha \text{ atau } x^2 < \frac{1}{\alpha} \text{ atau } x^2 - \frac{1}{\alpha} < 0 \text{ atau } (x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})(x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}) < 0.$$

Maka $-\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < x < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ atau $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Pilih $\delta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Maka jika $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ berlaku $\frac{1}{x^2} > \alpha$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = \infty$.

1.3.6 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f,g : A \to R$ dan c adalah titik cluster dari A. Anggap $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A, x \neq c$.

(i). Jika $\lim_{x\to c} f = \infty$ maka $\lim_{x\to c} g = \infty$

(ii). Jika $\lim_{x\to c} g = -\infty$ maka $\lim_{x\to c} f = -\infty$

Bukti.

(i). Misalkan $\alpha \in$ R diberikan.

Karena $\lim_{x\to c} f = \infty$ maka terdapat $\delta = \delta(\alpha) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) > \alpha$. Karena $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A, x \neq c$ maka $g(x) \geq f(x) > \alpha$.

Jadi terdapat $\delta = \delta(\alpha) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ maka $g(x) > \alpha$.

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x\to c} g = \infty$.

(ii). Misalkan $\beta \in R$ diberikan.

Karena $\lim_{x \to c} g = -\infty$ maka terdapat $\delta = \delta(\beta) > 0 \ni \forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ maka

$g(x) < \beta$. Karena $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in A, x \ne c$ maka $\beta > g(x) \ge f(x)$.

Jadi terdapat $\delta = \delta(\alpha) > 0 \ni \forall x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) < \beta$.

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \to c} f = -\infty$.

1.3.7 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

(i). Misalkan c adalah titik cluster dari $A \cap (c, \infty) = \{x \in A | x > c\}$.

Fungsi f dikatakan **menuju ∞** bila x mendekati c dari kanan jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $\delta = \delta(\alpha)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < x - c < \delta$ maka $f(x) > \alpha$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c^+} f = \infty$

Fungsi f dikatakan **menuju - ∞** bila x mendekati c dari kanan jika untuk setiap $\beta \in R$ terdapat $\delta = \delta(\beta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < x - c < \delta$ maka $f(x) < \beta$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c^+} f = -\infty$

(ii). Misalkan c adalah titik cluster dari $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A | x < c\}$.

Fungsi f dikatakan **menuju ∞** bila x mendekati c dari kiri jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $\delta = \delta(\alpha)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < c - x < \delta$ maka $f(x) > \alpha$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c^-} f = \infty$.

Fungsi f dikatakan **menuju - ∞** bila x mendekati c dari kiri jika untuk setiap $\beta \in R$ terdapat $\delta = \delta(\beta)$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $0 < c - x < \delta$ maka $f(x) < \beta$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to c^-} f = -\infty$.

Contoh.

(a). Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0^+} (1/x) = \infty$.

(b). Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0^-} (1/x) = -\infty$.

Bukti.

(a). Misalkan $\alpha \in R$ diberikan.

Perhatikan, $\frac{1}{x} > \alpha$ atau $x < \frac{1}{\alpha}$

Pilih $\delta = \frac{1}{\alpha}$.

Maka jika $0 < x < \frac{1}{\alpha}$ berlaku $\frac{1}{x} > \alpha$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0^+} (1/x) = \infty$.

(b). Misalkan $\beta \in R$ diberikan.

Perhatikan, $\frac{1}{x} < \beta$ atau $x > \frac{1}{\beta}$ atau $-x < -\frac{1}{\beta}$

Pilih $\delta = -\frac{1}{\beta}$.

Maka jika $0 < -x < \frac{1}{\beta}$ berlaku $\frac{1}{x} < \beta$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0^-} (1/x) = -\infty$.

Limit di Tak Hingga.

1.3.8 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$

(i). Misalkan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

L $\in$ R adalah limit dari f untuk x mendekati ∞ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K = K(\varepsilon) > a$ sedemikian sehingga untuk setiap $x > K$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim\limits_{x\to\infty} f = L$

(ii). Misalkan $(-\infty, b) \subseteq A$ untuk suatu $b \in R$.

L $\in$ R adalah limit dari f untuk x mendekati $-\infty$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K = K(\varepsilon) < b$ sedemikian sehingga untuk setiap $x < K$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim\limits_{x\to-\infty} f = L$

1.3.9 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim\limits_{x\to\infty} f = L$

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (a, \infty)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

1.3.10 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(-\infty, a) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim\limits_{x\to-\infty} f = L$

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (-\infty, a)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Contoh.

1. Misalkan $g(x) = 1/x$, $x \neq 0$. Buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} g(x)$.

   Bukti.

   Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

   Perhatikan,

   $$|g(x) - 0| = |1/x - 0| = |1/x| < \varepsilon.$$

   Untuk $x > 0$ maka diperoleh $x > 1/\varepsilon$. Dengan memilih $K = 1/\varepsilon$ maka diperoleh untuk $x > K$ berlaku $|g(x) - 0| = |1/x - 0| = |1/x| = 1/x < \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Selanjutnya untuk $x < 0$ maka diperoleh $x < -1/\varepsilon$.

   Dengan memilih $K = -1/\varepsilon$ maka diperoleh untuk $x < K < 0$ berlaku $|g(x) - 0| = |1/x - 0| = |1/x| = -1/x < \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

2. Misalkan $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$. Buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

   Bukti.

   Untuk membuktikan ini kita gunakan ketaksamaan berikut, yaitu $0 \leq 1/x^2 \leq 1/x$, untuk $x \geq 1$. Selanjutnya dengan menggunakan teorema apit dan soal nomor 1 maka terbukti $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

1.3.11 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

(i). Misalkan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Fungsi f dikatakan menuju ∞ (berturut-turut, $-\infty$) untuk x mendekati ∞ jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $K = K(\alpha) > a$ sedemikian sehingga untuk setiap $x > K$ maka $f(x) > \alpha$ (berturut-turut, $f(x) < \alpha$).

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x\to\infty} f = \infty$ (berturut-turut, $\lim_{x\to\infty} f = -\infty$)

(ii). Misalkan $(-\infty, b) \subseteq A$ untuk suatu $b \in R$.

Fungsi f dikatakan menuju ∞ (berturut-turut, $-\infty$) untuk x mendekati $-\infty$ jika untuk setiap $\alpha \in R$ terdapat $K = K(\alpha) < b$ sedemikian sehingga untuk setiap $x < K$ maka $f(x) > \alpha$ (berturut-turut, $f(x) < \alpha$).

Bentuk limit ini biasa dilambangkan dengan $\lim_{x \to -\infty} f = \infty$

(berturut-turut, $\lim_{x \to -\infty} f = -\infty$).

Dua teorema berikut akan diberikan definisi 1.3.11 dengan menggunakan kriteria barisan.

1.3.12 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to \infty} f = \infty$ (berturut-turut, $\lim_{x \to \infty} f = -\infty$)

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (a, \infty)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka $\lim(f(x_n)) = \infty$ (berturut-turut, $\lim(f(x_n)) = -\infty$).

1.3.13 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ dan $(-\infty, a) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

Maka pernyataan berikut ekivalen.

(i). $\lim_{x \to -\infty} f = \infty$ (berturut-turut, $\lim_{x \to -\infty} f = -\infty$)

(ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (-\infty, a)$ dan $\lim(x_n) = -\infty$ maka barisan $\lim(f(x_n)) = \infty$ (berturut-turut, $\lim(f(x_n)) = -\infty$).

Ringkasan.

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f: A \to R$ dan c adalah titik cluster dari

$A \cap (c, \infty) = \{x \in A | x > c\}$ dan $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A | x < c\}$.

1. Maka pernyataan berikut ekivalen.

   (i). $\lim\limits_{x \to c} f = \lim\limits_{x \to c^+} f = \lim\limits_{x \to c^-} f = L$

   (ii). Untuk setiap barisan (x_n) yang konvergen ke c dengan $x_n \in A \cap (c, \infty)$ atau $x_n \in A \cap (-\infty, c)$ maka $f(x_n)$ konvergen ke L.

2. Anggap $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A, x \neq c$.

   (i). Jika $\lim\limits_{x \to c} f = \infty$ maka $\lim\limits_{x \to c} g = \infty$

   (ii). Jika $\lim\limits_{x \to c} g = -\infty$ maka $\lim\limits_{x \to c} f = -\infty$

3. Misalkan $A \subseteq R$ dan $f: A \to R$ dan $(-\infty, a) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

   Maka pernyataan berikut ekivalen.

   (i). $\lim\limits_{x \to -\infty} f = L$

   (ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (-\infty, a)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

4. Misalkan $A \subseteq R$ dan $f: A \to R$ dan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

   Maka pernyataan berikut ekivalen.

   (i). $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$ (berturut-turut, $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$)

   (ii). Untuk setiap barisan (x_n) dengan $x_n \in A \cap (a, \infty)$ dan $\lim(x_n) = \infty$ maka $\lim (f(x_n)) = \infty$ (berturut-turut, $\lim (f(x_n)) = -\infty$).

5. Misalkan $A \subseteq R$ dan $f, g: A \to R$ dan $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in R$.

   Misalkan $g(x) > 0$ untuk setiap $x > a$ dan

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

   untuk suatu $L \in R$, $L \neq 0$.

(i). Jika L > 0, maka $\lim\limits_{x\to\infty} f = \infty$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to\infty} g = \infty$.

(ii). Jika L < 0, maka $\lim\limits_{x\to\infty} f = -\infty$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to\infty} g = \infty$.

Latihan 3.

1. Misalkan $f(x) = |x|^{-1/2}$ untuk $x \neq 0$.

   Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2. Buktikan bahwa

   a. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \infty$, $(x \neq 1)$

   b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)}{\sqrt{x}} = \infty$, $(x > 0)$

   c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} = 1$ $(x > 0)$

3. Misalkan bahwa f dan g mempunyai limit di R untuk $x \to \infty$ dan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in (\alpha, \infty)$. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

4. Misalkan f didefinisikan pada $(0, \infty)$. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to 0^+} f(1/x) = L$.

Jawaban latihan 3.

1. Misalkan $\alpha \in R$ diberikan.

   Perhatikan

   $f(x) = 1/\sqrt{|x|} > \alpha$ atau $|x| < 1/\alpha^2$.

   Pilih $\delta = 1/\alpha^2$.

   Maka untuk setiap $x > 0$ dengan $0 < x < \delta$ berlaku $1/\sqrt{|x|} > \alpha$.

   Karena $\alpha \in R$ sebarang maka terbukti $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

   Selanjutnya untuk $x < 0$ dengan $0 < -x < \delta$ berlaku $1/\sqrt{|x|} > \alpha$.

   Karena $\alpha \in R$ sebarang maka terbukti $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

a. Perhatikan

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-1} > \alpha$$

Karena x > 1 maka $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{|x-1|} > \alpha$ atau $|x-1| < 1/\alpha$.

Ambil $\alpha > 1$. Pilih $\delta = 1/\alpha$.

Maka untuk $0 < |x-1| < \delta$ berlaku

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-1} > \alpha$$

Karena $\alpha > 1$ sebarang maka terbukti $\lim\limits_{x \to 1^+} \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$.

b. Perhatikan

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} > \frac{2}{\sqrt{x}} > \alpha.$$

Ambil $\alpha > 0$. Pilih $K = 4/\alpha^2$.

Maka untuk setiap x > K berlaku

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} > \frac{2}{\sqrt{x}} > \alpha.$$

3. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

$\lim\limits_{x \to \infty} f = L \quad \Leftrightarrow \exists K_1 > 0 \ni \forall x > K_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2$

$\lim\limits_{x \to \infty} g = M \quad \Leftrightarrow \exists K_2 > 0 \ni \forall x > K_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2$

Pilih $K = \text{maks}\ \{ K_1, K_2 \}$.

Maka $\forall x > K$ berlaku

$$|f(x) - g(x) - L + M| \le |f(x) - L| + |g(x) - M|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Andaikan L > M. Pilih $\varepsilon = L - M$.

Maka berlaku

$|f(x) - g(x) - L + M| < L - M$ atau $0 < f(x) - g(x) < 2L - 2M$.

Jadi diperoleh $f(x) > g(x)$. Hal ini kontradiksi dengan $f(x) \leq g(x)$.

Jadi haruslah $L \leq M$ atau $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

4. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

   $(\Rightarrow)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f = L \quad \Leftrightarrow \exists K > 0 \ni \forall x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

   Misalkan $y = 1/x$. Jika $x \to \infty$ maka $y \to 0^+$.

   Selanjutnya jika $x > K$ maka $0 < 1/x < 1/K$ atau $0 < y < 1/K$.

   Pilih $\delta = 1/K$.

   Maka $\forall y \in D_f$, $0 < y < \delta$ berlaku

   $|f(x) - L| < \varepsilon$ atau $|f(1/x) - L| < \varepsilon$

   Jadi terbukti $\lim\limits_{x\to 0^+} f(1/x) = L$.

   $(\Leftarrow)$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(1/x) = L \Leftrightarrow$ terdapat $\delta > 0 \ni 0 < |x| < \delta$ maka $|f(1/x) - L| < \varepsilon$.

   Misalkan $y = 1/x$. Jika $x \to 0^+$ maka $y \to \infty$.

   Selanjutnya jika $|x| < \delta$ maka $1/|x| > 1/\delta$ atau $y > 1/\delta$.

   Pilih $K = 1/\delta$.

   Maka $\forall y > K$ berlaku $|f(y) - L| < \varepsilon$ atau $|f(1/x) - L| < \varepsilon$

   Jadi terbukti $\lim\limits_{x\to\infty} f(1/x) = L$.

Tes Formatif 3.

1. Berikan sebuah contoh fungsi yang mempunyai limit kanan tapi tidak mempunyai limit kiri di suatu titik.
2. Misalkan $c \in R$ dan f adalah fungsi yang terdefinisi untuk $x \in (c, \infty)$ dan $f(x) > 0$ untuk semua $x \in (c, \infty)$. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f = \infty$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c} 1/f = 0$.
3. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1}$, $(x \neq 1)$ tidak ada.
4. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = 0$, $(x > 0)$.
5. Misalkan f didefinisikan pada (a, ∞) sedemikian sehingga $\lim\limits_{x \to \infty} xf(x) = L$ dengan $L \in R$. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.
6. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f$ adalah tunggal (jika ada).

BAB II

FUNGSI KONTINU

A. Pengantar

Konsep fungsi kontinu pada dasarnya sama dengan konsep limit. Suatu fungsi kontinu di suatu titik jika limitnya sama dengan nilai fungsinya di titik tersebut. Jadi dalam mempelajari konsep fungsi kontinu diharapkan mahasiswa sudah paham dengan konsep limit. Pada bagian awal kita akan mempelajari definisi dari fungsi kontinu dan fungsi tak kontinu serta kombinasi fungsi kontinu.

Pada pasal 2.3 kita akan memperluas kekontinuan fungsi di suatu titik menjadi kekontinuan di suatu interval. Pada bagian ini kita juga akan membahas masalah maksimum dan minimum serta teorema dari lokasi akar.

Pada pasal 2.4 kita akan membahas fungsi kontinu seragam dan fungsi Lipschitz serta hubungan keduanya. Materi ini akan diberikan sebanyak tujuh kali pertemuan.

Pada bagian akhir akan dibahas fungsi monoton dan fungsi invers beserta sifat-sifatnya dan lompatan suatu fungsi di suatu titik.

B. Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa diharapkan mampu menguasai konsep fungsi kontinu serta terampil menggunakannya dalam soal-soal.

C. Tujuan Instruksional Khusus

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu

- membuktikan suatu fungsi kontinu di suatu titik dengan menggunakan definisi yaitu dengan menggunakan ε-δ.
- membuktikan suatu fungsi kontinu di suatu titik dengan menggunakan konsep barisan.
- membuktikan suatu fungsi tidak kontinu di suatu titik

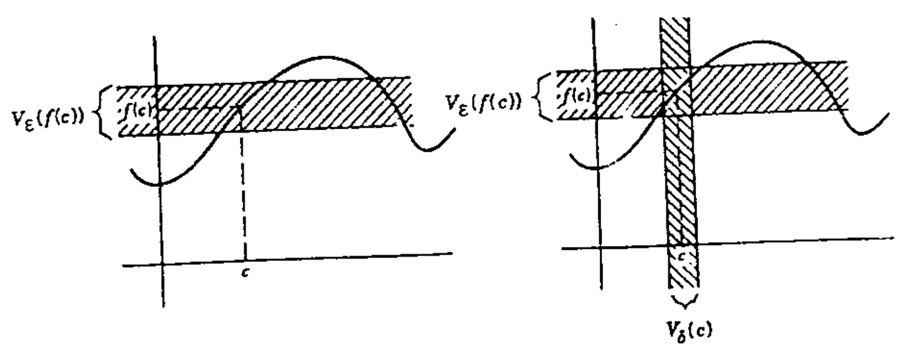
- membuktikan sifat-sifat fungsi kontinu dengan menggunakan ε-δ.
- menggunakan teorema maksimum-minimum dalam soal-soal.
- menggunakan teorema lokasi akar dalam soal-soal.
- membuktikan suatu fungsi kontinu seragam.
- menggunakan fungsi Lipschitz untuk membuktikan kontinu seragam.

D. Uraian Materi Kegiatan

2.1.1 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in A$.

Fungsi f dikatakan kontinu di c jika untuk setiap lingkungan $V_\varepsilon(f(c)) = (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$ dari f(c) terdapat sebuah lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ dari c sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$.



Dari definisi ini ada dua kemungkinan untuk nilai c yaitu c titik cluster dari A atau bukan titik cluster dari A.

(a). Jika c titik cluster dari A maka menurut definisi 1.1.1 diperoleh

fungsi f kontinu di c jika dan hanya jika $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$

Jadi agar f kontinu di c maka ada tiga syarat yang harus dipenuhi yaitu

(i). f terdefinisi di c atau f(c) ada.

(ii). $\lim_{x \to c} f(x)$ ada di R

(iii). $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$

(b). Jika c bukan titik cluster (titik pencil) dari A maka terdapat lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ sedemikian sehingga $V_\delta(c) \cap A = \{ c \}$. Maka untuk setiap lingkungan $V_\varepsilon(L) = (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$ selalu terdapat sebuah lingkungan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ sedemikian sehingga $f(c) \in V_\varepsilon(L)$. Jadi f selalu kontinu.

Jadi dapat disimpulkan bahwa jika c bukan titik cluster dari A maka f secara langsung kontinu di c. Maka untuk pembicaraan selanjutnya kita hanya akan meninjau kekontinuan fungsi f di titik cluster.

2.1.2 Definisi

Misalkan $B \subseteq A \subseteq R$, $f: A \to R$. Maka,

fungsi f dikatakan kontinu pada B jika dan hanya jika f kontinu untuk setiap $x \in B$.

2.1.3 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in A$.

Maka kondisi berikut ekivalen

(i). f kontinu di c

(ii). Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, |x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

(iii). Untuk sebarang barisan (x_n) di A $\forall n \in N$ dengan (x_n) konvergen ke c maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke f(c)

Bukti.

(i)$\Rightarrow$(ii)

Misalkan $\lim\limits_{x \to c} f = f(c)$

Maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, maka $f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Karena,

$$x \in V_\delta(c) \cap A \Leftrightarrow |x - c| < \delta(\varepsilon) \text{ dan}$$

$$f(x) \in V_\varepsilon(f(c)) \Leftrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in A$, $|x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

(i)$\Leftarrow$(ii)

Misalkan untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, |x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Pilih $V_\varepsilon(f(c)) = (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$ dan $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$. Maka untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A$, berlaku $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$.

Hal ini membuktikan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f = f(c)$.

(i)$\Rightarrow$(iii)

Misalkan $\lim\limits_{x \to c} f = f(c)$.

Maka jika $\varepsilon > 0$ diberikan $\exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Misalkan (x_n) adalah sebuah barisan di A dengan (x_n) konvergen ke c. Karena (x_n) konvergen ke c maka terdapat $K \in N \ni \forall n \geq K \Rightarrow |x_n - c| < \delta$.

Akibatnya $|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$. Hal ini menunjukkan bahwa barisan $(f(x_n))$ konvergen ke f(c).

Bukti.

(i). Misalkan c adalah bilangan rasional.

Akan ditunjukkan f tak kontinu di c.

Ambil sebarang barisan (x_n) dengan x_n bilangan irrasional untuk setiap n dan x_n konvergen ke c (Keberadaan barisan ini dijamin oleh teorema kepadatan bilangan riil). Karena x_n bilangan irrasional untuk setiap n maka $f(x_n) = 0$. Karena c bilangan rasional maka $f(c=m/n) = 1/n$. Jadi $\lim\limits_{x_n \to c} (f(x_n)) = 0 \neq 1/n = f(c)$. Jadi f tidak kontinu untuk c bilangan rasional.

(ii). Misalkan c adalah bilangan irrasional dan $\varepsilon > 0$.

Maka menurut sifat Archimedean terdapat $n_0 \in N \ni 1/n_0 < \varepsilon$. Maka ada berhingga banyaknya bilangan rasional dalam interval (c-1,c+1) dengan penyebut lebih kecil dari n_0. Maka kita dapat memilih $\delta > 0$ yang begitu kecil sedemikian sehingga $(b-\delta,b+\delta)$ tidak memuat bilangan rasional dengan penyebut lebih kecil dari n_0.

Akibatnya $\forall x \in A$, $|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| = |f(x)| \leq 1/n_0 < \varepsilon$.

Jadi f kontinu di c irrasional.

Catatan.

* Kadang-kadang suatu fungsi f tidak kontinu di c, karena f(c) tidak terdefinisi. Tapi jika $\lim\limits_{x \to c} f = L$ ada maka kita dapat mendefinisikan

$$F: A \cup \{c\} \to R \text{ dengan}$$

$$F(x) = \begin{cases} L, & x = c \\ f(x), & x \in A,\ x \neq c \end{cases}$$

Maka F kontinu di c.

Contoh.

Misalkan $f(x) = x \sin(1/x)$, $x \neq 0$. Karena f tidak terdefinisi di $x = 0$ maka f tidak kontinu di $x = 0$. Untuk itu kita dapat mendefinisikan fungsi $F : R \to R$ dengan

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \sin(1/x), & x \neq 0 \end{cases}$$

Maka diperoleh $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$ dan $F(0) = 0$.

Maka $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$.

Jadi F kontinu di $x = 0$.

2.1.5 Definisi

Sebuah fungsi f dikatakan **kontinu kiri** di titik c jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, $0 < c - x < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Sebuah fungsi f dikatakan **kontinu kanan** di titik c jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, $0 < x - c < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Ringkasan

1. Fungsi f dikatakan kontinu di c jika :

   (i). f terdefinisi di c atau f(c) ada.

   (ii). $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada di R

   (iii). $f(c) = \lim\limits_{x \to c} f(x)$

2. Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in A$. Maka kondisi berikut ekivalen

   (i). f kontinu di c

   (ii). Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, $|x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

(iii). Untuk sebarang barisan (x_n) di A $\forall n \in N$ dengan (x_n) konvergen ke c maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke f(c)

Latihan 1.

1. Misalkan $a < b < c$ dan f kontinu pada [a, b], g kontinu pada [b, c] dan $f(b) = g(b)$.

   Didefinisikan h pada [a, c] dengan $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{untuk } x \in [a, b] \\ g(x), & \text{untuk } x \in (b, c] \end{cases}$

   Buktikan bahwa h kontinu pada [a, c]!
2. Misalkan f didefinisikan dengan $f(x) = (x^2 + x - 6) / (x - 2)$ untuk $x \neq 2$. Dapatkah kita mendefinisikaan f di $x = 2$ sehingga f kontinu di $x = 2$?.
3. Misalkan $f : R \to R$ kontinu di c dan $f(c) > 0$. Tunjukkan terdapat lingkungan $V_\delta(c)$ sedemikian sehingga $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in V_\delta(c)$.
4. Misalkan $f : R \to R$ kontinu pada R dan $f(r) = 0$ untuk setiap r bilangan rasional. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in R$.

Jawaban Latihan 1.

1. Karena f kontinu pada [a, b], g kontinu pada [b, c] dan

   $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{untuk } x \in [a, b] \\ g(x), & \text{untuk } x \in (b, c] \end{cases}$ maka h kontinu pada [a, b] dan pada (b, c].

   Maka $\lim_{x \to b^-} h(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) = h(b)$ dan $\lim_{x \to b^+} h(x) = \lim_{x \to b^+} g(x) = g(b) = h(b)$.

   Karena $f(b) = g(b)$ maka diperoleh $\lim_{x \to b^-} h(x) = \lim_{x \to b^+} h(x) = h(b)$.

   Jadi h kontinu di b. Akibatnya h kontinu pada [a, c].
2. Pertama kita hitung $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 + x - 6) / (x - 2) = \lim_{x \to 2} (x+3)(x-2)/(x - 2)$ $= \lim_{x \to 2} (x + 3) = 5$. Karena f mempunyai limit di $x = 2$ maka kita dapat mendefinisikan f di $x = 2$ agar f kontinu di $x = 2$. Untuk itu kita definisikan $f(2) = 5$. Jadi f kontinu di $x = 2$.

3. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

   Maka terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, $|x - c| < \delta(\varepsilon)$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

   Pilih $\varepsilon = f(c)/2$.

   Maka diperoleh $|f(x) - f(c)| < f(c)/2$ atau $-f(c)/2 < f(x) - f(c) < f(c)/2$.

   Akibatnya $0 < f(c)/2 < f(x) < 3f(c)/2$.

   Pilih $V_\delta(c) = |x - c| < \delta(\varepsilon)$. Maka $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in V_\delta(c)$.

4. Ambil $x \in R$.

   Maka terdapat barisan bilangan rasional (x_n) sedemikian sehingga x_n konvergen ke x. Karena f kontinu di x maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(x)$.

   Karena $f(x_n) = 0$ untuk setiap $n \in N$ maka $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in R$.

Tes Formatif 1.

1. Buktikan teorema 2.1.4!
2. Misalkan $A \subseteq R$, dan $f: A \to R$ kontinu di $c \in A$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat lingkungan $V_\delta(c)$ sedemikian sehingga $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ untuk setiap $x, y \in A \cap V_\delta(c)$.
3. Misalkan $f: R \to R$ kontinu pada R dan $S = \{x \in R : f(x) = 0\}$. Buktikan bahwa jika $(x_n) \subseteq S$ dengan $\lim(x_n) = 0$ maka $x \in S$.
4. Tunjukkan bahwa fungsi nilai mutlak $f(x) = |x|$ kontinu di setiap titik $c \in R$.
5. Misalkan $K > 0$ dan $f: R \to R$ memenuhi kondisi $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ untuk setiap $x, y \in R$. Tunjukkan bahwa f kontinu di setiap titik $c \in R$.

2.2 Kombinasi Fungsi Kontinu

2.2.1 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f, g : A \rightarrow R$ kontinu di c dan $c \in A$, $b \in R$.

Maka

(a). $f+g$, $f-g$, fg dan bf kontinu di c.

(b). Jika $h : A \rightarrow R$ kontinu di c dengan $h(x) \neq 0 \ \forall x \in A$ maka f/h kontinu di c.

Bukti.

Jika c bukan titik cluster dari A maka pernyataan (a) dan (b) secara langsung (jelas) berlaku. Untuk itu kita misalkan c adalah titik cluster dari A.

(a). Karena f dan g kontinu di c maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c)$.

Maka

- $(f+g)(c) = f(c) + g(c) = \lim\limits_{x \to c} f + \lim\limits_{x \to c} g = \lim\limits_{x \to c} (f+g)$

  Jadi f+g kontinu di c

- $(f-g)(c) = f(c) - g(c) = \lim\limits_{x \to c} f - \lim\limits_{x \to c} g = \lim\limits_{x \to c} (f-g)$

  Jadi f - g kontinu di c

- $(fg)(c) = f(c)\, g(c) = \lim\limits_{x \to c} f \lim\limits_{x \to c} g = \lim\limits_{x \to c} (fg)$

  Jadi fg kontinu di c

- $(bf)(c) = b\, f(c) = b \lim\limits_{x \to c} f = \lim\limits_{x \to c} bf$

  Jadi bf kontinu di c

(b). Misalkan $h(x) \neq 0 \ \forall x \in A$. Maka $h(c) \neq 0$.

Maka $(f/g)(c) = f(c) / h(c) = \lim\limits_{x \to c} f / \lim\limits_{x \to c} h = \lim\limits_{x \to c} (f/h)$.

Jadi f / h kontinu di c.

Catatan: Untuk para pembaca coba buktikan teorema 2.2.1 ini dengan menggunakan konsep ε, δ.

2.2.2 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, f, g : $A \to R$ kontinu pada A dan $b \in R$.

Maka

(a). $f+g$, $f-g$, fg dan bf kontinu pada A.

(b). Jika $h : A \to R$ kontinu pada A dengan $h(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ maka f/h kontinu pada A.

Contoh.

(a). Misalkan p adalah fungsi polinomial yaitu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + x_0$ untuk setiap x dan c di R. Maka

$p(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + x_0$ dan $\lim\limits_{x \to c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + x_0$

Karena $\lim\limits_{x \to c} p(x) = p(c)$ dan c sebarang di R maka p kontinu pada R.

(b). Misalkan p dan q adalah fungsi polinomial pada R. Maka terdapat berhingga banyaknya akar dari q, misalkan akar-akarnya $\{\alpha_1 , \ldots, \alpha_m\}$.

Maka $q(x) \neq 0$ untuk $x \notin \{\alpha_1 , \ldots, \alpha_m\}$.

Didefinisikan fungsi rasional r dengan

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, x \notin \{\alpha_1 , \ldots, \alpha_m\}.$$

Jika $c \notin \{\alpha_1 , \ldots, \alpha_m\}$ maka $q(c) \neq 0$. Maka

$$r(c) = \frac{p(c)}{q(c)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} p(x)}{\lim\limits_{x \to c} q(x)} = \lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to c} r(x)$$

Jadi r kontinu di c. Karena c sebarang maka r kontinu untuk setiap $x \notin \{\alpha_1 , \ldots, \alpha_m\}$.

(c). Tunjukkan bahwa $f(x) = \sin x$ kontinu pada R.

Untuk membuktikan ini, kita gunakan sifat dari fungsi sinus dan cosinus yaitu

$$|\sin z| \le |z| \text{ dan } |\cos z| \le 1$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin [(x - y)/2] \cos [(x + y)/2]$$

Misalkan $c \in R$ sebarang, maka kita punya ketaksamaan

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin c| &= 2 |\sin [(x - y)/2]| |\cos [(x + y)/2]| \\ &\le 2 . (1/2) |x - c| = |x - c| \end{aligned}$$

Jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka kita dapat pilih $\delta = \varepsilon$ sehingga $\forall x \in R$, $|x - c| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin c| &= 2 |\sin [(x - y)/2]| |\cos [(x + y)/2]| \\ &\le 2 . (1/2) |x - c| = |x - c| < \varepsilon \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$. Jadi $f(x) = \sin x$ kontinu di c.

Karena $c \in R$ diambil sebarang, maka $f(x) = \sin x$ kontinu pada R.

2.2.3 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in A$.

Definisikan $|f|$ dengan $|f|(x) = |f(x)|$, $\forall x \in A$

(i). Jika f kontinu di c maka $|f|$ kontinu di c.

(ii). Jika f kontinu pada A maka $|f|$ kontinu pada A.

2.2.4 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in A$ dan $f(x) \ge 0$, $\forall x \in A$.

Definisikan $\sqrt{f}$ dengan $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$, $\forall x \in A$

(i). Jika f kontinu di c maka $\sqrt{f}$ kontinu di c.

(ii). Jika f kontinu pada A maka $\sqrt{f}$ kontinu pada A.

Komposisi Fungsi Kontinu

2.2.5 Teorema

Misalkan $A, B \subseteq R$, $f : A \to R$, $g : B \to R$ dan $f(A) \subseteq B$.

Jika f kontinu di $c \in A$ dan g kontinu di $b = f(c) \in B$ maka fungsi komposisi $g \circ f$ kontinu di c.

Bukti.

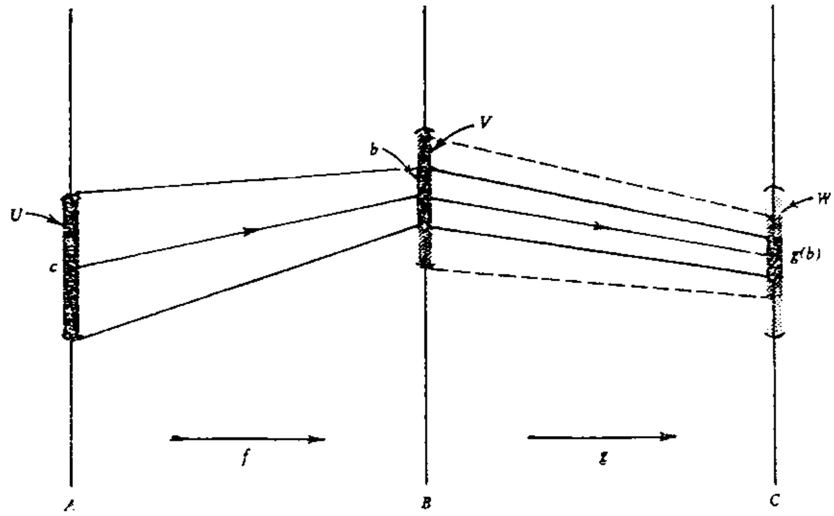
Karena g kontinu di $b = f(c) \in B$ maka untuk setiap lingkungan $W = W_\varepsilon(g(b)) = (g(b)-\varepsilon, g(b)+\varepsilon)$ terdapat sebuah lingkungan $V = V_\delta(b) = (b-\delta, b+\delta)$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in V_\delta(b) \cap B$ maka $g(y) \in W_\varepsilon(g(b))$. (*)

Karena f kontinu di $c \in A$ maka untuk setiap lingkungan $V = V_\delta(b) = (b-\delta, b+\delta)$ terdapat sebuah lingkungan $U = U_\gamma(c) = (c-\gamma, c+\gamma)$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in U \cap A$ maka $f(x) \in B \cap V$. (**)

Akibat dari (*) dan (**) diperoleh $gof(x) = g(f(x)) \in W$.

Jadi untuk setiap lingkungan $W = W_\varepsilon(g(b)) = (g(b)-\varepsilon, g(b)+\varepsilon)$ terdapat sebuah lingkungan $U = U_\gamma(c) = (c-\gamma, c+\gamma)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in U \cap A$ maka $g \circ f(x) \in W$.

Jadi $g \circ f$ kontinu di c.



2.2.6 Teorema

Misalkan $A, B \subseteq R$, $f : A \to R$, $g : B \to R$ dan $f(A) \subseteq B$.

Jika f kontinu pada A dan g kontinu pada B maka fungsi komposisi $g \circ f$ kontinu pada A.

Latihan 2.

1. Misalkan $A \subseteq R$, $f : A \to R$ dan $c \in A$ dan $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$.

   Didefinisikan $\sqrt{f}$ dengan $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$, $\forall x \in A$. Buktikanlah

   (i). Jika f kontinu di c maka $\sqrt{f}$ kontinu di c.

   (ii). Jika f kontinu pada A maka $\sqrt{f}$ kontinu pada A.

2. Misalkan g didefinisikan pada R dengan $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 2, & x \neq 1 \end{cases}$ dan $f(x) = x + 1$ untuk setiap $x \in R$. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} gof \neq (gof)(0)$.

3. Misalkan $f : R \to R$ kontinu pada R dan $P = \{x \in R : f(x) > 0\}$. Tunjukkan bahwa jika $c \in P$ maka terdapat lingkungan $V_\delta(c) \subseteq P$.

4. Misalkan $f, g : R \to R$ kontinu pada R dan $S = \{x \in R : f(x) \geq g(x)\}$. Tunjukkan bahwa jika $(s_n) \subseteq S$ dan $\lim (s_n) = s$ maka $s \in S$.

Jawaban Latihan 2.

1. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan dan $c \in A$.

   Perhatikan,

$$| \sqrt{f}(x) - \sqrt{f}(c) | = | \sqrt{f}(x) - \sqrt{f}(c) || \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(c)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(c)}} | = \frac{1}{| \sqrt{f(x)} + \sqrt{f(c)} |} | f(x) - f(c) |$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{f(c)}} |f(x) - f(c)|$$

Kasus 1, $f(c) = 0$.

Karena f kontinu di titik c maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk x dengan $|x - c| < \delta$ berlaku $| f(x) - f(c) | < \varepsilon^2$.

Karena $f(c) = 0$ maka untuk $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $| \sqrt{f(x)} | = \sqrt{|f(x)|} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$.

Kasus 2, $f(c) > 0$.

Karena f kontinu di titik c maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk x dengan $|x - c| < \delta$ berlaku $| f(x) - f(c) | < \varepsilon \sqrt{f(c)}$.

Maka untuk $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$| \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(c)} | = | \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(c)} || \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(c)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(c)}} |$$

$$= \frac{1}{| \sqrt{f(x)} + \sqrt{f(c)} |} | f(x) - f(c) |$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{f(c)}} |f(x) - f(c)|$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka terbukti $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(c)}$.

Hal ini membuktikan bahwa $\sqrt{f}$ kontinu di c.

Karena $c \in A$ sebarang maka $\sqrt{f}$ kontinu pada A.

2. Dari definisi f dan g diperoleh $gof(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$.

   Karena $gof(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 2, & x \neq 1 \end{cases}$ maka dapat kita tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} gof = 2$.

   Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

   Pilih $\delta = \varepsilon$. Maka untuk setiap x dengan $0 < | x | < \delta$ berlaku $| gof(x) - 2| = | 2 - 2 | = 0 < \varepsilon$. Jadi terbukti $\lim\limits_{x \to 0} gof = 2$.

3. Karena f kontinu pada R dan $P \subseteq R$ maka f kontinu pada P.

Karena $c \in P$ maka f kontinu di c.

Fungsi f kontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk x dengan $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Pilih $\varepsilon = f(c) / 2 > 0$.

Maka $|f(x) - f(c)| < f(c) / 2$ atau

$$-f(c) / 2 < f(x) - f(c) < f(c) / 2$$

$$0 < f(c)/2 < f(x) < 3f(c) / 2$$

Pilih $V_\delta(c) = |x - c| < \delta$ sedemikian sehingga $|f(x) - f(c)| < f(c) / 2$

Maka untuk setiap $x \in V_\delta(c)$ berlaku $0 < f(c)/2 < f(x) < 3f(c) / 2$

Karena $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in V_\delta(c)$ maka $V_\delta(c) \subseteq P$.

4. Misalkan $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ dan $S = \{x \in R: h(x) \geq 0\}$.

   Karena f dan g kontinu di R maka h juga kontinu di R.

   Karena h kontinu di R dan $\lim (s_n) = s$ maka $\lim (h(s_n)) = h(s)$.

   Karena $(s_n) \subseteq S$ maka $h(s_n) \geq 0$ dan $\lim (h(s_n)) = h(s) \geq 0$.Jadi $s \in S$.

Tes Formatif 2.

1. Misalkan $A \subseteq R$, $f: A \to R$ dan $c \in A$.

   Definisikan $|f|$ dengan $|f|(x) = |f(x)|$, $\forall x \in A$. Buktikan bahwa

   (i). Jika f kontinu di c maka $|f|$ kontinu di c.

   (ii). Jika f kontinu pada A maka $|f|$ kontinu pada A.

2. Tunjukkan bahwa jika $f: A \to R$ kontinu pada $A \subseteq R$ dan $n \in N$ maka fungsi f^n yang didefinisikan dengan $f^n (n) = (f(x))^n$ untuk setiap $x \in A$ juga kontinu pada A.

3. Berikan sebuah contoh fungsi f dan g yang keduanya diskontinu di c tapi

   (a). jumlah f + g kontinu di c

   (b). hasil kali fg kontinu di c

4. Berikan sebuah contoh fungsi $f: [0, 1] \to R$ yang diskontinu di setiap titik dari [0, 1] tapi $|f|$ kontinu pada [0, 1].

5. Misalkan $g : R \to R$ memenuhi hubungan $g(x + y) = g(x) + g(y)$ untuk semua x, y di R. Tunjukkan bahwa

   (a). Jika g kontinu di $x = 0$ maka g kontinu di setiap titik di R

   (b). Jika $g(a) = 0$ untuk suatu $a \in R$ maka $g(x) = 0$ untuk setiap $x \in R$.

6. Misalkan $I = [a, b]$ dan $f : I \to R$ kontinu dan terbatas pada I.

   Definisikan $g : I \to R$ dengan $g(x) = \sup \{f(t) : a \leq t \leq x\}$ untuk $x \in R$.

   Buktikan bahwa g kontinu pada I.

2.3 Fungsi Kontinu Pada Interval

2.3.1 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

Fungsi f dikatakan **terbatas** pada A jika terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $| f(x) | \leq M$ untuk semua $x \in A$.

2.3.2 Teorema Keterbatasan (Boundedness)

Misalkan $I = [a,b]$ adalah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I.

Maka f terbatas pada I.

Bukti.

Andaikan f tidak terbatas pada I.

Maka untuk setiap $n \in N$ terdapat $x_n \in I$ sedemikian sehingga $| f(x_n) | > n$ (*)

Karena I terbatas maka barisan x_n juga terbatas. Karena itu terdapat subbarisan (x_{nr}) sedemikian sehingga (x_{nr}) konvergen ke x (berdasarkan teorema Bolzano-Weierstrass).

Karena I tertutup dan $x_{nr} \in I$ maka $x \in I$. Karena f kontinu pada I maka $f(x_{nr})$ konvergen ke $f(x)$. Akibatnya $f(x_{nr})$ terbatas yaitu terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga $| f(x_{nr}) | \leq M$ untuk semua $r \in N$. Tapi hal ini kontradiksi dengan (*). Jadi pengandaian salah. Jadi haruslah f terbatas pada I.

2.3.3 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

(i). Fungsi f dikatakan mempunyai maksimum mutlak pada A jika terdapat $x^* \in A$ sedemikian sehingga

$$| f(x^*) | \geq f(x) \text{ untuk semua } x \in A$$

x^* disebut titik maksimum mutlak dari f pada A (ii). Fungsi f dikatakan mempunyai minimum mutlak pada A jika terdapat $x_* \in A$ sedemikian sehingga

$$|f(x_*)| \leq f(x) \text{ untuk semua } x \in A$$

x_* disebut titik minimum mutlak dari f pada A.

Catatan.

- Suatu fungsi yang kontinu pada A tidak perlu mempunyai maksimum atau minimum mutlak pada A

  Contoh.

  $F(x) = 1/x$. Maka f kontinu pada $A = \{x \in R : x > 0\}$.

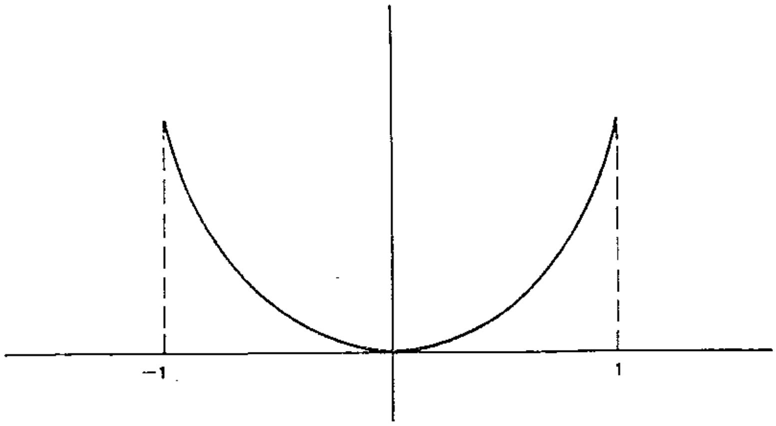
  - F tidak mempunyai maksimum atau minimum absolut pada A.
  - F tidak mempunyai maksimum atau minimum absolut pada $B = \{x \in R : 0 < x < 1\}$
  - F mempunyai maksimum atau minimum absolut pada $C = \{x \in R : 1 \leq x \leq 2\}$
  - F mempunyai maksimum tapi tak punya minimum absolut pada $D = \{x \in R : x \geq 1\}$
  - F tidak mempunyai maksimum atau minimum absolut pada $E = \{x \in R : x > 1\}$

- Jika suatu fungsi mempunyai maksimum atau minimum absolut maka titik maksimum atau minimum absolut tidak harus tunggal.

  Contoh.

  $F(x) = x^2, x \in [-1, 1]$.

  Maka nilai maksimum mutlak dari F adalah 1 dan nilai minimum mutlaknya 0. Tapi titik maksimum mutlaknya ada dua yaitu $x = \pm 1$



Grafik $F(x) = x^2, x \in [-1, 1]$

2.3.4 Teorema Maksimum-Minimum

Misalkan $I = [a,b]$ adalah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I.

Maka f mempunyai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada I.

Bukti.

Misalkan $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$. Maka himpunan $f(I)$ terbatas (teorema 2.3.2)

Akibatnya himpunan $f(I)$ mempunyai batas atas dan batas bawah, dan oleh sebab itu f mempunyai suprimum dan infimum.

Misalkan $s^* = \sup f(I)$

$s_* = \inf f(I)$

Klaim: terdapat x^* dan x_* di I sedemikian sehingga $s^* = f(x^*)$ dan $s_* = f(x_*)$.

Bukti klaim.

Misalkan $s^* = \sup f(I)$.

Maka untuk setiap $n \in N$, $s^* - 1/n$ bukan batas atas dari $f(I)$.

Jadi terdapat $x_n \in I$ sedemikian sehingga

$$s^* - 1/n < f(x_n) \leq s^* \text{ untuk } n \in N.$$

Karena I terbatas maka barisan (x_n) juga terbatas. Karena itu terdapat subbarisan (x_{nr}) sedemikian sehingga (x_{nr}) konvergen ke x^* (berdasarkan teorema Bolzano-Weierstrass). Karena f kontinu pada I maka $f(x_{nr})$ konvergen ke $f(x^*)$.

Karena $s^* - 1/n < f(x_n) \leq s^*$ untuk $n \in N$ maka

$$s^* - 1/nr < f(x_{nr}) \leq s^* \text{ untuk } r \in N$$

Maka $\lim(s^* - 1/nr) = s^*$ dan $\lim s^* = s^*$. Maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim (f(x_{nr})) = s^*$.

Karena itu kita punya

$$f(x^*) = \lim (f(x_{nr})) = s^* = \sup f(\, I\,).$$

Jadi x^* adalah titik maksimum mutlak dari f pada I.

Misalkan $s_* = \inf f(\, I\,)$.

Maka untuk setiap $n \in N$, $s_* + 1/n$ bukan batas bawah dari $f(\, I\,)$.

Jadi terdapat $x_n \in I$ sedemikian sehingga

$$s_* < f(x_n) \leq s_* + 1/n \text{ untuk } n \in N.$$

Karena I terbatas maka barisan (x_n) juga terbatas. Karena itu terdapat subbarisan (x_{nr}) sedemikian sehingga (x_{nr}) konvergen ke x_* (berdasarkan teorema Bolzano-Weierstrass). Karena f kontinu pada I maka $f(x_{nr})$ konvergen ke $f(x_*)$.

Karena $s_* < f(x_n) \leq s_* + 1/n$ untuk $n \in N$ maka

$$s_* < f(x_{nr}) \leq s_* + 1/nr \text{ untuk } r \in N$$

Maka $\lim(s_* + 1/nr) = s_*$ dan $\lim s_* = s_*$. Maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim (f(x_{nr})) = s_*$.

Karena itu kita punya

$$f(x_*) = \lim (f(x_{nr})) = s_* = \inf f(\, I\,).$$

Jadi x_* adalah titik minimum mutlak dari f pada I.

2.3.5 Teorema Lokasi Akar

Misalkan I adalah sebuah interval dan $f : I \rightarrow R$ kontinu pada I.

Jika $\alpha < \beta$ ($\alpha, \beta \in I$) sedemikian sehingga $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ atau $f(\alpha) > 0 > f(\beta)$ maka terdapat $c \in (\alpha, \beta)$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$. (c disebut akar dari f)

Bukti.

Anggap $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$.

Misalkan $I_1 = [\alpha, \beta]$ dan $\gamma = (\alpha + \beta)/2$.

Jika $f(\gamma) = 0$ maka pilih $c = \gamma$. Bukti selesai.

Jika $f(\gamma) < 0$, pilih $\alpha_2 = \gamma$ dan $\beta_2 = \beta$.

Jika $f(\gamma) > 0$, pilih $\alpha_2 = \alpha$ dan $\beta_2 = \gamma$.

Selanjutnya misalkan $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ dengan $f(\alpha_2) < 0 < f(\beta_2)$ dan $\gamma_2 = (\alpha_2 + \beta_2)/2$.

Jika $f(\gamma_2) = 0$ maka pilih $c = \gamma_2$. Bukti selesai.

Jika $f(\gamma_2) < 0$, pilih $\alpha_3 = \gamma_2$ dan $\beta_3 = \beta_2$.

Jika $f(\gamma_2) > 0$, pilih $\alpha_3 = \alpha_2$ dan $\beta_3 = \gamma_2$.

Selanjutnya misalkan $I_3 = [\alpha_3, \beta_3]$ dengan $f(\alpha_3) < 0 < f(\beta_3)$ dan $\gamma_3 = (\alpha_3 + \beta_3)/2$.

Proses seperti ini diteruskan sampai k kali.

Misalkan kita peroleh interval I_1 , I_2 , …, $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$ sedemikian sehingga $f(\alpha_k) < 0 < f(\beta_k)$. Misalkan $\gamma_k = (\alpha_k + \beta_k)/2$.

Jika $f(\gamma_k) = 0$ maka pilih $c = \gamma_k$. Bukti selesai.

Jika $f(\gamma_k) < 0$, pilih $\alpha_{k+1} = \gamma_k$ dan $\beta_{k+1} = \beta_k$.

Jika $f(\gamma_k) > 0$, pilih $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ dan $\beta_{k+1} = \gamma_k$.

Selanjutnya misalkan $I_{k+1} = [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ dengan $f(\alpha_{k+1}) < 0 < f(\beta_{k+1})$.

Jika proses ini berakhir dengan titik γ_n sedemikian sehingga $f(\gamma_n) = 0$ maka bukti selesai. Jika proses ini tidak berakhir maka kita peroleh barisan nested dari interval tertutup dan terbatas yaitu $I_n = [\alpha_n , \beta_n]$, $n \in N$. Karena interval ini kita peroleh dengan pengulangan biseksi maka kita punya $\beta n - \alpha_n = (\beta - \alpha) / 2^{n-1}$.

Maka menurut teorema interval nested terdapat $c \in I$ untuk setiap $n \in N$.

Karena $\alpha_n < c < \beta_n$ untuk setiap $n \in N$ maka

$$0 \leq c - \alpha_n \leq \beta n - \alpha_n = (\beta - \alpha) / 2^{n-1} \text{ dan } 0 \leq \beta_n - c \leq \beta_n - \alpha_n = (\beta - \alpha) / 2^{n-1}.$$

Karena $\lim (\beta - \alpha) / 2^{n-1} = 0$ maka

$$\lim (c - \alpha_n) = 0 \text{ dan } \lim (\beta_n - c) = 0$$

atau

$$\lim (\alpha_n) = c \text{ dan } \lim (\beta_n) = c$$

Karena f kontinu di c, maka kita punya

$$\lim (f(\alpha_n)) = f(c) = \lim (f(\beta_n))$$

Karena $f(\beta_n) \geq 0$ untuk setiap $n \in N$ maka $f(c) = \lim (f(\beta_n)) \geq 0$.

Karena $f(\alpha_n) \leq 0$ untuk setiap $n \in N$ maka $f(c) = \lim (f(\alpha_n)) \leq 0$.

Karena $f(c) \geq 0$ dan $f(c) \leq 0$ maka haruslah $f(c) = 0$.

2.3.6 Teorema Nilai Antara Bolzano

Misalkan $I = [a,b]$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ kontinu pada I. Jika $a, b \in I$ dan $k \in N$ memenuhi kondisi $f(a) < k < f(b)$ maka terdapat titik $c \in I$ dengan $a < c < b$ sedemikian sehingga $f(c) = k$.

Bukti.

Kasus 1. $a < b$.

Misalkan $g(x) = f(x) - k$.

Maka $g(a) = f(a) - k < 0 < f(b) - k = g(b)$.

Maka menurut teorema 2.3.5 terdapat $c \in [a,b]$ sedemikian sehingga $0 = g(c) = f(c) - k$ atau $f(c) = k$. Jadi terdapat $c \in [a,b]$ sedemikian sehingga $f(c) = k$.

2.3.7 Akibat

Misalkan $I = [a,b]$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I. Jika $k \in R$ memenuhi

$$\inf f(I) \leq k \leq \sup f(I)$$

Maka terdapat $c \in I$ sedemikian sehingga $f(c) = k$.

Bukti.

Karena kondisi dari teorema Maksimum – Minimum dipenuhi maka terdapat c^* dan c_* di I sedemikian sehingga

$$\inf f(I) = f(c_*) \leq k \leq f(c^*) = \sup f(I)$$

Maka menurut teorema 2.3.6 terdapat $c \in I$ sedemikian sehingga $f(c) = k$.

2.3.8 Teorema

Misalkan $I = [a,b]$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I. Maka himpunan $f(I) = \{ f(x) : x \in I \}$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas.

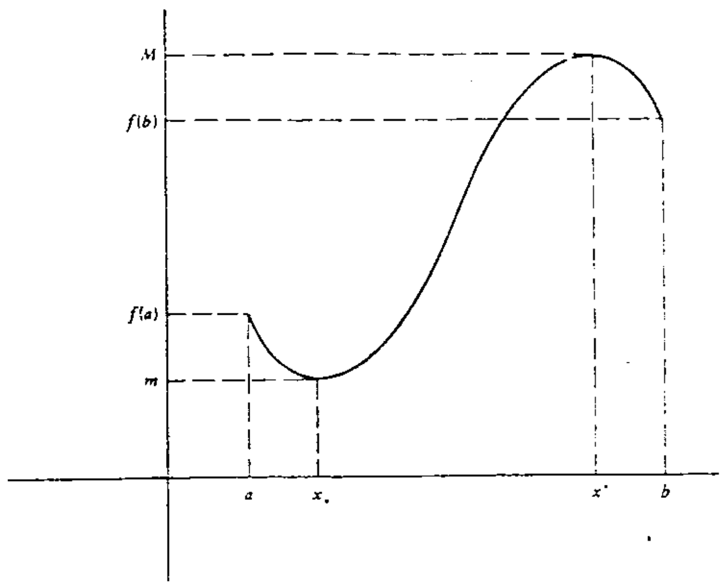
Bukti.

Karena $I = [a,b]$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I maka himpunan $f(I)$ terbatas. Akibatnya $f(I)$ punya infimum dan suprimum. Misalkan $m = \inf f(I)$ dan $M = \sup f(I)$. Maka menurut teorema Maksimum – Minimum $m, M \in f(I)$. Karena itu kita punya $f(I) \subseteq [m, M]$.

Untuk menunjukkan $[m, M] \subseteq f(I)$, ambil $k \in [m, M]$ atau $m < k < M$. Maka menurut akibat teorema 2.3.6 terdapat $c \in I$ sedemikian sehingga $f(c) = k$. Akibatnya $k \in f(I)$. Jadi diperoleh $[m, M] \subseteq f(I)$. Karena $f(I) \subseteq [m, M]$ dan $[m, M] \subseteq f(I)$ maka $[m, M] = f(I)$. Jadi $f(I)$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas.

Perhatian.

Jika I = [a,b] adalah sebuah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I. maka himpunan f(I) = [m, M] terbatas. Tapi perlu diingat bahwa tidak selalu benar bahwa f(I) = [f(a), f(b)]. Untuk memahami ini perhatikan grafik berikut



$f(I) = [m, M]$.

2.3.9 Teorema

Misalkan $S \subseteq R$ dan $S \neq \varnothing$ dengan sifat

(*) jika $x, y \in S$ dan $x < y$ maka $[x, y] \subseteq S$

Maka S adalah sebuah interval.

Bukti.

Kita asumsikan bahwa S paling sedikit punya dua anggota.

Untuk membuktikan teorema ini kita akan tinjau dalam 4 kasus yaitu untuk

(i). S terbatas

(ii). S terbatas di atas tapi tak terbatas di bawah

(iii). S terbatas di bawah tapi tak terbatas di atas

(iv). S tak terbatas di atas dan tak terbatas di bawah

Kasus (i).

Misalkan S terbatas.

Maka s punya infimum dan suprimum.

Misalkan a = infimum dari S dan b = suprimum dari S.

Klaim : $S = [a, b]$

Ambil $s \in S$ maka $a < s < b$ atau $s \in [a, b]$

Jadi $S \subseteq [a, b]$.

Ambil $z \in (a, b)$.

Maka z bukan batas bawah dan bukan batas atas dari S.

Maka terdapat $x \in S$ dan $y \in S$ sedemikian sehingga $x < z < y$ atau $z \in [x, y] \subseteq S$.

Maka menurut (*) diperoleh $z \in [x, y] \subseteq S$.

Karena $z \in (a, b)$ diambil sebarang maka diperoleh $(x, y) \subseteq S$.

Jika $a \notin S$ dan $b \notin S$ maka kita mempunyai $S = (a, b)$

Jika $a \notin S$ dan $b \in S$ maka kita mempunyai $S = (a, b]$

Jika $a \in S$ dan $b \notin S$ maka kita mempunyai $S = [a, b)$

Jika $a \in S$ dan $b \in S$ maka kita mempunyai $S = [a, b]$

Jadi S adalah sebuah interval.

Kasus (ii).

Misalkan S terbatas di atas tapi tak terbatas di bawah. Maka S mempunyai supimum.

Misalkan $b = \sup S$.

Ambil $s \in S$. Maka $s \leq b$ atau $s \in (-\infty, b]$. Maka $S \subseteq (-\infty, b]$.

Ambil $z \in (-\infty, b]$. Maka terdapat $x, y \in S$ sedemikian sehingga $x < z < y$ atau $z \in [x, y] \subseteq S$. Jadi $z \in S$, sehingga $(-\infty, b) \subseteq S$.

Jika $b \notin S$ maka pilih $S = (-\infty, b)$.

Jika $b \in S$ maka pilih $S = (-\infty, b]$.

Jadi S adalah sebuah interval.

Kasus (iii)

Misalkan S terbatas di bawah tapi tak terbatas di atas. Maka S mempunyai infimum.

Misalkan $a = \inf S$.

Ambil $s \in S$. Maka $a \leq s$ atau $s \in [a, \infty)$. Maka $S \subseteq [a, \infty)$.

Ambil $z \in [a, \infty)$. Maka terdapat $x, y \in S$ sedemikian sehingga $x < z < y$ atau $z \in [x, y] \subseteq S$. Jadi $z \in S$, sehingga $(a, \infty) \subseteq S$.

Jika $a \notin S$ maka pilih $S = (a, \infty)$.

Jika $a \in S$ maka pilih $S = [a, \infty)$.

Jadi S adalah sebuah interval.

Kasus (iv).

Misalkan S tak terbatas di atas dan tak terbatas di bawah.

Jelas bahwa $S \subseteq R$.

Ambil $z \in R$. Maka terdapat $x, y \in S$ sedemikian sehingga $x < z < y$ atau $z \in [x, y] \subseteq S$. Jadi $z \in S$, sehingga $(a, \infty) \subseteq S$. Maka $R \subseteq S$. Akibatnya $R = S$.

Jadi S adalah sebuah interval.

2.3.10 Teorema Preservasi dari Interval

Misalkan I adalah sebuah interval dan $f : I \rightarrow R$ kontinu pada I. Maka himpunan $f(I) = \{ f(x) : x \in I \}$ adalah sebuah interval.

Bukti.

Misalkan $\alpha, \beta \in f(I)$ dengan $\alpha < \beta$.

Maka terdapat titik $a, b \in I$ sedemikian sehingga $\alpha = f(a)$ dan $\beta = f(b)$.

Menurut teorema nilai antara Bolzano jika $\alpha < k < \beta$ maka terdapat $c \in I$ dengan $k = f(c) \in f(I)$. Karena itu $[\alpha, \beta] \subseteq f(I)$. Hal ini menunjukkan bahwa f(I) memenuhi sifat (*) dari teorema 2.3.9. Akibatnya f(I) sebuah interval.

Ringkasan

1. 1. Jika $I = [a,b]$ adalah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I maka f terbatas serta mempunyai maksimum dan minimum mutlak pada I

2. Misalkan I adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ kontinu pada I.

- Jika $\alpha < \beta$ ($\alpha, \beta \in I$) sedemikian sehingga $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ atau $f(\alpha) > 0 > f(\beta)$ maka terdapat $c \in (\alpha, \beta)$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$ (c disebut akar dari f).
- Jika $a, b \in I$ dan $k \in N$ memenuhi kondisi $f(a) < k < f(b)$ maka terdapat titik $c \in I$ dengan $a < c < b$ sedemikian sehingga $f(c) = k$.
- Himpunan $f(I) = \{ f(x) : x \in I \}$ adalah sebuah interval.

Latihan 3.

1. Misalkan $I = [a, b]$ dan $f : I \to R$ adalah fungsi kontinu sedemikian sehingga $f(x) > 0$ untuk setiap x di I. Buktikan bahwa terdapat sebuah bilangan $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $f(x) \geq \alpha$ untuk semua $x \in I$.
2. Misalkan $I = [a, b]$ dan $f, g : I \to R$ adalah fungsi kontinu pada I. Tunjukkan bahwa himpunan $E = \{ x \in I : f(x) = g(x) \}$ yang mempunyai sifat bahwa jika $(x_n) \subseteq E$ dan $x_n \to x$ maka $x_0 \in E$.
3. Tunjukkan bahwa polinomial $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ paling sedikit mempunyai dua akar riil.
4. Misalkan $I = [0, \pi/2]$ dan $f : I \to R$ didefinisikan dengan $f(x) = \sup \{x^2 , \cos x\}$ untuk $x \in I$. Tunjukkan bahwa terdapat titik minimum mutlak $x_0 \in I$ dari f pada I. Tunjukkan bahwa x_0 adalah suatu solusi untuk persamaan $\cos x = x^2$.

Jawaban Latihan 3.

1. Karena I tertutup dan terbatas serta f kontinu pada I maka f(I) terbatas. Akibatnya f mempunyai maksimum dan minimum.

Misalkan f mempunyai minimum di $x_0 \in I$. Karena $\inf f(I) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in I$ dan I tertutup maka $f(x_0) = \inf f(I)$. Karena $x_0 \in I$ maka $f(x_0) > 0$.

Pilih $\alpha = f(x_0) = \inf f(I)$.

Maka $\alpha \leq f(x)$ $\forall x \in I$.

Jadi $\exists \alpha > 0 \ni f(x) \geq \alpha$ $\forall x \in I$.

2. Ambil sebarang barisan (x_n) di E yang konvergen ke x_0.

   Karena f dan g kontinu pada I maka $f(x_n)$ konvergen ke $f(x_0)$ dan $g(x_n)$ konvergen ke $g(x_0)$. Karena $f(x_n) = g(x_n)$ untuk setiap $n \in N$ maka

   $$f(x_0) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x_0).$$

   Jadi $x_0 \in E$.

3. Dari polimial kita punya

   $p(1) = 1 + 7 - 9 = -1 < 0$.

   $p(2) = 16 + 56 - 9 = 63 > 0$.

   Karena $p(1) < 0 < p(2)$ maka menurut teorema 2.3.5 terdapat $c_1 \in [1, 2]$ sedemikian sehingga $f(c_1) = 0$. Jadi $c_1 \in [1, 2]$ adalah salah satu akar dari $p(x)$.

   $p(-7) = 2401 - 2401 - 9 = -9 < 0$.

   $p(-8) = 4096 - 3584 - 9 = 503 > 0$.

   Karena $p(-7) < 0 < p(-8)$ maka menurut teorema 2.3.5 terdapat $c_2 \in [-7, -8]$ sedemikian sehingga $f(c_2) = 0$. Jadi $c_2 \in [-7, -8]$ adalah salah satu akar dari $p(x)$.

   Jadi polinomial $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ paling sedikit mempunyai dua akar riil yaitu c_1 dan c_2.

4. Misalkan $g(x) = x^2$ dan $h(x) = \cos x$. Karena g dan h kontinu maka f kontinu pada I. Maka f mempunyai titik minimum dan maksimum pada I. Jadi terdapat titik x_0 di I sedemikian sehingga x_0 adalah titik minimum mutlak pada I. Selanjutnya andaikan x_0 bukan solusi dari persamaan $\cos x = x^2$.

Maka $\cos x_0 < x_0^2$ atau $\cos x_0 > x_0^2$. Akan ditunjukkkan bahwa kedua pernyatan ini tidak benar.

a. Jika $\cos x_0 < x_0^2$ maka $f(x_0) = \sup \{ \cos x_0 , x_0^2 \} = x_0^2$.

   Ambil $\delta > 0 \ni x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

   Maka $f(x) < f(x_0)$. Hal ini kontradiksi dengan x_0 sebagai aebuah titik minimum mutlak pada I. Jadi tidak mungkin $\cos x_0 < x_0^2$.

b. Jika $\cos x_0 > x_0^2$ maka $f(x_0) = \sup \{ \cos x_0 , x_0^2 \} = \cos x_0$.

   Ambil $\delta > 0 \ni x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

   Maka $f(x) < f(x_0)$. Hal ini kontradiksi dengan x_0 sebagai aebuah titik minimum mutlak pada I. Jadi tidak mungkin $\cos x_0 > x_0^2$.

   Jadi haruslah $\cos x_0 = x_0^2$. Hal ini menunjukkan bahwa x_0 adalah solusi untuk persamaan $\cos x = x^2$.

Tes Formatif 3.

1. Misalkan $I = [a, b]$ dan $f : I \to R$ adalah fungsi kontinu pada I sedemikian sehingga untuk setiap x di I terdapat y di I sehingga $|f(y)| \leq |f(x)| / 2$. Buktikan bahwa terdapat sebuah titik c di I sedemikian sehingga $f(c) = 0$.
2. Misalkan $I = [0, 1]$ dan $f : I \to R$ adalah fungsi kontinu pada I sedemikian sehingga $f(0) = f(1)$. Buktikan terdapat sebuah titik c di $[0, \frac{1}{2}]$ sedemikian sehingga $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. [Petunjuk $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$].
3. Misalkan $I = [a, b]$ dan $f : I \to R$ adalah fungsi kontinu pada I dan $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Misalkan $W = \{ x \in I: f(x) < 0 \}$ dan $w = \sup W$. Buktikan bahwa $f(w) = 0$.
4. Misalkan $f : R \to R$ kontinu pada R dan $\beta \in R$. Tunjukkan bahwa jika $x_0 \in R$ dengan $f(x_0) < \beta$ maka terdapat lingkungan $U_\delta(x_0)$ sedemikian sehingga $f(x) < \beta$ untuk semua $x \in U$.

2.4 .Kontinu Seragam

Jika $A \subseteq R$, $f : A \to R$ maka dari teorema 2.1.3 diketahui bahwa pernyataan berikut ekivalen

(i). f kontinu di setiap titik $u \in A$

(ii) untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $u \in A$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, |x - u| < \delta(\varepsilon,u)$

maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

Dalam hal ini kita lihat bahwa δ bergantung kepada ε dan u.

2.4.1 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$. Fungsi f dikatakan **kontinu seragam (uniform)** pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x, u \in A, |x - u| < \delta(\varepsilon)$ maka

$$|f(x) - f(u)| < \varepsilon.$$

Dari definisi di atas kita lihat bahwa kekontinuan dari f tidak bergantung pada $u \in A$. Jadi dapat dikatakan bahwa jika f kontinu seragam pada A maka f kontinu untuk setiap titik di A.

2.4.2 Kriteria Kontinu Tak Seragam

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$. Maka pernyataan berikut ekivalen

(i). f kontinu tak seragam pada A

(ii) terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta > 0$, terdapat x_δ , u_δ di A dengan

$| x_\delta - u_\delta | < \delta$ dan $|f(x_\delta) - f(u_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

(iii). terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan dua barisan (x_n) dan (y_n) di A sedemikian sehingga

$\lim(x_n - y_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in N$.

Contoh.

Tunjukkan bahwa $f(x) = 1 / x$ tak kontinu seragam pada $A = \{x \in R \mid x > 0\}$.

Bukti.

Untuk membuktikan ini kita harus memilih $\varepsilon_0 > 0$ dan dua barisan (x_n) dan (y_n) di A sedemikian sehingga $\lim(x_n - y_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in N$.

Pilih $\varepsilon_0 = 1/2$ dan $(x_n) = (1/n)$ dan $(y_n) = (1/(n+1))$.

Maka $\lim(x_n - y_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - (n+1)| = |-1| = 1 \geq ½ = \varepsilon_0$.

2.4.3 Teorema Kontinu Seragam

Misalkan I interval tertutup terbatas dan $f: I \rightarrow R$ kontinu pada I. Maka f kontinu seragam pada I.

Bukti.

Andaikan f tak kontinu seragam.

Maka terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan dua barisan (x_n) dan (y_n) di I sedemikian sehingga $\lim(x_n - y_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in N$.

Karena I terbatas maka barisan (x_n) juga terbatas. Maka menurut teorema Bolzano-Weierstrass terdapat subbarisan (x_{nk}) yang konvergen ke z. Karena I tertutup maka $z \in I$. Selanjutnya kita punya ketaksamaan

$$|y_{nk} - z| \leq |y_{nk} - x_{nk}| + |x_{nk} - z| \qquad (*)$$

Karena $\lim(y_{nk} - x_{nk}) = 0$ dan $\lim(x_{nk}) = z$ maka dari (*) diperoleh $\lim(y_{nk}) = z$.

Dari hipotesis diketahui bahwa f kontinu pada I. Maka f juga kontinu di z. Maka $f(y_{nk})$ dan $f(x_{nk})$ konvergen ke z. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \text{ untuk setiap } n \in N.$$

Jadi pengandaian salah. Maka haruslah f kontinu seragam pada I.

Fungsi Lipschitz

2.4.4 Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

Fungsi f dikatakan fungsi **Lipschitz** (atau memenuhi kondisi Lipschitz) pada A jika terdapat konstanta $K > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(u)| \leq K\,|x - u| \quad \forall x, u \in A$$

Jika kita tulis ketaksamaan di atas dalam bentuk

$$(*) \qquad \left|\frac{f(x) - f(u)}{x - u}\right| \leq K, \ \forall x, u \in A \ x \neq u$$

Maka secara geometri ketaksamaan (*) menyatakan kemiringan dari segmen garis yang menghubungkan titik (x, f(x)) dan (u, f(u)). Karena itu dapat juga dikatakan bahwa fungsi f memenuhi kondisi Lipschitz jika dan hanya jika kemiringan semua segmen garis yang menghubungkan dua titik pada $y = f(x)$ terbatas oleh K.

2.4.5 Teorema

Jika fungsi $f : A \to R$ adalah **Lipschitz** maka f kontinu seragam pada A.

Bukti.

Misalkan fungsi $f : A \to R$ adalah **Lipschitz.** Maka terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(u)| \leq K\,|x - u| \quad \forall x, u \in A$$

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Pilih $\delta = \varepsilon / K$.

Maka $\forall x, u \in A$, $|x - u| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(u)| \leq K\,|x - u| < K.\ \varepsilon / K = \varepsilon.$$

Hal ini membuktikan bahwa f kontinu seragam pada A.

Tapi jika f kontinu pada A tidak harus f fungsi Lipschitz.

Contohnya: $f(x) = \sqrt{x}$ pada $I = [a, b]$

Maka f kontinu pada I. Karena f kontinu pada interval tertutup dan terbatas maka f kontinu seragam pada I. Selanjutnya kita perhatikan

$$|f(x)| \leq K|x| \text{ atau } |\sqrt{x}| \leq K|x|$$

$$|\sqrt{x}|/|x| \leq K \text{ atau } 1/\sqrt{x} \leq K.$$

Karena nilai $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$ maka $\infty \leq K$. Hal ini tidak mungkin terjadi. Jadi tidak terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| = |\sqrt{x}| \leq K|x|$ $\forall x \in A$. Jadi f bukan fungsi Lipschitz

Perluasan Kontinu

2.4.6 Teorema

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ kontinu seragam pada A. Jika (x_n) adalah barisan Cauchy di A maka $(f(x_n))$ adalah barisan Cauchy di R.

Bukti.

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Misalkan $f : A \to R$ kontinu seragam pada A. Maka terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x, u \in A$, $|x - u| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Misalkan (x_n) adalah barisan Cauchy di A. Maka terdapat $H(\delta) > 0 \ni \forall m, n \geq H$ berlaku $|x_n - x_m| < \delta$

Pilih $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\forall m, n \geq H$ berlaku $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Hal ini menunjukkan bahwa barisan $(f(x_n))$ adalah barisan Cauchy di R.

2.4.7 Teorema Perluasan Kontinu

Fungsi $f : (a, b) \to R$ kontinu seragam pada (a, b) jika dan hanya jika f dapat didefinisikan di a dan b sedemikian sehingga fungsi yang diperluas kontinu di $[a, b]$.

Bukti.

Misalkan fungsi $f : (a, b) \to R$ kontinu seragam pada (a, b).

Akan ditunjukkan bagaimana memperluas f sedemikian sehingga f kontinu di $[a, b]$. Untuk itu kita akan menunjukkan $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ada dengan menggunakan kriteria barisan untuk limit. Misalkan (x_n) adalah barisan di (a, b) dengan $\lim (x_n) = a$. Maka (x_n) adalah barisan Cauchy. Maka menurut Teorema 2.4.6 barisan $(f(x_n))$ adalah barisan Cauchy sehingga $(f(x_n))$ konvergen. Karena itu $\lim (f(x_n)) = L$ ada. Misalkan (u_n) adalah barisan lain di (a, b) dengan $\lim (u_n) = a$, sehingga $\lim(x_n - u_n) = a - a = 0$. Karena $f : (a, b) \to R$ kontinu seragam pada (a, b) maka kita punya

$$
\begin{aligned}
\text{im}(f(u_n)) &= \lim (f(u_n) - f(x_n) + f(x_n)) \\
&= \lim (f(u_n) - f(x_n)) + \lim (f(x_n)) \\
&= 0 + L \\
&= L
\end{aligned}
$$

Karena untuk sebarang barisan (u_n) dengan $\lim (u_n) = a$ kita peroleh nilai L yang sama maka menurut teorema kriteria barisan untuk limit diperoleh $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Jika didefinisikan $f(a) = L$ maka f kontinu di a. Argumen yang sama kita gunakan untuk titik b. Jadi kita peroleh bahwa f dapat diperluas sehingga f kontinu pada $[a, b]$.

Aproksimasi.

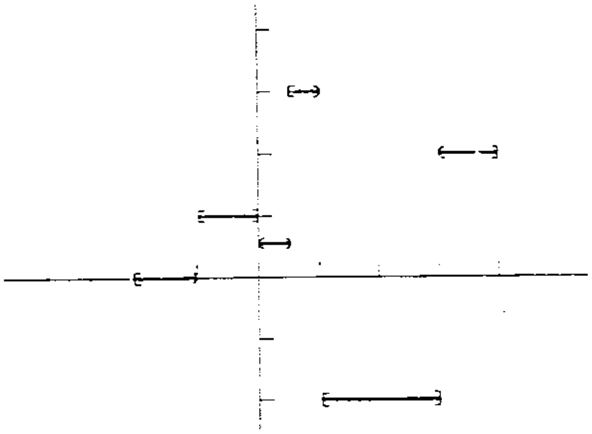
2.4.8 Definisi

Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $s : I \to R$. Fungsi s disebut fungsi tangga (step) jika s hanya mempunyai berhingga nilai yang berbeda, setiap nilai diasumsikan pada satu atau lebih interval di I.

Contoh.

Fungsi $s : I \to R$ didefinisikan dengan

$$
\begin{aligned}
s(x) &= 0, & -2 \le x < -1 \\
&= 1, & -1 \le x \le 0 \\
&= \tfrac{1}{2}, & 0 < x < \tfrac{1}{2} \\
&= 3, & \tfrac{1}{2} \le x < 1 \\
&= -2, & 1 \le x \le 3 \\
&= 2, & 3 < x \le 4
\end{aligned}
$$



Grafik $y = s(x)$

Sekarang kita akan tunjukkan bahwa sebuah fungsi kontinu pada interval tertutup dan terbatas dapat didekati oleh fungsi tangga.

2.4.9 **Teorema.**

Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I. Jika $\varepsilon > 0$ maka terdapat sebuah fungsi tangga $s_\varepsilon : I \to R$ sehingga $|f(x) - s_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in I$.

Bukti.

Karena f kontinu pada interval tertutup dan terbatas maka f kontinu seragam pada I. Maka setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x, u \in A, |x - u| < \delta(\varepsilon)$ berlaku $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

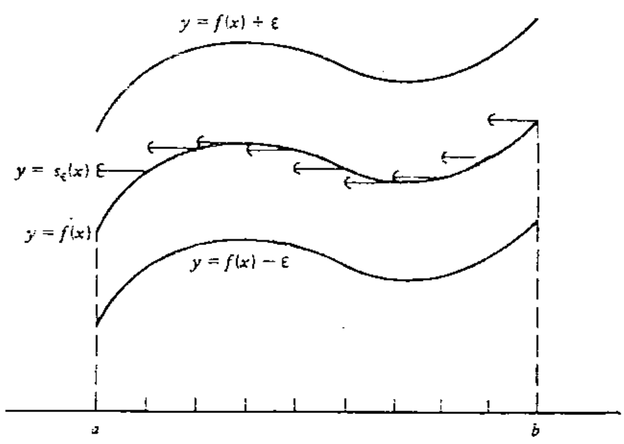
Misalkan $I = [a, b]$ dan ambil $m \in N$ cukup besar sedemikian sehingga $h = (b - a)/m < \delta(\varepsilon)$. Selanjutnya kita bagi interval I menjadi m buah interval yang saling lepas dengan panjang h, namakan $I_1 = [a, a + h]$ dan $I_k = (a + (k - 1)h, a + kh]$ untuk $k = 2, 3, \ldots, m$. Karena panjang setiap subinterval I_k adalah $h < \delta(\varepsilon)$ maka selisih dari dua nilai f di I_k lebih kecil dari ε. Sekarang kita definisikan

(*) $\qquad s_\varepsilon(x) = f(a + kh)$ untuk $x \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$

Maka s_ε adalah konstan pada tiap interval I_k (nilai s_ε pada I_k adalah nilai f pada titik ujung kanan dari I_k, lihat gambar 2.4.4). Akibatnya jika $x \in I_k$ maka

$$|f(x) - s_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(a + kh)| < \varepsilon$$

untuk semua $x \in I$.



Aproksimasi oleh fungsi tangga

Akibat.

Misalkan $I = [a, b] \subseteq R$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I. Jika $\varepsilon > 0$ maka terdapat sebuah bilangan m sehingga jika kita bagi I kedalam m interval disjoin I_k yang mempunyai panjang $h = (b - a) / m$ maka fungsi tangga $s_\varepsilon : I \to R$ yang didefinisikan dengan $s_\varepsilon (x) = f(a + kh)$ untuk $x \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$ memenuhi $|f(x) - s_\varepsilon (x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in I$.

2.4.10 Definisi

Misalkan $I = [a, b] \subseteq R$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas. Fungsi $g : I \to R$ dikatakan **linear bagian demi bagian (piecewise linear)** pada I jika I adalah gabungan dari sejumlah hingga interval disjoin $I_1, \ldots, I_m$, sehingga restriksi dari g adalah linear untuk setiap interval I_k.

2.4.11 Teorema

Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I. Jika $\varepsilon > 0$ maka terdapat sebuah fungsi linear bagian demi bagian yang kontinu $g_\varepsilon : I \to R$ sehingga $|f(x) - g_\varepsilon (x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in I$.

Bukti.

Karena f kontinu pada interval tertutup dan terbatas maka f kontinu seragam pada I. Maka setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x, y \in A$, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ berlaku $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Misalkan $I = [a, b]$ dan ambil $m \in N$ cukup besar sedemikian sehingga $h = (b - a)/m < \delta(\varepsilon)$. Selanjutnya kita bagi interval I menjadi m buah interval yang saling lepas dengan panjang h, namakan $I_1 = [a, a + h]$ dan $I_k = (a + (k - 1)h, a + kh]$ untuk $k = 2, 3, \ldots, m$. Pada setiap I_k kita definisikan kontinu fungsi linear $g_\varepsilon : I_k \to R$ yang menghubungkan titik-titik

$$(a + (k - 1)h\,,\ f(a + + (k - 1)h)) \text{ dan } (a + kh\,,\ f(a + kh))$$

Maka $g_\varepsilon : I \to R$ adalah sebuah fungsi linear bagian demi bagian yang kontinu pada I. Karena untuk setiap $x \in I$ nilai f(x) berada antara $f(x) + \varepsilon$ dan $f(x) - \varepsilon$ maka $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in I_k$. Karena itu $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in I$.

2.4.12 Teorema Approksimasi Weierstrass
Misalkan $I = [a, b]$ adalah sebuah interval tertutup dan terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I. Jika $\varepsilon > 0$ maka terdapat sebuah fungsi polinomial $p_\varepsilon : I \to R$ sehingga $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in I$.

Ringkasan

1. Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$. Maka pernyataan berikut ekivalen
   (i). f kontinu seragam pada A
   (ii). untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap x, u di A dengan $|x - u| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.
   (iii). untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat dua barisan (x_n) dan (u_n) di A dengan $\lim (x_n - u_n) = 0$ berlaku $|f(x_n) - f(u_n)| < \varepsilon$.
2. Jika I interval tertutup terbatas dan $f : I \to R$ kontinu pada I, maka f kontinu seragam pada I.
3. Jika fungsi $f : A \to R$ adalah **Lipschitz** maka f kontinu seragam pada A.
4. Fungsi $f : (a, b) \to R$ kontinu seragam pada (a, b) jika dan hanya jika f dapat didefinisikan di a dan b sedemikian sehingga fungsi yang diperluas kontinu di [a, b].

Latihan 4

1. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = 1 / x$ kontinu seragam pada himpunan $A = [a, \infty)$ dengan a adalah konstanta positif.
2. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = 1 / x^2$ tak kontinu seragam pada himpunan $A = (0, \infty)$

3. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = \sin(1/x)$ tak kontinu seragam pada himpunan $B = (0, \infty)$

4. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = 1 / (1 + x^2)$ untuk $x \in R$ kontinu seragam pada R.

5. Tunjukkan bahwa fungsi f dan g kontinu seragam dan terbatas pada himpunan $A \subseteq R$ maka hasil kali fg kontinu seragam pada A.

6. Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$ memenuhi sifat : untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah fungsi $g_\varepsilon : I \to R$ sehingga g_ε kontinu seragam pada A dan $|f(x)-g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in A$. Buktikan bahwa f kontinu seragam pada A.

Jawaban Latihan 4.

1. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

   Karena f kontinu seragam (uniform) pada A maka terdapat $\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x, u \in A$, $|x - u| < \delta(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

   Pilih $\delta = \min\{1, a^2\varepsilon\}$.

   Maka $\forall x, u \in A$, $|x - u| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

   $$|f(x) - f(u)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{u}\right| = \left|\frac{u - x}{xu}\right|$$

   $$\leq \frac{1}{a^2}|x - u| < \frac{1}{a^2}\, a^2\varepsilon = \varepsilon.$$

   Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka f(x) kontinu seragam pada A.

2. Ambil $\varepsilon_0 = ½$.

   Ambil $(x_n), (y_n) \in A \ni \lim (x_n - y_n) = 0$.

   Pilih $x_n = 1/\sqrt{n}$ dan $y_n = 1/\sqrt{(n+1)}$. Maka $\lim (x_n - y_n) = \lim (1/\sqrt{n} - 1/\sqrt{(n+1)}) = 0$

   Dan $|f(x_n) - f(x_n)| = |n - (n + 1)| = 1 > ½ = \varepsilon_0$.

   Jadi terdapat $\varepsilon_0 = ½ > 0$ dan $(x_n), (y_n) \in A \ni \lim (x_n - y_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(x_n)| = |n - (n + 1)| = 1 > ½ = \varepsilon_0$. Jadi f tak kontinu seragam pada $A = (0, \infty)$.

3. Misalkan $g(x) = \sin(1/x), x \neq 0$

Untuk membuktikan ini kita akan menunjukkan terdapat dua barisan (x_n) dan (y_n) di A dengan (x_n), (y_n) dengan $\lim (x_n - y_n) = 0$ dan $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga $|f(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$

Pilih $\varepsilon_0 = ½$ dan $(x_n) = (1/n\pi)$ dan $(y_n) = (2/(4n+1)\pi)$.

Maka $\lim (x_n - y_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(x_n)| = |\sin n\pi - \sin (4n+1)\pi/2| = |0 - 1|$ $= 1 > ½ = \varepsilon_0$. Jadi terdapat $\varepsilon_0 = ½ > 0$ dan $(x_n), (y_n) \in A \ni \lim (x_n - y_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(x_n)| = |n - (n+1)| = 1 > ½ = \varepsilon_0$. Jadi f tak kontinu seragam pada $B = (0, \infty)$.

4. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Perhatikan

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+u^2}\right| = \left|\frac{1+u^2-x^2-1}{(1+x^2)(1+u^2)}\right|$$

$$= \left|\frac{x^2-u^2}{(1+x^2)(1+u^2)}\right|$$

$$= \frac{|x-u||x+u|}{|1+x^2||1+u^2|}$$

$$= \left\{\frac{|x|}{|1+x^2|} + \frac{|u|}{|1+u^2|}\right\}|x-u|$$

$$\leq \left\{\frac{|1+x^2|}{|1+x^2|} + \frac{|1+u^2|}{|1+u^2|}\right\}|x-u|$$

$$\leq 2\,|x-2|$$

Pilih $\delta = \min\{1, \varepsilon/2\}$.

Maka $\forall x, u \in A$, $|x-u| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+u^2}\right| \leq 2\,|x-2| < 2.\ \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Jadi f tak kontinu seragam pada R.

5. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Karena f terbatas pada A maka terdapat $M_1 > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \leq M_1$ untuk setiap $x \in A$. Karena g terbatas pada A maka terdapat $M_2 > 0$ sedemikian sehingga $|g(x)| \leq M_2$ untuk setiap $x \in A$.

Karena f kontinu seragam (uniform) pada A maka terdapat $\delta_1(\varepsilon) > 0 \ni \forall x, u \in A$, $|x - u| < \delta_1(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon/2M_2$.

Karena g kontinu seragam (uniform) pada A maka terdapat $\delta_2(\varepsilon) > 0 \ni \forall x, u \in A$, $|x - u| < \delta_2(\varepsilon)$ maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon/2M_1$.

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Maka $\forall x, u \in A$, $|x - u| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$$\begin{aligned}
|f(x)\, g(x) - f(u)g(u)| &= |f(x)\, g(x) - f(x)g(u) + f(x)g(u) - f(u)g(u)|\,| \\
&= |f(x)(g(x) - g(u)) + g(u)(f(x) - L)| \\
&\leq |f(x)||\, g(x) - g(u)\,| + |g(u)||\, f(x) - L\,| \\
&< (M_1)(\varepsilon/2M_1) + |M_2|\,\{\varepsilon/2(|M_2| + 1)\} \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

6. Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Karena $g_\varepsilon(x)$ kontinu seragam (uniform) pada A maka terdapat $\delta_1(\varepsilon) > 0$ $\ni \forall x, u \in A$, $|x - u| < \delta_1(\varepsilon)$ maka $|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(u)| < \varepsilon/3$. Juga kita punya $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in A$.

Pilih $\delta = \delta_1$.

Maka $\forall x, u \in A$, $|x - u| < \delta(\varepsilon)$ berlaku

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(u)| &= |f(x) - g_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(u) + g_\varepsilon(u) - f(u)| \\
&\leq |f(x) - g_\varepsilon(x)| + |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(u)| + |g_\varepsilon(u) - f(u)| \\
&\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jadi f kontinu seragam pada A.

Tes Formatif 4.

1. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = 1/x^2$ kontinu seragam pada himpunan $B = [1, \infty)$.
2. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2$ tak kontinu seragam pada himpunan $A = [0, \infty)$
3. Misalkan $f(x) = x$ dan $g(x) = \sin x$. Tunjukkan bahwa f dan g keduanya kontinu seragam pada R tapi hasil kalinya fg tak kontinu seragam pada R.
4. Misalkan f kontinu seragam pada himpunan $A \subseteq R$ dan $|f(x)| \geq k > 0$ untuk semua $x \in A$. Tunjukkan bahwa fungsi 1/f kontinu seragam pada himpunan A.
5. Tunjukkan bahwa jika fungsi f kontinu seragam pada subhimpunan terbatas A maka f terbatas pada A.

2.5 Fungsi Monoton dan Invers

Definisi

Misalkan $A \subseteq R$ dan $f : A \to R$.

Fungsi f dikatakan **naik** pada A jika $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$ maka $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Fungsi f dikatakan **naik murni** pada A jika $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.

Fungsi f dikatakan **turun** pada A jika $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$ maka $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Fungsi f dikatakan **turun murni** pada A jika $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

Catatan.

- Jika f naik pada A maka – f turun pada A.
- Jika f turun pada A maka – f naik pada A
- Fungsi monoton tidak perlu kontinu

  Contoh

  $$F(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1] \\ 1, x \in (1,2) \end{cases}$$

  Maka F adalah monoton naik tapi tidak kontinu di x = 1.

2.5.1 Teorema

Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ naik pada I.

Misalkan $c \in I$ bukan titik ujung dari I maka

(i). $\lim_{x \to c^-} f = \sup \{f(x) : x \in I, x < c\}$

(ii). $\lim_{x \to c^+} f = \inf \{f(x) : x \in I, x > c\}$

Bukti.

(i). Misalkan $c, x \in I$ dan $x < c$. Karena f naik maka $f(x) \leq f(c)$.

Misalkan $P = \{f(x) : x \in I, x < c\} \neq \varnothing$ (karena c bukan titik ujung dari I)

Maka $f(x) \leq f(c)$ untuk setiap $x \in P$. Jadi himpunan P terbatas di atas oleh f(c).

Akibatnya himpunan P memiliki suprimum. Misalkan sup P = L. Berdasarkan definisi suprimum jika $\varepsilon > 0$ diberikan maka $L - \varepsilon$ bukan batas atas dari P, sehingga terdapat $y_\varepsilon \in I, y_\varepsilon < c \ni L - \varepsilon < f(y_\varepsilon) \leq L$.

Pilih $\delta = c - y_\varepsilon$.

Maka jika $0 < c - y_\varepsilon < \delta(\varepsilon)$ maka $y_\varepsilon < y < c$ sehingga

$$L - \varepsilon < f(y_\varepsilon) \leq f(y) \leq L \leq L + \varepsilon$$

Jadi diperoleh jika $0 < c - y_\varepsilon < \delta(\varepsilon)$ maka $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka (i) terbukti.

(ii). Misalkan $c, x \in I$ dan $x > c$. Karena f naik maka $f(c) \leq f(x)$.

Misalkan $P = \{f(x) : x \in I, x > c\} \neq \varnothing$ (karena c bukan titik ujung dari I)

Maka $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in P$. Jadi himpunan P terbatas di bawah oleh f(c). Akibatnya himpunan P memiliki infimum. Misalkan inf P = L. Berdasarkan definisi suprimum jika $\varepsilon > 0$ diberikan maka $L + \varepsilon$ bukan batas bawah dari P, sehingga terdapat $y_\varepsilon \in I, y_\varepsilon > c \ni L + \varepsilon > f(y_\varepsilon) \geq L$.

Pilih $\delta = y_\varepsilon - c$

Maka jika $0 < y_\varepsilon - c < \delta(\varepsilon)$ maka $y_\varepsilon > y > c$ sehingga

$$L - \varepsilon < f(y_\varepsilon) \leq f(y) \leq L \leq L + \varepsilon$$

Jadi diperoleh jika $0 < y_\varepsilon - c < \delta(\varepsilon)$ maka $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka (ii) terbukti.

2.5.2 Akibat

Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ naik pada I.

Misalkan $c \in I$ bukan titik ujung dari I.

Maka pernyataan berikut ekivalen

(i). f kontinu di c

(ii). $\lim\limits_{x \to c^-} f = f(c) = \lim\limits_{x \to c^+} f$

(iii). $\sup \{f(x) : x \in I, x < c\} = f(c) = \inf \{f(x) : x \in I, x > c\}$

Definisi

Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ naik pada I.

Kita definisikan **lompatan** dari f di c (Notasi: $J_f(c)$) dengan

(i). Jika c tidak titik ujung dari I maka

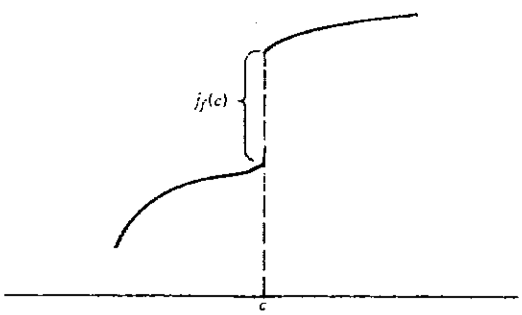
$$J_f(c) = \lim_{x \to c^+} f - \lim_{x \to c^-} f \text{ atau } J_f(c) = \inf\{f(x) : x \in I, x > c\} - \sup\{f(x) : x \in I, x < c\}$$

(ii). Jika c titik ujung kiri dari I maka

$$J_f(c) = \lim_{x \to c^+} f - f(c) \text{ atau } J_f(c) = \inf\{f(x) : x \in I, x > c\} - f(c)$$

(iii). Jika c titik ujung kanan dari I maka

$$J_f(c) = f(c) - \lim_{x \to c^-} f \text{ atau } J_f(c) = f(c) - \sup\{f(x) : x \in I, x < c\}$$



Lompatan dari f di c

2.3.3 Teorema

Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ naik pada I. Jika $c \in I$ maka

f kontinu di c jika dan hanya jika $J_f(c) = 0$

Bukti.

Kita akan tinjau tiga kasus.

Kasus 1.

Jika c tidak titik ujung dari I maka

$$f \text{ kontinu di } c \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f = \lim_{x \to c^+} f - \lim_{x \to c^-} f = f(c)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f - \lim_{x \to c^-} f = J_f(c) = 0$$

Kasus 2.

Jika c titik ujung kiri dari I maka

$$f \text{ kontinu di } c \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f = f(c)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f - f(c) = J_f(c) = 0$$

Kasus 3.

Jika c titik ujung kanan dari I maka

$$f \text{ kontinu di } c \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f = f(c)$$

$$\Leftrightarrow f(c) - \lim_{x \to c^-} f = J_f(c) = 0$$

2.5.4 Teorema

Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ monoton pada I.

Maka $D = \{ x \in I \mid f \text{ diskontinu } \} \subseteq I$ terhitung.

Bukti.

Misalkan f naik pada I.

Maka menurut teorema 2.5.3 himpunan $D = \{ x \in I \mid J_f(x) \neq 0$.

Misalkan $I = [a, b]$ adalah interval tertutup dan terbatas. Karena f naik maka $J_f(c) \geq 0$ untuk semua $c \in I$.

Jika $a \leq x_1 < \ldots < x_n \leq b$ maka kita punya

$$f(a) \leq f(a) + J_f(x_1) + \ldots J_f(x_n) \leq f(b)$$

yang menghasilkan

$$J_f(x_1) + \ldots J_f(x_n) \leq f(b) - f(a)$$

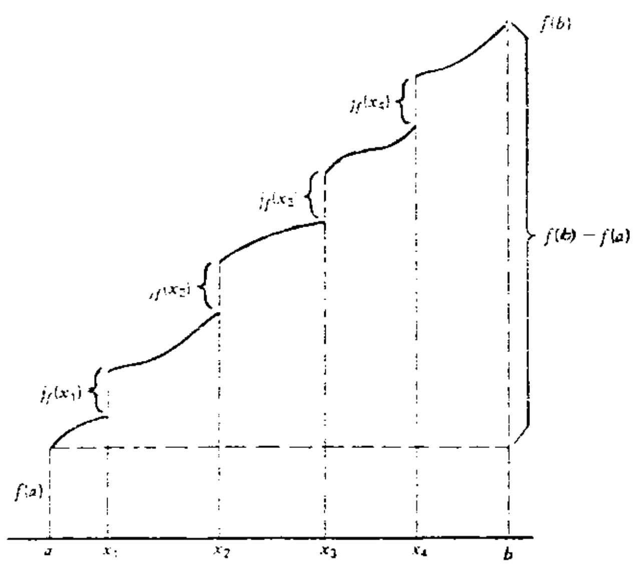
Akibatnya

paling banyak 1 titik $x \in I = [a, b]$ dengan $J_f(x) \geq (f(b) - f(a)) / 1$

paling banyak 2 titik $x \in I = [a, b]$ dengan $J_f(x) \geq (f(b) - f(a)) / 2$

paling banyak k titik $x \in I = [a, b]$ dengan $J_f(x) \geq (f(b) - f(a)) / k$

Karena itu himpunan D terhitung.



Grafik $J_f(x_1) + \ldots J_f(x_n) \leq f(b) - f(a)$

Fungsi Invers

Kita tahu bahwa sebuah fungsi mempunyai invers jika dan hanya jika fungsi tersebut injective (satu-satu) yaitu jika $x, y \in I$, $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$. Karena fungsi monoton satu-satu maka fungsi itu punya invers. Teorema berikut menunjukkan bahwa jika fungsi $f : I \rightarrow R$ monoton dan kontinu pada I maka f punya invers (namakan g) pada $J = f(I)$ yang juga monoton dan kontinu pada J.

2.5.5 Teorema Invers Kontinu

Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f : I \rightarrow R$ monoton dan kontinu pada I. Maka fungsi invers dari f (yaitu g) adalah monoton dan kontinu pada $J = f(I)$.

Bukti.

Kasus 1. Fungsi f monoton naik murni.

Misalkan $f : I \rightarrow R$ kontinu pada I. Maka $J = f(I)$ adalah sebuah interval.

Karena f monoton naik murni pada I maka f satu-satu pada I.

Akibatnya fungsi $g : J \rightarrow R$ (invers dari f) ada.

Klaim : g naik murni dan dan kontinu pada J.

Pertama-tama akan ditunjukkan g naik murni.

Misalkan $y_1, y_2 \in J$ dengan $y_1 < y_2$. Maka $y_1 = f(x_1)$ dan $y_2 = f(x_2)$ untuk suatu $x_1, x_2 \in I$. Kita harus tunjukkan bahwa $g(y_1) = x_1 < x_2 = g(y_2)$.

Andaikan $x_1 \geq x_2$.

Karena f monoton naik maka $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$. Hal ini kontradiksi dengan $y_1 < y_2$. Jadi pengandaian salah. Maka haruslah $g(y_1) = x_1 < x_2 = g(y_2)$.

Hal ini menunjukkan bahwa g monoton naik murni.

Selanjutnya kita akan tunjukkan bahwa g kontinu pada J.

Andaikan g tak kontinu di $c \in I$. Maka

$$J_g(c) \neq 0 \text{ atau } \lim_{x \to c^-} g < \lim_{x \to c^+} g$$

Maka untuk setiap $x \neq g(c)$ berlaku $\lim_{x \to c^-} g < x < \lim_{x \to c^+} g$. Maka $x \neq g(y)$ untuk sebarang $y \in J$. Akibatnya $x \notin I$. Hal ini kontradiksi dengan I sebuah interval.

Jadi haruslah g kontinu pada J.

Kasus 2. Fungsi f monoton turun murni.

Misalkan $f : I \rightarrow R$ kontinu pada I. Maka $J = f(I)$ adalah sebuah interval.

Karena f monoton turun murni pada I maka f satu-satu pada I.

Akibatnya fungsi $g : J \rightarrow R$ (invers dari f) ada.

Klaim : g turun murni dan dan kontinu pada J.

Pertama-tama akan ditunjukkan g turun murni.

Misalkan $y_1, y_2 \in J$ dengan $y_1 < y_2$. Maka $y_1 = f(x_1)$ dan $y_2 = f(x_2)$ untuk suatu $x_1, x_2 \in I$. Kita harus tunjukkan bahwa $g(y_1) = x_1 > x_2 = g(y_2)$.

Andaikan $x_1 \leq x_2$.

Karena f monoton turun maka $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$. Hal ini kontradiksi dengan $y_1 < y_2$. Jadi pengandaian salah. Maka haruslah $g(y_1) = x_1 > x_2 = g(y_2)$.

Hal ini menunjukkan bahwa g monoton turun murni.

Selanjutnya kita akan tunjukkan bahwa g kontinu pada J.

Andaikan g tak kontinu di $c \in I$. Maka

$$J_g(c) \neq 0 \text{ atau } \lim_{x \to c^-} g > \lim_{x \to c^+} g$$

Maka untuk setiap $x \neq g(c)$ berlaku $\lim_{x \to c^-} g > x > \lim_{x \to c^+} g$. Maka $x \neq g(y)$ untuk sebarang $y \in J$. Akibatnya $x \notin I$. Hal ini kontradiksi dengan I sebuah interval. Jadi haruslah g kontinu pada J.

Ringkasan.

1. Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ naik pada I.

   Misalkan $c \in I$ bukan titik ujung dari I maka pernyataan berikut ekivalen

   (i). f kontinu di c

   (ii). $\lim_{x \to c^-} f = f(c) = \lim_{x \to c^+} f$

   (iii). $\sup \{f(x) : x \in I, x < c\} = f(c) = \inf \{f(x) : x \in I, x > c\}$

2. Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ naik pada I. Jika $c \in I$ maka f kontinu di c jika dan hanya jika $J_f(c) = 0$

3. Misalkan $I \subseteq R$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ monoton dan kontinu pada I. Maka fungsi invers dari f (yaitu g) adalah monoton dan kontinu pada $J = f(I)$.

Latihan 5

1. Misalkan $I = [a, b]$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ adalah fungsi naik. Maka titik a (berturut-turut, b) adalah titik minimum mutlak (berturut-turut, maksimum mutlak) dari f pada I. Jika f naik murni maka maka a adalah satu-satunya titik minimum mutlak dari f pada I.
2. Tunjukkan bahwa jika f dan g adalah fungsi positif dan naik pada sebuah interval I maka fg juga naik pada I.
3. Misalkan $I = [a, b]$ adalah sebuah interval dan $f : I \to R$ adalah fungsi naik pada I. Maka,

   f kontinu di a jika dan hanya jika $f(a) = \inf\{ f(x) : x \in (a, b]\}$.

Jawaban Latihan 5.

1. Karena f naik pada I maka untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$ memenuhi $f(x_1) \le f(x_2)$ atau $f(a) \le f(x_1) \le f(x_2) \le f(b)$. Karena $f(a) \le f(x)$ untuk setiap $x \in I$ maka a adalah titik minimum mutlak dari f pada I. Karena $f(x) \le f(b)$ untuk setiap $x \in I$ maka b adalah titik maksimum mutlak dari f pada I. Andaikan c adalah titik minimum dari f pada I dengan $a \ne c$. Maka $f(c) \le f(a)$. Karena $a < c < b$ dan f naik maka $f(a) \le f(c)$. Terjadi kontradiksi. Jadi haruslah $a = c$.
2. Ambil $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$.

   Karena f dan g naik dan positif pada I maka $0 < f(x_1) < f(x_2)$ dan $0 < g(x_1) < g(x_2)$. Karena itu $0 < f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_2)$ atau $(fg)(x_1) < (fg)(x_2)$. Jadi fg naik pada I.
3. Karena f naik pada I maka $f(a) \le f(x) \le f(b)$ untuk setiap $x \in I$.

($\Rightarrow$). f kontinu di a $\Rightarrow f(a) = \inf\{ f(x) : x \in (a, b]\}$.

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Misalkan $\inf\{ f(x) : x \in (a, b]\} = L$. Maka $L + \varepsilon$ bukan batas bawah dari $\inf\{ f(x) : x \in (a, b]\}$. Berarti terdapat $x_\varepsilon \in (a, b] \ni L < f(x_\varepsilon) < L + \varepsilon$.

Pilih $\delta = x_\varepsilon - a > 0$.

Misalkan $x \in (a, b]$ dengan $-\delta + a < x < x_\varepsilon = \delta + a$ atau $|x - a| < \delta$.

Karena f naik maka $-\varepsilon + L < f(x) < f(x_\varepsilon) < L + \varepsilon$ atau $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Jadi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Karena f kontinu di a maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Karena nilai dari suatu limit adalah tunggal maka $f(a) = L$ atau $f(a) = \inf\{ f(x) : x \in (a, b]\}$.

$(\Leftarrow)$. $f(a) = \inf\{ f(x) : x \in (a, b]\} \Rightarrow$ f kontinu di a

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan.

Misalkan $\inf\{ f(x) : x \in (a, b]\} = f(a)$. Maka $f(a) + \varepsilon$ bukan batas bawah dari $\inf\{ f(x) : x \in (a, b]\}$. Berarti terdapat $x_\varepsilon \in (a, b] \ni f(a) < f(x_\varepsilon) < f(a) + \varepsilon$.

Pilih $\delta = x_\varepsilon - a > 0$ atau $x_\varepsilon = \delta + a$.

Untuk $x \in (a, b]$ dengan $-\delta + a < x < x_\varepsilon = \delta + a$ atau $|x - a| < \delta$.

Karena f naik maka $-\varepsilon + f(a) < f(x) < f(x_\varepsilon) < f(a) + \varepsilon$ atau $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Jadi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Jadi f kontinu di a.

Tes Formatif 5.

1. Jika f dan g adalah fungsi naik pada sebuah interval I. Tunjukkan bahwa f + g adalah fungsi naik pada I. Jika f dan g adalah fungsi naik murni maka f + g adalah fungsi naik naik pada I.
2. Misalkan $I \subseteq R$ sebuah interval dan $f : I \to R$ naik pada I dan $c \in I$ tidak titik ujung dari I. Tunjukkan bahwa f kontinu di c jika dan hanya jika terdapat barisan (x_n) di I sehingga ; $x_n < c$ untuk n = 1, 3, 5, ...; $x_n > c$ untuk n = 2, 4, ...; $c = \lim(x_n)$ dan $f(c) = \lim(f(x_n))$.
3. Misalkan $I \subseteq R$ sebuah interval dan $f : I \to R$ naik pada I dan $c \in I$ tidak titik ujung dari I. Tunjukkan bahwa $J_f(c) = \inf\{ f(y) - f(x) : x < c < y, x, y \in I\}$.
4. Misalkan $I \subseteq R$ sebuah interval dan f, g: $I \to R$ naik pada I dan $f(x) > g(x)$ untuk setiap $x \in I$. Tunjukkan bahwa jika $y \in f(I) \cap g(I)$ maka $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$.

5. Misalkan $I = [0, 1]$ dan $f : I \to R$ didefinisikan dengan $f(x) = x$ untuk x rasional dan $f(x) = 1 - x$ untuk x irrasional. Tunjukkan bahwa f injektif pada I dan $f(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in I$. Tunjukkan bahwa f kontinu hanya di titik $x = ½$.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Bartle, Robert G; Sherbert, Donald R, (1992), *Introduction to Real Analysis.* New York: John Willey & Sons Inc.

Golberg, Richard R, (1976), *Methods of Real Analysis,* New York: John Willey & Sons Inc.

Gupta, S L ; Rani, Nisha, (1974), *Fundamental of Real Analysis,* New Delhi: Vikas Publishing House PVT Ltd.