INTEGRAL LIPAT

Teori, Soal dan Penyelesaiannya

Oleh :

DRS. YARMAN

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN
ILMU PENGETAHUAN ALAM
IKIP PADANG
1989

KATA PENGANTAR

Menyadari akan kesulitan-kesulitan yang sering dialami baik oleh para mahasiswa, dosen, guru dan lain-lain yang ingin mempelajari lebih mendalam tentang integral lipat, serta dengan kurangnya buku-buku mengenai integral lipat maka penulis merasa terpanggil untuk mengatasi kekurangan ini dengan menulis buku yang berjudul "Integral Lipat Teori, Soal dan Penyelesaian".

Dalam Buku ini penulis telah berusaha menyajikan bahan bahan dalam bentukpemecahan atau uraian-uraian yang mengandung unsur-unsur didaktik dan metodik yang singkat dan praktis serta konstruktif baik dalam teori maupun dalam penyelesaian soal-soal.

Khusus mengenai soal-soal dalam buku ini telah diusahakan mengurutkannya mulai dari tingkat kemampuan yang rendah sampai kepada yang lebih tinggi. Hal ini dimaksudkan agar dapat mengembangkan cara berfikir para pembaca dalam menyelesaikan segala macam bentuk soal yang ditemui.

Selain dari itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan sumbangan fikiran kepada penulis sehingga penulisan buku ini dapat diselesaikan.

Akhirnya semoga buku ini ada mamfaatnya bagi kita semua. Kritik dan saran yang sifatnya membangun senantiasa dinantikan dan dihargai demi kesempurnaan buku ini.

Padang, Januari 1989

P e n u l i s

DAFTAR ISI

BAB I

INTEGRAL LIPAT DUA

1.1. Definisi Integral Lipat Dua

Andaikan R adalah daerah tertutup di dalam bidang XOY yang dibatasi oleh suatu kurva mulus bagian demi bagian. Jika f adalah suatu fungsi dari dua variabel yang terdefinisikan pada daerah R, maka integral lipat dua dari f pada daerah R, ditulis

$$\iint_R f(x,y)\ dL \quad \text{atau} \quad \iint_R f(x,y)\ dx\ dy$$

dan didefinisikan sebagai

$$\iint_R f(x,y)\ dL = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta L_i$$

asalkan limit ini ada. Jika limit ini ada, fungsi f dikatakan dapat diintegralkan pada daerah R.

Untuk menghitung integral lipat dua ini digunakan integral berulang. Misalnya akan dihitung integral lipat dua

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\ dx$$

maka dengan menggunakan integral berulang, integral tersebut diselesaikan dengan terlebih dahulu mengintegralkannya terhadap y, dengan menganggap x sebagai konstanta dan sebagai batas-batasnya $y = g_1(x)$ dan $y = g_2(x)$. Hasil dari integrasi ini diintegralkan pula terhadap x dengan batas-batas integrasinya $x = a$ dan $x = b$. Secara singkat ditulis

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx$$

1.2. Soal-soal dan Penyelesaiannya

1. $$\int_0^1\int_1^2 dx\,dy = \int_0^1 x\Big]_1^2 dy$$

$$= \int_0^1 (2 - 1)\,dy$$

$$= 1$$

2. $$\int_2^4\int_1^2 (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \int_2^4 (x^2y + 1/3\,y^3)\Big]_1^2 dx$$

$$= \int_2^4 (x^2 + 7/3)\,dx$$

$$= (x^3 + 7/3\,x)\Big]_2^4$$

$$= 70/3$$

3. $$\int_1^2\int_0^{y^{3/2}} x/y^2\,dx\,dy = \int_1^2 x^2/2y^2\Big]_0^{y^{3/2}} dy$$

$$= \int_1^2 y/2\,dy$$

$$= 1/4\,y^2\Big]_1^2$$

$$= 3/4$$

4. $$\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3)\,dy\,dx = \int_0^1 (y^2/2 + y^4/4)\Big]_x^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 (x/2 - x^2/4 - x^4/4)\,dx$$

$$= (x^2/4 - x^3/12 - x^5/20)\Big]_0^1$$

$$= 7/60$$

5. $$\int_0^1\int_0^{x^2} xe^y\,dy\,dx = \int_0^1 (xe^y)\Big]_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 (xe^{x^2} - x)\,dx$$

$$= \left(\frac{e^{x^2}}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^1$$

$$= 1/2\ (e - 2)$$

6. $$\int_2^4\int_y^{8-y} y\,dx\,dy = \int_2^4 xy\Big]_y^{8-y} dy$$

$$= \int_2^4 (8y-2y^2)\,dy$$

$$= \left(4y^2 - \frac{2y^3}{3}\right)\Big]_2^4$$

$$= 32/3$$

7. $$\int_0^{\text{arc tg } 3/2}\int_0^{2\sec\theta} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\text{arc tg } 3/2} \frac{r^2}{2}\Big]_0^{2\sec\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\text{arc tg } 3/2} 2\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\,\text{tg}\,\theta\Big]_0^{\text{arc tg } 3/2}$$

$$= 2\,\text{tg}(\text{arc tg } 3/2) - 2\,\text{tg}\,0$$

$$= 2.\ 3/2$$

$$= 3$$

8. $$\int_0^{\Pi/2}\int_0^2 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{\Pi/2} \frac{r^3}{3}\cos\theta\Big]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\Pi/2} 8/3\cos\theta\,d\theta$$

$$= 8/3$$

9. $$\int_0^{\pi/4}\int_0^{\operatorname{tg}\sec\theta} r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{r^4}{4}\cos^2\theta\Big]_0^{\operatorname{tg}\theta\sec\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} 1/4\,\operatorname{tg}^4\theta\,\sec^4\theta\,\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} 1/4\,\operatorname{tg}^4\theta\,\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} 1/4\,\operatorname{tg}^4\theta\;d\,\operatorname{tg}\theta$$

$$= 1/20\,\operatorname{tg}^5\theta\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= 1/20$$

10. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\cos^2\theta\Big]_0^{1-\cos\theta} d\theta$$

$$= 1/4\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^4\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 1/4\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta-4\cos^3\theta+$$

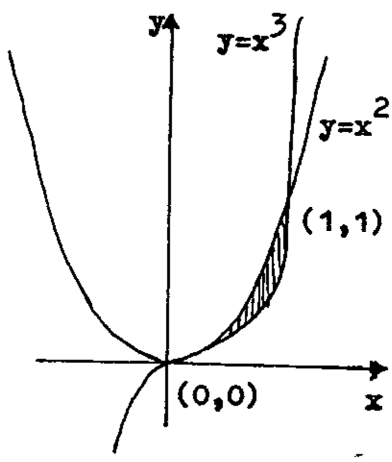
$$6\cos^4\theta-4\cos^5\theta+\cos^6\theta)\,d\theta$$

$$= \pi/4 - 0 + 9\pi/8 + 0 + 15\pi/96$$

$$= 49\pi/32$$

11. Hitunglah integral lipat dua dari x terhadap daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = x^3$ dalam dua urutan dengan menggunakan integral berulang.

Penyelesaian :

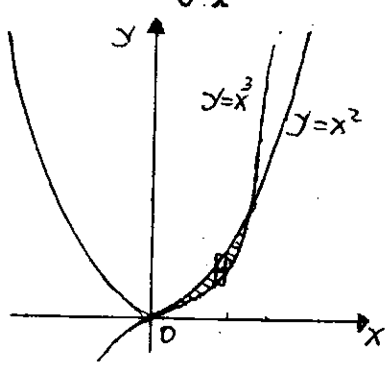


Titik potong kedua kurva adalah

$$\begin{array}{l} y = x^2 \\ \underline{y = x^3} \quad - \\ 0 = x^2 - x^3 \\ 0 = x^2(1 - x) \\ x = 0 \quad \text{atau} \quad x = 1 \end{array}$$

Jadi titik potongnya adalah (0,0) dan (1,1).

Cara I. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} x \, dy \, dx = \int_0^1 xy \Big]_{x^3}^{x^2} dx$

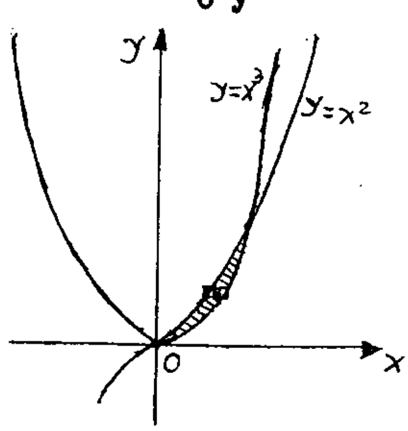


$$= \int_0^1 (x^3 - x^4) \, dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right) \Big]_0^1$$

$$= 1/20$$

Cara II. $\displaystyle\int_0^1\int_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} x \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big]_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} dy$



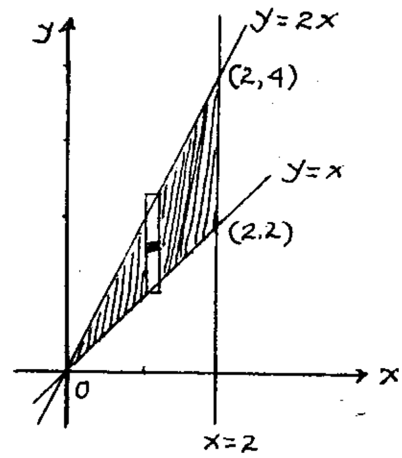
$$= 1/2 \int_0^1 (y^{2/3} - y) \, dy$$

$$= 1/2 \left(\frac{3y^{5/3}}{5} - \frac{y^2}{2}\right) \Big]_0^1$$

$$= 1/20$$

12. Hitunglah integral lipat dua dari x^2 terhadap daerah yang dibatasi oleh $y = x$, $y = 2x$ dan $x = 2$

Penyelesaian :



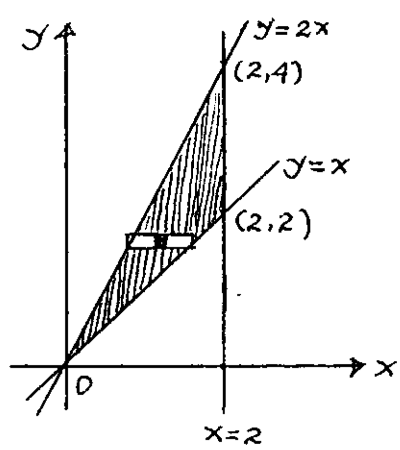
Cara I. $\int_0^2 \int_x^{2x} x^2 \, dy \, dx$

$= \int_0^2 x^2 y \Big]_x^{2x} dx$

$= \int_0^2 (2x^3 - x^3) \, dx$

$= \frac{x^4}{4} \Big]_0^2$

$= 4$



Cara II. $\int_0^2 \int_{y/2}^{y} x^2 \, dx \, dy + \int_2^4 \int_{y/2}^{2} x^2 \, dx \, dy$

$= \int_0^2 \frac{x^3}{3} \Big]_{y/2}^{y} dy + \int_2^4 \frac{x^3}{3} \Big]_{y/2}^{2} dy$

$= 7/24 \int_0^2 y^3 \, dy \; + \; 1/3 \int_2^4 (8 - \frac{y^3}{8}) \, dy$

$= 7/96 \; y^4 \Big]_0^2 + \; 1/3 \quad (8y - y^4) \Big]_2^4$

$= 4$

13. Hitunglah integral lipat dua dari y terhadap daerah di atas sumbu x, yang dibatasi oleh $y^2 = 4x$ dan $y^2 = 5 - x$.

Penyelesaian :

Titik potong kedua kurva adalah

$y^2 = 5 - x$

$y^2 = 4x$ –

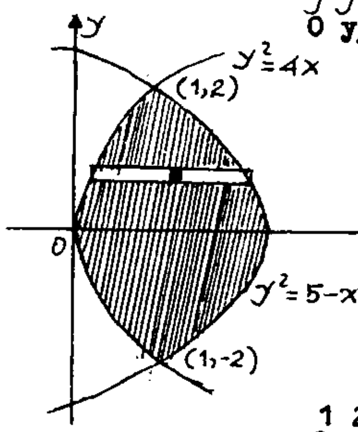
$0 = 5 - 5x$

$x = 1$, maka $y^2 = 4 \longrightarrow y_1 = 2,\ y_2 = -2$

Jadi titik potongnya (1,2) dan (1,-2)

Cara I.

$$\int_0^2 \int_{y^2/4}^{5-y^2} y\,dx\,dy = \int_0^2 xy \Big]_{y^2/4}^{5-y^2} dy$$



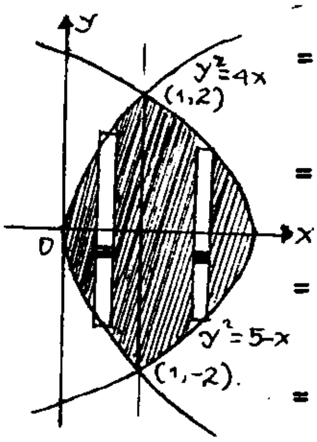
$$= \int_0^2 (5y - \frac{5y^3}{4})\,dy$$

$$= \frac{5y^2}{2} - \frac{5y^3}{12} \Big]_0^2$$

$$= 5$$

Cara II.

$$\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{x}} y\,dy\,dx + \int_1^5 \int_0^{\sqrt{5-x}} y\,dy\,dx$$



$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big]_0^{2\sqrt{x}} dx + \int_1^5 \frac{y^2}{2} \Big]_0^{\sqrt{5-x}} dx$$

$$= \int_0^1 2x\,dx + \int_1^5 1/2\,(5-x)\,dx$$

$$= x^2 \Big]_0^1 + 1/2\,(5x - \frac{x^2}{2}) \Big]_1^5$$

$$= 5$$

14. Hitunglah integral lipat dua dari 1 terhadap daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh $2y = x^2$, $y = 3x$ dan $x + y = 4$.

Penyelesaian :

Titik potong antara kurva $y = 3x$ dan $x + y = 4$ adalah

$3x = 4 - x$

$4x = 4$

$x = 1$ sehingga $y = 3$ dan titik potongnya adalah A(1,3)

Titik potong antara kurva $y = 3x$ dan $y = 1/2\,x^2$ adalah

$1/2\,x^2 - 3x = 0$

$x^2 - 6x = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 6$, sehingga $y_1 = 0$ dan $y_2 = 18$

Jadi titik potongnya adalah O(0,0) dan C(6,18)

Titik potong antara kurva $y = 1/2\, x^2$ dan $x + y = 4$ adalah

$1/2\, x^2 = 4 - x$

$x^2 = 8 - 2x$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

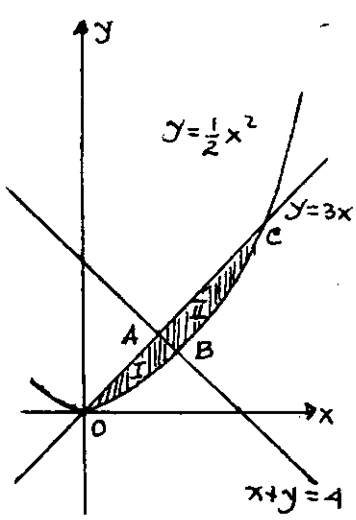
$(x-2)\,(x + 4) = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = -4$ sehingga $y_1 = 2$ dan $y_2 = 8$

Jadi titik potongnya adalah B(2,2) dan (-4,8)

Daerah yang terletak pada kuadran pertama adalah I dan II (lihat gambar).

Cara I.



Untuk daerah I adalah

$$\int_0^1\int_{\frac{x^2}{2}}^{3x} dy\, dx + \int_1^2\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 y\ \Big]_{\frac{x^2}{2}}^{3x} dx + \int_1^2 y\ \Big]_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dx$$

$$= \int_0^1 (3x - \frac{x^2}{2})\, dx + \int_1^2 (4 - x - \frac{x^2}{2})\, dx$$

$$= (\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6})\ \Big]_0^1 + (4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})\ \Big]_1^2$$

$$= 8/3$$

Untuk daerah II adalah

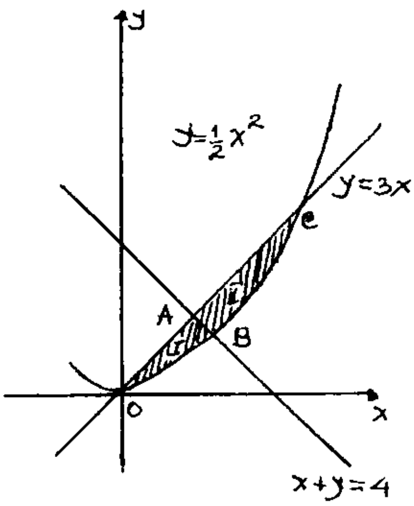
$$\int_1^2\int_{4-x}^{3x} dy\, dx + \int_2^6\int_{\frac{x^2}{2}}^{3x} dy\, dx$$

$$= \int_1^2 y\ \Big]_{4-x}^{3x} dx + \int_2^6 y\ \Big]_{\frac{x^2}{2}}^{3x} dx$$

$$= \int_1^2 (4x-4)\, dx + \int_2^6 (3x - \frac{x^2}{2})\, dx$$

$$= 46/3$$

Cara II



Untuk daerah I adalah

$$\int_0^2\int_{y/3}^{\sqrt{2y}} dx\, dy + \int_2^3\int_{y/3}^{4-y} dx\, dy$$

$$= \int_0^2 x \Big]_{y/3}^{\sqrt{2y}} dy + \int_2^3 x \Big]_{y/3}^{4-y} dy$$

$$= \int_0^2 (\sqrt{2y} - y/3)\, dy + \int_2^3 (4-y-y/3)$$

$$= 8/3$$

Untuk daerah II adalah

$$\int_2^3\int_{4-y}^{\sqrt{2y}} dx\, dy + \int_3^{16}\int_{y/3}^{\sqrt{2y}} dx\, dy$$

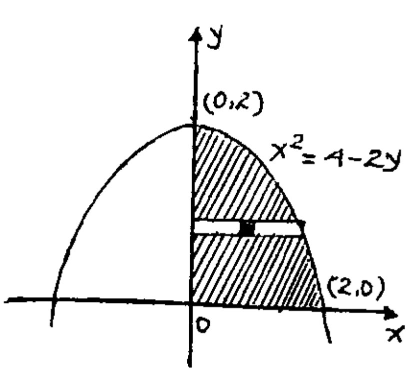
$$= \int_2^3 x \Big]_{4-y}^{\sqrt{2y}} dy + \int_3^{16} x \Big]_{y/3}^{\sqrt{2y}} dy$$

$$= \int_2^3 (\sqrt{2y} - 4 + y)\, dy + \int_3^{16} (\sqrt{2y} - y/3)\, dy$$

$$= 46/3$$

15. **Hitunglah integral lipat dua dari $(2y - y^2)^{-1/2}$ terhadap daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh $x^2 = 4 - 2y$ dengan menggunakan integral berulang.**

Penyelesaian :



$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-2y}} \frac{dx\, dy}{\sqrt{2y-y^2}}$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2y-y^2}} \Big]_0^{\sqrt{4-2y}} dy$$

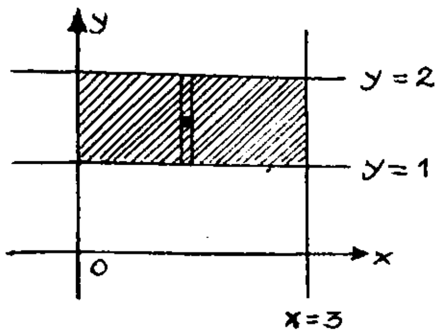
$$= \int_0^2 \frac{\sqrt{4-2y}}{\sqrt{2y-y^2}}\, dy$$

$$= \int_0^2 y^{-1/2} dy = 4$$

16. **Hitunglah integral berulang $\int_1^2 \int_0^3 (x + y)\, dx\, dy$ dengan menukar urutan integrasinya.**

Penyelesaian :

$$\int_1^2 \int_0^3 (x + y)\, dx\, dy = \int_0^3 \int_1^2 (x + y)\, dy\, dx$$



$$= \int_0^3 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) \Big]_1^2 dx$$

$$= \int_0^3 (x + 3/2)\, dx$$

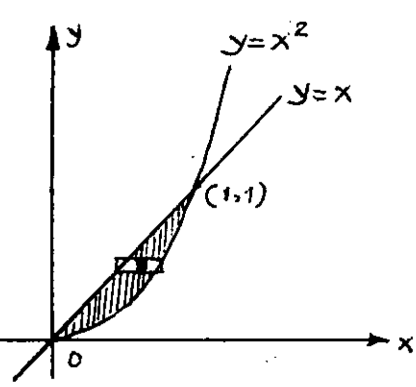
$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2}\right) \Big]_0^3$$

$$= 9$$

17. **Hitunglah integral berulang $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2\, dy\, dx$ dengan menukar urutan integrasinya.**

Penyelesaian :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{y}^{y^{1/2}} xy^2\, dx\, dy$$



$$= \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2} \Big]_y^{y^{1/2}} dy$$

$$= \int_0^1 1/2\, (y^3 - y^4)\, dy$$

$$= 1/2 \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right) \Big]_0^1$$

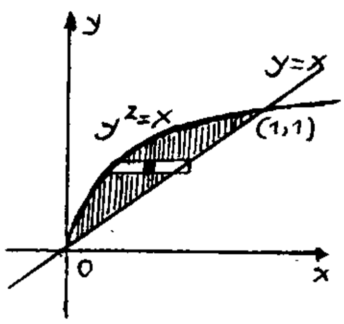
$$= 1/2\, (1/4 - 1/5)$$

$$= 1/40$$

18. Hitunglah integral berulang dari $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3)\, dy\, dx$ dengan menukar urutan integrasinya.

Penyelesaian :

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3)\, dy\, dx$$



$$= \int_0^1 \int_{y^2}^{y} (y + y^3)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 x(y + y^3) \Big]_{y^2}^{y} dy$$

$$= \int_0^1 (y^2 - y^3 + y^4 - y^5)\, dy$$

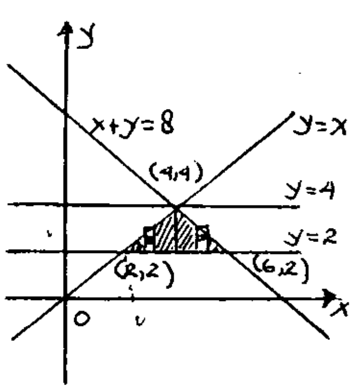
$$= \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right) \Big]_0^1$$

$$= 7/60$$

19. Hitunglah integral berulang $\int_2^4 \int_y^{8-y} y\, dx\, dy$ dengan menukar urutan integrasinya.

Penyelesaian :

$$\int_2^4 \int_y^{8-y} y\, dx\, dy$$



$$= \int_2^4 \int_2^{x} y\, dy\, dx + \int_4^6 \int_2^{8-x} y\, dy\, dx$$

$$= \int_2^4 \frac{y^2}{2} \Big]_2^{x} dx + \int_4^6 \frac{y^2}{2} \Big]_2^{8-x} dx$$

$$= \int_2^4 1/2\, (x^2 - 4)\, dx + \int_4^6 1/2\, (x^2 - 16x + 60)\, dx$$

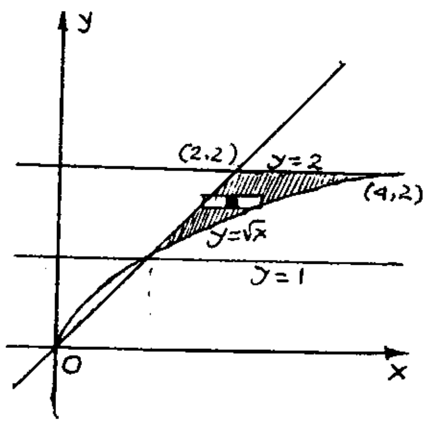
$$= 1/2 \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right) \Big]_2^4 + \left(\frac{x^3}{6} - 4x^2 + 30x\right) \Big]_4^6$$

$$= 32/3$$

20. Dengan menukar urutan integrasinya, tunjukkanlah bahwa

$$\int_1^2\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx + \int_2^4\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

Penyelesaian :



$$\int_1^2\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx + \int_2^4\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx$$

$$= \int_1^2\int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2\int_y^{y^2} \frac{2y}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2y}\,d\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy$$

$$= \int_1^2 \frac{-2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{2y}\right)\Big]_y^{y^2} dy$$

$$= \int_1^2 \frac{-2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}\,dy$$

$$= \frac{-4}{\pi^2}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\,d\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

$$= \frac{-4}{\pi^2}\int_1^2 y\,d\left(\sin\frac{\pi y}{2}\right)$$

$$= \frac{-4}{\pi^2}\left(y\sin\frac{\pi y}{2}\Big]_1^2 + \int_1^2 \sin\frac{\pi y}{2}\,dy\right)$$

$$= \frac{-4}{\pi^2}\left(y\sin\frac{\pi y}{2}\Big]_1^2 + 2/\pi\cos\frac{\pi y}{2}\Big]_1^2\right)$$

$$= \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

BAB II

LUAS DAERAH DENGAN INTEGRAL LIPAT DUA

2.1. Luas Daerah dalam Koordinat Siku-siku

Jika f suatu fungsi dua variabel yang kontinu pada suatu daerah tertutup R di bidang XOY dan yang merupakan fungsi konstan yang bernilai 1, sehingga f(x,y) = 1 untuk semua (x,y) dalam daerah R, maka integral lipat dua

$$\iint_R f(x,y)\, dL = \iint_R dL$$

Hubungan ini merupakan luas dari daerah R. Untuk menghitung luas daerah R ini juga digunakan integral berulang sebagai berikut.

$$L = \iint_R dL = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right) dx$$

atau

$$L = \iint_R dL = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \right) dy$$

2.2. Luas daerah dalam Koordinat Polar

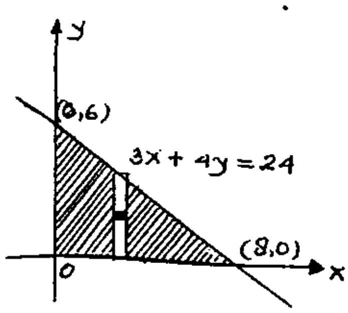
Luas daerah dengan integral lipat dua ini, kadang-kadang lebih mudah pula diselesaikan dengan menggunakan koordinat polar. Mengingat hubungan $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$ maka rumus untuk luas daerah R di atas ditulis sebagai

$$L = \iint_R dL = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r\,(\theta)}^{r_2(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

2.3. Soal-soal dan Penyelesaiannya

1. Gunakanlah integral lipat dua untuk memperoleh luas daerah yang dibatasi oleh $3x + 4y = 24$, $x = 0$ dan $y = 0$.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^8 \int_0^{3/4\,(8-x)} dy\, dx$$

$$= \int_0^8 y \Big]_0^{3/4\,(8-x)} dx$$

$$= \int_0^8 3/4\,(8-x)\, dx$$

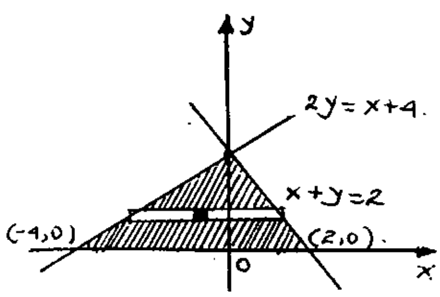
$$= 3/4\left(8x - \frac{x^2}{2}\right) \Big]_0^8$$

$= 24$ satuan kuadrat

2. Gunakan integral lipat dua untuk memperoleh luas daerah yang dibatasi oleh $x + y = 2$, $2y = x + 4$ dan $y = 0$.

Penyelesaian :

$$L = \int_0^2 \int_{2y-4}^{2-y} dx\, dy$$



$$= \int_0^2 x \Big]_{2y-4}^{2-y} dy$$

$$= \int_0^2 (6-3y)\, dy$$

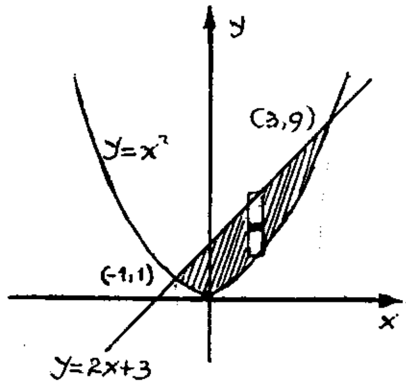
$$= \left(6y - \frac{3y^2}{2}\right) \Big]_0^2$$

$= 6$ satuan kuadrat

3. Gunakan integral lipat dua untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = 2x + 3$.

Penyelesaian :

$$L = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} dy\, dx$$



$$L = \int_{-1}^{3} y \Big]_{x^2}^{2x+3} dx$$

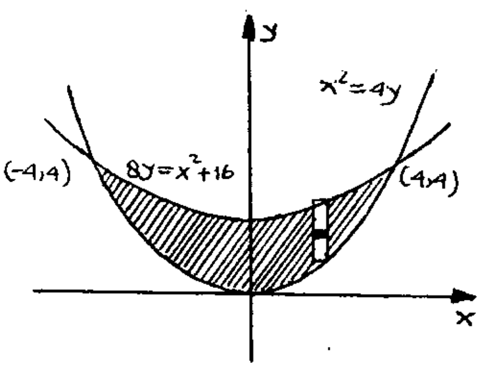
$$= \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\, dx$$

$$= \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right) \Big]_{-1}^{3}$$

$$= 32/3 \text{ satuan kuadrat}$$

4. Gunakan integral lipat dua untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh $x^2 = 4y$ dan $8y = x^2 + 16$.

Penyelesaian :



$$L = \int_{-4}^{4} \int_{\frac{x^2}{2}}^{1/8\,(x^2+16)} dy\, dx$$

$$= \int_{-4}^{4} y \Big]_{\frac{x^2}{2}}^{1/8\,(x^2+16)} dx$$

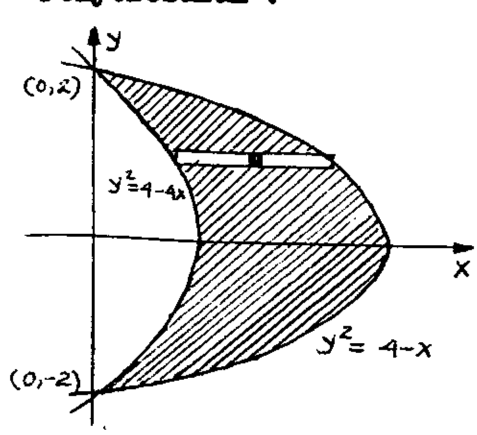
$$= \int_{-4}^{4} \left(2 - \frac{x^2}{8}\right) dx$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{24}\right) \Big]_{-4}^{4}$$

$$= 32/3 \text{ satuan kuadrat}$$

5. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola-parabola $y^2 = 4 - x$ dan $y^2 = 4 - 4x$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



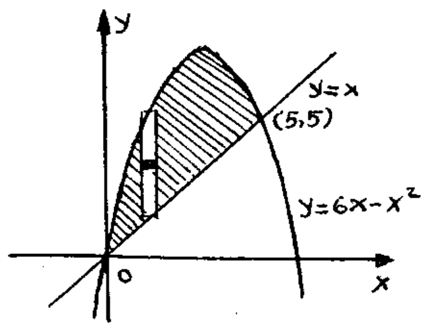
$$L = \int_{-2}^{2} \int_{1-\frac{y^2}{4}}^{4-y^2} dx\, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(3 - \frac{3y^2}{4}\right) dy$$

$$= 8 \text{ satuan kuadrat}$$

6. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 6x-x^2$ dan garis $y = x$.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} dy\ dx$$

$$= \int_0^5 y \Big]_x^{6x-x^2} dx$$

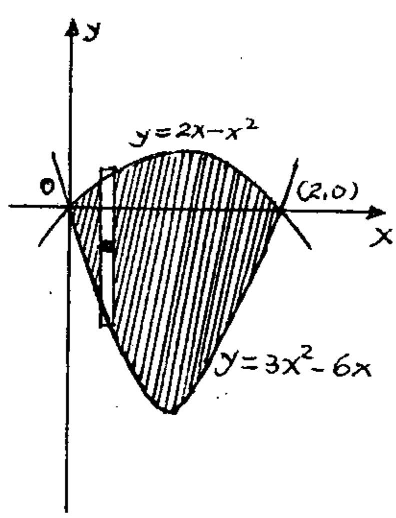
$$= \int_0^5 (5x - x^2)\ dx$$

$$= \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big]_0^5$$

$$= 125/6 \text{ satuan kuadrat}$$

7. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola-parabola $y = 2x - x^2$ dan $y = 3x^2 - 6x$

Penyelesaian :



$$L = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\ dx$$

$$= \int_0^2 y \Big]_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dx$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2 - 3x^2 + 6x)\ dx$$

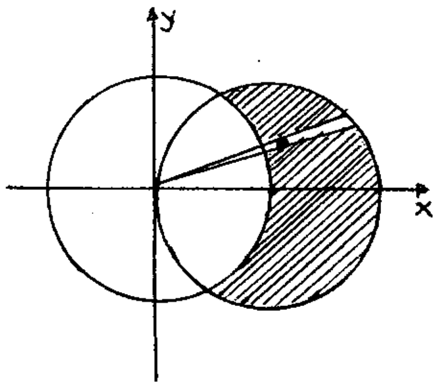
$$= \int_0^2 (8x - 4x^2)\ dx$$

$$= \left(4x^2 - \frac{4x^3}{3}\right) \Big]_0^2$$

$$= 16/3 \text{ satuan kuadrat}$$

8. Carilah luas daerah yang berada di luar r = 4 dan di dalam r = 8 cos θ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



Titik potong kedua lingkaran

$r = 4$

$r = 8 \cos\theta$ −

$0 = 4 - 8\cos\theta$

$\cos\theta = 1/2$

$\theta = \pi/3$ atau $\theta = -\pi/3$

$$L = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{4}^{8\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{r^2}{2}\Big]_{4}^{8\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (32\cos^2\theta - 8)\;d\theta$$

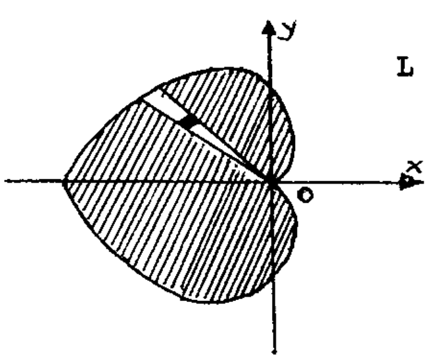
$$= 32\left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}\Big]_{-\pi/3}^{\pi/3} + 1/2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta\right) - 8\theta\Big]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$= (16\sin\theta\cos\theta + 8\theta)\Big]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$= 8(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}) \text{ satuan kuadrat}$$

9. Carilah luas daerah yang berada di dalam r = 2(1 − cos θ) dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2(1-\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big]_{0}^{2(1-\cos\theta)} d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} 2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\;d\theta$$

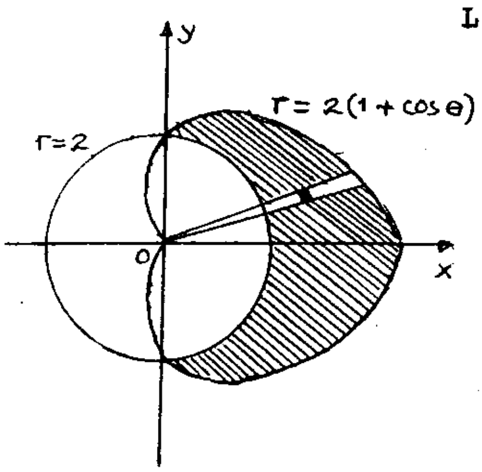
$$L = 2(\theta - 2\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + \theta/2)\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2(2\pi - 0 + 0 + \pi)$$

$$= 6\pi \text{ satuan kuadrat}$$

10. Carilah luas daerah di luar lingkaran $r = 2$ dan di dalam kardioida $r = 2(1 + \cos\theta)$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2}^{2(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\Big]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - 1)\,d\theta$$

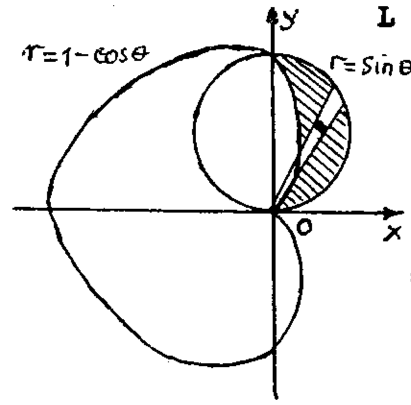
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 2(2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \theta/2)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= (8 + \pi) \text{ satuan kuadrat}$$

11. Carailah luas daenah di dalam lingkaran $r = \sin\theta$ dan di luar kardioida $r = 1 - \cos\theta$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_{0}^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\Big]_{1-\cos\theta}^{\sin\theta}$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} 1/2\,(\sin^2\theta - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta)\,d\theta$$

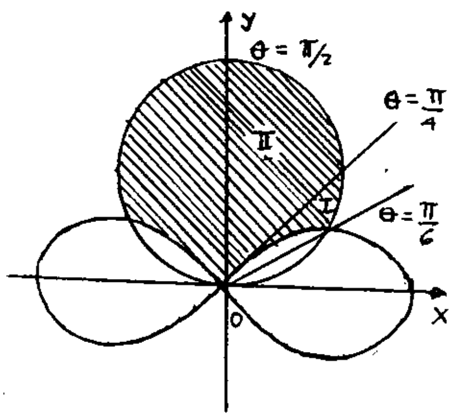
$$L = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \left\{\sin\theta - (1/2 \sin\theta \cos\theta + \theta/2)\right\}\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 1/4\ (4 - \pi) \text{ satuan kuadrat}$$

12. Carilah luas daerah di dalam lingkaran $r = 4 \sin\theta$ dan di luar lemniskat $r^2 = 8 \cos 2\theta$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



Luas daerah yang akan dicari sama dengan dua kali luas daerah yang berada di kuadran pertama. Luas ini dipandang sebagai dua daerah yaitu daerah I dan II (lihat gambar) Sehingga luas daerah yang ditanyakan adalah :

$$L = 2(\mathrm{I} + \mathrm{II})$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{\sqrt{8\cos 2\theta}}^{4\sin\theta} r\, dr\, d\theta + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{4\sin\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} r^2 \Big]_{\sqrt{8\cos 2\theta}}^{4\sin\theta} d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2 \Big]_0^{4\sin\theta} d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (16\sin^2\theta - 8\cos 2\theta)\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 8(-\sin\theta\cos\theta + \theta)\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} - 4\sin 2\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} + 8(-\sin\theta\cos\theta + \theta)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= 4/3\ (2\pi + 12\sqrt{3} - 12) \text{ satuan kuadrat}$$

BAB III

TITIK BERAT DENGAN INTEGRAL LIPAT DUA

3.1. Definisi

Momen (momen pertama) dari suatu daerah datar R dengan luasnya $L = \iint_R dL$ terhadap sumbu x dan sumbu y berturut-turut adalah :

$$M_x = \iint_R y \, dL \quad \text{dan} \quad M_y = \iint_R x \, dL$$

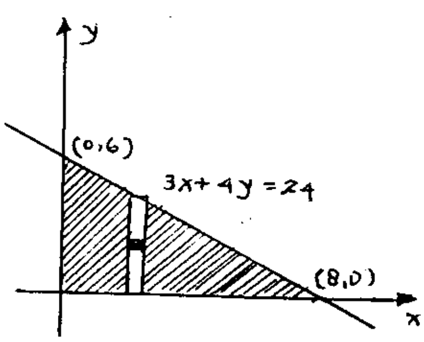
Sedangkan titik berat dari daerah datar R itu adalah $(\bar{x},\bar{y})$, dimana

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L}$$

3.2. Soal-soal dan Penyelesaiannya

1. Tentukanlah letak titik berat dari luas daerah yang dibatasi oleh garis $3x + 4y = 24$, $x = 0$ dan $y = 0$ dengan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^8 \int_0^{3/4\,(8-x)} dy \, dx$$

$$= \int_0^8 3/4\,(8 - x)\, dx$$

$$= 3/4\,\left(8x - \frac{3x^2}{2}\right)\Big]_0^8$$

$$= 24 \text{ satuan kuadrat}$$

$$M_y = \int_0^8 \int_0^{3/4(8-x)} x \, dy \, dx = \int_0^8 3/4\,(8x - x^2)\, dx$$

$$= 1/4\,(12x^2 - x^3)\Big]_0^8 = 64$$

$$M_x = \int_0^8 \int_0^{3/4\,(8-x)} y\,dy\,dx = \int_0^8 \frac{y^2}{2} \Big]_0^{3/4\,(8-x)}$$

$$= \int_0^8 9/32\,(8-x)^2\,dx = 9/32 \int_0^8 (64 - 16x + x^2)\,dx$$

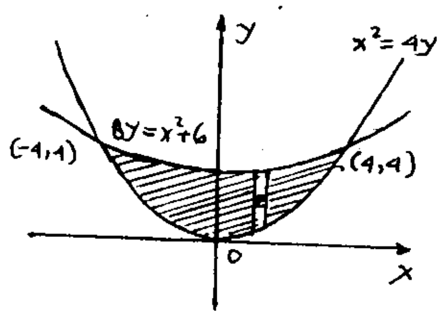
$$= 9/32\,(64x - 8x^2 + \frac{x^3}{3}) \Big]_0^8 = 48$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = 8/3 \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = 2$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x},\bar{y}) = (8/3\ ,\ 2)$

2. Tentukanlah letak titik berat dari luas daerah yang dibatasi oleh $x^2 = 4y$ dan $8y = x^2 + 16$ yang berada di kuadran pertama dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{4}}^{1/8\,(x^2+16)} dy\,dx$$

$$= \int_0^4 (2 - \frac{x^2}{8})\,dx$$

$$= (2x - \frac{x^3}{24}) \Big]_0^4$$

$= 16/3$ satuan kuadrat

$$M_y = \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{4}}^{1/8\,(x^2+16)} x\,dy\,dx = \int_0^4 (2x - \frac{x^3}{8})\,dx$$

$$= (x^2 - \frac{x^4}{32}) \Big]_0^4 = 8$$

$$M_x = \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{4}}^{1/8\,(x^2+16)} y\,dy\,dx = \int_0^4 \frac{y^2}{2} \Big]_{\frac{x^2}{4}}^{1/8\,(x^2+16)} dx$$

$$= \int_0^4 (2 + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128})\,dx = (2x + \frac{x^3}{12} - \frac{3x^5}{640}) \Big]_0^4$$

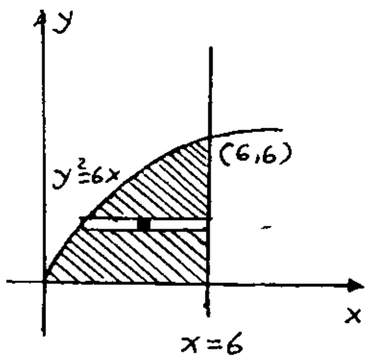
$= 128/5$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = 3/2 \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = 8/5$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x},\bar{y}) = (3/2\ ,\ 8/5)$

3. Tentukanlah letak titik berat dari luas daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh $y^2 = 6x$, $y = 0$ dan $x = 6$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^6 \int_{\frac{y^2}{6}}^{6} dx\, dy$$

$$= \int_0^6 \left(6 - \frac{y^2}{6}\right) dy$$

$$= \left(6y - \frac{y^3}{18}\right) \Big]_0^6$$

$$= 24 \text{ satuan kuadrat}$$

$$M_y = \int_0^6 \int_{\frac{y^2}{6}}^{6} x\, dx\, dy = \int_0^6 \frac{x^2}{2} \Big]_{\frac{y^2}{6}}^{6} dy = \int_0^6 \left(18 - \frac{y^4}{72}\right) dy$$

$$= \left(18y - \frac{y^5}{360}\right) \Big]_0^6 = 432/5$$

$$M_x = \int_0^6 \int_{\frac{y^3}{6}}^{6} y\, dx\, dy = \int_0^6 \left(6y - \frac{y^3}{6}\right) dy = \left(3y^2 - \frac{y^4}{24}\right) \Big]_0^6$$

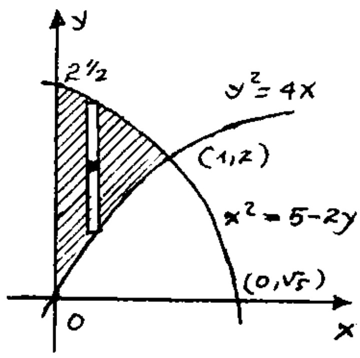
$$= 54$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = 18/5 \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = 9/4$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x},\bar{y}) = (\ 18/5\ ,\ 9/4\ )$

4. Tentukanlah letak titik berat dari luas daerah yang dibatasi oleh $y^2 = 4x$, $x^2 = 5 - 2y$ dan $x = 0$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



Titik potong kedua kurva adalah

$$y^2 = 4x \longrightarrow 4y^2 = 16x$$

$$x^2 = 5 - 2y \longrightarrow 4y^2 = (5 - x^2)^2$$

$$0 = 16x - (5 - x^2)^2$$

$$x^4 - 10x^2 - 16x + 25 = 0$$

$$(x - 1)(x^3 + x^2 - 9x - 25) = 0$$

$$x = 1 \longrightarrow y = 2$$

Titik potongnya adalah (1,2)

$$L = \int_0^4 \int_{2\sqrt{x}}^{1/2(5-x^2)} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(5/2 - \frac{x^2}{2} - 2x^{1/2}\right) dx = \left(\frac{5x}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{4x^{3/2}}{3}\right)\Big]_0^1$$

$= 1$ satuan kuadrat

$$M_y = \int_0^1 \int_{2\sqrt{x}}^{1/2(5-x^2)} x\, dy\, dx = \int_0^1 \left(\frac{5x}{2} - \frac{x^3}{2} - 2x^{3/2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{5x^2}{4} - \frac{x^4}{8} - \frac{4x^{5/2}}{5}\right)\Big]_0^1 = 13/40$$

$$M_x = \int_0^1 \int_{2\sqrt{x}}^{1/2(5-x^2)} y\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big]_{2\sqrt{x}}^{1/2(5-x^2)} dx$$

$$= \int_0^1 \left(25/8 - \frac{5x^2}{4} + \frac{x^4}{8} - 2x\right) = \left(\frac{25x}{8} - \frac{5x^3}{12} + \frac{x^5}{40} - x^2\right)\Big]_0^1$$

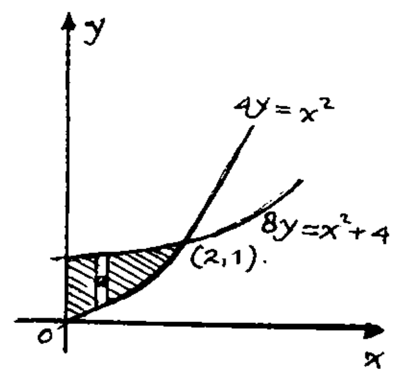
$= 26/15$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = 13/40 \text{ dan } \bar{y} = \frac{M_x}{L} = 26/15$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x}, \bar{y}) = (13/40 \; ; \; 26/15)$

5. Tentukanlah letak titik berat dari luas daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh $x^2 - 8y + 4 = 0$ dan $x^2 = 4y$ serta $x = 0$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



Titik potong kedua kurva adalah

$x^2 - 8y + 4 = 0 \longrightarrow 8y = x^2 + 4$

$x^2 = 4y \qquad \longrightarrow 8y = 2x^2$

$2x^2 = x^2 + 4$

$x = 4 \longrightarrow x = 2$ atau $x = -2$

Di kuadran pertama titik potongnya adalah (2,1)

$$L = \int_0^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{1/8\,(x^2+4)} dy\, dx = \int_0^2 (1/2 - \tfrac{x^2}{8})\, dx = (x/2 - \tfrac{x^3}{24}) \Big]_0^2$$

$= 2/3$ satuan kuadrat

$$M_y = \int_0^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{1/8\,(x^2+4)} x\, dy\, dx = \int_0^2 (x/2 - \tfrac{x^3}{8})\, dx = (\tfrac{x^2}{4} - \tfrac{x^4}{32}) \Big]_0^2$$

$= 1/2$

$$M_x = \int_0^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{1/8\,(x^2+4)} y\, dy\, dx = \int_0^2 \tfrac{y^2}{2} \Big]_{\frac{x^2}{4}}^{1/8\,(x+4)} dx$$

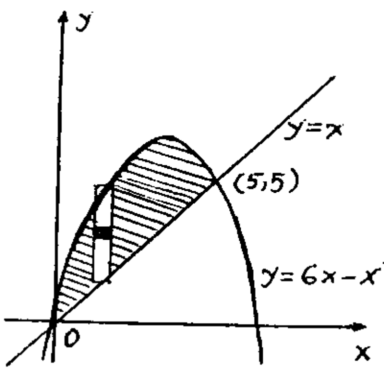
$$= \int_0^2 (1/8 + \tfrac{x^2}{16} - \tfrac{3x^4}{128})\, dx = (x/8 + \tfrac{x^3}{48} - \tfrac{3x^5}{640}) \Big]_0^2 = 4/15$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = 3/4 \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = 2/5$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x}, \bar{y}) = (3/4\, ,\, 2/5)$

6. **Carilah titik berat dari luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 6x - x^2$ dan garis $y = x$ dengan menggunakan integral lipat dua.**

Penyelesaian :



$$L = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} dy\, dx$$

$$= \int_0^5 (5x - x^2)\, dx$$

$$= \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big]_0^5$$

$$= 125/6 \text{ satuan kuadrat}$$

$$M_y = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} x\, dy\, dx = \int_0^5 (5x^2 - x^3)\, dx$$

$$= \left(\frac{5x^3}{4} - \frac{x^4}{4}\right) \Big]_0^5 = 625/12$$

$$M_x = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} y\, dy\, dx = \int_0^5 \frac{y^2}{2} \Big]_x^{6x-x^2} dx$$

$$= \int_0^5 1/2\, (35x^2 - 12x^3 + x^4)\, dx$$

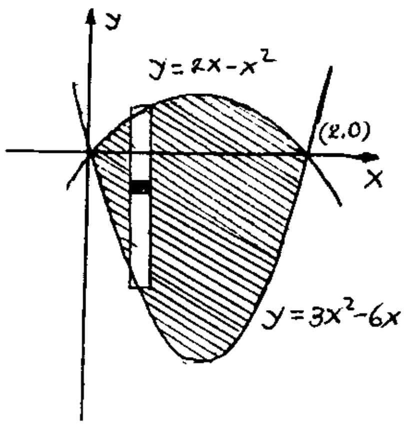
$$= 1/2 \left(\frac{35x^3}{3} - 3x^4 + \frac{x^5}{5}\right) \Big]_0^5 = 625/6$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = 5/2 \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = 5$$

Titik beratnya adalah $(x,y) = (5/2\ ,\ 5)$

7. Carilah letak titik berat dari luas daerah yang dibatasi oleh parabola-parabola $y = 2x - x^2$ dan $y = 3x^2 - 6x$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^2 \int_{3(x^2-2x)}^{2x-x^2} dy\, dx$$

$$= \int_0^2 (8x - 4x^2)\, dx$$

$$= (4x^2 - 4x^3) \Big]_0^2$$

$$= 16/3 \text{ satuan kuadrat}$$

$$M_y = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x\, dy\, dx = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\, dx$$

$$= \left(\frac{8x^3}{3} - x^4\right) \Big]_0^2 = 16/3$$

$$M_x = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y\, dy\, dx = \int_0^2 \frac{y^2}{2} \Big]_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dx$$

$$= \int_0^2 (-16x^2 + 4x^3 - 4x^4)\, dx = \left(-\frac{16x^3}{3} + x^4 - \frac{4x^5}{5}\right) \Big]_0^2$$

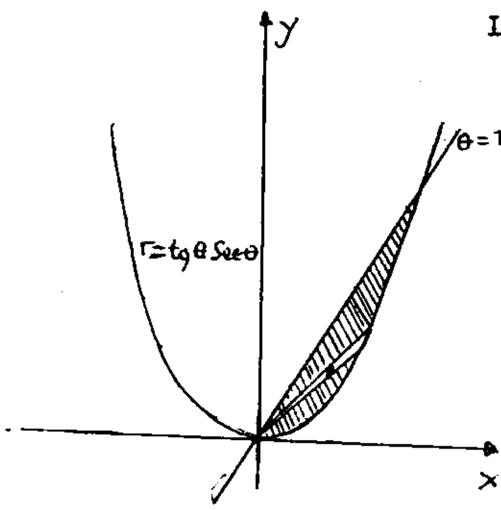
$$= -64/15$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = 1 \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = -4/5$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x}, \bar{y}) = (1\ , -4/5)$

8. Tentukanlah letak titik berat dari luas daerah yang dibatasi oleh $r = tg\,\theta\,sec\,\theta$ dan $\theta = \pi/3$ dengan menggunakan koordinat polar untuk integral lipat duanya.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^{\pi/3}\int_0^{tg\theta\,sec\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= 1/2 \int_0^{\pi/3} tg^2\theta\,sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 1/2 \int_0^{\pi/3} tg^2\theta\,d(tg\theta)$$

$$= 1/6\,tg^3\theta\,\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= 1/2\,\sqrt{3}\ \text{satuan kuadrat}$$

$$M_y = \int_0^{\pi/3}\int_0^{tg\theta\,sec\theta} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/3} \frac{r^3}{3}\cos\theta\,\Big]_0^{tg\theta\,sec\theta} d\theta$$

$$= 1/3\int_0^{\pi/3} tg^3\theta\,sec^2\theta\,d\theta = 1/3\int_0^{\pi/3} tg^3\theta\,d(tg\theta)$$

$$= 1/12\,(tg^4\theta)\,\Big]_0^{\pi/3} = 3/4$$

$$M_x = \int_0^{\pi/3}\int_0^{tg\theta\,sec\theta} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/3} \frac{r^3}{3}\sin\theta\,\Big]_0^{tg\theta\,sec\theta} d\theta$$

$$= 1/3\int_0^{\pi/3} tg^4\theta\,sec^2\theta\,d\theta = 1/3\int_0^{\pi/3} tg^4\theta\,d(tg\theta)$$

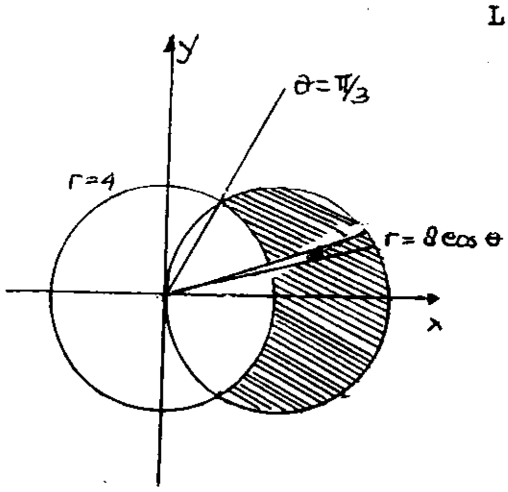
$$= 1/15\,(tg^5\theta)\,\Big]_0^{\pi/3} = 3/5\,\sqrt{3}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = 1/2\,\sqrt{3} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = 6/5$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x},\bar{y}) = (1/2\,\sqrt{3}\ ,\ 6/5)$

9. Tentukanlah letak titik berat dari luas daerah di kuadran pertama dari daerah yang berada di luar lingkaran $r = 4$ dan di dalam lingkaran $r = 8\cos\theta$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^{\pi/3}\int_4^{8\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} (32\cos^2\theta - 8)\,d\theta$$

$$= (16\sin\theta\cos\theta + 8\theta)\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= 8(\sin2\theta + \theta)\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= 4/3\,(3\sqrt{3} + 2\pi) \text{ satuan kuadrat}$$

$$M_y = \int_0^{\pi/3}\int_4^{8\cos\theta} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/3} \frac{r^3}{3}\cos\theta\Big]_4^{8\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{512}{3}\int_0^{\pi/3}\cos^4\theta\,d\theta - \frac{64}{3}\int_0^{\pi/3}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \left\{\frac{512}{3}\left(1/4\cos^3\theta\sin\theta + 3/8\cos\theta\sin\theta + \frac{3\theta}{8}\right) - \frac{64\sin\theta}{3}\right\}\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= 8/3\,(8\pi + 3\sqrt{3})$$

$$M_x = \int_0^{\pi/3}\int_4^{8\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/3}\frac{r^3}{3}\sin\theta\Big]_4^{8\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3}\left(\frac{512}{3}\cos^3\theta\sin\theta - \frac{64\cos\theta}{3}\right)d\theta$$

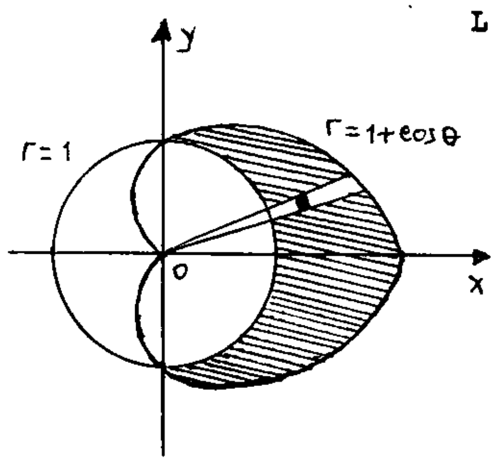
$$= \left(-\frac{128}{3}\cos^4\theta + \frac{64\cos\theta}{3}\right)\Big]_0^{\pi/3} = 88/3$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = \frac{16\pi + 6\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = \frac{22}{2\pi + 3\sqrt{3}}$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\dfrac{16\pi + 6\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}, \dfrac{22}{2\pi + 3\sqrt{3}}\right)$

10. Carilah titik berat dari luas daerah yang berada di luar lingkaran $r = 1$ dan di dalam kardioida $r = 1 + \cos\theta$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2}{2} \Big]_{1}^{1+\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1/2\, (2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \left(\sin\theta + \frac{\sin\theta\, \cos\theta}{4} + \theta/4\right) \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 2 + \pi/4 \text{ satuan kuadrat}$$

$$M_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta$$

$$= 1/3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\, d\theta$$

$$= 1/3 \left(\frac{3\theta}{2} + \frac{3\sin 2\theta}{4} + 3\sin\theta - \sin^3\theta + \frac{3\theta}{8} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32}\right) \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{15\pi + 32}{24}$$

$$M_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$= 1/3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\, \sin\theta\, d\theta$$

$$= 1/3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -(3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\, d(\cos\theta)$$

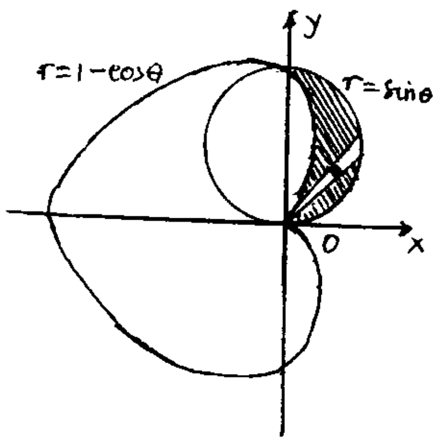
$$= -1/3 \left(\underline{3\cos^2\theta} + \cos\theta + \underline{\cos^4\theta}\right) \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = \frac{15\ \ + 32}{6(\ \ + 8)} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = 0$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{15\ \ + 32}{6(\ \ + 8)},\ 0 \right)$

11. Carilah titik berat dari luas daerah yang berada di dalam lingkaran $r = \sin\theta$ dan di luar kardioida $r = 1 - \cos\theta$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} r\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \cos^2\theta)\ d\theta$$

$$= \left(\sin\theta - \frac{\sin\theta\ \cos\theta}{2} - \theta/2\right)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 1 - \pi/4 \quad \text{satuan kuadrat}$$

$$M_y = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} r^2 \cos\theta\ dr\ d\theta$$

$$= 1/3\int_0^{\pi/2} (\sin^3\theta + 3\cos\theta - 1 - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\cos\theta\ d\theta$$

$$= \frac{15\pi - 44}{48}$$

$$M_x = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} r^2 \sin\theta\ dr\ d\theta$$

$$= 1/3\int_0^{\pi/2} (\sin^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\sin\theta\ d\theta$$

$$= \frac{3\pi - 4}{48}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L} = \frac{15\pi - 44}{12(4 - \pi)} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L} = \frac{3\pi - 4}{12(4 - \pi)}$$

Titik beratnya adalah $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{15\pi - 44}{12(4 - \pi)},\ \frac{3\pi - 4}{12(4 - \pi)}\right)$

BAB IV

MOMEN INERSIA DENGAN INTEGRAL LIPAT DUA

4.1. Definisi

Momen inersia (momen kedua) dari suatu daerah datar R dengan luasnya $L = \iint_R dL$ terhadap sumbu x dan sumbu y masing-masing adalah :

$$I_x = \iint_R y^2 \, dL \quad \text{dan} \quad I_y = \iint_R x^2 \, dL$$

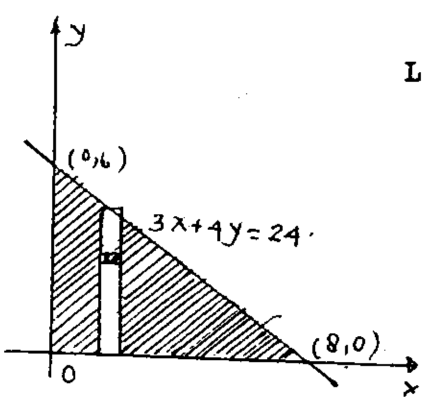
Sedangkan momen inersia polar (momen inersia terhadap suatu garis yang melalui titik asal dan tegak lurus dengan bidang luasan) dari suatu daerah datar R diberikan oleh :

$$I_o = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) \, dL$$

4.2. Soal-soal dan Penyelesaiannya

1. Tentukanlah momen inersia terhadap sumbu x dan y dari luas daerah yang dibatasi oleh $3x + 4y = 24$, $x = 0$ dan $y = 0$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^8 \int_0^{3/4\,(8-x)} dy\, dx$$

$$= \int_0^8 3/4\,(8-x)\, dx$$

$$= 3/4\,\left(8x - \frac{3x^2}{2}\right)\Big]_0^8$$

$$= 24 \text{ satuan kuadrat}$$

$$I_x = \int_0^8 \int_0^{3/4\,(8-x)} y^2 \, dy \, dx \;=\; 1/3 \int_0^8 y^3 \Big]_0^{3/4\,(8-x)} dx$$

$$= 9/64 \int_0^8 (8-x)^3 \, dx = -9/64 \int_0^8 (8-x)^3 \, d(8-x)$$

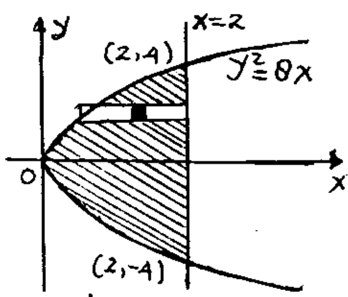
$$= -9/256 \;\; (8-x)^4 \Big]_0^8 = 144 = 6L$$

$$I_y = \int_0^8 \int_0^{3/4\,(8-x)} x^2 \, dy \, dx \;=\; \int_0^8 x^2 y \Big]_0^{3/4\,(8-x)} dx$$

$$= \int_0^8 \left(6x^2 - \frac{3x^3}{4}\right) dx = \left(2x^3 - \frac{3x^4}{16}\right) \Big]_0^8 = 256 = \frac{32L}{3}$$

2. Temtukanlah momen inersia terhadap sumbu x dan y dari luas daerah yang dipotong dari parabola $y^2 = 8x$ oleh latus rektumnya dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$y^2 = 8x$

$= 4(2x)$

Titik fokusnya $F(2,0)$

Latus rektumnya adalah $x = 2$

$$L = \int_{-4}^{4} \int_{\frac{y^2}{8}}^{2} dx \, dy = \int_{-4}^{4} \left(2 - \frac{y^2}{8}\right) dy = \left(2y - \frac{y^3}{24}\right) \Big]_{-4}^{4}$$

$= 32/3$ satuan **kuadrat**

$$I_x = \int_{-4}^{4} \int_{\frac{y^2}{8}}^{2} y^2 \, dx \, dy = \int_{-4}^{4} xy^2 \Big]_{\frac{y^2}{8}}^{2} dy$$

$$= \int_{-4}^{4} \left(2y^2 - \frac{y^4}{8}\right) dy = \left(\frac{2y^3}{3} - \frac{y^5}{40}\right) \Big]_{-4}^{4}$$

$= 512 = 16/5 \;\; L$

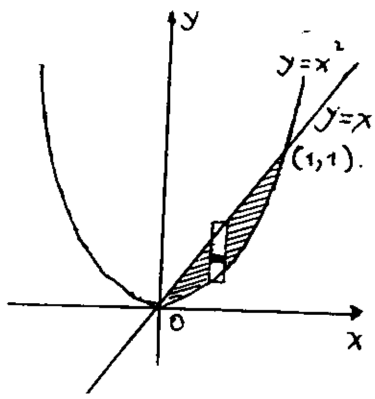
$$I_y = \int_{-4}^{4}\int_{\frac{y^2}{8}}^{2} x^2\,dx\,dy = 1/3\int_{-4}^{4} x^3 \Big]_{\frac{y^2}{8}}^{2} dy$$

$$= 1/3\int_{-4}^{4} (8 - \frac{y^6}{512})\,dy = 1/3\ (8y - \frac{y^7}{4096})\Big]_{-4}^{4}$$

$$= 384/21 = 12/7\ L$$

3. Tentukanlah momen inersia terhadap sumbu x dan y dari luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis lurus $y = x$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big]_0^1$$

$$= 1/6 \text{ satuan kuadrat}$$

$$I_x = \int_0^1\int_{x^2}^{x} y^2\,dy\,dx = 1/3\int_0^1 y^3\Big]_{x^2}^{x} dx$$

$$= 1/3\int_0^1 (x^3 - x^6)\,dx = 1/3\ (\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7})\Big]_0^1$$

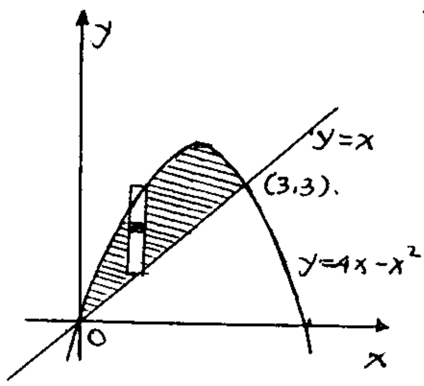
$$= 1/28 = 3/14\ L$$

$$I_y = \int_0^1\int_{x^2}^{x} x^2\,dy\,dx = \int_0^1 x^2y\Big]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx$$

$$= (\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5})\Big]_0^1 = 1/20 = 3/10\ L$$

4. Tentukanlah momen inersia dari sumbu x dan y dari luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 4x - x^2$ dan garis $y = x$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelsaian :



$$L = \int_0^3 \int_x^{4x-x^2} dy\, dx$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)\, dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big]_0^3$$

= 9/2 satuan kuadrat

$$I_x = \int_0^3 \int_x^{4x-x^2} y^2\, dy\, dx = 1/3 \int_0^3 \left\{ (4x - x^2)^3 - x^3 \right\} dx$$

$$= 1/3 \int_0^3 (63x^3 - 48x^4 + 12x^5 - x^6)\, dx$$

$$= 1/3 \left(\frac{63x^4}{4} - \frac{48x^5}{5} + 2x^6 - \frac{x^7}{7} \right) \Big]_0^3$$

$= 431/140 = 459/70$ L

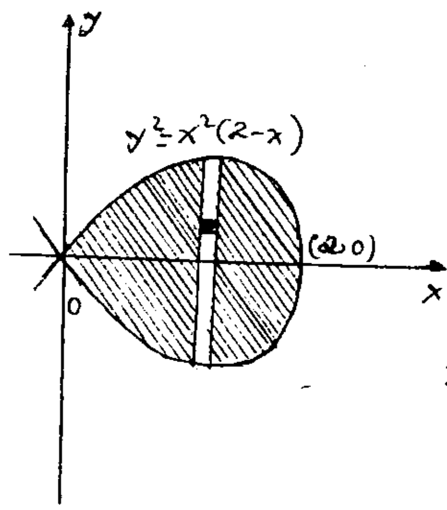
$$I_y = \int_0^3 \int_x^{4x-x^2} x^2\, dy\, dx = \int_0^3 x^2 y \Big]_x^{4x-x^2} dx$$

$$= \int_0^3 (3x - x^4)\, dx = \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big]_0^3$$

$= 243/20 = 27/10$ L

5. Carilah I_x, I_y dan I_o dari luas daerah yang berada dalam loop $y^2 = x^2(2 - x)$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^2 \int_{-x\sqrt{2-x}}^{x\sqrt{2-x}} dy\, dx$$

$$= \int_0^2 2x\sqrt{2-x}\, dx$$

Misalkan : $2 - x = z^2$

$dx = 2z\, dz$

$$L = -4\int_{\sqrt{2}}^{0} (2 - z^2)z^2\, dz$$

$$= -4\int_{\sqrt{2}}^{0} (2z^2 - z^4)\, dz$$

$$= -4\left(\frac{2z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right)\Big]_{\sqrt{2}}^{0}$$

$$= \frac{32\sqrt{2}}{15} \text{ satuan kuadrat}$$

$$I_x = \int_0^2 \int_{-x\sqrt{2-x}}^{x\sqrt{2-x}} y^2\, dy\, dx = 2/3\int_0^2 y^3 \Big]_0^{x\sqrt{2-x}} dx$$

$$= 2/3\int_0^2 x^3(2 - x)^{3/2} dx = -4/3\int_{\sqrt{2}}^{0} (2 - z^2)^3 z^4\, dz$$

$$= -4/3\left(\frac{8z^5}{5} - \frac{12z^7}{7} + \frac{2z^9}{3} - \frac{z^{11}}{11}\right)\Big]_{\sqrt{2}}^{0}$$

$$= \frac{2048\sqrt{2}}{231} = 64/231\ L$$

$$I_y = \int_0^2 \int_{-x\sqrt{2-x}}^{x\sqrt{2-x}} x^2\, dy\, dx = 2\int_0^2 x^3\sqrt{2-x}\, dx$$

$$= -4\int_{\sqrt{2}}^{0} (2 - z^2)^3 z^2\, dz$$

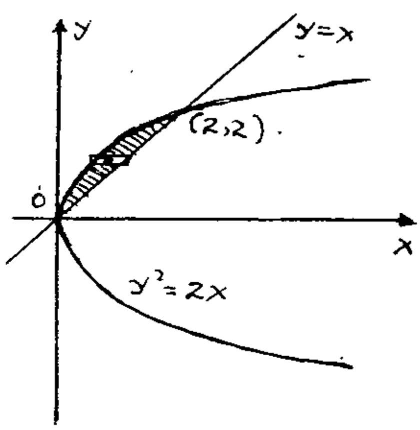
$$I_y = -4\left(\frac{8z^3}{3} - \frac{12z^5}{5} + \frac{6z^7}{7} - \frac{z^9}{9} \right) \Big]_{\sqrt{2}}^{0}$$

$$= \frac{1024\sqrt{2}}{315} = 32/21 \ L$$

$$I_o = I_x + I_y = (64/231 + 32/21)\ L = 416/231 \ L$$

6. Carilah momen inersia polar dari daerah di bidang XOY yang yang dibatasi oleh parabola $y^2 = 2x$ dan garis lurus $y = x$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{2}}^{y} dx\ dy$$

$$= \int_0^2 \left(y - \frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) \Big]_0^2$$

$= 2/3$ satuan kuadrat

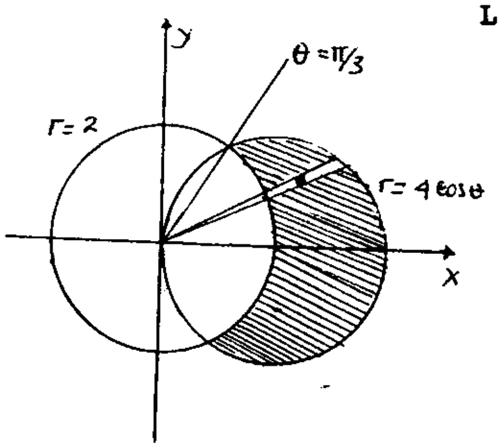
$$I_o = \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{2}}^{y} (x^2 + y^2)\ dx\ dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big]_{\frac{y^2}{2}}^{y} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{y^6}{24} + y^3 - \frac{y^4}{2} \right) dy = \left(\frac{y^4}{3} - \frac{y^5}{10} - \frac{y^7}{168} \right) \Big]_0^2$$

$$= 48/35 = 72/35 \ L$$

7. Carilah I_x, I_y dan I_o untuk luas daerah di kuadran pertama yang berada di luar lingkaran $r = 2$ dan di dalam lingkaran $r = 4\cos\theta$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= 1/2\int_0^{\pi/3} r^2 \Big]_2^{4\cos\theta} d\theta$$

$$= 1/2\int_0^{\pi/3} (16\cos^2\theta - 4)\,d\theta$$

$$= 2(2\sin\theta\cos\theta + \theta)\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3} \text{ satuan kuadrat}$$

$$I_x = \int_0^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta} y^2\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta} r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$= 1/4\int_0^{\pi/3}\left\{(4\cos\theta)^4 - 2^4\right\}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/3}(16\cos^4\theta - 1)\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/3}(16\cos\theta - 1)(1 - \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/3}(-1 + \cos^2\theta + 16\cos^4\theta - 16\cos^6\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{6} \qquad = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{(2\pi + 3\sqrt{3})}\,L$$

$$I_y = \int_0^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta} x^2\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta} r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$= 1/4\int_0^{\pi/3} r^4\cos^2\theta \Big]_2^{4\cos\theta} d\theta$$

$$I_y = 1/4 \int_0^{\pi/3} (256\cos^6\theta - 16\cos^2\theta)\ d\theta$$

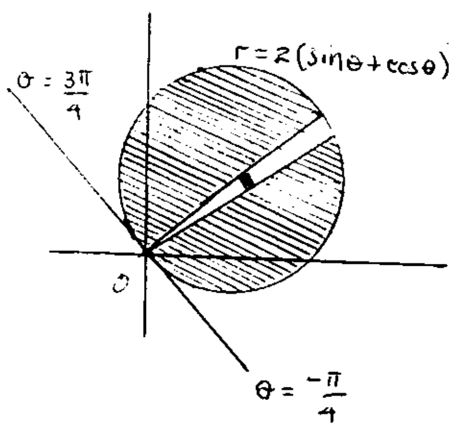
$$= 4 \int_0^{\pi/3} (64\cos^6\theta - \cos^2\theta)\ d\theta$$

$$= \frac{12\pi + 11\sqrt{3}}{2} = \frac{3(12\pi + 11\sqrt{3})}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}\ L$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{20 + 21\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}}\ L$$

8. Carilah I_x dan I_y dari luas daerah yang berada di dalam lingkaran $r = 2(\sin\theta + \cos\theta)$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2(\sin\theta + \cos\theta)} r\ dr\ d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} 2(\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\ d\theta$$

$$= 2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (1 + \sin 2\theta)\ d\theta$$

$$= (2\theta - \cos 2\theta) \Big]_{-\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= 2\pi \text{ satuan kuadrat}$$

$$I_x = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2(\sin\theta + \cos\theta)} y^2\ r\ dr\ d\theta = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2(\sin\theta + \cos\theta)} r^3 \sin\theta\ dr\ d\theta$$

$$= 4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (4\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta + 1)\sin^2\theta\ d\theta$$

$$= 3\pi = \frac{3\pi}{2}\ L$$

$$I_y = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2(\sin\theta + \cos\theta)} x^2\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2(\sin\theta + \cos\theta)} r^3 \cos^2\theta \; dr\, d\theta$$

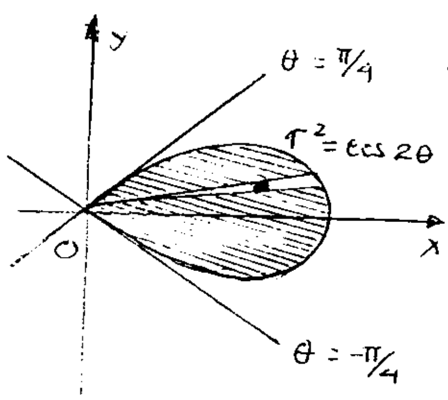
$$= 1/4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} r^4 \cos\theta \Big]_0^{2(\sin\theta + \cos\theta)} d\theta$$

$$= 4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (4\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta + 1) \cos^2\theta \; d\theta$$

$$= 3\pi = \frac{3\pi}{2} \; L$$

9. Carilah momen inersia terhadap sumbu x dan y dari sebuah loop dari $r^2 = \cos 2\theta$ dengan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta$$

$$= 1/2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta \; d\theta$$

$$= 1/4\, (\sin 2\theta) \Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= 1/2 \; \text{satuan kuadrat}$$

$$I_x = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^3 \sin\theta \; dr\, d\theta = 1/4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^4 \sin^2\theta \Big]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 1/4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \sin^2\theta \; d\theta = 1/16 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos^2 2\theta\, (1 - \cos 2\theta)\; d2\theta$$

$$= 1/16 \left(\frac{\cos 2\theta \sin 2\theta}{2} + \theta - \frac{\cos^2 2\theta \sin 2\theta}{3} - \frac{2\sin 2\theta}{3} \right) \Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= \frac{3\pi - 8}{96} = \frac{3\pi - 8}{48} \; L$$

$$I_y = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^3\cos^2\theta \, dr\, d\theta = 1/4\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 1/16\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, (1 + \cos 2\theta) \, d(2\theta)$$

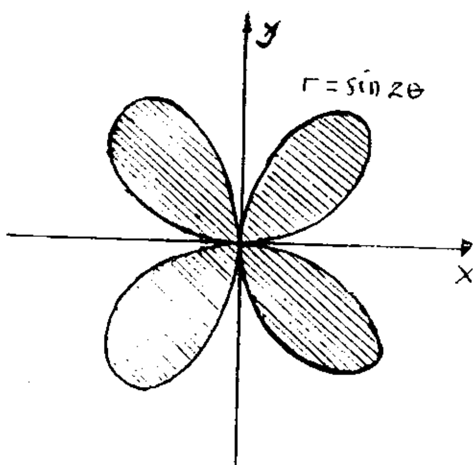
$$= 1/16\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos^2 2\theta + \cos^3 2\theta) \, d(2\theta)$$

$$= 1/16 \left(\frac{\cos 2\theta \sin 2\theta}{2} + \theta + \frac{\cos 2\theta \sin 2\theta}{3} + \frac{2\sin 2\theta}{3}\right)$$

$$= \frac{3\pi - 8}{96} = \frac{3\pi - 8}{48} \quad L$$

10. Carilah I_o dari luas daerah loop $r = \sin 2\theta$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sin 2\theta} r \, dr\, d\theta$$

$$= 1/2\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta \, d\theta$$

$$= 1/4\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta \, d(2\theta)$$

$$= 1/4 \left(-\frac{\sin 2\theta \cos 2\theta}{2} + \theta\right) \Big]_0^{2\pi}$$

$$= 1/2 \text{ satuan kuadrat}$$

$$I_o = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sin 2\theta} r^3 \, dr\, d\theta = 1/4 \int_0^{2\pi} \sin^4 2\theta \, d\theta$$

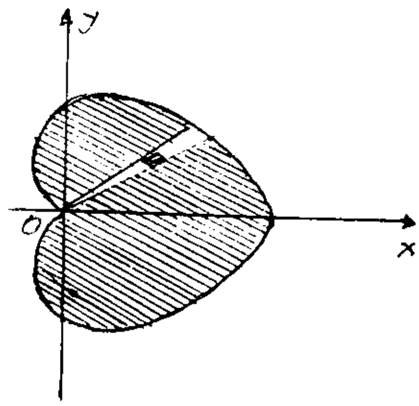
$$= 1/8 \int_0^{2\pi} \sin^4 2\theta \, d(2\theta)$$

$$= 1/8 \left(-\sin 2\theta \cos 2\theta - 3\sin 2\theta \cos 2\theta + 3\theta\right) \Big]_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi/6 = 3/8 \quad L$$

11. Carilah I_o dari luas daerah yang berada di dalam kardioida $r = 1 + \cos\theta$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat polar.

Penyelesaian :



$$L = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= 1/2\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 1/2\left(\theta + 2\sin\theta + \frac{\sin\theta\cos\theta}{2} + \theta/2\right)\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi/2 \text{ satuan kuadrat}$$

$$I_o = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta$$

$$= 1/4\int_0^{2\pi}(1 + 4\cos\theta + 6\cos^2\theta + 4\cos^3\theta + \cos^4\theta)\,d\theta$$

$$= 1/4\left(\theta + 4\sin\theta + 3\sin\theta\cos^3\theta + 3\theta + \cos^2\theta\sin\theta + 3\cos\theta + \frac{\cos^3\theta\sin\theta}{4} + \frac{3\cos\theta\sin\theta}{8} + 3\theta/8\right)\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{35}{16} = \frac{35}{24}L$$

BAB V

VOLUME DI BAWAH SUATU PERMUKAAN DENGAN INTEGRAL LIPAT DUA

5.1. Volume dalam Koordinat Siku-siku

Jika f suatu fungsi dua variabel yang kontinu pada suatu daerah tertutup R yang dibatasi oleh suatu kurva tertutup yang mulus bagian demi bagian di bidang XOY, dan $f(x,y) \geq 0$ untuk semua (x,y) di dalam daerah R, maka volume V dari benda pejal di bawah permukaan $z = f(x,y)$ dan di atas daerah R didefinisikan sebagai nilai integral lipat dua dari $f(x,y)$ pada R, yaitu :

$$V = \iint_R z \, dL = \iint_R f(x,y) \, dL$$

Untuk menghitung volume ini juga digunakan integral berulang sebagai berikut :

$$V = \iint_R f(x,y) \, dL = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) \, dy \, dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) \, dy \right) dx$$

atau

$$V = \iint_R f(x,y) \, dL = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) \, dx \, dy$$

$$= \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) \, dx \right) dy$$

5.2. Volume dalam Koordinat Silinder.

Kadang-kadang untukfungsi tertentu volume benda pejal yang berada di bawah permukaan $z = f(x,y)$ lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat silinder. Dengan mengingat hubungan koordinat silinder dengan koordinat siku-siku, yaitu $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dan $z = z$, maka rumus volume dalam koordinat silender adalah sebagai berikut :

$$V = \iint_R z \, dL = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} z \, r \, dr \, d\theta$$

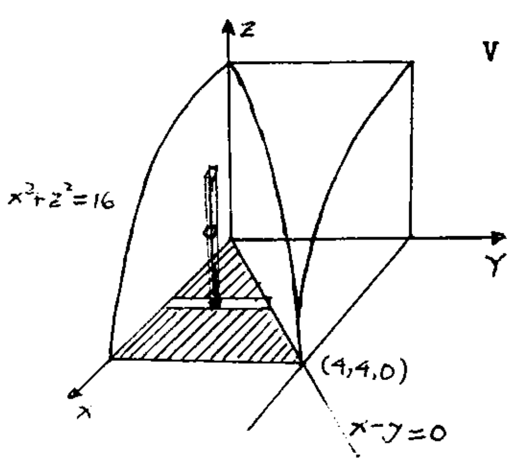
$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(x,y) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} F(r,\theta) \, r \, dr \, d\theta$$

5.3. Soal-soal dan Penyelesaiannya

1. Hitunglah volume suatu benda yang dibatasi oleh silinder $x^2 + z^2 = 16$, $z = 0$, $x - y = 0$ dan $y = 0$ dengan menggunakan integrala lipat dua.

   Penyelesaian :



$$V = \int_0^4 \int_0^x z \, dy \, dx$$

$$= \int_0^4 \int_0^x \sqrt{16 - x^2} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^4 x\sqrt{16 - x^2} \, dx$$

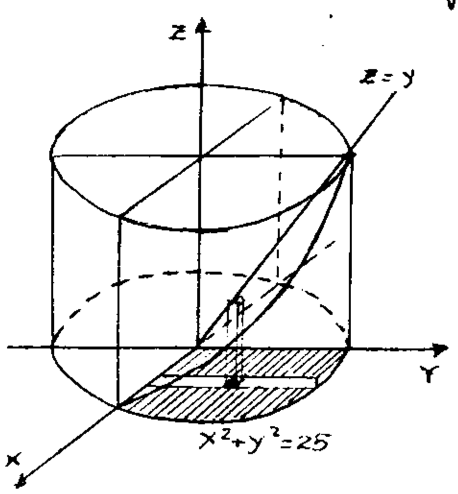
$$V = -1/2 \int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\; d(16 - x^2)$$

$$= -1/3 \; (16 - x^2)^{3/2} \Big]_0^4$$

$$= 64/3 \text{ satuan kubik}$$

2. Hitunglah volume dalam ruang pertama yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 25$ dan bidang $y = z$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$V = \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25 - x^2}} z \; dy \; dx$$

$$= \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25 - x^2}} y \; dy \; dx$$

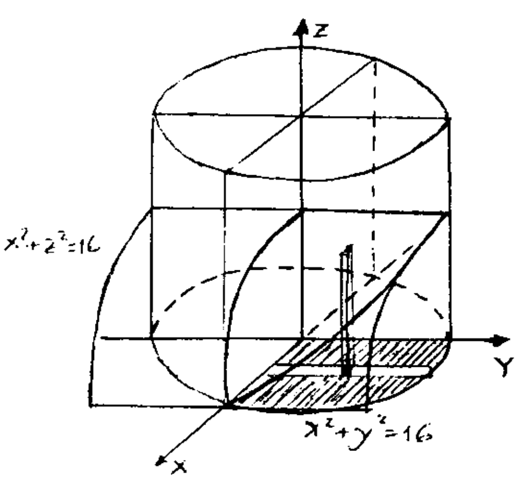
$$= 1/2 \int_0^5 (25 - x^2) \; dx$$

$$= 1/2 \; (25x - \frac{x^3}{3}) \Big]_0^5$$

$$= 125/3 \text{ satuan kubik}$$

3. Carilah volume persekutuan dari silinder-silinder $x^2 + y^2 = 16$ dan $x^2 + z^2 = 16$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



Volume yang akan dicari adalah 8 kali volume yang terlukis pada gambar di sebelah, sehingga volumenya adalah :

$$V = 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16 - x^2}} z \; dy \; dx$$

$$V = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2}\ dy\ dx$$

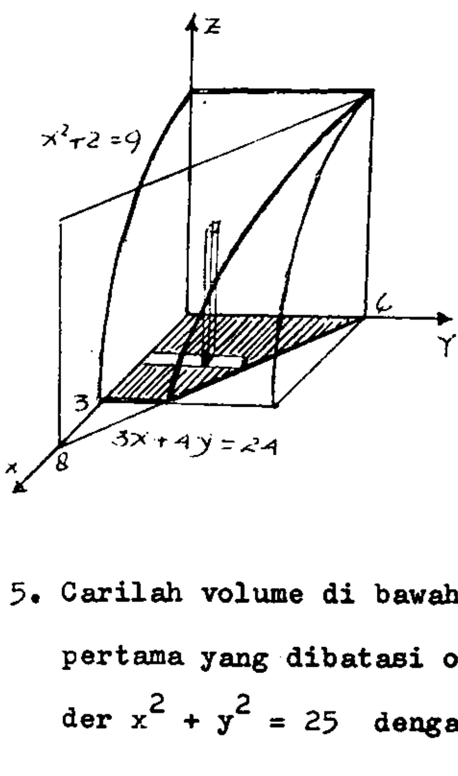
$$= 8\int_0^4 (16 - x^2)\ dx$$

$$= 8\ (16x - \frac{x^3}{3})\Big]_0^4$$

$$= 1024/3 \text{ satuan kubik}$$

4. Carilah volume di ruang pertama dari suatu benda yang dibatasi oleh $x^2 + z = 9$, $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$ dan dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$V = \int_0^3 \int_0^{3/4\,(8-x)} z\ \ dy\ dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{3/4\,(8-x)} (9-x^2)\ dy\ dx$$

$$= 3/4 \int_0^3 (72-9x-8x^2+ x^3)\ dx$$

$$= 3/4\ (72x-\frac{9x^2}{2}-\frac{8x^3}{3} + \frac{x^4}{4})\Big]_0^3$$

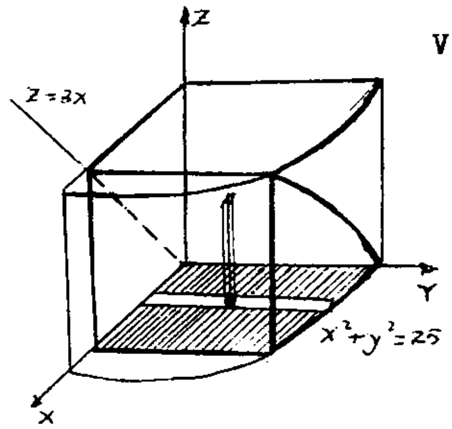
$$= 1485/16 \text{ satuan kubik}$$

5. Carilah volume di bawah $z = 3x$ dan di atas daerah ruang pertama yang dibatasi oleh $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$ dan silinder $x^2 + y^2 = 25$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :

$$V = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} z\ \ dy\ dx$$

$$= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} 3x\ \ dy\ dx$$



$$V = 3\int_0^4 x\sqrt{25 - x^2}\ dx$$

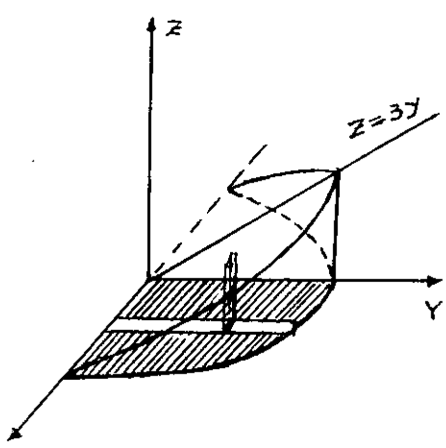
$$= -3/2\int_0^4 \sqrt{25 - x^2}\ d(25 - x^2)$$

$$= -(25 - x^2)^{3/2}\ \Big]_0^4$$

$$= 98 \text{ satuan kubik}$$

6. Carilah volume benda yang berada di atas bidang $z = 0$ dan di bawah bidang $z = 3y$ dari silender $4x^2 + y^2 = 16$. dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$V = 2\int_0^2 \int_0^{\sqrt{16 - 4x^2}} z\ dy\ dx$$

$$= 2\int_0^2 \int_0^{\sqrt{16 - 4x^2}} 3y\ \ dy\ dx$$

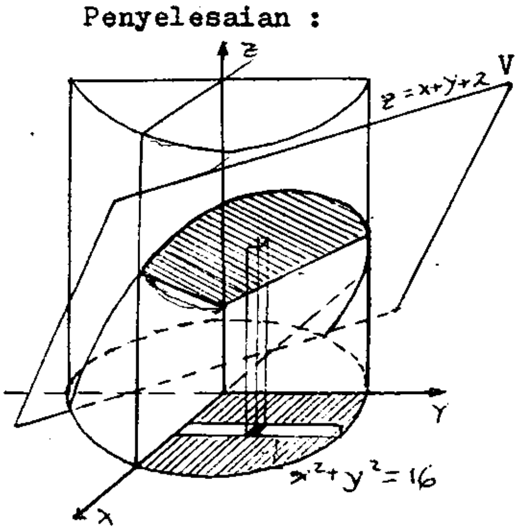
$$= 3\int_0^2 (16 - 4x^2)\ dx$$

$$= 12\ (4x - \frac{x^3}{3})\ \Big]_0^2$$

$$= 64 \text{ satuan kubik}$$

7. Carilah volume di ruang pertama antara bidang-bidang $z = 0$ dan $z = x + y + 2$ serta di dalam silinder $x^2 + y^2 = 16$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$V = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16 - x^2}} z\ \ dy\ dx$$

$$= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16 - x^2}} (x + y + 2)\ dy\ dx$$

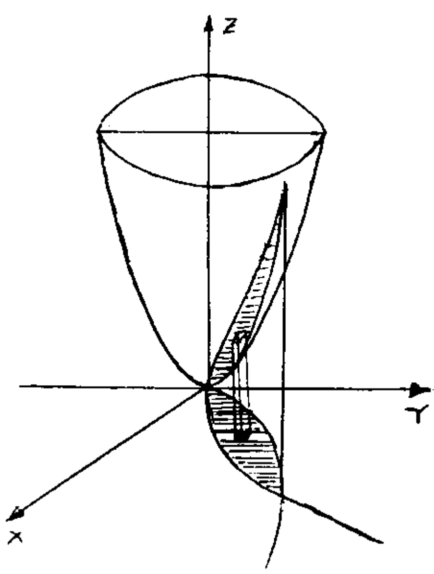
$$= \int_0^4 (x\sqrt{16-x^2} + 8 - \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{16-x^2})dx$$

$$V = \left\{-1/3\,(16 - x^2)^{3/2} + 8x - \frac{x^3}{6} + x\sqrt{16 - x^2} + \arc\sin\frac{x}{4}\right\}\Big]_0^4$$

$$= \frac{128 + 24\pi}{3} \text{ satuan kubik}$$

8. Carilah volume suatu benda yang bagian atasnya dibatasi oleh parabolaida $x^2 + 4y^2 = z$, bagian bawah oleh bidang $z = 0$ dan kiri-kanan oleh silinder-silinder $y^2 = x$ dan $y = x^2$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} z \; dy\; dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)\; dy\; dx$$

$$= \int_0^1 (x\,y + \frac{4y^3}{3}) \Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 (x^{5/2} + \frac{4x^{3/2}}{3} - x^4 - \frac{4x^6}{3})\; dx$$

$$= (\frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{8x^{5/2}}{15} - \frac{x^5}{5} - \frac{4x^7}{21})\Big]_0^1$$

$$= 3/7 \text{ satuan kubik}$$

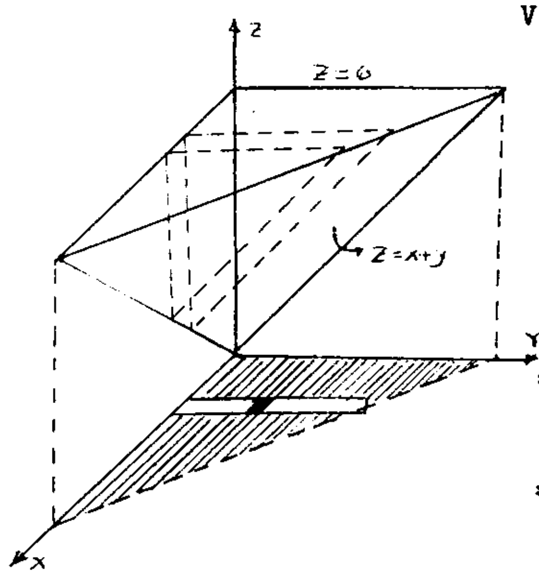
9. Carilah volume dari suatu benda yang dibatasi oleh bidang $z = x + y$, $z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :

$$V = \int_0^6 \int_0^{6-x} (z_1 - z_2)\; dy\; dx$$

$$= \int_0^6 \int_0^{6-x} (6 - x\,y)\; dy\; dx$$

$$= \int_0^6 (6y - xy - \frac{y^2}{2}) \Big]_0^{6-x} dx$$



$$V = \int_0^6 \left\{(6-x) - \frac{(6-x)}{2}\right\} (6-x)\, dx$$

$$= \int_0^6 \frac{(6-x)^2}{2}\, dx$$

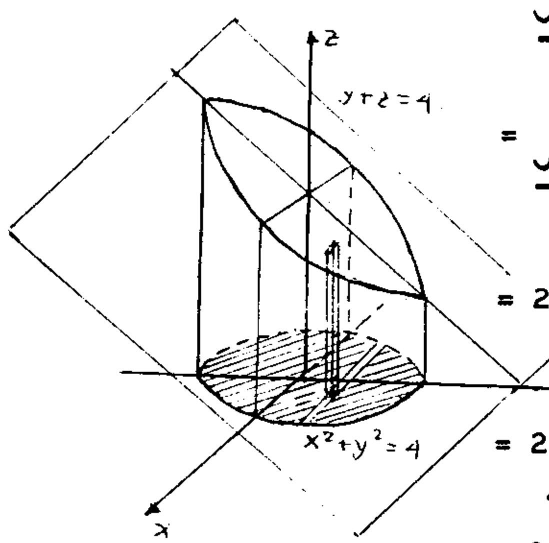
$$= -1/2 \int_0^6 (6-x)^2\, d(6-x)$$

$$= -1/6\,(6-x)^3 \Big]_0^6$$

$= 36$ satuan kuadrat

10. Tentukanlah volume silinder $x^2 + y^2 = 4$ yang terpotong oleh bidang-bidang $y + z = 4$ dan $z = 0$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} z\; dx\, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\, dx\, dy$$

$$= 2 \int_{-2}^{2} (4x - xy) \Big]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= 2 \int_{-2}^{2} (4\sqrt{4-y^2} - y\sqrt{4-y^2})\; dy$$

$$= 8 \int_{-2}^{2} \sqrt{4-y^2}\, dy - 4 \int_{-2}^{2} y\sqrt{4-y^2}\; dy$$

$$= 8\left(\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \frac{4 \arcsin y/2}{2}\right) \Big]_{-2}^{2}$$

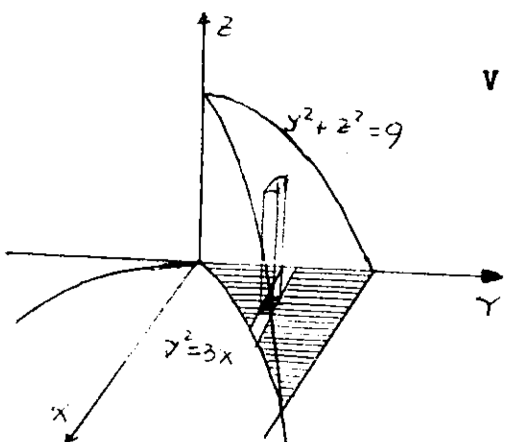
$$+ \int_{-2}^{2} \sqrt{4-y^2}\; d(4-y^2)$$

$$V = \left\{ 4y\sqrt{4-y^2} + 16 \text{ arc sin } y/2 + (4-y^2)^{3/2} \right\} \Big]_{-2}^{2}$$

$= 16\pi$ satuan kubik...

11. Carilah volume di ruang pertama di dalam silinder dengan persamaannya $y^2 + z^2 = 9$ dan di luar parabolaida $y^2 = 3x$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$V = \int_0^3 \int_0^{y^2/3} z \, dx \, dy$$

$$= \int_0^3 \int_0^{y^2/3} \sqrt{9-y^2} \, dx \, dy$$

$$= 1/3 \int_0^3 y^2 \sqrt{9-y^2} \, dy$$

Misalkan : $y = 3\sin\theta \dashrightarrow dy = 3\cos\theta \, d\theta$, maka

$$V = 1/3 \int_0^{\pi/2} 9\sin^2\theta \; 3\cos\theta \; 3\cos\theta \, d\theta$$

$$= 27/4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \, d\theta$$

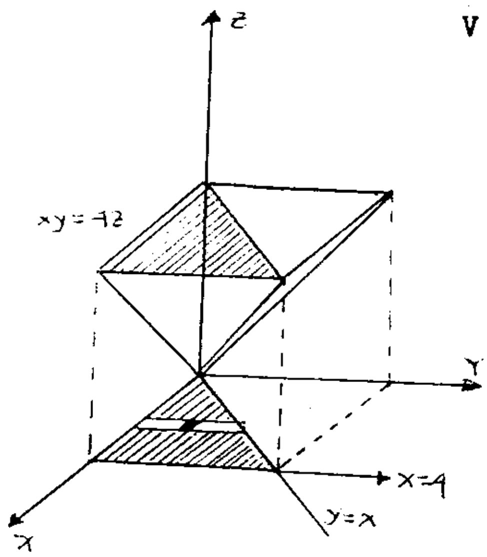
$$= 27/8 \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d(2\theta)$$

$$= 27/8 \left(-\frac{\sin 2\theta \cos 2\theta}{2} + \theta \right) \Big]_0^{\pi/2}$$

$= 27/16\,\pi$ satuan kubik

12. Carilah volume suatu benda yang berada di ruang pertama yang dibatasi oleh xy = 4z, y = x dan x = 4 dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$V = \int_0^4 \int_0^x z \, dy \, dx$$

$$= \int_0^4 \int_0^x \frac{xy}{4} \, dy \, dx$$

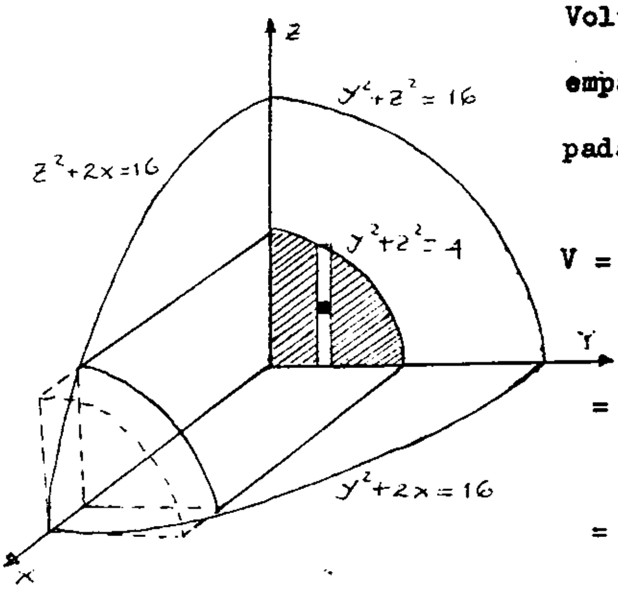
$$= 1/8 \int_0^4 xy^2 \Big]_0^x \, dx$$

$$= 1/8 \int_0^4 x^3 \, dx$$

= 8 satuan kubik

13. Carilah volume suatu benda yang berada di depan bidang x = 0 yang bersekutu dengan $y^2 + z^2 + 2x = 16$ dan silinder $y^2 + z^2 = 4$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



Volume yang akan dicari adalah empat kali volume yang terlihat pada gambar sebelah, yaitu :

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (8 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}) \, dz \, dy$$

$$= 4\int_0^2 (8z - \frac{y^2 z}{2} - \frac{z^3}{6}) \Big]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= 4/3\int_0^2 (22 - y^2)(4 - y^2)^{1/2} \, dy$$

Misalkan : $y = 2\sin\theta \dashrightarrow dy = 2\cos\theta\, d\theta$, maka

$$V = 4/3 \int_0^{\pi/2} (22 - 4\sin^2\theta)\, 4\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 32/3 \int_0^{\pi/2} (11 - 2\sin^2\theta)\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 32/3 \int_0^{\pi/2} (9 + 2\cos^2\theta)\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 32/3 \int_0^{\pi/2} 9\cos^2\theta + 2\cos^4\theta)\, d\theta$$

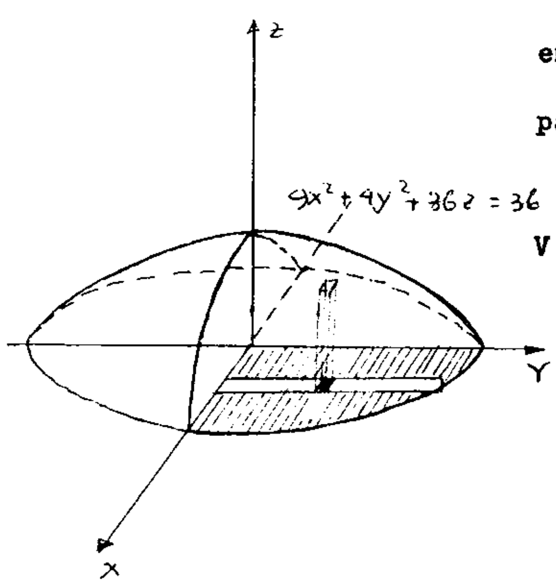
$$= 32/3 \left(\frac{9\sin\theta\cos\theta}{2} + \theta/2\right)\Big]_0^{\pi/2} + 32/3\ (\sin\theta\cos^3\theta +$$

$$3\sin\theta\cos\theta + 3\theta/4)\Big]_0^{\pi/2}$$

$= 28\pi$ satuan kubik

14. Carilah volume irisan $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ oleh bidang $z = 0$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



Volume yang akan dicari adalah empat kali volume yang terlihat pada gambar sebelah, yaitu :

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{3/2\,(4-x^2)^{1/2}} z\, dy\, dx$$

$$= 4\int_0^2 \int_0^{3/4\,(4-x^2)^{1/2}} \frac{(36-9x^2-4y^2)}{36}\, dy\, dx$$

$$= 1/9 \int_0^2 \left(36y - 9yx^2 - \frac{4y^3}{3}\right)\Big]_0^{3/2\,(4-x^2)^{1/2}} dx$$

$$V = 2\int_0^2 \left\{6(4-x^2)^{1/2} - \frac{3x^2(4-x^2)^{1/2}}{2} - \frac{(4-x^2)^{3/2}}{2}\right\} dx$$

$$= \int_0^2 (4-x^2)\ (4-x^2)^{1/2}\ dx$$

$$= \int_0^2 (4-x^2)^{3/2}\ dx$$

$$= \left\{\frac{x(4-x^2)^{3/2}}{4}\ \right]_0^2 + \int_0^2 (4-x^2)^{1/2}\ dx$$

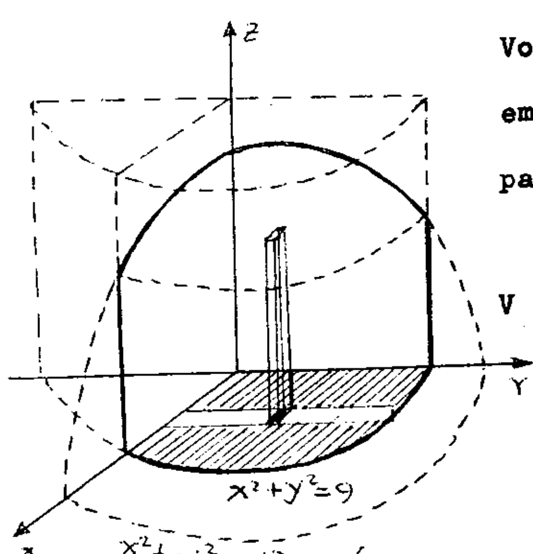
$$= 0 + 3\int_0^2 (4-x^2)^{1/2}\ dx$$

$$= 3\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2 \text{ arc sin } x/2\right)\Big]_0^2$$

$$= 3\pi \text{ satuan kubik}$$

15. Carilah volume suatu benda yang berada di dalam silinder $x^2 + y^2 = 9$ yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 + 4z = 16$ di bagian bawah dan oleh bidang $z = 4$ di bagian atas, dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



Volume yang akan dicari adalah empat kali volume yang terlihat pada gambar disebelah, yaitu :

$$V = 4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (z_1 - z_2)\ dy\ dx$$

$$= 4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \left(4 - \frac{16 - x^2 - y^2}{4}\right) dy\ dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)\ dy\ dx$$

$$V = \int_0^3 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) \Big]_0^{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$= \int_0^3 \left(x^2\sqrt{9-x^2} + \frac{(9-x^2)^{3/2}}{3}\right) dx$$

$$= 1/3 \int_0^3 (2x^2 + 9)\sqrt{9-x^2}\, dx$$

Misalkan : $x = 3\sin\theta \longrightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$, maka

$$V = 1/3 \int_0^{\pi/2} (18\sin^2\theta + 9)\, 9\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 27 \int_0^{\pi/2} (2\sin^2\theta + 1)\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 27 \int_0^{\pi/2} (3\cos^2\theta - 2\cos^4\theta)\, d\theta$$

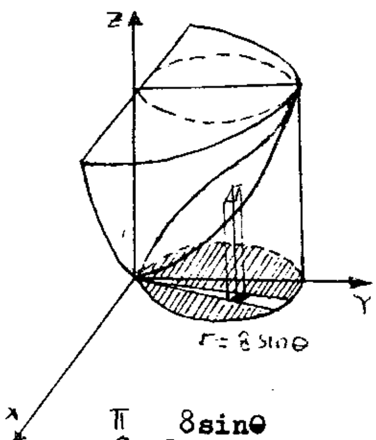
$$= 27\left(\frac{3\sin\theta\cos\theta}{2} + 3\theta/2\right)\Big]_0^{\pi/2} - 54\left(\frac{\sin\theta\cos^3\theta}{4} + \frac{3\sin\theta\cos\theta}{8} + 3\theta/8\right)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 27\,(3\pi/4) - 54\,(3\pi/16)$$

$$= 81\pi/8$$ satuan kubik

16. Carilah volume suatu benda yang dibatasi oleh parabola-ida $x^2 + y^2 = 4z$ silinder $x^2 + y^2 = 8y$ dan bidang $z = 0$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat silinder.

Penyelesaian :



Dengan menggunakan koordinat silinder maka diperoleh

$$z = \frac{(x^2 + y^2)}{4} = \frac{r^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 8y \longrightarrow r = 8\sin\theta$$

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta} z\ r\ dr\ d\theta = 1/4\int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta} r^3\ dr\ d\theta$$

$$= 256\int_0^{\pi} \underline{\sin^4\theta}\ d\theta = 256\ \Big(-\frac{\sin^3\theta\ \cos\theta}{4}\Big]_0^{\pi} + 3/4\int_0^{\pi}\sin^2\theta\ d\theta)$$

$$= 256\ \Big(-\frac{\sin^3\theta\ \cos\theta}{4} - \frac{3\sin\theta\ \cos\theta}{8} + 3\theta/8\Big)\Big]_0^{\pi}$$

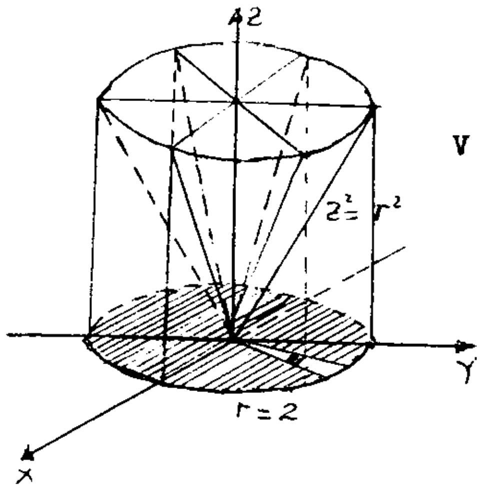
$= 96\pi$ satuan kubik

17. Carilah volume suatu benda yang berada di dalam silinder $r = 2$ dan di luar kerucut $z^2 = r^2$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat silinder.

Penyelesaian :

Volume yang akan dicari adalah dua kali volume yang terlihat pada gambar di sebelah, yaitu

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2} z\ r\ dr\ d\theta$$



$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2 \, dr \, d\theta$$

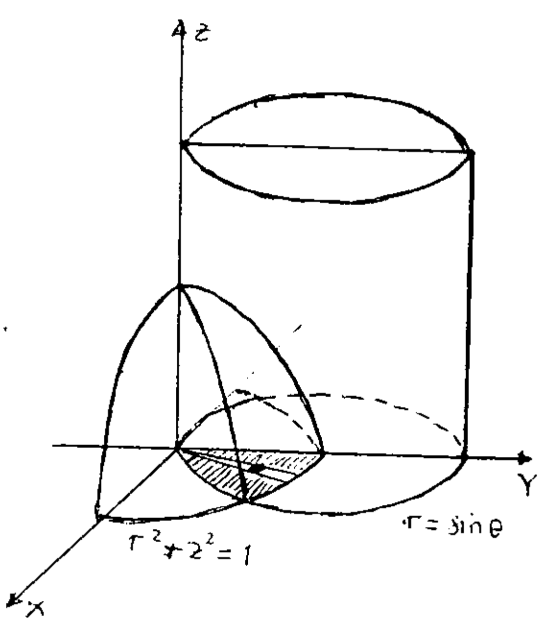
$$= 2/3 \int_0^{2\pi} r^3 \Big]_0^2 \, d\theta$$

$$= 16/3 \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 32\pi/3 \text{ satuan kubik}$$

18. Carilah volume persekutuan pada $r^2 + z^2 = 1$ dan silinder $r = \sin\theta$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat silinder.

Penyelesaian :



Volume yang akan dicari adalah empat kali volume yang terlihat pada gambar di sebelah, yaitu

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} z \, r \, dr \, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} r\sqrt{1-r^2} \, dr \, d\theta$$

$$= -2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} (1-r^2)^{1/2} \, d(1-r^2) \, d\theta$$

$$= -4/3 \int_0^{\pi/2} (1-r^2)^{3/2} \Big]_0^{\sin\theta} d\theta$$

$$= -4/3 \int_0^{\pi/2} (\cos^3\theta - 1) \, d\theta$$

$$= 4/3 \, (\theta - \sin\theta \cos\theta - 2\sin\theta) \Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2(3\pi - 4)}{9} \text{ satuan kubik}$$

BAB VI

LUAS PERMUKAAN SUATU KURVA DENGAN INTEGRAL LIPAT DUA

6.1. Luas Permukaan dalam Koordinat Siku-siku

Jika R' bagian dari permukaan $z = f(x,y)$ dan R adalah suatu daerah yang diperoleh dengan memproyeksikan R' pada bidang koordinat yang cocok, serta f suatu fungsi dari dua variabel yang kontinu pada suatu daerah R yang dibatasi oleh suatu kurva tertutup yang mulus bagian demi bagian di bidang koordinat, maka luas permukaan (S) dari bagian R' suatu permukaan $z = f(x,y)$ adalah :

1. $$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dL$$

   jika R' diproyeksikan pada bidang XOY.

2. $$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dL$$

   jika R' diproyeksikan pada bidang YOZ.

3. $$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dL$$

   jika R' diproyeksikan pada bidang ZOX.

6.2. Luas Permukaan dalam Koordinat Silinder

Dengan menggunakan hubungan $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ dan $z = z$, maka luas permukaan dari bagian R' suatu permukaan $z = f(x,y)$ menjadi

1. $$S = \iint\limits_{R} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\; r\, dr\, d\theta$$

jika R' diproyeksikan pada bidang XOY.

2. $$S = \iint\limits_{R} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\; r\, dr\, d\theta$$

jika R' diproyeksikan pada bidang YOZ.

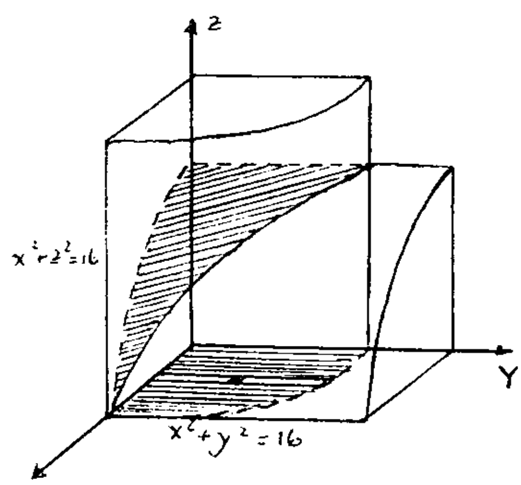
3. $$S = \iint\limits_{R} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\; r\, dr\, d\theta$$

jika R' diproyeksikan pada bidang ZOX.

6.3. Soal-soal dan Penyelesaiannya

1. Carilah luas bagian silinder $x^2 + z^2 = 16$ yang terletak di dalam silinder $x^2 + y^2 = 16$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



Luas yang akan dicari adalah delapan kali luas yang terlihat pada gambar sebelah, yaitu :

$$S = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{y}\right)^2}\, dy\, dx$$

$$= 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{z}\right)^2 + (0)^2}\, dy\, dx$$

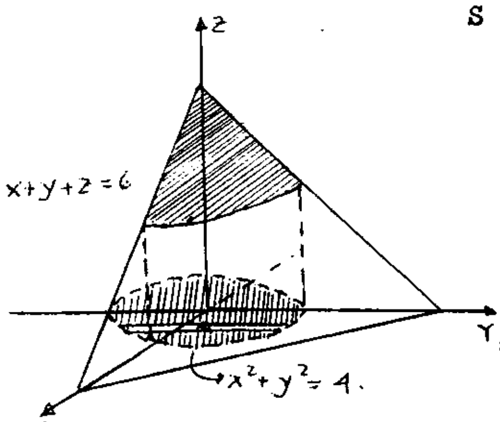
$$= 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{z^2}}\, dy\, dx$$

$$S = 8\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{16}{\sqrt{16-x^2}}\, dy\, dx = 32\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\, dy\, dx$$

$$= 32\int_0^4 dx = 128 \text{ satuan kuadrat}$$

2. Tentukanlah luas bagian dari bidang $x + y + z = 6$ di dalam silinder $x^2 + y^2 = 4$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$S = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dy\, dx$$

$$= \sqrt{3}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\, dx$$

$$= \sqrt{3}\int_{-2}^{2} 2\sqrt{4-x^2}\, dx$$

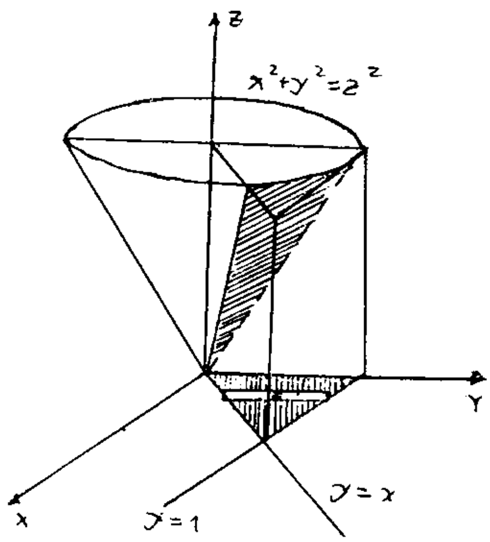
$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2 \arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg]_{-2}^{2}$$

$$= 2\sqrt{3}\pi \text{ satuan kuadrat}$$

3. Tentukanlah luas dari bagian kerucut $x^2 + y^2 = z^2$, di dalam prisma tegak dengan alasnya berupa segitiga yang dibatasi oleh $y = x$, $x = 0$, $y = 1$ di bidang XOY dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :

$$S = \int_0^1\int_x^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dy\, dx$$



$$S = \int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z^2}}\, dy\, dx$$

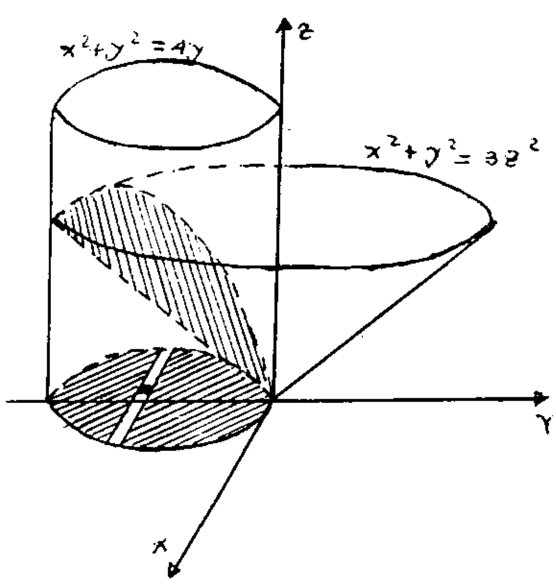
$$= \sqrt{2} \int_0^1 (1-x)\, dx$$

$$= \sqrt{2} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ satuan kuadrat}$$

4. Carilah luas bagian kerucut $x^2 + y^2 = 3z^2$ di atas bidang XOY dan di dalam silinder $x^2 + y^2 = 4y$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{3z}\right)^2 + \left(\frac{y}{3z}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$= 2 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \sqrt{\frac{9z^2 + x^2 + y^2}{9z^2}}\, dx\, dy$$

$$= 2 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \sqrt{\frac{12z^2}{9z^2}}\, dx\, dy$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \sqrt{4y-y^2}\, dy$$

$$S = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4 \sqrt{4-(y-2)^2}\; d(y-2)$$

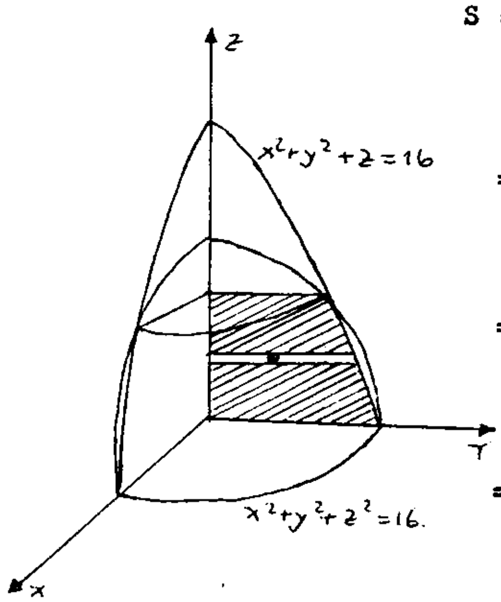
$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\left\{ \frac{(y-2)}{2}\sqrt{4y-y^2} + 2 \text{ arc sin } \left(\frac{y-2}{2}\right)\right\}\Bigg]_0^1$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\left\{ \frac{2\pi}{2} - \frac{2(3\pi)}{2}\right\}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ satuan kuadrat}$$

5. Carilah luas bagian dari bola $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ di luar parabolaida $x^2 + y^2 + z = 16$ dengan menggunakan integral lipat dua.

Penyelesaian :



$$S = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{16-z^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{z}\right)^2}\; dy\, dz$$

$$= 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{16-z^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{x}\right)^2 + \left(\frac{-z}{x}\right)^2}\; dy\, dz$$

$$= 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{16-z^2}} \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2}}\; dy\, dz$$

$$= 16\int_0^1\int_0^{\sqrt{16-z^2}} \frac{1}{\sqrt{16-y^2-z^2}}\; dy\, dz$$

$$= 16 \quad {}_0^1 \quad {}_0^{\sqrt{16-z^2}} \quad \frac{1}{\sqrt{(16-z^2)-y^2}}\; dy\, dz$$

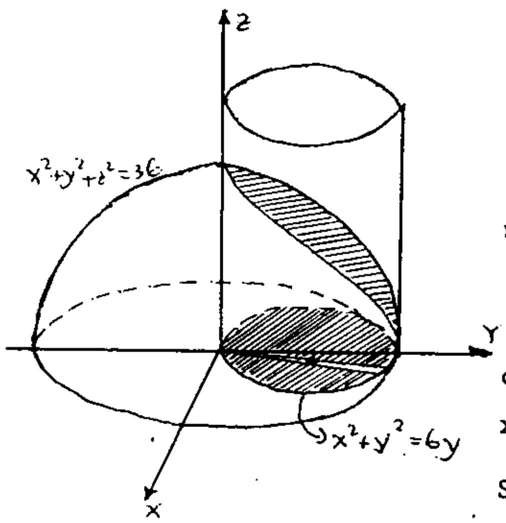
$$= 16\int_0^1 \text{arc sin } \frac{y}{\sqrt{16-z^2}}\Bigg]_0^{\sqrt{16-z^2}} dz$$

$$= 8\pi\int_0^1 dz$$

$$= 8\pi \text{ satuan kuadrat}$$

6. Carilah luas bagian bola $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, di dalam silinder $x^2 + y^2 = 6y$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat silinder.

Penyelesaian :



$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

$$\text{maka } ds = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2}\, dy\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}}{z}\, dy\, dx = \frac{6}{z}\, dy\, dx$$

dengan menggunakan koordinat silinder :

$$x^2 + y^2 = 6y \Leftrightarrow r = 6 \sin\theta$$

$$S = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{6\sin\theta} \frac{6}{(36-r^2)^{\frac{1}{2}}}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -12\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{6\sin\theta} (36-r^2)^{-\frac{1}{2}} d(36-r^2)\, d\theta$$

$$S = -12\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2(36 - r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{6\sin\theta}\, d\theta$$

$$= -24\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (6\cos\theta - 6)\, d\theta$$

$$= 24\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (6 - 6\cos\theta)\, d\theta$$

$$= 24(6\theta - 6\sin\theta)\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 24(3\pi - 6)$$

$$= 72(\pi - 2)$$

7. Carilah luas bagian bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ di dalam paraboloida $x^2 + y^2 = z$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat silinder.

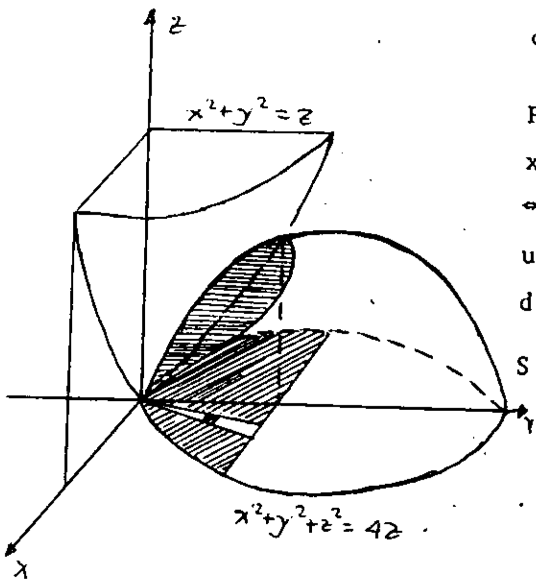
Penyelesaian :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2 - z}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2 - z}$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{(z-2)^2 + z^2 + y^2}{(2 - z)^2}$$

$$= \frac{4}{4 - x^2 - y^2}$$



dengan menggunakan koordinat silinder.

$$dS = \frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\, r\, dr\, d\theta$$

Perpotongan bola dan paraboloida

$x^2 + y^2 = 4z - z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - 3z = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$, atau $z = 3$

untuk $z = 3$, maka $x^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow r = \sqrt{3}$

diperoleh :

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\, r\, dr\, d\theta$$

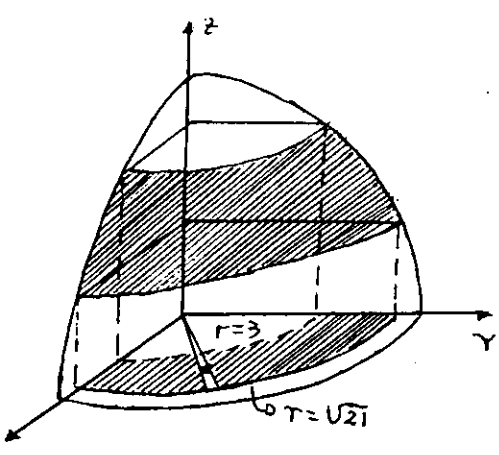
$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (4-r^2)^{-\frac{1}{2}} d(4-r^2)\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} 2(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{\sqrt{3}} d\theta = \int_0^{2\pi} 2\, d\phi$$

$$= 2\phi\,\Big]_0^{2\pi} = 4\pi$$

8. Carilah luas bagian bola $x^2+ y^2+z^2 = 25$ di antara bidang $z = 2$ dan $z = 4$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat silinder.

Penyelesaian :



$dS = \frac{5}{z}\, dx\, dy$ (lihat no. 6)

dengan menggunakan koordinat silinder.

$$dS = \frac{5}{\sqrt{25-r^2}}\, r\, dr\, d\theta$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \Leftrightarrow z^2 = 25 - r^2$

untuk $z = 2$, maka $r^2 = 21 \Leftrightarrow r = \sqrt{21}$

$z = 4$, maka $r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3$

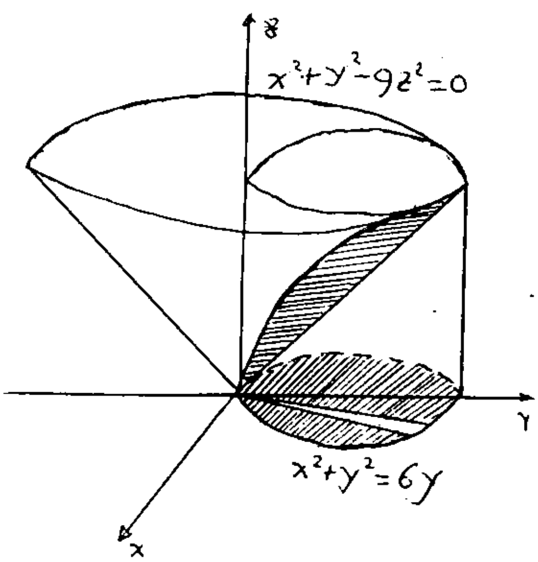
$$S = \int_0^{2\pi}\int_3^{\sqrt{21}} \frac{5\, r\, dr\, d\theta}{\sqrt{25 - r^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} -5\sqrt{25 - r^2}\,\Big]_3^{\sqrt{21}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 5(4 - 2)d\theta = 10\,\theta\Big]_0^{2\pi} = 20\pi$$

9. Tentukanlah luas dari permukaan kerucut $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$ di atas bidang $z = 0$ dan di dalam silinder $x^2 + y^2 = 6y$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat silinder.

Penyelesaian :



$$x^2 + y^2 - 9z^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{9z} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{9z}$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{81\ z^2} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

maka diperoleh :

$$S = \iint_R \frac{1}{3}\sqrt{10}\, r\,dr\, d\theta$$

di mana R daerah di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 6y$

$\Leftrightarrow r^2 = 6\ r \sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad r = 6 \sin\theta$

$$S = \int_0^{\pi}\int_0^{6\sin\theta} \frac{1}{3}\sqrt{10}\, r\,dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{10} \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}r^2 \Big]_0^{6\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{10} \int_0^{\pi} 18 \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 6\sqrt{10}\ (\tfrac{1}{2} \sin\theta \cos\theta + \tfrac{1}{2}\theta)\Big]_0^{\pi}$$

$$= 3\pi\sqrt{10}$$

10. Carilah luas dari bagian bola $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ yang berada di dalam silinder eliptik $2x^2 + y^2 = 25$ dengan menggunakan integral lipat dua dalam koordinat silinder.

Penyelesaian :

$$dS = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy \quad \text{(lihat no. 8)}$$

$$S = 2 \iint_R \frac{5\ dx\ dy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

di mana R adalah daerah di dalam $2x^2 + y^2 = 25$