PENUNTUN PRAKTIKUM

KOORDINAT POLAR
DALAM MATA KULIAH KALKULUS

Oleh

DRS. SYAMSUL ANWAR

Dibiayai oleh:

DANA OPF FPMIPA PADANG
PERIODE 1990/1991

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
(FPMIPA) IKIP PADANG

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PADANG

1991

KATA PENGANTAR

Koordinat polar adalah salah satu pokok bahasan dalam mata kuliah Kalkulus Lanjut yang sangat berguna dalam menunjang sub pokok bahasan lain dalam memecahkan soal-soal integral.

Dengan menggunakan koordinat polar suatu persamaan dapat menjadi lebih sederhana dan penintegralannyapun menjadi lebih mudah, maka dari itu mahasiswa trampil dalam menggambarkan kurva dengan menggunakan koordinat polar ini.

Semoga buku penuntun ini dapat bermanfaat adanya.

Padang, Pebruari 1991

Penyusun.

DAFTAR ISI

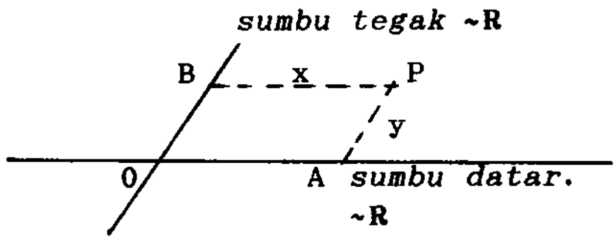
<u>Sistem Koordinat Dalam</u> R^2

Dasar Teori

Himpunan titik-titik berurutan pada garis lurus ekuivalen dengan sistem bilangan nyata (sistem bilangan nyata ditulis dengan **R**). Sebuah titik A pada suatu garis lurus dapat di kawankan dengan bilangan nyata x(x **R**) yang disebut dengan titik X.

Tarik dua garis lurus yang saling berpotongan pada suatu bidang datar. Titik perpotongan kedua garis tersebut biasanya diberi nama O dan disebut titik asal (titik awal) terhadap ke dua garis tersebut. Masing-masing garis disebut <u>sumbu koordinat</u>, yang ekuivalen dengan **R**.

Perhatikan gambar:



sistem koordinat miring.

Gambar 1.

Titik disebelah kanan O biasa menyajikan bilangan positif dan titik disebelah kirinya menyajikan bilangan negatif. Selanjutnya titik disebelah atas O menyajikan titik positif sedangkan disebelah bawah nya menyajikan titik negatif. Masing-masing garis tersebut disebut sumbu <u>koordinat</u> dimana masing-masing sumbu ekuivalen dengan **R**.

Sistem dua garis seperti itu disebut sistem koordinat. Jika kedua garis tersebut tak saling tegak lurus disebut sistem <u>koordinat miring</u>, jika kedua garis tersebut saling tegak lurus disebut sistem <u>koordinat tegak</u> atau sistem koordinat *Cartesius*.

Tiap titik pada bidang dapat dinyatakan dengan sepasang bilangan yang dinamakan dengan koordinat, jika garis mendatar melalui P memotong sumbu datar di A dan garis tegak yang melalui P memotong sumbu tegak di B, dan jika x = PB dan y = PA maka P mempunyai koordinat (x,y). Disini dapat kita lihat bahwa sebuah titik P tepat menentukan sepasang bilangan (x,y) dan juga sebaliknya. Jika (x,y) dipandang sebagai $R^2 = R \times R$, jadi $(x,y) \in R^2$ maka dapat ditarik kesimpulan bahwa bidang datar (himpunan titik-titik pada bidang) ekuivalen dengan R^2. Jika terhadap suatu sistem koordinat titik P menentukan pasangan dua bilangan (x,y) maka titik P dituliskan dengan:

P(x,y) atau P = (x,y) dan

(x,y) biasa disebut titik.

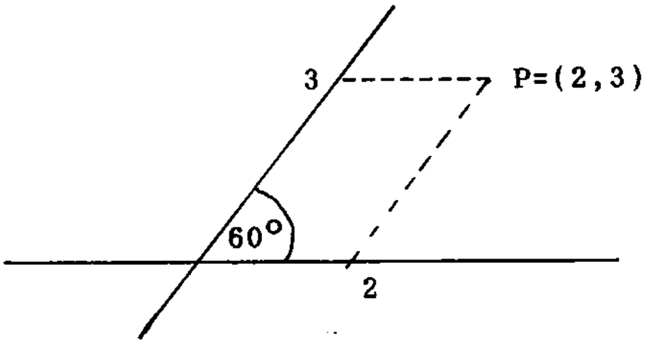
Walaupun ada koordinat miring dan koordinat Cartesius namun untuk kemudahan, orang hanya menggunakan koordinat Cartesius saja.

Contoh:

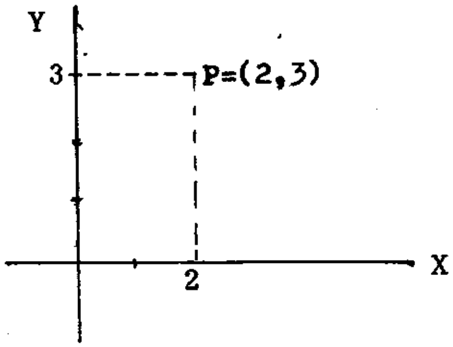
1. Diketahui titik P = (2,3). Gambarlah titik P.
   a. Pada sistem koordinat miring dimana sumbu tegak membentuk $\angle 60^\circ$ dengan sumbu datar positif.
   b. Pada sistem koordinat Cartesius.

   Penyelesaian:

a).

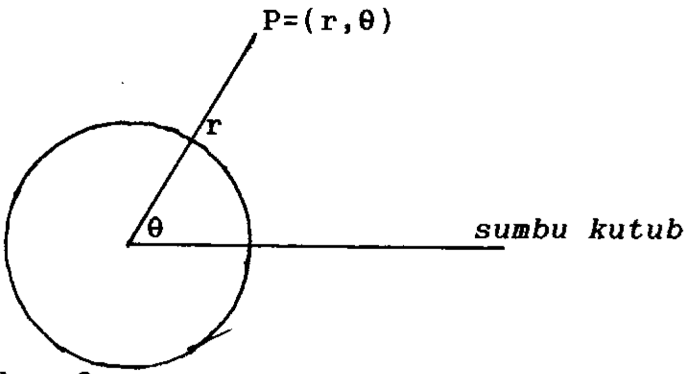


b).



Sistem Koordinat Kutub

Koordinat kutub adalah cara lain yang digunakan untuk menyatakan suatu titik pada bidang datar. Sebagaimana halnya pada sistem koordinat Cartesius pada sistem koordinat kutub juga terdiri dari dua himpunan yaitu r dan θ adalah sudut yang dibentuk oleh r dengan sumbu mendatar. Jadi titik P = (r,θ) berarti perpotongan antara lingkaran yang berjari-jari r dan titik pusat O dengan sinar garis yang memancar dari O yang membuat sudut sebesar θ dengan sumbu mendatar.



Gambar 2.

Sumbu yang mendatar disebut dengan sumbu kutub dan titik O di sebut titik kutub (lihat gambar 2).

Contoh:

1. Lukislah pada koordinat kutub titik A(3, $\frac{2}{3}\pi$).

   Cara melukis:

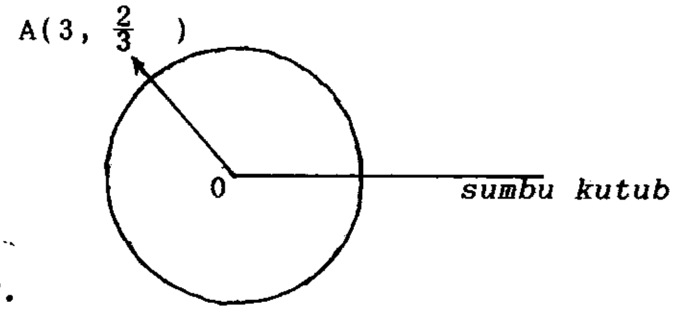
   1). Buat garis mendatar sebagai sumbu kutub yang berpangkal di O. O sebagai titik pusat lingkaran.

   2). Buat lingkaran dengan jari-jari dan pusat O.

   3). Buat sinar garis dari O dengan sudut $\frac{2}{3}\pi$ terhadap sumbu mendatar.

   4). Perpotongan lingkaran dengan sinar garis adalah titik A yang dimaksud (lihat gambar 3).

2. Gambar 3 adalah contoh lukisan beberapa buah titik yang terletak pada sistem koordinat kutub yang sama.



Gambar 3.

3. Gambarlah titik $P = (-3, \frac{2}{3}\pi)$.

   Penyelesaian:

   1). Lukis sumbu kutub.

   2). Buat lingkaran pusat O dengan jari-jari 3.

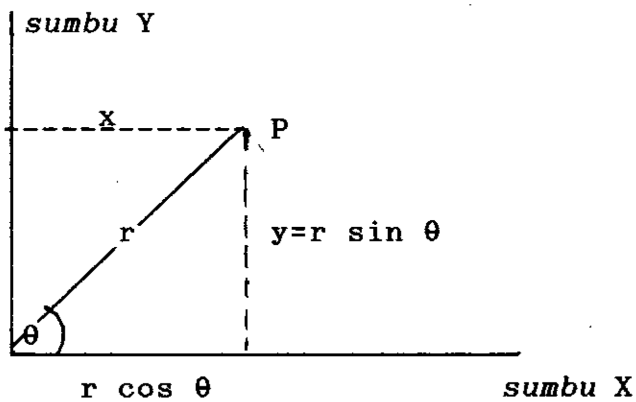
   3). Buat sinar garis dari 0 dengan sudut $\frac{2}{3}\pi$ dari sumbu kutub positif.

   4). Buat sinar garis yang berlawanan arah dengan sinar garis pada langkah (3).

   5). Perpotongan lingkaran f = 3 dan sinar garis pada langkah (4) adalah titik P yang diminta.

Hubungan antara sistem Koordinat Cartesius dan sistem Koordinat Kutub.

Jika pada suau bidang datar terdapat dua sistem koordinat, sistem koordinat Cartesius dan sistem koordinat kutub, sehingga titik awal O berimpit dan OX sebagai sumbu datar dan sumbu X, maka hubungan antara sistem koordinat kutub dan koordinat Cartesius adalah sebagai berikut:



Gambar 4.

Berdasarkan gambar diperoleh hubungan:

$$\left|\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & \text{atau} \\ y = r\sin\theta & \\ & \\ r = +\sqrt{x^2 + y^2} & \\ \theta = \text{arc tan } \frac{y}{x} & \end{array}\right|$$

Dengan menggunakan kenyataan ini kita dapat merobah suatu titik dalam koordinat Cartesius kedalam koordinat kutub dan sebaliknya.

Contoh:

1. Tentukanlah koordinat Cartesius dari titik yang koordinat kutubnya $(4, \frac{\pi}{6})$.

   Penyelesaian:

   Misal: $(r,\theta) = (4, \frac{\pi}{6})$. Jadi $r = 4$ dan $\theta = \frac{\pi}{6}$

   maka: $x = r\cos\theta = 4\cos{}_6 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

   $y = r\sin\theta = 4\sin{}_6 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

   Jadi koordinat Cartesiusnya adalah $(2\sqrt{3}, 2)$.

2. Tentukan koordinat kutub dari koordinat Cartesius $(-3,\sqrt{3})$

   Penyelesaian:

   Misal: $(x,y) = (-3,\sqrt{3})$ maka $x = -3$ dan $y = \sqrt{3}$

   $r^2 = x^2 + y^2 = (-3)^2 + \sqrt{3})^2 = 12$

   $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-3}$, $\theta = (\frac{5\pi}{6} \neq k)$, $k =$

   $\theta = \frac{5\pi}{6}$

   maka $(r,\theta) = (12 , {}^5{}_6)$

Koordinat

Persamaan dengan bentuk $r = a \neq b\cos\theta$ dan $r = a \pm b\sin\theta$ dimana $a,b > 0$ dinamakan <u>koordinat</u>.

Khusus untuk $a = b$ grafiknya dinamakan <u>limasan</u>. Gambar 5 memperlihatkan bentuk-bentuk tiap kasus.

a > b   a = b   a < b

Gambar 5.

Tugas I

1. Selidikilah persamaan $r = 2 + 4 \cos \theta$ mengenai kesimetrisannya dan gambarlah grafiknya dengan menyelesaikan tabel di bawah ini:

θ	r	θ	r
0	6		
$\pi/6$		$\frac{7\pi}{6}$	
$\pi/3$		$\frac{4\pi}{3}$	
$\pi/2$		$\frac{3\pi}{2}$	
$7\pi/12$		$\frac{19\pi}{12}$	
$2\pi/3$		$\frac{5\pi}{3}$	
$3\pi/4$		$\frac{7\pi}{4}$	
$5\pi/6$		$\frac{11\pi}{6}$	
π		2π	

0

sumbu kutub

2. Selidikilah $r = 4 + \cos\theta$ dan gambarlah grafiknya.

θ	r
0	6
$\pi/6$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$7\pi/12$	
$2\pi/3$	
$3\pi/4$	
$5\pi/6$	

0

sumbu kutub

3. Gambarlah grafik $r = 4 + \cos\theta$ dengan melengkapi tabel di bawah ini:

θ	r
0	6
$\pi/6$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$7\pi/12$	
$2\pi/3$	
$3\pi/4$	
$5\pi/6$	

0 ————————————

sumbu kutub

4. Gambarlah grafik $r = 2 - 4 \cos \theta$ dengan melengkapi tabel di bawah ini:

θ	r
0	6
$\pi/6$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$7\pi/12$	
$2\pi/3$	
$3\pi/4$	
$5\pi/6$	

0

sumbu kutub

5. Gambarlah grafik $r = 4 - 2\cos\theta$ dan lengkapilah tabelnya

θ	r
0	
$\pi/6$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$7\pi/12$	
$2\pi/3$	
$3\pi/4$	
$5\pi/6$	

θ	r
0	

0

sumbu kutub

6. Gambarlah grafik r 4 - 4 cos θ dan lengkapilah grafiknya.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{4\pi}{6}$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$8\pi/6$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r													

0

sumbu kutub

7. Lengkapilah tabel di bawah ini dan kemudian gambarlah grafiknya, $r = 2 + 4 \sin \theta$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{4\pi}{6}$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$8\pi/6$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r													

0

sumbu kutub

8. Lengkapilah tabel di bawah ini dan kemudian gambarlah grafiknya, $r = 4 + 2 \sin \theta$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{4\pi}{6}$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$8\pi/6$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r													

0

sumbu kutub

9. Lengkapilah tabel di bawah ini dan kemudian gambarlah grafiknya $r = 4 + 4 \sin \theta$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{4\pi}{6}$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$8\pi/6$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r													

0

sumbu kutub

Tugas II

Grafik persamaan kutub

$$r = a \cos n\theta \text{ dan}$$

$$r = \sin n\theta$$

adalah kurva yang berbentuk bungan yang disebut mawar. Banyaknya daun mawar itu tergantung pada n. Selidikilah !

a. Selidikilah dan gambar kurvanya dengan terlebih dulu melengkapi tabel nilai r dan θ, $r = 4 \sin 2\theta$.

θ	r	θ	r
0	6	$2\pi/3$	
$\pi/12$		$5\pi/6$	
$\pi/8$		π	
$\pi/6$		$7\pi/6$	
$\pi/4$		$3\pi/2$	
$\pi/3$		$5\pi/3$	
$3\pi/8$		$\frac{11\pi}{6}$	
$5\pi/12$		$\pi 2$	
$\pi/2$			

0

sumbu kutub

a. $r = 4 \sin 3\theta$.

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
$\pi 2$	

0

sumbu kutub

c. $r = 4 \sin 4\theta$.

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
π_2	

0 ————————————

sumbu kutub

d. $r = 4 \sin 5\theta$.

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
π_2	

0 ——————————————

sumbu kutub

e. $r = 4 \sin 6\theta$.

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
$\pi 2$	

0

sumbu kutub

Kesimpulan:

1.

n	daun	sumbu symetri
2	....	....
3	....	....
4	....	....
5	....	....
6	....	....

2. Selidiki dan gambar kurvanya dengan terlebih dulu melengkapi tabel nilai r dan θ.

   a. $r = 4 \cos \theta$

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
$\pi 2$	

0 ————————————

sumbu kutub

b. $r = 4 \cos 2\theta$

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
$\pi 2$	

0 ————————————————

sumbu kutub

c. $r = 4 \cos 3\theta$

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
$\pi 2$	

0 ————————————

sumbu kutub

d. $r = 4 \cos 4\theta$

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
$\pi 2$	

0

sumbu kutub

e. $r = 4 \cos 5\theta$

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
$\pi 2$	

0 ————————————

sumbu kutub

f. r = 4 cos 6θ

θ	r
0	6
$\pi/12$	
$\pi/8$	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$3\pi/8$	
$5\pi/12$	
$\pi/2$	

θ	r
$2\pi/3$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$\frac{11\pi}{6}$	
$\pi 2$	

0

sumbu kutub

Kesimpulan:

n	banyak daun	sumbu symetri
2	....	....
3	....	....
4	....	....
5	....	....
6	....	....

DAFTAR BACAAN

Darmawijaya, Suparna, (1990), **Kalkulus Lanjut**, FPMIPA UGM.

Mharga, M dan Besari,Ismael,(1981), **Matematika Universitas 4**, Amrico, Bandung.

Purcel,J.E dan Varberg D, (1989),**Kalkulus dan Geometri Analitis**, Jilid 2, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Selby, Samuel and Sweet, Leonard, (1963), **Set-Relation-Fungtions**, Mc Graw-Hill Book Company.

Spiegel,M.R,(1983), **Theory and Problems of Advanced Calculus**, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York.