# KALKULUS

# II

O
l
e
h



**Dra. Ruzni Syuib**

**Drs. Syamsuar Ahmad**

**IKIP PADANG**

**1981**

# DAFTAR ISI

## B a b I.

# HITUNG INTEGRAL

## I – 1. INTEGRAL TAK TERTENTU.

Jika F(x) adalah sebuah fungsi yang derivativ [illegible] f(x) diketahui pada suatu interval tertentu dari [illegible] F(x) dinamakan anti derivativ atau integral tak terten[illegible]). Integral tak tertentu dari suatu fungsi yang [illegible] gal, sebagai contoh misalnya, $x^5$, $x^5+2$, $x^5-5$, umum[illegible] lah integral tak tertentu dari $f(x) = 5x^4$. Lengkapnya [illegible] integral tak tertentu diatas dilambangkan sebagai [illegible]

$$\int 5x^4 dx = x^5 + C$$

dimana;

C disebut konstanta integrasi

$\int$ adalah tanda integral

$5x^4$ fungsi yang diintegralkan (integrand)

$x^5$ fungsi asal atau fungsi primitiv

## I – 2. RUMUS-RUMUS DASAR

1. $\int dx = x + C$
2. $\int$ [illegible] $x + C$
3. $\int \frac{d}{dx} f'(x)dx = f(x) + C$
4. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$
5. $\int (u \pm v \pm w)dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx$
6. $\int audx = a \int udx$
7. $\int u^m dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$ ; $m \neq -1$
8. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$
9. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ ; $a > 0$, $a \neq 1$
10. $\int e^u du = e^u + C$
11. $\int \sin u \, du = - \cos u + C$

12. $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

13. $\int a^{10t} dt = \frac{1}{10}\int a^{10t} d(10t) = \frac{a^{10t}}{10 \ln a} + C$

14. [illegible] $= \int \frac{e^{-x}\, dx}{1 + e^{-x}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{1 + e^{-x}}$

$= - \ln )1 + e^{-x}) + C$

$= \ln \frac{e^{x}}{1 + e^{x}} + C = x - \ln(1 + e^{x}) + C$

Rumus [illegible] - 20

15. $\int \sin 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\, d(3x)$

$= - \frac{1}{3} \cos 3x + C$

16. $\int \cos \frac{1}{4} x\, dx = 4 \int \cos \frac{1}{4} x\, d(\frac{x}{4})$

$= 4 \sin \frac{x}{4} + C$

17. $\int tgt\, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\int \frac{d(\cos t)}{\cos t}$

$= - \ln \cos t + C = \ln/\sec t/ + C$

18. $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + tg\, x)}{\sec x + tg\, x}$

$= \int \frac{\sec x\, tg\, x + \sec^2 x}{\sec x + tg\, x} dx = \int \frac{d(\sec X + tg\, x)}{\sec x + tg\, x}$

$= \ln/\sec x + tg\, X/ + C$

19. $\int \frac{\sin t + \cos t}{\cos t} dt = \int (tg\, t + 1)dt = \int tgt\, dt + \int dt$

$= \ln/\sec//+ t + C$

20. $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{du}{2 \sin \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} u} = \int \frac{\sec^2 \frac{1}{2} u \cdot \frac{1}{2} du}{tg \frac{1}{2} u}$

$= \ln tg \frac{1}{2} u + C.$

21. $\int 2\sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int \sin 2x\, d(2x)$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Rumus 21 - 23

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sin } x + C$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg } x + C$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}} = \text{arc sin } \frac{x}{5} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{dt}{9 + t^2} = \frac{1}{3}\text{ arc tg } \frac{x}{3} + C$

26. $\displaystyle\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - 1}} = \text{arc sec } v + C$

27. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{1 - (x^3)^2}} = \frac{1}{3}\text{ arc sin } x^3 + C$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{ arc tg } \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5} = \int \frac{2\,dx}{4x^2 + 4x + 10} = \int \frac{2\,dx}{(2x + 1)^2 + 9}$

$$= \frac{1}{3}\text{ arc tg } \frac{2x + 1}{3} + C$$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{28 - 12x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64 - (x^2 + 12x + 36)}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{64 - (x + 6)^2}} = \text{arc } \frac{x + 6}{8} + C$$

Rumus 24 - 27

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln \left| \frac{x - 1}{x - 1} \right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - x^2} = \frac{1}{4}\ln \left| \frac{2 + x}{2 - x} \right| + C$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln (x - \sqrt{x^2 - 1}) + C$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{1}{2} \int \frac{2\,dx}{\sqrt{(2x)^2 + 3^2}} = \frac{1}{2} \ln (2x + \sqrt{4x^2 + 9}) + C$

36. $\int \frac{dt}{\sqrt{4t + t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t + 2)^2 - 4}} = \ln (t + 2 + \sqrt{4t + t^2}) + C$

Rumus 28 – 30

37. $\int \sqrt{16 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\, x \sqrt{16 - x^2} + 8 \arcsin \frac{x}{4} + C$

38. $\int \sqrt{x^2 - 16}\,dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 16} - 8 \ln | x + \sqrt{x^2 - 16} | + C$

39. $\int \sqrt{2x^2 + 3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{2x^2 + 3}\,\sqrt{2}\,dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{2x}{2} \sqrt{2x^2 + 3} + \frac{3}{2} \ln (\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 + 3}) \right] + C$$

SOAL - SOAL LATIHAN :

40. $\int (3 - 2x - x^4)\,dx$

41. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{2} x + 2)\,dx$

42. $\int (x^2 + 1)^2\,dx$

43. $\int \frac{dx}{x^5}$

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 3}}$

46. $\int y^3 \sqrt{1 + y^4}\,dy$

47. $\int \frac{(x + 1)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}}$

48. $\int \frac{(x + 1)(x - 1)}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\int \frac{dx}{x - 5}$

50. $\int \frac{dx}{4x + 1}$

51. $\int \frac{x - 1}{x + 1}\,dx$

52 $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

53. $\int a^{5x}\,dx$

54. $\int e^{4x}\,dx$

55. $\int e^{-x^2 + 2x}\,dx$

56. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

57. $\int (e^x + 1)^2\,dx$

58. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$

59. $\int \sin 5x\,dx$

60. $\int \cos \frac{1}{4} x\,dx$

61. $\int \operatorname{cosec} 3x\,dx$

62. $\int tg^2 t\,dt$

63. $\int tg \frac{1}{2} t\,dt$

64. $\int \sin ax \cos ax\,dx$

65. $\int \sin^3 x \cos x\,dx$

66. $\int \cos^4 x \sin x\,dx$

67. $\int \frac{dx}{1 + \cos 3x}$

68. $\int \sin 2x \cos 2x\,dx$

69. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$ [illegible]

70. $\int \frac{2^{arctg\,x}}{x^2 + 1}\,dx$

71. $\int (a + bx)^2\,dx$

72. $\int (a^2 - x^2)\,dx$

73. $\int (3 - 5x)^2\,dx$

74. $\int \sqrt{7x^3}\,dx$

75. $\int \frac{dx}{e^{2x}}$

76. $\int 10^x\,dx$

77. $\int \frac{(6x - 7)\,dx}{3x^2 - 7 + 8}$

78. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

79. $\int \frac{x^3}{9 + 4x^4}\,dx$

80. $\int \frac{\cos x\,dx}{e^{\sin x}}$

81. $\int \sqrt{1 + bx}\,dx$

82. $\int \frac{dx}{(a + bx)^3}$

83. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4 + \sqrt{x}}$

84. $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$

85. $\int \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}\,dx$

86. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$

87. $\int \frac{dx}{5 + x^2}$

88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 5}}$

89. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{1 + e^{4x}}$

90. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$

91. $\int \frac{dx}{9x^2 + 4}$

92. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9 \ln^2 x}}$

93. $\int \frac{2 + 3}{x^2 + 6x + 13}\,dx$

94. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}}$

95. $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

96. $\int \frac{dx}{9 - x^2}$

97. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

# B A B II

## APLIKASI HITUNG INTEGRAL TAK TERTENTU

### II - 1. Menentukan persamaan suatu kurva.

Apabila persamaan $y = f(x)$ dari suatu [illegible] maka gradiennya $m$ pada suatu titik $P(x,y)$ dari [illegible] oleh $m = f'(x)$. Tetapi sebaliknya, apabila gradien [illegible] titik $P(x,y)$ yang diberikan oleh $m = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ dike[illegible] suatu himpunan kurva $y = f(x) + C$ didapatkan dengan [illegible]rasi. Untuk memperoleh sebuah kurva yang diminta, [illegible]un- tuk mendefinisikan suatu nilai dari C. Ini dapat di[illegible] nya kurva yang diminta itu melalui suatu titik tertentu.

Contoh :

Tentukanlah persamaan dari himpunan kurva, apabila gradiennya pada setiap titik sama dengan $-2$ kali absis titik yang bersangkutan dan tentukan pula suatu kurva itu yang melalui titik ( 1, 1 ).

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = -2x \quad \text{atau} \quad dy = -2x\,dx$$

$$\text{maka} \quad \int dy = \int -2x\,dx$$

$$y = -x^2 + C$$

Untuk titik ( 1, 1 ) :

$$1 = -1 + C \rightarrow C = 2$$

Jadi kurva yang melalui ( 1, 1 ) ialah :

$$y = -x^2 + 2.$$

Contoh 2

Pada setiap titik dari suatu kurva tertentu diketahui $y'' = x^2 - 1$. Tentukanlah persamaan kurva yang melalui titik ( [illegible] ), apabila tangennya sama dengan tangen dari garis $x$ [illegible] $2y = 13$.

[illegible] :

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 1; \text{ maka}$$

$$y' = \int \frac{d}{dx}(y') = \int (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x + C$$

Pada titik (1, 1) gradiennya atau $y' = -\frac{1}{12}$,

maka

$$\frac{x^3}{3} - x + C = -\frac{1}{12} \longrightarrow C = \frac{7}{12}$$

Sekarang; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{7}{12}$ dan

$$y = \int \left(\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{7}{12}\right)dx$$

$$= \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + C$$

untuk titik ( 1, 1 ) $1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + C_2$

$$C_2 = 5/6$$

Jadi persamaan yang diminta :

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + C$$

## II - 2 Menentukan persamaan gerakan dari suatu benda

Dalam persamaan $S = f(t)$; dimana S adalah jarak suatu yang bergerak dari suatu titik tertentu menurut suatu garis lurus atau lengkungan dalam waktu t, maka kecepatan dan percepatan pada setiap saat diberikan berturut-turut oleh :

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) \text{ dan } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$$

Kemudian sebaliknya jika kecepatan atau percepatan dari suatu benda diketahui pada suatu waktu tertentu t, maka persamaan gerakan dari benda tersebut dapat ditentukan.

Contoh :

Sebuah bola digulirkan diatas lantai yang agak kes[illegible] dengan kecepatan awal 25 ft/dit. Dengan adanya gaya gesekan maka p[illegible]nya berkurang rata-rata menjadi 6 ft/detik.

Berapa jauh bola tadi dapat bergulir ?.

Jawab :

$$a = \frac{dv}{dt} = -6 \quad \text{dan} \quad v = -6t + C_1$$

Untuk $t = 0$, $v = 25$ dan karenanya $C_1 = 25$.

dan $v = -6t + 25$

$$v = \frac{ds}{dt} = -6t + 25, \text{ maka,:}$$

$$S = \int (-6t + 25)dt = -3t^2 + 25t + C_2$$

Pada $t = 0$, $S = 0 \longrightarrow C_2 = 0$, maka

$$S = -3t^2 + 25t$$

Ketika $v = 0$, $t = 25/6$, jika ; bola bergulir selama 25/6 detik, dan jarak yang diminta ada;ah :

$$S = -3(25/6)^2 + 25(25/6)$$

$$= -\frac{625}{12} + \frac{625}{6} = 625/12 \text{ ft}$$

SOAL - SOAL LATIHAN :

1. Tentukanlah persamaan himpunan kurva jika diketahui gradiennya pada suatu titik $P(x, y)$ sama dengan $3x^2y$, dan tentukan pula salah satu dari kurva tersebut yang melalui titik ( 0,8 ).

2. Suatu besaran tertentu q bertambah rata-rata berbanding lurus dengan dirinya sendiri. Pada waktu $t = 0$, $q = 25$ dan pada $t = 2$, $q = 75$. Hitunglah q pada waktu $t = 6$.

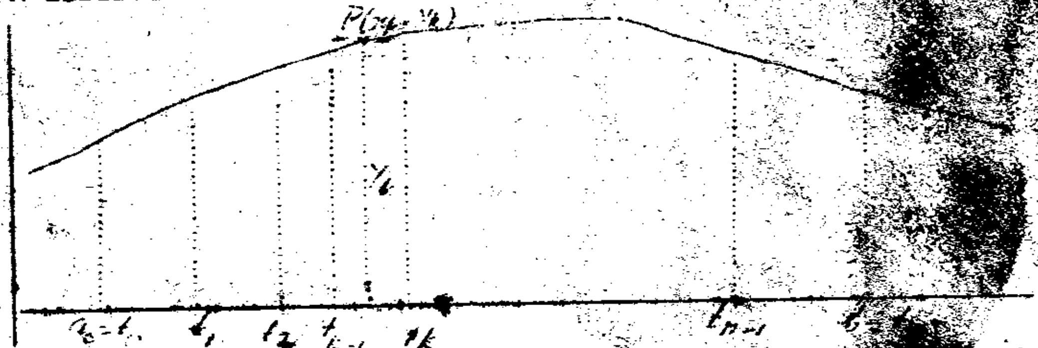
3. Tentukanlah persamaan dari himpunan kurva jika diketahui subtangennya pada setiap titik sama dengan duakali absis titik yang bersangkutan.

4. Suatu partikel bergerak menurut garis lurus dari titik o-

# B A B III

## INTEGRAL TERTENTU

Misalkan diketahui fungsi $y = f(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$, kontinu dan positif. Sekarang kita ingin menentukan luas bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ disebelah atas, sumbu x disebelah bawah dan dua ordinat $x = a$ dan $x = b$.



Untuk itu bagilah interval yang diketahui itu kedalam n sub-interval dengan $n - 1$ titik bagi $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_{n-1}$ dimana $a < t_1 < t_2 < \ldots\ldots\ldots < t_{n-1} < b$.

Nyatakan panjang masing-masing subinterval itu dengan $\Delta_1 x = t_1 - t_0$, $\Delta_2 x = t_2 - t_1$, ....... $\Delta_k x = t_k - t_{k-1}$ .......

$\Delta_n x = t_n - t_{n-1}$. Selanjutnya pada setiap titik bagi $t_1, t_2$ ....... $t_{n-1}$ kita tarik garis vertikal pada sumbu x, dengan demikian bidang yang akan ditentukan luasnya itu telah terbagi kedalam n buah jalur. Dengan hitung pendekatan luas setiap jalur dapat dipandang sebagai luas sebuah persegi panjang. Sekarang perhatikan persegi panjang yang ke - k dengan alas $\Delta_k x$ dan tinggi $f(x_k)$ dimana $t_{k-1} < x_k < t_k$, luas persegi panjang ini adalah $f(x_k)\Delta_k x$. Jika luas semua persegi panjang disebut $S_n$ maka =.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$$

Kemudian misalkan jumlah subinterval itu bertambah tak terhingga, dengan perkataan lain $n \to \infty$ maka :

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x.$$

[illegible] terakhir ini dalam hitung integral dapat ditulis sebagai :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x = \int_a^b f(x)dx.$$

Jika luas bidang yang ditanyakan itu disebut A, maka A =

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Dalam rumus ini a dan b berturut-turut disebut batas bawah dan batas atas integrasi.

### III - 1. Sipat-sipat integral tertentu

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b C(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b \left[ f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

5. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (a < b < C\ )$

6. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

### III - 2. CONTOH - CONTOH PENYELESAIAN SOAL.

1. $\int_1^3 x^3\, dx = \frac{1}{4}\, x^4 \Big]_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$

2. $\int_{-1}^{1} (2x^2 - x^3)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}\, x^4 \Big]_{-1}^{1}$

$$= (\frac{2}{3}\, x^3 - \frac{1}{4}) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$$

3. $\int_0^2 \frac{dx}{x} = \int_0^2 x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$$= 2\sqrt{x}\, \Big]_0^2 = 2\sqrt{2}$$

4. $\int_{-2}^{3} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2\,e^{-\frac{x}{2}}\Big]_{-2}^{3}$

$= -2\,(e^{-\frac{3}{2}} - e\,).$

5. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{x+3} = \ln /x+3/\Big]_{0}^{3} = \ln 6 - \ln 3 = \ln$ [illegible]

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

7. $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\Big]_{-3}^{3} = \frac{1}{3}\Big[\frac{\pi}{4}$ [illegible] $\Big] = \frac{\pi}{6}.$

8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x\,dx = -\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0\right)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

9. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{6}\ln\left/\frac{x-3}{x+4}\right/\Big]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{5} - \ln 2\right) = \frac{1}{6}\ln 0{,}1$

**Soal - soal latihan.**

10. $\int_{0}^{2} (2-x)^2\,dx$

11. $\int_{-1}^{2} (1-t^2)\,t\,dt$

12. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

13. $\int_{1}^{8} \sqrt{1+3x}\,dx$

14. $\int_{0}^{3} x(1-\sqrt{x})^2\,dx$

15. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{25-x^2}$

16. $\int_{0}^{2\pi} \sin\frac{1}{2}t\,dt$

17. $\int_{0}^{\sqrt{2}} x e^{x^2}\,dx$

18. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}$

19. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}$

20. $\int_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$

--

# B A B IV

## APLIKASI HITUNG INTEGRAL TERTENTU

### IV - 1. Luas bidang datar.

Dalam pasal 1 Bab III diatas telah kita lihat bahwa ...ng dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dandua ordinat $x = a$ ... b ialah :

$$A = \int_a^b f(x)dx;$$

Jika bidang itu dibatasi oleh kurva $x = g(y)$ dan dua ... $y = C$ dan $y = d$ maka :

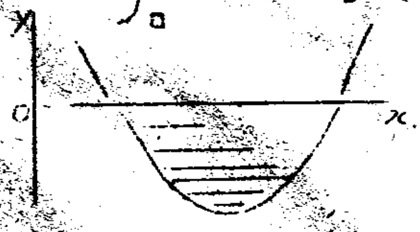
$$A = \int_c^d g(y)dy.$$

Kedua rumus diatas hanya berlaku apabila :

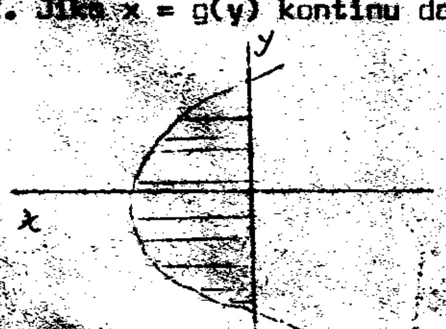
1. $y = f(x)$ atau $x = g(y)$ kontinu dan positif dalam interval tersebut.
2. $y = f(x)$ tidak memotong sumbu x atau $x = g(y)$ tidak memotong sumbu y.
3. $y = f(x)$ atau $x = g(y)$ adalah fungsi-fungsi berharga satu.

<u>Penjelasan :</u>

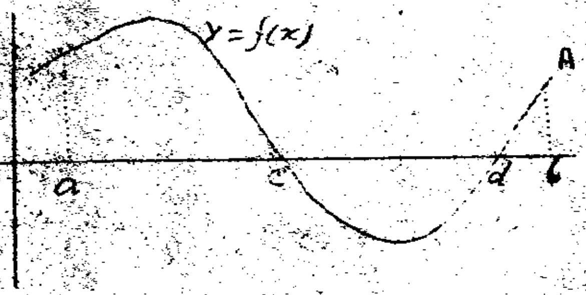
1. Jika $y = f(x)$ kontinu dan negatif pada interval $a,x,b$ maka $\int_a^b f(x)dx$ negatif, ini berarti bahwa luas gambar yang ditanyakan seluruhnya terletak dibawah sb x.




2. Jika $x = g(y)$ kontinu dan negatif pada interval c,d maka $\int_c^d g(y)\,dy$ negatif, ini berarti bahwa luas gambar yang dita... ta seluruhnya berada disebelah kiri sb y.



3. Jika $y = f(x)$ berobah tanda dalam interval $a \leq x \leq b$ berarti kurva memotong sb x pada satu titik atau lebih atau jika $x = g(y)$ berobah tanda dalam interval $c \leq y \leq d$ berarti kurvanya memotong sb y, maka luas yang diminta dinyatakan sebagai jumlah dua atau lebih integral tertentu.




$$A = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d [illegible] + \int_d^b f(x)\,dx.$$

4. Jika $y = f(x)$ atau $x = g(y)$ adalah fungsi-fungsi berharga dua maka rumus diatas berobah menjadi :



$$A = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx \quad ; \quad A = \int_c^d (x_2 - x_1)\,dy.$$

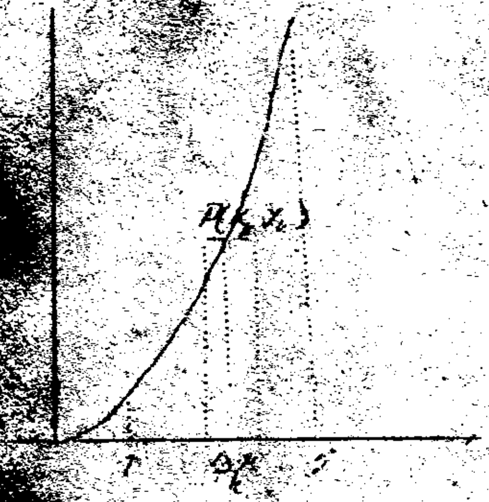
Berikut ini diberikan langkah-langkah untk menentukan luas bidang diatas :

1. Buat gambar sket dari luas bidang yang diminta.
2. Lukis sebuah jalur yang ke - k sebagai wakil.
3. Lukis pada jalur ini sebuah persegi panjang pendekatan dengan alas $\Delta_k x$ dan tingginya $f(x_k)$
4. Jumlahkan luas semua persegi panjang dan pakailah konsep dasar hitung integral untuk $n \to \infty$

CONTOH 1.

Tentukan luas bidang yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x dan ordinat $x = 1$ dan $x = 5$.

Contoh.




$dA = y_k \cdot \Delta_k x$

$$A = \int_1^5 y\,dx$$

$$= \int_1^5 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big]_1^5$$

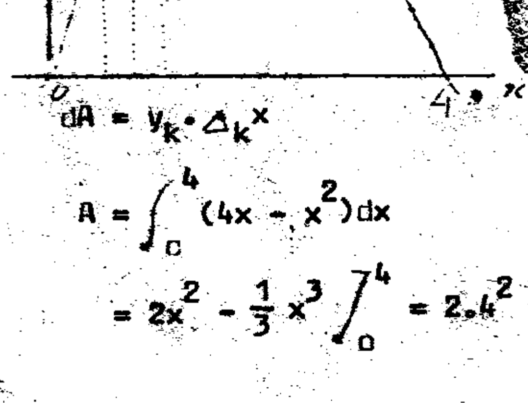
$$= \frac{1}{3}(125 - 1)$$

$$= 41\frac{1}{3}$$

satuan persegi.

Contoh 2.

Hitung luas bidang yang dibatasi oleh kurve $y = 4x - x^2$ dan sumbu $x$.




Titik potong dengan sb x :

$y = 0,\ 0 = 4x - x^2$

$= x(4 - x)$

$x_1 = 0,\ x_2 = 4.$

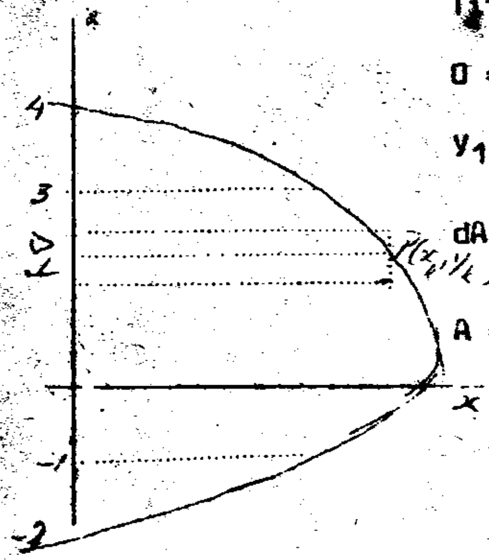
$dA = y_k \cdot \Delta_k x$

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)dx$$

$$= 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^4 = 2.4^2 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 = \frac{32}{3}$$ satuan persegi.

Contoh 3

Hitunglah luas gambar yang dibatasi oleh parabola $x = 8 + 2y - y^2$, sb y dan garis $y = -1$, $y = 3$




Titik potong dengan sb $y \rightarrow x = 0$

$0 = 8 + 2y - y^2 = (y + 2)(4 - 4) = 0$

$y_1 = -2$ ; $y_2 = 4$

$dA = x_k \cdot \Delta y$

$$A = \int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)dy$$

$$= 8y + y^2 - \frac{y^3}{3} \Big]_{-1}^{3}$$

$= 9\frac{2}{3}$ satuan persegi.

Contoh 4.

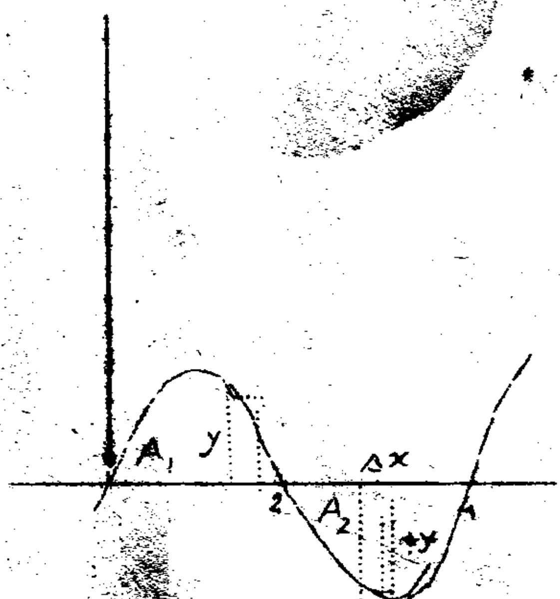
Hitunglah luas gambar yang dibatasi oleh kurva

$y = x^3 - 6x^2 + 8x$ dan sb x.

Jawab : Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$0 = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x - 2)(x - 4)$

$x_1 = 0$; $x_2 = 2$ ; $x_3 = 4$.




$$* \quad A_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \Big]_0^2 = 4$$

$$A_2 = \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$= -(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \Big]_2^4 = 4$$

$A = A_1 + A_2$

$= 4 + 4 = 8$ satuan persegi.

Contoh 5

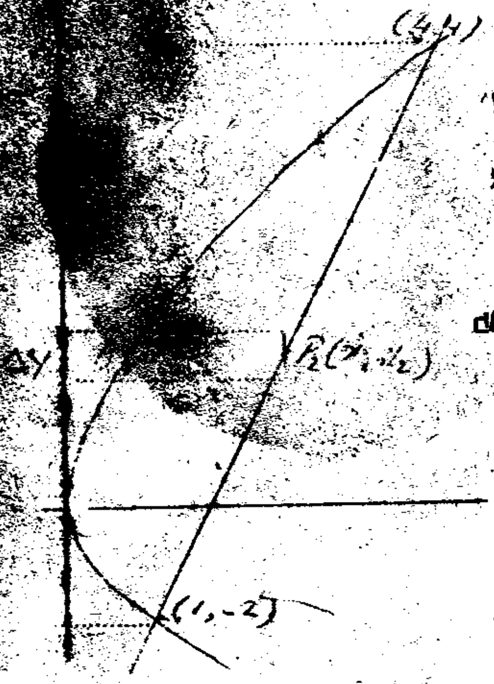
Hitunglah luas gambar antara parabola $y^2 = 4x$

dengan garis $y = 2x - 4$

Jawab : Titik potong kedua kurva kita dapatkan dari :

$$y^2 = 4x = 4\left(\frac{y+4}{2}\right) \rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y + 2)(y - 4) = 0$$




$$\left.\begin{array}{l} y_1 = -2 \\ x_1 = 1 \end{array}\right] (1, -2) \; ; \quad \begin{array}{l} y_2 = 4 \\ x_2 = 4 \end{array} \; (4, 4)$$

$$dA = (x_2 - x_1)\Delta y.$$

$$= \left(\frac{1}{2}y + 2 - \frac{y^2}{4}\right)\Delta y$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2}y - \frac{y^2}{4}\right)\Delta y$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left(2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

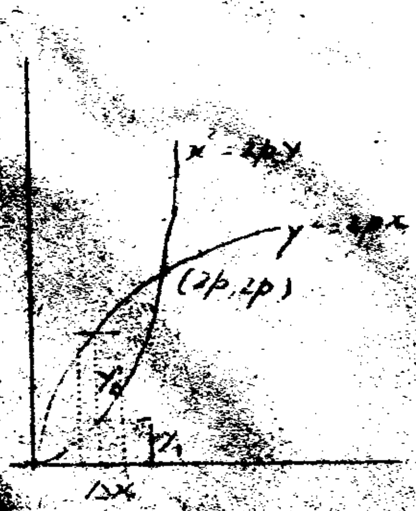
$$= 2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12} \Big]_{-2}^{4}$$

= 9 satuan persegi.

Contoh 6.

Hitunglah luas bidang antara kedua kurva

$y^2 = 2px$ dan $x^2 = 2py$




Titik potong kedua kurva

$$y^2 = 2px \rightarrow \left(\frac{x^2}{2p}\right)^2 = 2px$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2p \\ y = 2p \end{array}\right] (2p, 2p)$$

$$dA = (y_2 - y_1)\Delta x$$

$$= \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)\Delta x$$

$$A = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3.2p} \Big]_0^{2p}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2p} \cdot (2p)^{3/2} - \frac{(2p)^3}{3.2p}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 4p^2 - \frac{4}{3} p^2 = \frac{4}{3} p^2 \text{ satuan persegi.}$$

**SOAL - SOAL LATIHAN.**

7. Hitunglah luas bidang yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$ dan $x = 5$.

8. Hitunglah luas bidang yang dibatasi oleh kurva $y = $ [illegible] $x^2$, $y = 0$, $x = 1$ dan $x = 3$.

9. Hitunglah luas bidang antara parabola $x = 3y^2 -$ [illegible], sb y dan garis-garis $y = 0$, $y = 1$.

10. Hitunglah luas bidang antara perabola $y = 9 - x^2$ dan garis $y = x + 3$.

11. Hitunglah luas gambar antara kedua pabola $y\ x^2 - 4$ dan $y = 8 - 2x^2$.

12. Hitunglah luas gambar antara parabola $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ dan garis $y = x + 5\frac{1}{2}$

13. Hitunglah luas gambar antara garis $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, sb x dan garis $x = \pm$ [illegible].

14. Hitung luas ellip $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

15. Hitung luas benda $y^2 = x^4(4 + x)$.

## IV - 2. VOLUME BENDA PUTAR.

Apabila suatu bidang datar diputar sekelliling suatu garis lurus maka terjadilah sebuah benda yang dinamakan benda putaran, sedangkan garis ini disebut sumbu putaran.

### A. METODA I ( DISC METHOD )

Dalam peristiwa ini kita bedakan dua jenis sumbu putaran :

1. Sumbu putaran merupakan bagian atau batas dari bidang yang diputar.

2. Sumbu putaran bukan merupakan bagian dari bidang yang diputar.

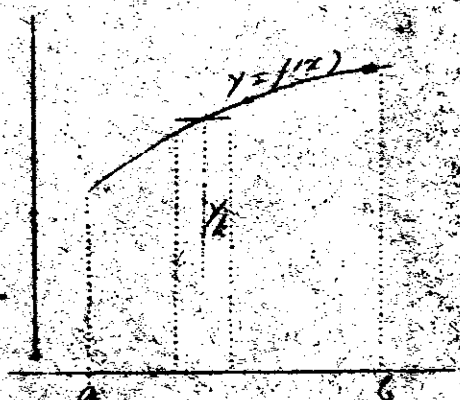
Langkah-langkah penyelesaian.

Ad. 1.

Misalkan bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sb x dan dua ordinat $x = a$ dan $x = b$ diputar sekeliling sb x, maka untuk menentukan volume benda yang terjadi ikutilah urutan pengerjaan dibawah ini.

a. Buatlah gambar sket dari bidang yang akan diputar.

b. Buatlah pembagian jalur tegak lurus sumbu putaran ( dalam gambar cukup dilukiskan sebuah saja ) dan lukis pula pada jalur ini persegi panjang pendekatan dengan alas dan tinggi masing-masing disebut $\Delta_k x$ dan $y_k$.




c. Tentukanlah volume silinder yang terjadi apabila persegipanjang diputar keliling sb x; jadi $\Delta v = \pi y_k^2 \cdot \Delta_k x$ dan volume untuk n buah silinder menjadi $\sum_{k=1}^{n} \pi y_k^2 \cdot \Delta_k x$.

d. Misalkan jumlah persegi panjang itu bertambah menjadi tak terhingga; jadi untuk $n \to \infty$ selanjutnya pakaikan konsep hitung integral :

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \pi y_k^2 \Delta_k x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Contoh 1.

Hitunglah volume benda yang terjadi apabila bidang antara parabola $y^2 = 4x$ dan garis $x = 4$ yang terletak dikwadran pertama diputar sekeliling sumbu x.

Jawab. :


$$\Delta v = \pi y^2 \Delta x$$

$$\therefore \; v = \int_0^4 \pi y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 4x \, dx = 2\pi x^2 \Big]_0^4$$

$= 32\pi$ satuan kubik.

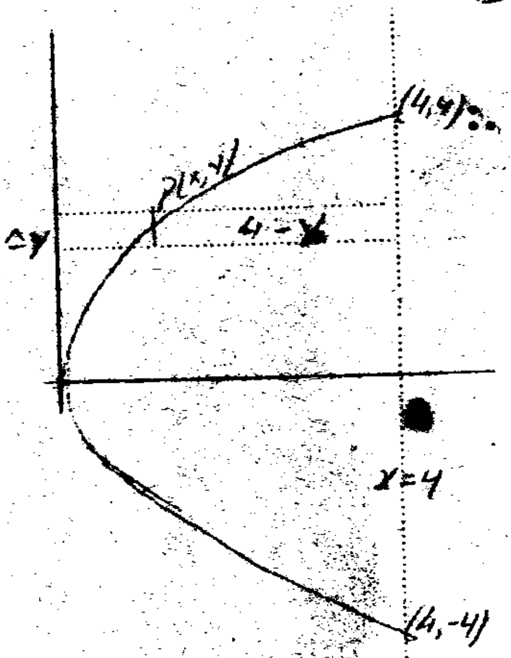
**Contoh 2.**

Hitunglah volume benda yang terjadi apabila daerah antara parabola $y^2 = 4x$ dan garis $x = 4$, diputar sekeliling garis $x = 4$.

**Jawab :**

Jari-jari silinder $= 4 - x$

$$\Delta v = \pi(4 - x)^2\,\Delta y$$




$$\therefore v = \int_{-4}^{4} \pi(4 - x)^2\,dy$$

$$= 2\pi\int_{0}^{4} \left(4 - \frac{y^2}{4}\right)^2 dy$$

$$= 2\pi\int_{0}^{4} \left(16 - 2y^2 + \frac{y^4}{16}\right) dy$$

$$= 2\pi\left(16y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^5}{80}\right]_0^4$$

$$= \frac{1024\pi}{15} \text{ satuan kubik.}$$

**Ad. 2.**

Misalkan bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ sb x diputar sekeliling garis $y = a$, maka untuk menentukan volume benda yang terjadi ikutilah urutan pengerjaan sbb ;

a. seperti ad. 1 diatas.

b. seperti ad. 1 diatas

c. sambung sisi persegi panjang sehingga memotong sumbu puteran $y = a$ pada dua buah titik. volume silinder yang diminta diperoleh dari selisih kedua volume selinder yang terjadi; jadi

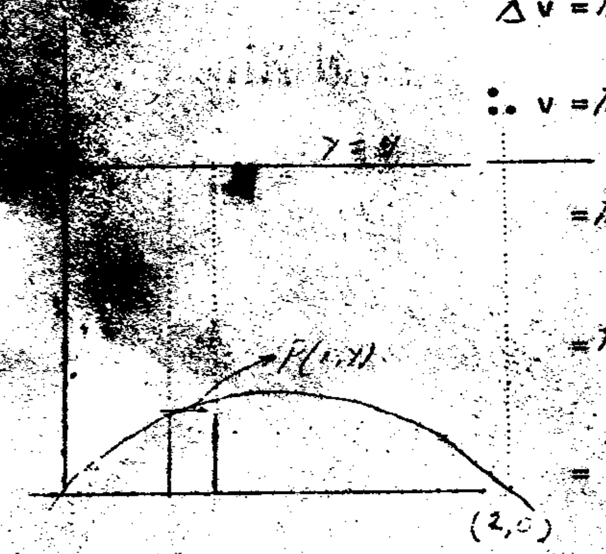

$$\Delta v = \pi a^2 \Delta x - \pi(a - y)^2 \Delta x.$$

d. seperti ad. 1 diatas.

Contoh 3.

Hitunglah volume benda yang terjadi dengan memutar luas gambar potongan parabola $y = 2x - x^2$ dengan sumbu x sekeliling garis $y = 4$.

Jawab :




$$\Delta v = \pi(4)^2 \Delta x - \pi(4 - y)^2 \Delta x$$

$$\therefore v = \pi \int_0^2 \{4^2 - (4 - y)^2\} dx$$

$$= \pi \int_0^2 (8y - y^2)\, dx$$

$$= \pi \int_0^2 (16x - 12x^2 + 4x^3 - x^4)\, dx$$

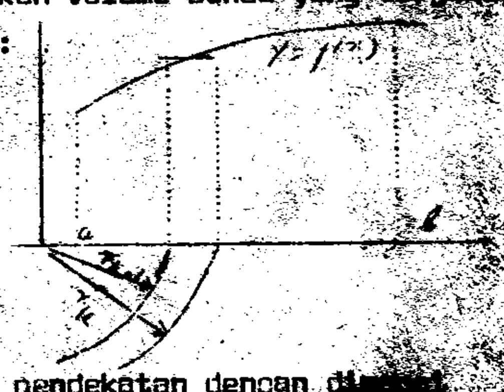
$$= \left(8x^2 - 4x^3 + x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \frac{48\pi}{5}$$

B. METODA II ( SHELL METHOD )

Pada metoda ini pembagian jalur dibuat sejajar dengan sumbu putaran.

Misalkan bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan dua ordinat $x = a$ dan $x = b$ yang terletak di kwadran pertama diputar keliling sumbu y. Untuk menentukan volume benda yang terjadi, ikutilah urutan pengerjaan sbb :




a. seperti ad. 1 dalam A.

b. buat pembagian jalur sejajar dengan sumbu putaran (dalam gambar cukup dilukiskan sebuah saja), dan lukis pula pada jalur ini persegipanjang pendekatan dengan dimensi $\Delta_k x$ dan $y_k$.

c. Tentukan volume silinder shell yang terjadi apabila persegi panjang ini diputar keliling sb y. Jika jari-jari dalam dan luar masing-masing disebut $r_{k-1}$ dan $r_k$, maka :

$$\Delta_k v = \pi(r_k^2 - r_{k-1}^2)\, y_k$$

Dengan dalil harga menengah :

$$r_k^2 - r_{k-1}^2 = \frac{d}{dx}(x^2)\Big]_{x=x_k^1}(r_k - r_{k-1})$$

$$= 2x_k^1 \Delta_k x$$

dimana $r_{k-1} < x_k^1 < r_k$

$$\therefore \Delta_k v = 2\pi x_k^1\, y_k \Delta_k x = 2\pi x_k^1\, f(x_k)\Delta_k x.$$

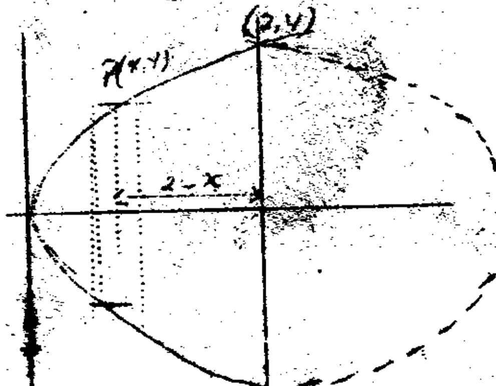
d. seperti ad. 1 dalam A.

$$v = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum x_k^1\, f(x_k)\Delta_k x$$

$$= 2\pi \int_a^b x\, f(x)dx$$

Contoh 4.

Tentukanlah volume yang terjadi apabila parabola $y^2 = 8x$ diputar sekeliling garis $x = 2$.




Tinggi persegi panjang pendekatan $= 2y = 4\sqrt{x}$ dan alasnya $\Delta x$, sedangkan jarak titik tengahnya terhadap sumbu putaran $= 2 - x$.

Apabila persegi panjang ini diputar sekeliling sumbu putaran $x = 2$, maka volume silinder shell yang terjadi adalah $\Delta v = 2\pi(2 - x)\, 4\sqrt{2x}\,\Delta x$. Jadi volume yang ditanyakan menjadi :

$$\therefore v = 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 (2 - x)\sqrt{x}\, dx$$

$$= 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 (2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})\, dx$$

$$= 8\sqrt{2}\,\pi\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big]_0^2$$

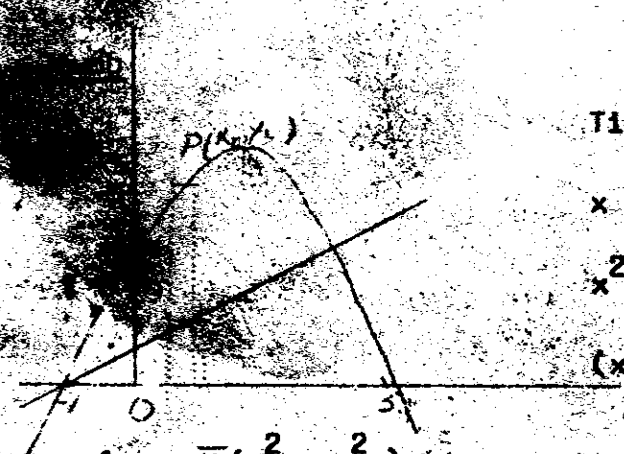
$$= \frac{256\pi}{15} \text{ satuan kubik.}$$

Contoh 5

Hitunglah volume benda putaran, apabila luas gambar yang dibatasi oleh parabola $y = -x^2 + 2x + 3$ dan garis $y = x + 1$ diputar sekeliling :

a. [illegible] $y = 0$

b. [illegible] $x = 3$




Titik potong kedua kurva :

$x + 1 = -x^2 + 2x + 3$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$, $(-1,0)$; $(2,3)$

a. $\Delta v = \pi(y_2^2 - y_1^2)\Delta x$

$\therefore v = \int_{-1}^{2} \pi(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8)\,dx$

$= \pi\left(\frac{x^5}{5} - x^4 - x^3 + 5x^2 + 8x\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{108\pi}{5}$ satuan kubik.

b. $\Delta v = 2\pi(y_2 - y_1)(3 - x)\Delta x$

$\therefore v = 2\pi\int_{-1}^{2}(y_2 - y_1)(3 - x)\,dx$

$= 2\pi\int_{-1}^{2}(x^3 - 4x^2 + 6)\,dx$

$= 2\pi\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{135\pi}{6}$ satuan kubik.

SOAL - SOAL LATIHAN

6. Hitunglah volume benda putaran, apabila luas yang dibatasi oleh kurva $y = 2x^2$, $y = o$, $x = o$ dan $x = 5$ diputar sekeliling sb x.

7. Tentukanlah volume benda yang terjadi, jika bidang antara $y = 4x^2$, $x = o$ dan $y = 16$ diputar sekeliling sb y.

8. Hitunglah benda putaran apabila bidang antara parabola $y^2 = 8x$ dan garis $x = 2$ yang terletak dikuadran pertama diputar sekeliling sb $x$.

9. Hitunglah volume benda yang terjadi apabila daerah antara parabola $y^2 = 8x$ dan garis $x = 2$ diputar sekeliling garis $x = 2$.

10. Tentukanlah volume benda putaran apabila daerah antara kurva $y = 4x - x^2$ dengan sumbu x diputar sekeliling garis $x = 6$.

11. Hitunglah volume benda yang terjadi apabila bidang yang dibatasi oleh kurva $y^2 = x^3$, $y = o$ dan $x = 2$ diputar sekeliling sb x.

12. Hitunglah volume benda putaran apabila daerah antara $x = 9 - y^2$ dan garis $x - y - 7 = o$ dan $x = o$ diputar sekeliling garis $x = o$.

13. Tentukanlah volume benda putaran apabila bidang yang dibatasi oleh kurva $x = 9 - y^2$, garis $x - y - 7 = o$ diputar sekeliling garis $x = 4$.

14. Hitunglah volume elipsoida putar apabila ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ diputar sekeliling sumbu x.

15. Hitunglah volume benda putaran apabila daerah antara kurva $y = x^2 - 3x + 6$ dan garis $x + y - 3 = o$ diputar :

   a. sekeliling garis $x = o$.

   b. sekeliling garis $x = 5$.

## [illegible] - 3. Titik berat bidang datar.

Yang dimaksud dengan bidang datar ialah bidang yang homogen seperti pelat tipis atau dengan perkataan lain massa persatuan volume dari bidang tersebut sama dimana-mana.
Untuk menentukan koordinat titik berat bidang ini harus terlebih dahulu kita pahami tiga perinsip dasar seperti berikut :

1. Titik berat dari suatu persegi panjang adalah titik potong [illegible] diagonalnya.
2. Momen dari suatu bidang terhadap suatu garis sama dengan hasilkali luas bidang itu dengan jarak titik beratnya kegaris tersebut.
3. [illegible] momen dari beberapa bidang sejajar terhadap suatu garis sama dengan momen resultannya.

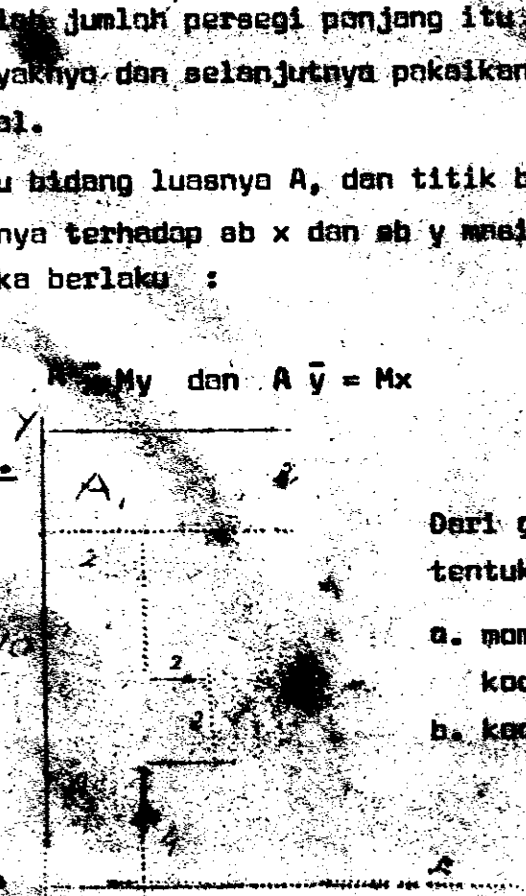
Momen dari suatu terhadap sumbu-sumbu koordinat dapat ditentukan sebagai berikut :

1. buatlah gambar sket dari bidang yang akan ditentukan titik beratnya itu.
2. lukislah sebuah persegi panjang pendekatan seperti halnya dalam menentukanluas.
3. tentukanlah hasilkali luas persegi panjang ini dengan jarak titik beratnya kesumbu-sumbu koordinat, dan kemudian tentukanlah jumlahnya untuk semua persegi-panjang.
4. Anggaplah jumlah persegi panjang itu mendekati tak terhingga banyaknya dan selanjutnya pakaikan perinsip dasar hitung integral.

Jika suatu bidang luasnya A, dan titik beratnya $(\bar{x}, \bar{y})$ sedangkan momennya terhadap sb x dan sb y masing-masing disebut Mx dan My maka berlaku :

$$A\,\bar{x} = M_y \quad \text{dan} \quad A\,\bar{y} = M_x$$

Contoh 1.



Dari gambar disebelah ini tentukanlah :

a. momen terhadap sumbu-sumbu koordinat

b. koordinat titik beratnya.

Jawab :

$A_1 = 5 \times 2 = 10$ ; titik beratnya $( 2\frac{1}{2} , 9 )$

$A_2 = 8 \times 2 = 16$ ; titik beratnya $( 1 , 4 )$

$A_3 = 2 \times 2 = 4$ ; titik beratnya $( 3 , 5 )$

$Mx = 10 \times 9 + 16 \times 4 + 4 \times 5 = 174$

$My = 10 \times 2,5 + 16 \times 1 + 4 \times 3 = 53$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 10 + 16 + 4 = 30$

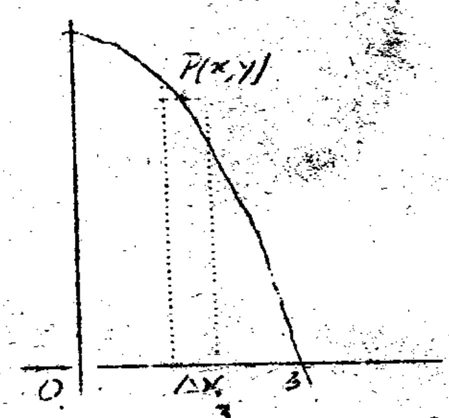
$A\bar{x} = My \qquad 30\,\bar{x} = 53 \; ; \; \bar{x} = 1,77$

$A\bar{y} = Mx \qquad 30\,\bar{y} = 174 \; ; \; \bar{y} = 5,8$

$\therefore$ Titik berat bidang yang ditanya $= ( 1\frac{77}{100} \; ; \; 5\frac{8}{10} )$

**Contoh 2.**

Tentukanlah titik berat dari bidang yang terletak di kuadran pertama yang dibatasi oleh parabola $y = 9 - x^2$ dan sumbu x.




Titik berat dari persegi panjang ialah $(x, \frac{y}{2})$.

$$A = \int_0^3 y \; dy = \int_0^3 ( 9 - x^2) \; dx$$

$$= 9x - \tfrac{1}{3}x^3 \Big]_0^3 = 18$$

$$Mx = \int_0^3 y \cdot \tfrac{1}{2}\, y \; dy = \tfrac{1}{2}\int_0^3 y^2 \; dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^3 (9 - x^2)^2 dx = \tfrac{1}{2}\int_0^3 (81 - 18x^2 + x^4) \; dx$$

$$= \tfrac{1}{2} (81x - 6x^3 + \tfrac{x^5}{5} \Big]_0^3 = \frac{129,6}{2} = 64,8$$

$$My = \int_0^3 y \cdot x \; dx = \int_0^3 x(9 - x^2) \; dx$$

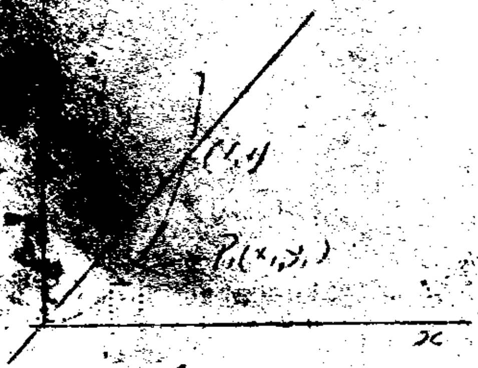
$$= \int_0^3 (9x - x^3) \; dx = \tfrac{9}{2}x^2 - \tfrac{x^4}{4} \Big]_0^3 = \frac{81}{4}$$

$\bar{x} = \frac{My}{A} = \frac{9}{8}$ ; $\bar{y} = \frac{Mx}{A} = 3{,}6$.

Jadi Titik berat yang ditanya $Z(\frac{9}{8}, \frac{18}{5})$

<u>Contoh 3.</u>

Tentukanlah titik berat bidang yang terletak dikwadran pertama dan dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$.




Titik berat dari persegi panjang adalah $(x, \frac{x + x^2}{2})$

$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$Mx = \int_0^1 (x - x^2).\frac{1}{2}(x + x^2)\,dx = \frac{1}{15}$$

$$My = \int_0^1 (x - x^2).x\,dx = \frac{1}{12}.$$

$$\bar{x} = \frac{My}{A} = {}^{1/12}/_{1/6} = \frac{1}{2} ; \bar{y} = \frac{Mx}{A} = {}^{1/15}/_{1/6} = \frac{2}{5}$$

Jadi titik beratnya $Z(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$

<u>SOAL - SOAL LATIHAN.</u>

4. Tentukanlah titik berat dari bidang yang terletak dikwadran pertama yang dibatasi oleh parabola $y = 4 - x^2$ dan sb x.

5. Tentukanlah titik berat bidang yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 9$.

6. Tentukanlah titik berat dari bidang yang dibatasi oleh kedua kurva $y = 4x - x^2$ dan garis $y = x$.

7. Tentukanlah titik berat gambar yang dibatasi oleh kurva $x^2 = 8y$, $y = 0$ dan $x = 4$.

8. Hitunglah titik berat lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ yang terletak dikwadran pertama.

9. Tentukanlah titik berat gambar yang dibatasi oleh kurva $x^2 - 8y + 4$ dan $x^2 = 4y$ yang terletak dikwadran pertama.

10. Tentukanlah titik berat bidang antara kurva [illegible] dan $x^2 = - 8y$.

--

## IV - 4 Titk berat benda [illegible] Putaran

Momen dari suatu benda putaran dengan volume V, yang terjadi dengan memutar suatu bidang detar sekeliling sumbu koordinat terhadap bidang y ang melalui titik asal 0 dan tegak lurus sumbu putaran itu dapat ditentukan sebagai berikut :

1. Lukislah gambar sket dari bidang tersebut dan buatlah pembagian bidang tegak lurus sumbu putaran dan setiap sub bagian dapat dipandang sebagai persegi panjang pendekatan.
2. Tentukanlah hasil kali volume dari selibder yang terjadi dengan jarak titik berat persegi panjang kebidang yang melalui 0 dan tegak lurus sumbu putaran seperti yang disebutkan diatas. Selanjutnya tentukanlah jumlahnya untuk semua persegi panjang.
3. Anggaplah jumlah dari persegi panjang itu mendekati tak terhingga dan selanjutnya pakaikanlah perinsip dasar hitung integral.

Apabila sumbu putaran itu adalah sb. x, maka titik berat benda itu akan terletak pada sumbu x tersebut. Jika $M_{yz}$ momen benda putaran itu terhadap bidangyang melalui titik asal 0 dan tegak lurus sb x, maka :

$$V\bar{x} = M_{yz} \; ; \; \bar{y} = 0$$

Dengan cara yang sama apabila sumbu y sebagai sumbu putaran, maka kita peroleh :

$$V\bar{y} = M_{xz} \; ; \; \bar{x} = 0$$

## Dalil Pappus I.

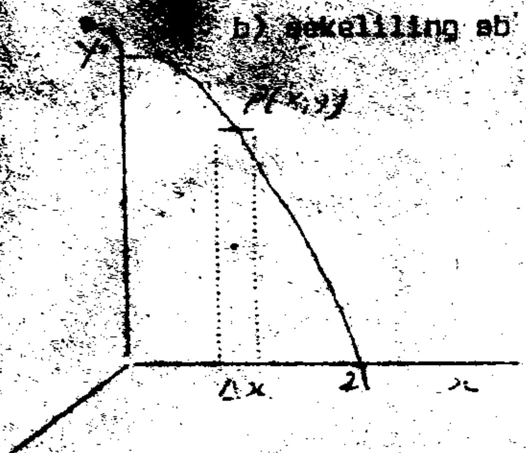
Apabila suatu bidang diputar sekeliling sumbu pada bidang itu, jadi tidak memotong bidang, maka volume benda yang terjadi sama dengan hasilkali luas bidang yang diputar dengan panjang lingkaran yang dijalani oleh titik berat bidang tersebut.

[illegible] 1.

Tentukanlah titik berat benda putaran yang terjadi dari gambar yang dibatasi oleh grafik $y = 4 - x^2$ dan berada dikwadran pertama diputer :

a) sekeliling sb x

b) sekeliling sb y.




a) $V = \int_0^2 \pi y^2 dx$

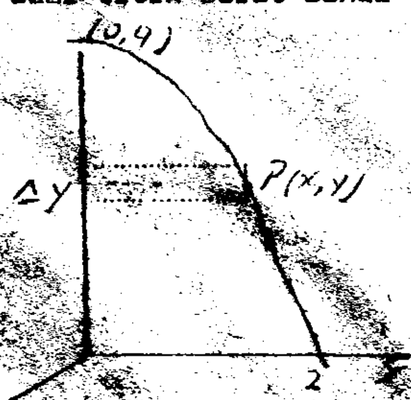
$= \pi \int_0^2 (4 - x^2) dx$

$= \pi \left(4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 256\pi/15$

$Myz = \int_0^2 \pi y^2 . x \, dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 x \, dx = 32\,\pi/3$

$\bar{x} = \frac{Myz}{V} = \frac{256\,\pi/15}{32\,\pi/3} = \frac{5}{8}$

Jadi titik berat benda tersebut $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$




b) $V = \int_0^4 \pi x^2 \, dy$

$= \pi \int_0^4 (4 - y) \, dy$

$= \pi \left(4y - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$

$Mxz = \int_0^4 \pi x^2 . y \, dy$

$= \pi \int_0^4 (4 - y) . y \, dy = \pi \int_0^4 (4y - y^2) \, dy$

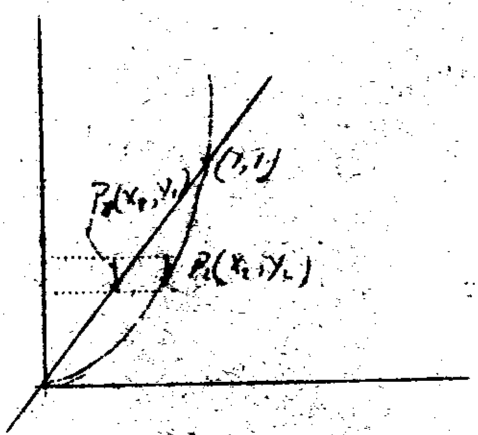
$$= \pi \left(2y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^4 = 10\,\frac{2}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{Mxz}{V} = \frac{10\frac{2}{3}}{8\pi} = 4/3$$

Jadi titik berat benda tersebut ( 0, 4/3 ).

Contoh 2.

Tentukanlah koordinat titik berat benda putaran bila bidang yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$ diputar sekeliling sb y.




$$V = \int_0^1 \pi (x_2^2 - x_1^2)\, dy$$

$$= \pi \int_0^1 ( y - y^2)\, dy$$

$$= \pi \left( \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

$$Myz = \pi \int_0^1 (y - y^2).y\, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (y^2 - y^3)\, dy$$

$$= \pi \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{12}$$

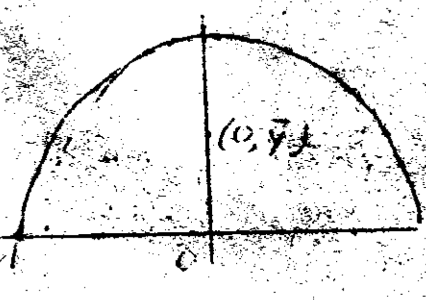
$$\bar{y} = \frac{Mxz}{V} = \frac{\pi}{12} / \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Jadi titik berat benda putaran tersebut ( 0, $\frac{1}{2}$ )

Contoh 3.

Tentukan koordinat titik berat setengah lingkaran dengan radius r.

Jawab




$A = \frac{1}{2}\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

... Dengan dalil Pappus :

$$V = A.2\pi\bar{y}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2 . 2\pi\bar{y}$$

$$\frac{4}{3} r = \pi\bar{y} \longrightarrow \bar{y} = \frac{\frac{4}{3} r}{\pi} = \frac{4r}{3\pi}$$

... koordinat titik berat benda $Z$ . $(0, \frac{4r}{3\pi})$

## ... – SOAL LATIHAN.

4. ...tukanlah koordinat titik berat benda yang terjadi apa... ...a daerah antara kurva $y = x^2$, $y = 9$ dan $x = o$ dipu... ...r sekeliling sb x.

5. Seperti soal nomor 4, jika diputar sekeliling sb y.

6. Tentukanlah koordinat titik berat benda putaran apabila daerah antara parabola $y = 9 - x^2$ diputar sekeliling sb x.

7. Tentukanlah koordinat titik berat dari benda putaran apabila bidang yang dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$ da $y = x$ diputar sekeliling sb x.

8. Tentukanlah koordinat titik berat benda yang terjadi apabila bidang antara kurva $x^2 - y^2 = 16$ dan garis-garis $y = o$, $x = 8$ diputar sekeliling sb x.

9. Tentukanlah koordinat titik berat benda yang terjadi apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $(x - 2) y^2 = 4$, $y = o$ dan $x = 5$ diputar sekeliling sb x.

10. Tentukanlah koordinat titik berat benda putaran apabila bidang antara kedua kurva $y = - x^2 - 3x + 6$ dan $x + y - 3 = o$, diputar sekeliling sb x.

---

## IV - 5 Momen Inersi dari suatu bidang datar.

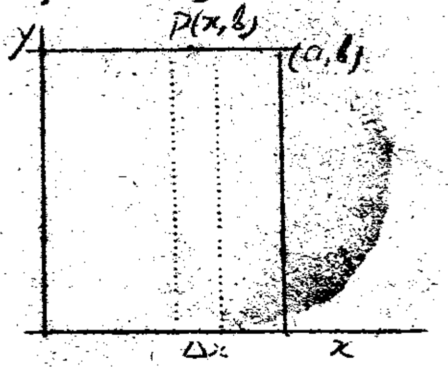
Momen inersi Il dari suatu bidang terhadap garis l yang terletak pada bidang tersebut dapat dihitung sebagai berikut :

1. Buatlah gambar sket dari bidang dan lukislah pembagian sejajar dengan garis l (cukup dilukis sebuah saja), dan lukis pula persegi panjang pendekatannya.
2. Tentukanlah hasilkali luas persegipanjang ini dengan kwadrat jarak dari titik beratnya kegaris l dan kemudian jumlahkan untuk semua persegipanjang.
3. Anggaplah jumlah persegi panjang itu mendekati tak berhingga dan pakaikanlah perinsip dasar hitung integral.

Jari-jari girasi R adalah suatu $\sqrt{}$ Il = $AR^2$; dimana A adalah luas bidang. $\sqrt{}$ bilangan positip yang memenuhi hubungan

**Contoh 1.**

Tentukanlah momen inersi dari persegi panjang yang luasnya A dengan dimensi a dan b, terhadap salah satu sisinya




Misalkan persegi panjang itu seperti tergambar disebelah ini dan misalkan pula sisi dalam pertanyaan diatas berimpit dengan sb y.

Dalam hal ini luas sub persegi panjang $dA = b.\Delta x$, sedangkan titik beratnya $(x, \frac{b}{2})$ dan momen inersi untuk satu elemen ini sama dengan $b.\Delta x, x^2$

$$\text{Jadi : } Iy = \int_0^a x^2 b\, dx = \frac{b}{3} x^3 \Big]_0^a = \frac{1}{3} a^3 b = \frac{1}{3} A a^2$$

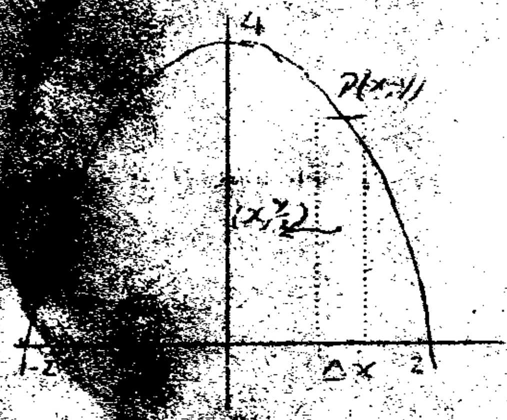
Dari hasil ini dapat diambil suatu patokan bahwa momen inersi dari suatu persegi panjang terhadap suatu sisinya sama dengan $\frac{1}{3}$ hasilkali luas persegipanjang itu dengan kwadrat sisi yang lain.

**Contoh 2.**

Hitunglah momen inersi dari bidang yang dibatasi oleh para-

[illegible]bola $y = 4 - x^2$ dan sumbu x terhadap sumbu y; dan [illegible]lah besarnya jari-jari girasi.

**Cara 1.**




Luas persegi panjang dalam gambar $dA = y.\Delta x$, sedangkan titik beratnya $(x, \frac{y}{2})$

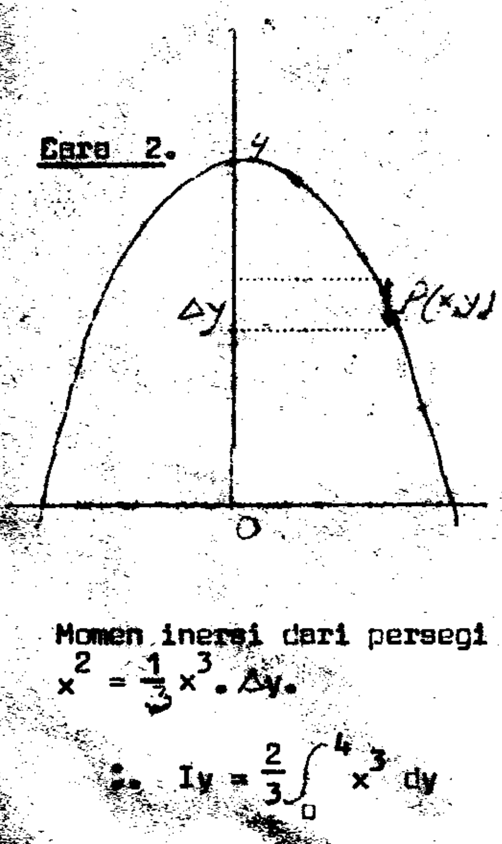
Momen inersi $Iy = \int_{-2}^{2} x^2 y\, dx$

$$Iy = 2\int_0^2 x^2(4 - x^2)\, dx$$

$$= 2\int_0^2 (4x^2 - x^4)\, dx$$

$$= 2(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\Big]_0^2 = \frac{128}{15}$$

**Cara 2.**




Luas persegi panjang $dA = x.\Delta y$ sedangkan sisi yang tegak lurus sb y adalah x.

Seka[illegible] pergunakan hasil soal contoh no. 1 diatas jadi :

Momen inersi dari persegi panjang ini sama dengan [illegible] Δy).
$x^2 = \frac{1}{3}x^3 . \Delta y.$

$$\therefore\ Iy = \frac{2}{3}\int_0^4 x^3\, dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^4 (4 - y)^{3/2} dy$$

$$= -\frac{2}{3} , \frac{2}{5} (4 - 4)^{5/2}\Big]_0^4 = \frac{128}{15}$$

$$A = 2\int_0^4 x\, dy$$

$$= 2\int_0 \sqrt{4 - y}\, dy$$

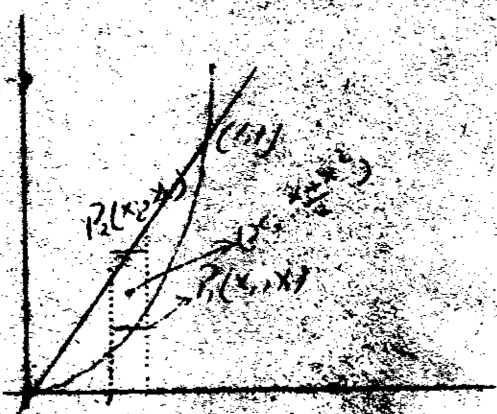
$$= -2.\frac{2}{3}(4 - y)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{32}{3}$$

$$I_y = AR^2 \longrightarrow \frac{128}{15} = \frac{32}{3}R^2$$

$$R^2 = 4/5 \longrightarrow R = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

<u>Contoh 3</u>

Hitunglah momen inersi dari bidang yang [illegible] oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$ yang terletak [illegible] pertama terhadap sumbu $y$.




$$dA = (y_2 - y_1)\Delta x$$

$$= (x - x^2)\Delta x.$$

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 1/3x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$I_y = \int_0^1 x^2(x - x^2)\, dx$$

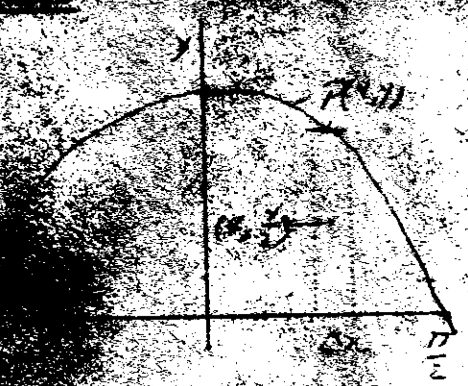
$$= \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{1}{20}$$

<u>Contoh 4.</u>

Hitunglah momen inersi terhadap sb $x$ dari bidang yang dibatasi oleh kurva $y = \cos x$ dari $x = -\frac{\pi}{2}$ ke [illegible] sb $x$, dan tentukan pula jari-jari girasinya.

Contoh



$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= 2 \sin x \Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cdot \frac{1}{3} \cos x \, dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \, d \sin x$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$I_x = AR^2 \longrightarrow \frac{2}{3} = 2R^2$$

$$R^2 = \frac{1}{3} \longrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**SOAL - SOAL LATIHAN :**

5. Diketahui parabola $y = 9 - x^2$ dan garis $y = o$
   Ditanyakan :
   a. hitunglah momen inersi bidang yang dibatasi parabola $y = 9 - x^2$ dan garis $y = o$ terhadap sumbu y.
   b. tentukanlah besaranya jari-jari girasi.

6. Hitunglah momen inersi dari bidang yang dibatasi oleh kurva $y = 8x^2$, $y = o$, $x = 1$ terhadap sumbu y.

7. Hitunglah momen inersi dari bidang yang dibatasi oleh parabola $y = 4 - x^2$ dan $y = o$ yang terletak pada kuadran pertama terhadap sb x.

8. Hitunglah momen inersi dari luas gambar yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$, $x = 1$ terhadap sumbu y.

9. Hitunglah momen inersi dari lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ terhadap diameternya.

10. Hitunglah momen inersi dari ellip $4x^2 + 9y^2 = 36$ terhadap sb x.

## IV - 6 Momen Inersi dari benda putaran.

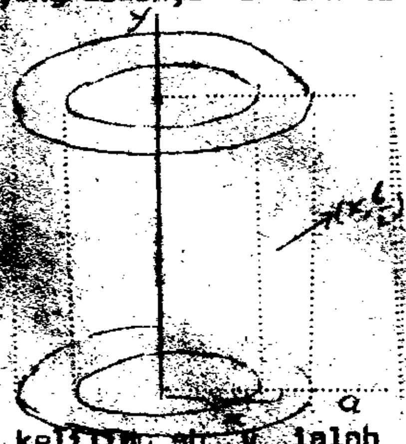
Momen inersi $I_p$ dari suatu benda putaran dengan volume V yang terjadi dengan memutar suatu bidang sekeliling garis p pada bidang itu terhadap garis tersebut dapat dihitung sebagai berikut :

1. Buatlah gambar sket dari bidang itu dan lukislah bagian sejajar sumbu putaran p (cukup dilukis sebuah saja) dan buatlah persegi panjang pendekatannya.
2. Tentukanlah hasilkali volume yang terjadi dengan memutar persegi panjang tadi sekeliling garis p dengan kuadrat jarak dari titik berat persegi panjang itu kegaris p dan kemudian jumlahkan untuk seluruh persegi panjang.
3. Anggaplah jumlah persegi panjang itu mendekati tak terhingga banyaknya dan pakaikan perinsip dasar hitung integral.

Jari-jari girasi R adalah suatu bilangan positif yang memenuhi hubungan $I_p = VR^2$, dimana V adalah volume benda putaran.

### Contoh 1.

Hitunglah momen inersi suatu silinder tegak yang tingginya b dan jari-jari alasnya a, terhadap sumbunya.
Misalkan silinder itu terjadi dengan memutar persegi panjang yang alasnya a dan tingginya b.




Lukislah sebuah subpersegi panjang seperti dalam gambar disebelah ini dengan titik beratnya $(x, \frac{b}{2})$, volume silinder yang terjadi dengan memutar subpersegi panjang ini sekeliling sb Y ialah $\Delta V = 2\pi bx \Delta x$ (dalil Pappus). Sedangkan $V = \pi ba^2$

$$I_p = 2\pi\int_0^a x^2 . bx\, dx$$

$$= 2\pi\int_0^a bx^3 dx = \frac{1}{2}\pi ba^4$$

$$= \frac{1}{2}\pi ba^2 . a^2 = \frac{1}{2} Va^2$$

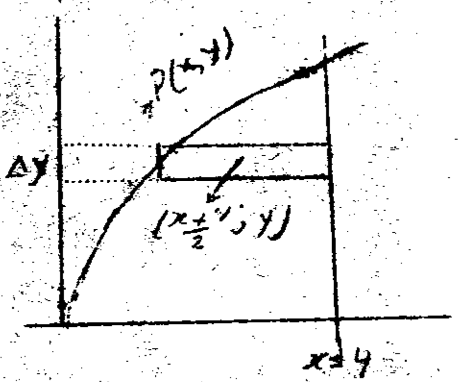
[illegible] hasil ini kelihatan bahwa momen inersi dari silinder pu- [illegible] terhadap sumbunya sama dengan setengah hasilkali volume [illegible] kwadrat jari-jarinya.

[illegible]toh 2.

[illegible]unglah momen inersi dari benda yang terjadi dengan me- m[illegible] bidang yang dibatasi oleh $y^2 = 4x$ dan garis $x = 4$ se- keliling sumbu X.

Jawab.

Cara 1




$$\Delta V = 2\pi y(4 - x)\Delta y$$

$$= 2\pi y(4 - \frac{y^2}{4})\Delta y$$

$$V = 2\pi\int_0^4 y(4 - \frac{y^2}{4})\, dy$$

$$= 2\pi\int_0^4 (4y - \frac{y^3}{4})\, dy$$

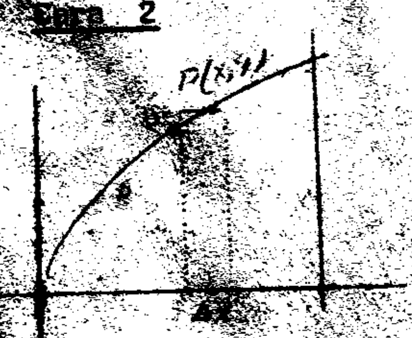
$$= 2\pi(2y^2 - \frac{y^4}{16}\Big]_0^4 = 32\pi$$

$$I_x = 2\pi\int_0^4 y^2 . y(4 - \frac{y^2}{4})\, dy$$

$$= 2\pi\int_0^4 (4y^3 - \frac{y^5}{4})\, dy$$

$$= 2\pi( y^4 - \frac{y^6}{24}\Big]_0^4 = \frac{512\,\pi}{3}$$

Cara 2




$$\Delta V = \pi y^2 \Delta x$$

$$V = \pi\int_0^4 y^2\, dx = 4\pi\int_0^4 [illegible]$$

$$= 4\pi\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = 32\,\pi$$

$$I_x = \frac{1}{2}\pi \int_0^4 y^4\, dx = 8\pi \int_0^4 x^2\, dx$$

$$= 8\pi \left( \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{512\pi}{3}$$

SOAL - SOAL LATIHAN.

3. Hitunglah momen inersi dari benda yang terjadi [illegible] memutar bidang yang dibatasi oleh parabola $y = 4$ [illegible] $x = o$ dan $y = o$ terhadap sumbu $x$.

4. Hitunglah momen inersi dari benda yang te[illegible]an memutar bidang yang dibatasi oleh parabola [illegible] sb $x$ dan garis $x = 2$ sekeliling sumbu $x$ dan te[illegible]n pula besar jari-jari girasinya.

5. Hitunglah momen inersi terhadap sumbu putaran dari benda putaran yang terjadi dengan memutar bidang yang diberikan dibawah ini sekeliling sumbu putarannya :

   a. $x^2 = 8y$, $y = 2$ sekeliling sb $y$.

   b. $y = 4x - x^2$, $y = o$ sekeliling sb $x$.

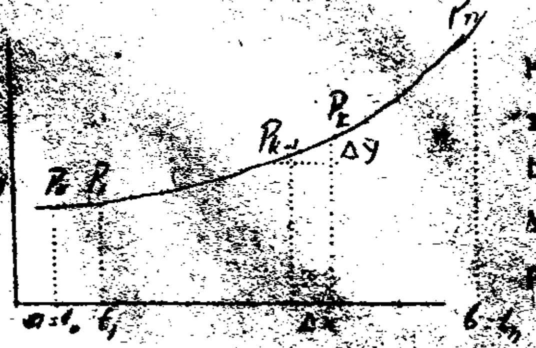
   c. $y^2 = 8x$, $x = 2$ sekeliling sb $y$.

   d. $4x^2 + 9y^2 = 36$ sekeliling sb $x$.

   e. $x^2 + y^2 = a^2$ sekeliling $y = b$m $b$ [illegible] $a$.

IV . 2 Pnjang Busur.

Misalkan $y = f(x)$ kontinu sepanjang interval $a \leq x \leq b$ dan terbagi kedalam $n$ sub interval dengan titik-titik bagi $t_0 = a$, $t_1$, $t_2$ ............, $t_{n-1}$, $t_n = b$. seperti gambar dibawah ini :




Kemudian lukiskanlah garis-garis tegak lurus sb. $x$ pada titik bagi ini hingga memotong kurva $y = f(x)$ pada titik-titik $P_0 = A$, $P_1$, $P_2$ ......., $P_{n-1}$, $P_n = B$.

[illegible] busur $P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2}$ [illegible]

Menurut dalil harga menengah ada sekurang-kurangnya satu titik $x = x_k$ pada busur $P_{k-1}P_k$ dengan $f'(x)$ sama dengan miringnya busur $P_{k-1}P_k = \frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}$.

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\Delta_k x \; ; \; t_{k-1} < x < t_k$$

$$AB = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,\Delta_k x$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Jika pembagian interval itu terhadap sb y maka rumusnya menjadi :

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Apabila $A(u = u_1)$ dan $B(u = u_2)$ adalah dua buah titik pada kurva yang dinyatakan dengan persamaan parameter $x = f(u)$; $y = g(u)$ dan memenuhi syarat kontinu, maka panjang busur AB diberikan oleh :

$$S = \int_{AB} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

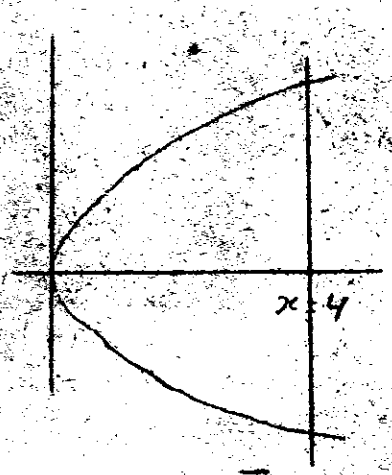
<u>Contoh 1.</u>

Hitunglah panjang busur dari kurva $y = \ln \cos x$ dari $x = \frac{\pi}{6}$ ke $x = \frac{\pi}{4}$

<u>Jawab :</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot -\sin x = -\operatorname{tg} x.$$

$$S = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec x \, dx$$




$$2yy' = 4 \longrightarrow y' = \frac{2}{y}$$

$$A_x = 2\pi \int_0^4 y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 y\sqrt{1 + \frac{4}{y^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{4x + 4}\,dx$$

$$= \frac{8\pi}{3}\,(x + 1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4$$

$$= \frac{8\pi}{3}\,(5\sqrt{5} - 1) \quad \text{satuan persegi.}$$

Contoh 3.

Hitunglah luas permukaan sebuah bola apabila lingkaran $x = a\cos t$ ; $y = a\sin t$ diputar sekeliling sb y.

Jawab.

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \; ; \; \frac{dy}{dt} = a\cos t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t.$$

$$= a^2$$

$$A_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$$

$$= 4\pi a^2.$$

## SOAL - SOAL LATIHAN.

4. Hitunglah luas permukaan benda putaran apabila kurva $x = y^3$ dari $y = o$ ke $y = 3$ diputar sekeliling sb y.

5. Hitunglah luas permukaan benda putaran apabila busur $y = \frac{1}{3} x^2$ dari $x = o$ ke $x = 3$ diputar sekeliling sb x.

6. Hitunglah luas permukaan benda putaran apabila busur $y^2 = 12 x$ dari $x = o$ ke $x = 5$ diputar sekeliling sb x.

7. Hitunglah luas permukaan benda putaran apabila busur $4x = 2 \ln y - y^2$ dari $y = o$ ke $y = 3$ diputar sekeliling sb x.

8. Hitunglah luas permukaan elipsoida putar apabila ellips $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$ diputar sekeliling sumbu panjangnya

--------

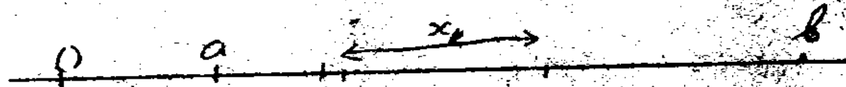
## D - 5. USAHA

**Gaya konstan.**

Kerja W yang dilakukan oleh gaya konstan F yang bekerja pada suatu jarak bererah S sepanjang garis lurus adalah F.S.

**Gaya yang berobah-robah.**

Anggaplah suatu gaya F(x) yang berobah-robah secara kontinu bekerja sepanjang garis lurus. Misalkan X menyatakan jarak berarah dari suatu titik yang dilalui gaya itu dari suatu titik tertentu pada garis itu.




Untuk menghitung kerja yang dilakukan suatu gaya yang menyebabkan titik berpindah dari $x = a$ ke $x = b$;

1. Bagilah interval $a \leq x \leq b$ kedalam n subinterval dan misalkan $x_k$ adalah sebuah titik dalam interval ke- k.

2. Anggaplah bahwa selama perpindahan sepanjang subinterval ke-k gaya itu konstan dan sama dengan F(x). Kerja yang dilakukan selama perpindahan ini sama dengan $F(x_k)\Delta_k x$, dana kerja total yang dilakukan oleh himpunan n gaya diberikan oleh :

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k)\Delta_k x$$

3. Anggaplah $n \to \infty$ maka $\Delta x \to 0$, dan

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} F(x_k)\Delta_k x$$

$$= \int_a^b F(x)dx$$

**Contoh 1**

Jika diberikan suatu pegas panjangnya dalam keadaan normal 10 in, membutuhkan gaya sebesar 25 lb untuk meregangnya $\frac{1}{4}$ in. Hitunglah kerja yang dilakukan untuk meregang pegas dari 11 ke 12 in.

**Jawab.**

Jawab.

Misalkan x menyatakan panjang regangan

maka $F(x) = kx$

Jadikan $x = \frac{1}{4}$, $F(x) = 25$ maka;

$$25 = \frac{1}{4}k \text{ , } k = 100.$$

dan $F(x) = 100\,x.$

Kerja yang diminta :

$$W = \int_{1}^{2} 100\,x\,dx$$

$$= 150 \text{ in lb}$$

Contoh 2.

Suatu kabel beratnya 3 lb/ft dibuka gulungannya dari suatu lilitan silinder. Setelah siap digulung sepanjang 50 ft, maka tentukanlah kerja yang dilakukan oleh gaya grafitasi sehingga siap digulung 250 ft lagi.

Jawab.

Misalkan x = panjang kabel yang dibuka gulungannya pada setiap saat, maka :

$F(x) = 3x$, dan :

$$W = \int_{50}^{300} 3x\,dx = 131.250 \text{ ft.}$$

Contoh 3.

Pemuaian gas dalam suatu silinder menyebabkan sebuah piston bergerak sedemikian rupa sehingga volume dari ruangan gas bertambah dari 15 menjadi 25 $m^3$. Misalkan hubungan antara tekanan ( p $lb/m^2$) dan volume ( V $m^3$) adalah $p\,v^{1.4} = 60$. Hitunglah kerja yang dilakukan gas tersebut.

Jawab.

Jika A menyatakan luas dari suatu ptongan melintang dari selinder, p A adalah gaya tekan oleh gas. Disini volume ber[illegible] sebesar $\Delta V$ yang menyebabkan piston bergerak sejarak $\Delta V/A$ [illegible] kerja yang berhubungan dengan perpindahan ini adalah :

$$pA.\frac{\Delta V}{A} = \frac{60}{V^{1.4}}\Delta V$$

maka :

$$W = 60\int_{15}^{25}\frac{dv}{V^{1.4}} = -\frac{60}{A}V^{-4}\Big]_{15}^{25}$$

$$= -150\left(\frac{1}{25^4} - \frac{1}{15^4}\right) = 9.39 \text{ in}$$

SOAL - SOAL LATIHAN.

4. Jika suatu gaya dari 80 lb meregang suatu pegas dari 12 ft sejauh 1 ft. Tentukankanlah kerja yang dilakukan dalam peregangan ini.

   a). dari 12 ke 15 ft

   b). dari 15 ke 16 ft.

5. Hitunglah ker[illegible]ilakukan gaya gravitasi dalam pergerakan sebuah [illegible]rat 8 ton sampai pada ketinggian 200 km diatas [illegible] bumi.

Contoh 5.

$$\int \sin^5 x\, dx = \frac{-\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5}\int \sin^3 x\, dx$$

$$= \frac{-\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4}{5}.\ \sin^2 \cos x + \frac{4}{5}.\frac{2}{3}\int \sin x\, dx$$

$$= \frac{-\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4}{15}\sin^2 x \cos x - \frac{8}{15}\cos x$$

Contoh 6.

$\int x^3 e^{2x}\, dx \longrightarrow$ dengan rumus (3), $a = 2$, $n = 3$

$$\int x^3 e^{2x} dx = \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}.\tfrac{1}{2}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}.\frac{2}{3}\ \ x e^{2x}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}.\tfrac{1}{2}x e^{2x} - \frac{3}{2}.\tfrac{1}{2}\int e$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + c$$

Contoh 7.

$\int (4+x^2)^{3/2} dx \longrightarrow$ dengan rumus (4), $n = 3/2$, $a = 2$

$$\int (4 + x^2)^{3/2} dx = x\ (4+x)^{3/2} + 3\int (4+x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$(4+x)^{3/2} + \frac{3}{2}\left[(4+x^2)^{\frac{1}{2}} + 4\ \ln(x + \sqrt{4+x^2}\right] + c$$

Soal-soal latihan

8. $\int \ln x\, dx$

9. $\int$ ... $dx$

10. $\int$ ... $e^{-2x}\, dx$

11. $\int x^3 \sin x\, dx$

12. $\int \text{arc tg}\, x\, dx$

13. $\int e^{ax} \sin bx\, dx$

14. $\int x \text{ arc sin } x\, dx$

15. $\int \sin(\ln x)\, dx$

16. $\int \sin^2 dx$

17. $\int \sin^3 dx$

18. $\int \cos^5 x\, dx$

19. $\int (x^2 - 9)^{5/2}\, dx$

20. $\int \frac{dx}{(x^2 - \frac{1}{4})^3}$

Contoh 8. $\int \sec^4 x \, dx = \int \sec^2 x \, (1 + tg^2 x) \, dx$

$$= \int \sec^2 x \, dx + \int tg^2 x \sec^2 x \, dx$$

$$= tg x + \frac{1}{3} tg^3 x + C$$

Contoh 9. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2} \int \left[ \sin(3x+5x) + \sin(3x-5x) \right]$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 8x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x$$

$$= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

Soal-soal latihan

10. $\int \sin^2 x \, dx$
11. $\int \cos^5 2x \, dx$
12. $\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$
13. $\int \operatorname{Cosec}^6 x \, dx$
14. $\int \sin^3 3x \cos^3 3x \, dx$
15. $\int \sin^4 x \, dx$
16. $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$
17. $\int 1 - \cos x \, dx$
18. $\int tg^4 x \, dx$
19. $\int tg^5 2x \, dx$
20. $\int \operatorname{Cotg}^4 3x \, dx$
21. $\int \operatorname{Cotg}^3 x \operatorname{Cosec}^5 x \, dx$
22. $\int \sin^5 x \sin x \, dx$
23. $\int \frac{dx}{\sin x}$ $\int \frac{\sin x \, dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d \cos x}{1-\cos^2 x}$
24. $\int$ [illegible]
25. $\int \cos 4x \cos 2x \, dx$ $-\int \frac{(\ldots) \, d\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$-\int \frac{(1+\cos x) - \cos x \, d\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

V.3. Substi[illegible]ri

[illegible] dipergunakan untuk integral-integral yang mengandung bentuk; $\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$ dan $\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$ tanpa adanya bentuk irrasional yang lain. Integral yang diberikan itu dirobah kedalam fungsi Trigonometri dengan Substitusi sbb :

| Bentuk | Substitusi | Hasil Substitusi |
|---|---|---|
| $\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$ | $u = \frac{a}{b} \sin z$ | $a \cos z$ |
| $\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$ | $u = \frac{a}{b} tg z$ | $a \sec z$ |
| $\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$ | $u = \frac{a}{b} \sec z$ | $a \, tg z$ |

Soal-soal latihan

4. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

6. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx$

7. $\int \frac{d\,x}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

8. $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$

9. $\int \sqrt{\frac{x^2+a^2}{x}}\,dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}$

11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}}$

12. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

## 4. Integrasi Pecahan Bagian

Suatu fungsi $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $f(x)$ dan $g(x)$ polinomial dalam $x$, disebut pecahan resional. Apabila derajat $f(x) <$ derajat $g(x)$ maka $F(x)$ disebut pecahan sejati dan apabila derajat $f(x) \geq$ derajat $g(x)$ maka $F(x)$ adalah pecahan semu.

Suatu pecahan semu dapat dinyatakan sebagai jumlah dari sebuah suku banyak dan sebuah pecahan sejati.

Contoh : $\frac{x^4}{[illegible]} = [illegible] - 2 + \frac{4}{x^2+2}$

Dalam ilmu [illegible] resional sejati dapat dinyatakan sebagai jumlah pecahan-[illegible] yang lebih sederhana dengan penyebutnya yang berbentuk [illegible] dan $ax^2 + b + c)^n$, dimana n bilangan bulat positip. Jadi dalam proses perobahan pecahan resional sejati menjadi pecahan-pecahan bagian [illegible] ada empat kemungkinan yang timbul sehubungan dengan bentuk penyebut pecahan tersebut.

### 1). Faktor-faktor linear tunggal.

Untuk setiap faktor linear tunggal $ax + b$ yang terdapat pada [illegible]yebut, dinyatakan dalam pecahan bagian dengan bentuk $\frac{A}{ax+b}$, [illegible]mana A adalah konstanta yang akan ditentukan harganya.

## V - 5. Bentuk-bentuk Substitusi yang lain.

Dengan substitusi disini dimaksudkan adalah suatu usaha untuk mempermudah bentuk integrand.
Apabila integrand yang diberikan berbentuk irrasional misalnya ( lihat bagian (2) di bawah ), maka dengan Substitusi dalam peubah yang baru, bentuk tersebut dapat berobah menjadi bentuk yang rasional.

(1). Jika integrand berbentuk fungsi rasional dari sin u dan cos u, maka substitusilah :

$$tg\ \tfrac{1}{2}u = z$$

Dari sini kita peroleh :

$$\sin u = \frac{2z}{1+z^2}\ ;\ \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2},\ du = \frac{[illegible]}{1+z^2}$$

(2). Jika integrand mengandung bentuk-bentuk irrasional seperti :

| bentuk | Substitusi | Hasil Substitusi |
|---|---|---|
| $\sqrt[n]{au+b}$ | $au + b = z^2$ | $z$ |
| $\sqrt{[illegible]}$ | $q + pu + u^2 = (z-u)^2$ | $z - u$ |
| $\sqrt{[illegible] - u^2}$ atau | $(A + u)^2\ z^2$ | $(A + u)\ z$ |
| $(A + U)(B - U)$ | $(B - u)^2\ z^2$ | $(B - u)\ z$ |

Contoh 1. Hitunglah $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$