PERSAMAAN DIFFERENSIAL I
dan
APLIKASI

O
l
e
h

dra. RUZNI SY.

drs. SYAMSUAR AHMAD

IKIP PADANG

1977

" KATA PENGANTAR "

Maksud Penerbitan.

Buku ini diterbitkan untuk :

- mengantarkan para mahasiswa kedalam lapangan matematika yang sangat mereka perlukan dalam pemakaian praktis.
- membantu kelancaran jalannya perkuliahan justru banyaknya waktu kuliah yang disedap untuk menyalin.
- membantu mahasiswa justru kurangnya buku-buku matematika diperpustakaan yang serasi tujuan, apalagi yang ditulis dalam Bahasa Nasional.

Penyusunan Topic.

Semua bab disusun sedemikian rupa sehingga betul-betul dapat membantu mahasiswa dalam memecahkan soal-soal Persamaan Differensial dan mentransfer problem-problem praktis yang dihadapinya kedalam bentuk Persamaan Differensial.

Untuk itu setiap bab kami lengkapi dengan contoh-contoh pemecahan soal dan soal-soal latihan yang terpilih dan terarah.

Penyajian.

Buku ini dapat diberikan pada semua jurusan Exacta dan Teknik, dengan penekanan-penekanan tertentu yang disesuaikan dengan jurusannya masing-masing.

Bagi Fakultas/Akademi lain yang membutuhkan Persamaan Differensial sebagai mata kuliah pokok/bantu buku inipun dapat dipergunakan.

Terakhir kritik yang membangun akan kami terima dengan hati terbuka.

Padang, 1977.-

Penulis,

" DAFTAR ISI "

BAB.I.

PENDAHULUAN.

Materi Persamaan Differensial merupakan lanjutan dari Hitung Differensial dan Integral. Justru itu pengetahuan tentang hitung differensial dan Integral hendaklah dikuasai betul dengan perkataan lain " siap untuk dipergunakan ". Untuk mengenal bermacam-macam type dari persamaan differensial, maka sebagai permulaan disini kita mulai dengan terminology yang terdapat dalam buku ini.-

I - 1. Persamaan Differensial (P.D)

P.D. ialah suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih direvativ atau differensial-differensial.

Contoh :

1. $\dfrac{dy}{dx} = x^5+3 = 5x^4+3 = 4 \cdot 5x+3 = 20x \cdot 3$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{k}{M}x = 0$

3. $xdy + ydx + y^2dy = 0$

4. $xy' + y = 3$

5. $y''' - 2(y'')^2+y' = \sin x$

6. $(y'')^2+(y')^3+2y = x^2$

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2z+x\dfrac{\partial z}{\partial y}$

8. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$

No.3 adalah suatu contoh P.D. yang ditulis dalam bentuk differensial-differensial dan equivalent dengan :

$$(x+y^2) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

I - 2. Persamaan Differensial Biasa.

Jika dalam P.D. terdapat hanya satu perubah bebas dan direvativnya adalah direvativ biasa disebut P.D. Biasa (1) s/d (6).

I - 3. Persamaan Differensial Partiel.

Jika dalam suatu P.D. terdapat dua atau lebih perubah bebas, sedangkan derivativnya adalah partiel disebut P.D. Partiel (7) s/d (8).

I - 4. O r d e r.

Order/tingkat dari suatu P.D. ditentukan oleh tingkat tertinggi dari derivativ yang terdapat dalam persamaan tersebut.

Persamaan (1),(3) ; (4) dan (7) disebut berorder satu (2) ; (6) dan (8) berorder dua, dan (5) berorder tiga.

I - 5. Degree.

Degree/pangkat suatu P.D. ditentukan oleh pangkat dari derivativ tertinggi yang terdapat dalam persamaan itu.

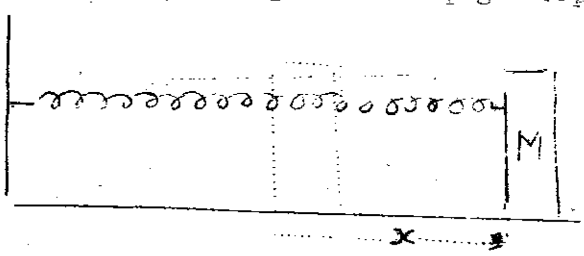
Persamaan (1) s/d (8) disebut berdegree satu kecuali (6) berdegree dua.

I - 6. Asal P.D.

Kebanyakan P.D. berasal dari problema-problema physics, technics, geometry dan sebagainya.

Berikut ini hanya diberikan sebuah contoh dan selanjutnya dapat dilihat Bab IV tentang Aplikasi.

Sebuah benda dengan massa M bergerak menurut suatu garis lurus yang terjadi dengan sebuah pegas seperti gambar dibawah ini :



sesudah $t = 0$

Kita ingin menentukan persamaan gerak dari benda ini, jakni kedudukan benda pada setiap waktu t

Penyelesaiannya.

Berdasarkan hukum Newton ke II yang menyatakan bahwa : gaya yang diperlukan benda sama dengan hasil kali massa dan percepatannya. Dengan hitung differensial telah diketahui bahwa kecepatan $v = \frac{dx}{dt}$ dan percepatan $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

Kecepatan dan percepatan ini bertanda positif bila searah dengan gerakan atau kekanan dan negatif bila geraknya kekiri.

Disamping itu pegas menghasilkan suatu gaya f_s yang arahnya berlawanan dengan arah gerakan dan menurut Hooke sebanding dengan jarak perpindahan benda.

Jadi : $f_s = - k x$

dimana k (konstan) koeffisien elastisiteit.

Dengan demikian persamaan gerak dari benda diatas menjadi :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = - kx \quad \text{atau} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M} x = 0$$

(lihat contoh 2 dalam I - 1)

I - 7. Penyelesaian Umum.

Penyelesaian/jawab umum dari suatu P.D. ialah menentukan suatu hubungan fungsi antara perubah-perubahnya, tanpa derivativ, yang memenuhi persamaan itu.

Contoh.1.

Tentukan jawab umum dari P.D. $xdx + ydy = 0$

Jawab.

$x\,dx + y\,dy = 0$, integrir kedua ruas

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{c}{2}$ atau $x^2 + y^2 = c$; c konstan integrasi.

Contoh.2.

Selesaikan P.D. $\frac{d^2y}{dx^2} = x$

Jawab.

$\frac{d^2y}{dx^2} = x$, kalikan kedua ruas dengan dx

$\frac{d^2y}{dx^2} dx = x\,dx$, integrir kedua ruas $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1$; atau

$dy = \frac{x^2}{2} dx + C_1 dx$, integrir lagi $y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$

Catatan :

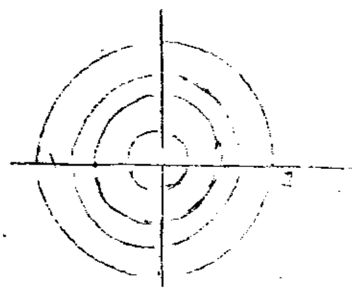
1. Konstanta integrasi dapat dipilih sedemikian rupa sehingga bentuk hasil terakhirnya menjadi lebih sederhana (lihat pemilihan $\frac{1}{2}c$ pada contoh no.1).
2. Dari contoh diatas dapat diambil suatu kesimpulan bahwa jawab umum suatu PD berorder n menghasilkan n konstant sembarang.
3. Jawab umum disebut juga dengan bentuk primitif.

I - 8. Penyelesaian Khusus.

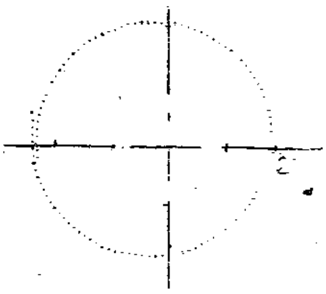
Penyelesaian/jawab khusus suatu P.D. dihitung dari jawab umum dengan mendifinisikan nilai-nilai tertentu kepada setiap konstantanya, yang memenuhi **syarat-syarat** yang diberikan.

Misalnya $x^2+y^2=4$ adalah jawab khusus dari contoh 1 diatas dimana telah dipilih $c = 4$

Ditinjau dari sudut geometry jawab umum suatu P.D. merupakan suatu famili kurva, sedangkan jawab khusus adalah salah satu dari kurva tersebut.



$x^2+y^2=c$ adalah famili lingkaran dengan pusat (0,0) dan radius yang sembarangan.



$x^2+y^2=4$ adalah salah satu dari famili lingkaran itu dengan pusat (0,0) dan radius = 2.

BAB. II.

PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDER KESATU

Dalam bab II ini akan kita uraikan bermacam-macam type PD order satu beserta metoda penyelesaiannya masing-masing.

Bentuk umum PD order satu ialah :

(1) $$F(x, y, y') = 0$$

Jika bentuk (1) ditulis dalam differensial-differnsial kita perolah :

(2) $$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

dimana $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ adalah fungsi-fungsi dari x dan y.

II - 1. P.D. DENGAN PERUBAH TERPISAH

Jika (2) berbentuk atau dapat dirubah menjadi bentuk :

(3) $$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

dimana $M(x)$ adalah fungsi dari x (konstant) dan $N(y)$ adalah fungsi dari y (konstant), maka (3) disebut PD dengan perubah terpisah.

Penyelesaian :

Kedua ruas dari (3) dapat diintegrir secara langsung ; jadi jawab umumnya :

(4) $$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Contoh.

Tentukan jawab umum dari PD berikut :

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ 2. $\frac{dy}{dx} = e^{x-2y}$

3. $\frac{dy}{dx} = \text{cotg } x \text{ tg } y$ 4. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

Jawab.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ atau $x\,dx - y\,dy = 0$

$$\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{C}{2} \;;\; x^2 - y^2 = C$$

2. $\frac{dy}{dx} = e^{x-2y}$ atau $e^x dx - e^{2y} dy = 0 \;;\; e^x - \tfrac{1}{2}e^{2y} = C$

3. $\frac{dy}{dx} = \text{cotg } x \text{ tg } y$ atau $\text{cotg } y\, dy - \text{cotg } x\, dx = 0$

$$\ln \sin y - \ln \sin x = \ln C$$

$$\sin y = C \sin x$$

4. $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ atau

$\dfrac{dx}{1+x^2} + \dfrac{dy}{1+y^2} = 0$; arc tg x + arc tg y = arc tg c

mengingat $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}$; dengan α = arc tg x

dan β = arc tg y, maka hasil diatas menjadi :

$\dfrac{x+y}{1-xy} = c$ atau $x+y = c\,(1-xy)$

SOAL-SOAL LATIHAN

Tentukan jawab umum dari PD dibawah ini :

1. $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$
2. $4y\,dx + x\,dy = 0$
3. $(1+2y)dx + (4-x^2)dy = 0$
4. $y^2dx - x^2dy = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\,y}{x\,(y-3)}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{\operatorname{cotg} x}$

Tentukan jawab khusus dari PD berikut yang memenuhi syarat-syarat yang diberikan :

7. $(1+x^2)dy - x^2y\,dx = 0$; $x = 1$; $y = 2$

8. $\cos y\,dx + (1+e^{-x})\sin y\,dy = 0$; $x = 0$; $y = \dfrac{\pi}{4}$

II - 2. PD YANG DAPAT DIREDUKSI MENJADI PD DENGAN PERUBAH TERPISAH.

II-2-1. PD HOMOGEN.

Ketentuan :

Suatu fungsi f(x,y) disebut homogen dengan derajat n jika memenuhi hubungan :

(1) $f(kx,ky) = k^nf(x,y)$

dimana k ($k \neq 0$) adalah konstatnt ...

Contoh :

1. $f(x,y) = x^3-2x^2y$; fungsi homogen berderajat tiga, karena :

   $f(kx,ky) = (kx)^3 - 2(kx)^2ky = k^3(x^3-2x^2y) = k^3f(x,y)$

2. $f(x,y) = 2x-5y+6$; fungsi ini bukan homogen, karena :

   $f(kx,ky) = 2kx-5ky+6$; ternyata k tidak dapat difaktorkan keluar.

3. $f(x,y) = e^{y/x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$; fungsi homogen berderajat nol, karena :

   $f(kx,ky) = e^{ky/kx} + \operatorname{tg}\frac{ky}{kx} = k^0\left(e^{y/x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\right) = k^0f(x,y)$

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi yang homogen dan jika diambil $k = \frac{1}{x}$, maka :

$$f(x,y) = f(kx,ky) = f(1,\frac{y}{x}) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ketentuan :

Persamaan Differensial

(2) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

disebut homogen jika $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ keduanya fungsi homogen dengan derajat yang sama.

Penyelesaian :

Substitusi $y = vx$; $dy = v\,dx + x\,dv$ kedalam (2), akan terbentuk persamaan :

$P(x,v)\,dx + Q(x,v)\,dv = 0$ adalah PD dengan perubah terpisah dalam x dan v

Bukti :

Oleh karena PD homogen dapat ditulis dalam bentuk :

(3) $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$; dan dengan substitusi $y = vx$, maka (3) menjadi :

$v\,dx + x\,dv = F(v)\,dx$ atau $\frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dx}{x}$; adalah PD dengan perubah terpisah.

Contoh :

Tentukan jawab umum dari PD berikut :

1. $2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0$

2. $(x + \sqrt{y^2+xy})\,dy - y\,dx = 0$

Jawab :

1. $2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0$

Metoda.I.

Subsitusi $y = vx$; $dy = v\,dx + x\,dv$

$2x(vx)dx + \left[x^2+(vx)^2\right](vdx+xdv) = 0$

$x^2\left[2v\,dx + (1+v^2)(v\,dx + x\,dv)\right] = 0$

$(v^3+3v)\,dx + x(1+v^2)\,dv = 0$

$\frac{dx}{x} + \frac{v^2+1}{v^3+3v}\,dv = 0$

$\ln x + \frac{1}{3}\ln(v^3+3v) = \frac{1}{3}\ln C$

$x^3(v^3+3v) = C$; ganti $v = \frac{y}{x}$; diperoleh $y^3+3x^2y = C$

Metoda.II.

$2xy\ dx + (x^2+y^2)\ dy = 0$, kita susun dalam bentuk

$x^2dy + 2xy\ dx + y^2dy = 0$

Kombinasi dari dua buah suku pertama merupakan differensial total dari x^2y atau $d(x^2y)$, dengan demikian hasil integral menjadi :

$x^2y + \frac{y^3}{3} = \frac{C}{3}$ atau $3x^2y + y^3 = C$

Catatan :

Metode II (pendek) kebetulan dapat dipakai dalam pemecahan soal diatas, akan tetapi bukanlah suatu metoda standar untuk PD Homogen (lihat II-3)

2. $x + \sqrt{y^2+xy}\ dy - y\ dx = 0$

Disini substitusi $x = vy$ akan lebih menguntungkan, karena perhitungannya [illegible]kit mudah dari pada kita mempergunakan substitusi $y = vx$ (periksalah)

Jadi :

Substitusi $x = vy$; $dx = v\ dy + y\ dv$

$(vy + \sqrt{y^2+vy^2}dy - y(vdy+ydv) = 0$

$(v + \sqrt{1+v}\ )dy - (v\ dy + y\ dv) = 0$

atau $\frac{dy}{y} - \frac{dv}{\sqrt{(1-v)}} = 0$

$\ln y - 2\sqrt{1-v} = \ln C$

$y\ e^{2\sqrt{1-v}} = c$ atau $y\ e^{2\sqrt{1-\frac{x}{y}}} = C$

II-2-2. PD BENTUK.

$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x+b_2y+c_2)\ dy = 0$

dimana $M(x,y) = a_1x+b_1y+c_1$ dan $N(x,y) = a_2x+b_2y+c_2$

Penyelesaian :

1. Jika harga

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \ ; \text{ substitusi } a_1x+b_1y = t$$

$$dy = \frac{dt-a_1dx}{b_1}$$

akan menghasilkan PD yang berbentuk :

$P\ (x,t)\ dx + Q\ (x,t)\ dt = 0$

adalah PD dengan perubah terpisah dalam x dan t

2. Jika harga

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \; ; \text{ substitusi } \; x = x'+h \, , \; dx = dx'$$
$$y = y'+k \, , \; dy = dy'$$

dimana $x=h$, $y=k$ adalah penyelesaian dari persamaan-persamaan $a_1x+b_1y+c_1=0$ dan $a_2x+b_2y+c_2=0$.

Kita akan memperoleh PD homogen yang bentuknya :

$$(a_1x'+b_1y')dx' + (a_2x'+b_2y')dy' = 0$$

Selanjutnya substitusi lagi $y' = vx'$, $dy' = vdx'+x'dv$

sehingga menghasilkan persamaan :

$$P(x',v)\,dx' + Q(x',v)\,dv = 0$$

adalah PD dengan perubah terpisah dalam x' dan v.

Contoh :

Selesaikan PD berikut :

1. $(3x+2y+1)dx - (3x+2y-1)dy = 0$
2. $(x-y-1)dx + (4y+x-1)dy = 0$

Jawab :

1. $(3x+2y+1)dx - (3x+2y-1)dy = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \; ; \text{ substitusi } 3x+2y=t, \; dy = \frac{dt - 3dx}{2}$$

$$\therefore \quad (t+1)dx - (t-1)\left(\frac{dt-3dx}{2}\right) = 0$$

$$(5t-1)dx - (t-1)dt = 0$$

$$dx - \frac{t-1}{5t-1}\,dt = 0$$

$$x - \frac{1}{5}t + \frac{4}{25}\ln(5t-1) = c \quad \text{atau}$$

$$\frac{5}{2}(x-y) + \ln(15x+10y-1) = c$$

2. $(x-y-1)dx + (4y+x-1)dy = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \; ; \quad \begin{array}{l} x-y-1 = 0 \\ \underline{x+4y-1=0} \end{array} \quad x = h = 1, \; y = k = 0$$

Substitusi $x = x'+h = x'+1$; $dx = dx'$

$y = y'+k = y'$; $dy = dy'$

Persamaan menjadi :

$(x'-y')dx' + (4y'+x')dy' = 0$; PD homogen; selanjutnya substitusi lagi : $y'=vx'$; $dy'=vdx'+x'dv$

Kita peroleh :

$(1-v)\,dx' + (4v+1)(v\,dx' + x'dv) = 0$ atau

$$\frac{dx'}{x'} + \frac{4v-1}{4v^2+1}\,dv = \frac{dx'}{x'} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{8v}{4v^2+1} + \frac{dv}{4v^2+1} = 0$$

$$\ln x' + \tfrac{1}{2}\ln(4v^2+1) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2v = c_1$$

$$\ln x'^2(4v^2+1) + \operatorname{arctg} 2v = c$$

$$\ln(4y'^2+x'^2) + \operatorname{arctg}\frac{2y'}{x'} = c \text{ atau}$$

$$\ln\left[4y^2+(x-1)^2\right] + \operatorname{arctg}\frac{2y}{x-1} = c$$

II-2-3. PD BENTUK

$$yF(x,y)dx+x\,G(x,y)dy = 0$$

Penyelesaian : Substitusi $y = \frac{v}{x}$; $dy = \frac{xdv-vdx}{x^2}$

Ini akan memberikan hasil :

$P(x,v)dx + Q(x,v)dv = 0$; adalah PD dengan perubah terpisah dalam x dan v.

Contoh :

Selesaikan PD : $(y-xy^2)dx - (x-x^2y)dy = 0$

Jawab :

$(y-xy^2)dx - (x+x^2y)dy = 0$

$y(1-x)dx - x(1+xy)dy = 0$

Substitusi $y=\frac{v}{x}$; $dy = \frac{xdv-vdx}{x^2}$

$$\therefore \frac{v}{x}(1-x)dx - x(1-v)\frac{xdv-vdx}{x^2} = 0$$

$$2\,vdx - x(1+v)dv = 0 \quad \text{atau} \quad 2\frac{dx}{x} - \frac{1+v}{v}dv = 0$$

$$2\ln x - \ln v - v = \ln c$$

$$\frac{x^2}{v} = C\,e^v \quad \text{atau} \quad x = C\,ye^{xy}$$

II-2.4. PD DENGAN BERMACAM-MACAM BENTUK SUBSTITUSI.

Persamaan-persamaan yang tidak termasuk type-type diatas tetapi dapat direduksi menjadi PD dengan perubah terpisah yakni dengan jalan bermacam-macam substitusi. Dalam hal ini tidak ada suatu aturan umum dalam proses pemilihan substitusi tersebut.

Contoh :

Tentukan jawab umum PD dibawah ini :

1. $\frac{dy}{dx} = (y-4x)^2$ 2. $\frac{dy}{dx} = tg^2(x+y)$

Jawab :

1. $\frac{dy}{dx} = (y-4x)^2$ atau $dy = (y-4x)^2 dx$

Substitusi $y-4x = v$; $dy = 4dx+dv$

$4dx+dv = v^2dx$ atau $dx - \frac{dv}{v^2-4} = 0$

$x + \frac{1}{4}\ln\frac{v+2}{v-2} = c_1$

$\ln\frac{v+2}{v-2} = \ln c - 4x$

$\frac{v+2}{v-2} = c\,e^{-4x}$ atau $\frac{y-4x+2}{y-4x-2} = c\,e^{-4x}$

2. $\frac{dy}{dx} = tg^2(x+y)$; substitusi $x+y=v$

$dy = dv-dx$

$dv-dx-tg^2v\,dx = 0$

$dx - \frac{dv}{1+tg^2v} = 0$

$dx - \cos^2v\,dv = 0$

$x - \frac{1}{2}v - \frac{1}{4}\sin 2v = c$ atau $2(x-y) = c + \sin 2(x+y)$

SOAL-SOAL LATIHAN.

Selesaikan PD dibawah ini.

1. $(x^3+y^3)dx - 3xy^2dy = 0$
2. $xdy-ydx-\sqrt{x^2-y^2}\,dx = 0$
3. $(x+2y)dx+(2x+3y)dy = 0$
4. $2xdy-2ydx = \sqrt{x^2+4y^2}\,dx$
5. $(2x\sinh\frac{y}{x} + 3y\cosh\frac{y}{2})dx - 3x\cosh\frac{y}{x}dy = 0$
6. $(x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0$ $(x = 2 ; y = 1)$
7. $(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = 0$

8. $(3y - 7x - 7) dx + (7y - 3x + 3) dy = 0$

9. $(2x - 5y + 3) dx - (2x + 4y - 6) dy = 0$

10. $y (xy + 1) dx + x (1+xy+x^2y^2) dy = 0$

11. $(y - xy^2) dx - (x + x^2y) dy = 0$

12. $(2 + 2x^2y^{\frac{1}{2}}) y\, dx + (x^2y^{\frac{1}{2}} + 2) x\, dy = 0$

13. $y' = -2 (2x + 3y)^2$

14. $(2x^2 + 3y^2 - 7) x dx - (3x^2 + 2y^2 - 8) y dy = 0$

15. $(x - 2 \sin y + 3) dx + (2x - 4 \sin y - 3) \cos y\, dy = 0$

II-3. PD. EXACT.

Jika ruas kiri dari

(1) $\quad M (x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

merupakan differensial total dari fungsi $F(x,y)$; jadi jika

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = d\, F(x,y)$ maka (1) disebut PD.Exact.

Oleh karena $d\, F(x,y) = 0$, maka

(2) $\quad F(x,y) = C$

adalah jawab umum dari (1).

Ketentuan :

Syarat yang perlu dan cukup agar (1) adalah PD.Exact :

(3) $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Bukti :

Differensial total dari $F(x,y)$ ialah :

(4) $$d\, F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

Dengan membandingkan (1) dan (4) kita peroleh :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \text{ dan } \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

Dari kedua hubungan ini jelaslah bahwa :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Penyelesaian :

Methoda.I. Oleh karena $\frac{\partial F}{\partial x} dx = M(x,y)dx$ dan dengan mengintegrir menurut x, kita peroleh :

(5) $\quad F(x,y) = \int^x M(x,y)dx + k(y)$

dengan mendifferensiir (5) ke y, didapat :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int^{x} M(x,y)\,dx + k'(y) = N(x,y)$$

$$k'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int^{x} M(x,y)\,dx \quad \text{dan}$$

$$k(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int^{x} M(x,y)\,dx \right] dy$$

Jadi jawab umum (I) lengkapnya :

$$F(x,y) = \int^{x} M(x,y)\,dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int^{x} M(x,y)\,dx \right] dy = C$$

Atau dengan menjabarkan hubungan $\frac{\partial F}{\partial y}\,dx = N(x,y)\,dy$

$$F(x,y) = \int^{y} N(x,y)\,dy + \int \left[M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x,y)\,dx \right] dx = C$$

(* periksalah sebagai latihan).

Contoh :

Selesaikan : PD . $(2x+y)\,dx - (3-x)\,dy = 0$

Jawab : $M(x,y) = 2x+y$; $N(x,y) = x-3$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$F(x,y) = \int (2x+y)\,dx + k(y)$$
$$= x^2 + xy + k(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + k'(y) = x - 3$$

$k'(y) = -3$ dan $k(y) = -3y$

$\therefore \; x^2 + xy - 3y = C$

Integrable kombinasi :

Untuk PD Exact, kita dapat menyusun suatu kombinasi suku-sukunya atau group, yang bisa langsung di integrir. Dari contoh soal diatas :

$(2x+y)\,dx - (3-x)\,dy = 0$; disusun menjadi : $2x\,dx - 3dy + (y\,dx + x\,dy) = 0$

$2x\,dx - 3dy + d(xy) = 0$ atau

$x^2 - 3y + xy = C$.

(lihat II-2-1. contoh soal Soal)

SOAL-SOAL LATIHAN :

Tentukan jawab umum dari :

1. $(x-y)\,dx - x\,dy = 0$

2. $(x + y\cos x)\,dx + \sin x\,dy = 0$

3. $(2x^3 + 3y) dx + (3x + y - 1) dy = 0$

4. $(2x + 3y + 4) dx + (3x + 4y + 5) dy = 0$

5. $(2xye^{x^2 y} + y^2 e^{xy^2} + 1) dx + (x^2 e^{x^2 y} + 2xye^{xy^2} - 2y) dy = 0$

6. Tentukan juga jawab umum dari soal no.1 s/d 5 dengan methoda integrable kombinasi.

I-4. FAKTOR INTEGRASI.

Jika bentuk :

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, bukan exact, maka kita selalu dapat menentukan sebuah fungsi $U(x,y)$ sehingga :

$$U(x,y) \left[M(x,y)dx + N(x,y)dy \right] = 0 \text{ adalah PD Exact.}$$

Dalam hal ini $U(x,y)$ disebut faktor integrasi.

Contoh :

$$(2 xy^2 + y) dx - x dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \text{ ; jadi persamaan bukan exact.}$$

Akan tetapi kombinasi $y dx - x dy$ terdapat dalam

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} = d \left(\frac{x}{y} \right)$$

Apabula persamaan diatas dikalikan dengan $\frac{1}{y^2}$ kita peroleh :

$$2 x dx + \frac{y dx - x dy}{y^2} = 0 \text{, adalah exact.}$$

$$x^2 + \frac{x}{y} = C \text{ atau } x^2 y + x = cy$$

Jadi $U = \frac{1}{y^2}$ disebut faktor integrasi untuk persamaan diatas.

Untuk menentukan faktor integrasi dari PD type tertentu sebenarnya dapat dirumuskan suatu aturan *) , akan tetapi dengan jalan pemeriksaan seperti contoh diatas telah mencukupi kebutuhan kita.-

Berikut ini diberikan beberapa bentuk integrasi kombinasi yang sering terjadi :

(1) $\quad x dy + y dx = d (xy)$

(2) $\quad \frac{x dy - y dx}{x^2} = d \left(\frac{y}{x} \right)$

(3) $$\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)$$

(4) $$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = d\left(\text{arc tg}\,\frac{y}{x}\right)$$

(5) $$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2-y^2} = d\left(\tfrac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y}\right)$$

(6) $$\frac{2\,x\,y\,dx - x^2 dy}{y^2} = \left(\frac{x^2}{y}\right)$$

(7) $$\frac{2xy\,dy - y^2 dx}{x^2} = d\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

*) Bagi yang ingin mempelajari lebih dalam tentang **faktor integrasi** maka beberapa aturan dapat dirumuskan sebagai **berikut :**

Jika :

(1) $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x) \text{ ; faktor integrasinya } e^{\int f(x)dx}$$

(2) $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = -g(y) \text{ ; faktor integrasinya } e^{\int g(y)dy}$$

(3) $M(x,y)dx + N(x,y)\,dy = 0$, homogen dan $Mx + Ny \neq 0$

faktor integrasinya $\dfrac{1}{Mx + Ny}$

(4) $y.f(x,y)dx + x.g(x,y) = 0$ dan $f(x,y) \neq g(x,y)$

faktor integrasinya $\dfrac{1}{Mx - Ny}$

(5) $x^p y^q (a_1 y\,dx + b_1 x\,dy) + x^r y^s (a_2 y dx + b_2 x dy) = 0$

dimana $p, q, a_1, a_2, b_1, b_2, r$ dan s konstanta dan

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{faktor integrasi berbentuk } x^{\alpha} y^{\beta}$$

SOAL-SOAL LATIHAN.

Selesaikan persamaan dibawah ini tanpa mencari faktor integrasi :

1. $(2y - 3x)dx - x\,dy = 0$
2. $x\,dy - y\,dx = x^2 + y^2$
3. $y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0$
4. $(3e^{3x} - 2x)dx + e^{3x}\,dy = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy^2}{1-2x^2 y}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin y}{1-x\cos y}$

7. $(\cos y + y \cos x)\, dx + (\sin x - x \sin y)\, dy = 0$

Tentukan jawab umum PD berikut ini dengan menentukan faktor integrasi terlebih dahulu :

8. $(x^2 + y^2 + x)\, dx + xy\, dy = 0$

9. $(2\, xy^4 e^y + 2\, xy^3 + y)\, dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x)\, dy = 0$

10. $x(4y\, dx + 2x\, dy) + y^3(3y\, dx + 5x\, dy) = 0$

II-5. PD. LINEAR.

Bentuk standard PD Linear order satu ialah :

(1) $$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

dimana P dan Q masing-masing fungsi dari x.

Persamaan (1) disebut linear karena berpangkat satu dalam perubah tak bebas y dan derivativnya $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian :

Kita tulis (1) dalam bentuk :

(2) $$dy + Py\, dx = Q\, dx$$

Kemudian kalikan (2) dengan suatu fungsi x yang akan kita tentukan misalnya R, sehingga ruas kirinya berbentuk integrable kombinasi ; kita tulis :

(3) $$R\, dy + RPy\, dx = RQ\, dx$$

Ruas kanan (3) dapat langsung diintegrir karena R dan Q keduanya fungsi dari x saja.

Sekarang kita hitung R sehingga ruas kiri dari (3)

(4) $$R\, dy + RPy\, dx = \quad (Ry) \quad \text{atau}$$

$$R\, dy + RPy\, dx = R\, dy + y\, dR$$

$$dR = RP\, dx \quad \text{atau}$$

$$\frac{dR}{R} = P\, dx$$

$$\ln R = \int P\, dx \quad \text{atau} \quad R = e^{\int P\, dx}$$

Untuk memperoleh hasil yang paling sederhana dari R maka konstanta integrasi diatas dapat dihilangkan atau diambil sama dengan nol.

Dengan membandingkan (3) dan (4) diperoleh

$$d(Ry) = RQ\, dx$$ dan jawab umum dari (1) menjadi :

(5) $\quad Ry = \int RQ\ dx + c$

dimana $\quad R = e^{\int P\ dx}$

contoh :

Tentukan jawab umum dari PD berikut :

1. $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$ $\qquad$ 2. $x\ dy = 2\ (x^4 + y)\ dx$

3. $(x - \sin y)\ dy + tg\ y\ dx = 0$

Jawab :

1. $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$ $\qquad P = -1\ ;\quad Q = e^{2x}$

$R = e^{\int P\ dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$ dan substitusikan kedalam (5)

kita peroleh :

$$Ry = \int RQ\ dx + c$$

$$e^{-x}y = \int e^{-x}e^{2x}dx + c$$

$$= \int e^{x}dx + c = e^{x}+c$$

$$e^{-x}y = e^{x}+c \quad \text{atau}$$

$$y = e^{2x}+ce^{x}$$

2. $x\ dy = 2\ (x^4 + y)\ dx$

$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 2x^3\ ;\ P = \frac{-2}{x}\ ;\quad Q = 2x^3$

$R = e^{\int Pdx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$

$$Ry = \int RQ\ dx + C$$

$$x^{-2}y = \int x^{-2}.\ 2x^3dx + C$$

$$= \int x\ dx + C = x^2 + C$$

$$y = x^4 + Cx^2$$

3. $(x - \sin y)\ dy + tg\ y\ dx = 0$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{tg\ y}{x - \sin y} = 0$$

Kelihatan bahwa persamaan ini bukan linear dalam y dan $\frac{dy}{dx}$,

akan tetapi bila x diambil sebagai perubah bebas, maka persamaan diatas dapat ditulis :

$\frac{dx}{dy} + \text{cotg}\ y.x = \cos y$ adalah linear dalam x dan $\frac{dx}{dy}$.

Jadi rumus (1) dapat juga berbentuk :

$\frac{dx}{dy} + Px = Q$, dimana P dan Q masing-masing fungsi dari y

$$R = e^{\int P\,dy} = e^{\int \operatorname{cotg} y\,dy} = e^{\ln \sin y} = \sin y$$

Hasil akhir menjadi :

$$R\,x = \int RQ\,dy + C$$

$$x \sin y = \int \sin y \cos y\,dy + C = \tfrac{1}{2}\sin^2 y + \frac{C}{2}$$

atau $\quad 2\,x \sin y = \sin^2 y + C$

SOAL-SOAL LATIHAN.

1. $\frac{dy}{dx} = e^x + y$
2. $y' + xy = 2x$
3. $y' + y = \sin x$
4. $xy' + 3y = x^2 + 1$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+1}{1-x^2}$
6. $\frac{dy}{dx} - (x + y) = 1$
7. $3\,\frac{dy}{dx} = \frac{100 + 2x - y}{50 + x}$
8. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x-1}$
9. $\frac{dy}{dx} = y\,(2x + y^2)$
10. $\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^2 + 4x + 2$

II-6. PD. BERNOULLI.

Bentuk standard PD Bernoulli ialah :

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + Py = Q\,y^n$$

dimana P dan Q masing-masing fungsi dari x dan n adalah konstanta kecuali 0 atau 1.

Untuk n=0 atau n=1 persamaan (1) menjadi PD linear atau PD dengan perubah terpisah.

Penyelesaian :

Persamaan (1) dapat direduksi menjadi PD linear dengan jalan mensubstitusikan sebuah perubah baru sebagai berikut :

Kalikan (1) dengan y^{-n}

$$(2) \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} + P\,y^{1-n} = Q$$

Substitusi : $y^{1-n} = z$ dan $(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ kedalam (2)

$$(3) \qquad \frac{dz}{dx} + (1-n)\,Pz = (1-n)\,Q$$

Bentuk (3) adalah PD linear dalam z dan $\frac{dz}{dx}$

Bila y diganti dengan x dan x dengan y maka persamaan **(1) dapat pula** ditulis dalam bentuk :

(4) $$\frac{dx}{dy} + P\,x = Q\,x^n$$

dimana P dan Q fungsi-fungsi dari y.

contoh :

Tentukan jawab umum dari PD dibawah ini :

1. $\cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x + y^2 = 0$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3y}{x^4 + y^2}$

Jawab :

1. $\cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x + y^2 = 0$

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = -y^2 \sec x, \text{ kalikan dengan } y^{-2}$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1}\operatorname{tg} x = -\sec x \text{ atau}$$

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1}\operatorname{tg} x = \sec x$$

Substitusi $y^{-1} = z \;;\; -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$$\therefore \frac{dz}{dx} + \operatorname{tg} x . z = \sec x \;;\; P = \operatorname{tg} x \;;\; Q = \sec x$$

$$R = e^{\int P\,dx} = e^{\int \operatorname{tg} x\,dx} = e^{-\ln \cos x} = \sec x$$

$$R\,z = \int RQ\,dx + C$$

$$\sec x . z = \int \sec x . \sec x\,dx + C$$

$$\frac{\sec x}{y} = \operatorname{tg} x + c \quad \text{atau} \quad \sec x = y\,(\operatorname{tg} x + c)$$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3y}{x^4+y^2}$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{4y} = \frac{y}{4x^3} \quad \text{atau} \quad \frac{dx}{dy} - \frac{x}{4y} = \frac{x^{-3}y}{4}$$

$$x^3\frac{dx}{dy} - \frac{x^4}{4y} = \frac{y}{4} \quad \text{atau} \quad 4x^3\frac{dx}{dy} - \frac{x^4}{y} = y$$

Substitusi : $x^4 = z \;;\; 4x^3\frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy}$

$$\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = y \;;\; P = -\frac{1}{y} \text{ dan } Q = y$$

$$R = e^{\int P\,dy} = e^{\int -\frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = y^{-1}$$

$$Rz = \int RQ\,dy + C = \int y^{-1} y\,dy + C = y + C$$

$$y^{-1}.x^4 = y + C \quad \text{atau} \quad x^4 = y^2 + Cy$$

SOAL-SOAL LATIHAN.

1. $\frac{dy}{dx} = x^3y^2 + xy$

2. $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + 1 = 3y^2$

3. $3x\frac{dy}{dx} + y + x^2y^4 = 0$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sin^2 y}{x^5 + x\,\mathrm{tg}\,y}$

5. Bentuk umum PD Riccati adalah

$$\frac{dy}{dx} = P + Q\,y + R\,y^2$$

dimana P, Q dan R adalah fungsi-fungsi dari x.

selesaikan (5) jika :

a. $P = x^3$; $Q = \frac{2}{x}$; $R = \frac{1}{x}$; misalkan $y = x^2$.

b. $P = \sec^2 x$; $Q = \mathrm{tg}\,x$; $R = -1$; misalkan $y = \mathrm{tg}\,x + (\frac{1}{v})$

BAB. III.

P.D. TINGKAT SATU PANGKAT TINGGI

Pada permulaan bab II telah diberikan bahwa PD tingkat satu mempunyai bentuk :

$$f(x,y,y') = 0 \qquad \text{atau}$$

(1) $$f(x,y,p) = 0$$

dimana $y' = \frac{dy}{dx}$ diganti dengan p

Jika pangkat dari p lebih besar dari satu seperti dalam $p^3-3p^2x+2py=0$, maka (1) disebut PD tingkat satu pangkat tinggi (dalam contoh pangkat 3). Umumnya persamaan differensial tingkat satu pangkat n dapat ditulis dalam bentuk :

(2) $$p^n+P_1(x,y)p^{n-1}+ \ldots\ldots +P_{n-1}(x,y)+P_n(x,y) = 0$$

Penyelesaian dari (2) pada prinsipnya ialah dengan jalan memecah persamaan tersebut menjadi satu atau lebih PD tingkat satu pangkat satu, dan dapat dikatagorikan sebagai salah satu dari beberapa kemungkinan sebagai berikut :

III-1. PERSAMAAN YANG DAPAT DISELESIAKAN UNTUK p ; f(p) = 0.

Jika ruas kiri dari (2) dapat dipandang sebagai polinomial dalam p dan dapat diuraikan atas n faktor linear yang real dengan bentuk :

(3) $$(p-F_1)(p-F_2) \ldots\ldots (p-F_n) = 0$$

dimana F_1 , F_2 ...... F_n adalah fungsi-fungsi dari x dan y atau konstanta.

Hubungan (3) akan dipenuhi oleh sekurang-kurangnya satu faktornya sama dengan nol ; jadi penyelesaian selanjutnya adalah dengan menjadikan setiap faktornya sama dengan nol.

(4) $$\frac{dy}{dx} = F_1(x,y) \;;\; \frac{dy}{dx} = F_2(x,y) \;\ldots\ldots\; \frac{dy}{dx} = F_n(x,y)$$

Jika penyelesaian dari (4) masing-masing ialah

$$f_1(x,y,c)=0 \;;\; f_2(x,y,c)=0 \;;\; \ldots\ldots \;;\; f_n(x,y,c)=0 .$$

maka jawab umum dari (2) adalah perkalian :

(5) $$f_1(x,y,c) \cdot f_2(x,y,c) \ldots\ldots\ldots f_n(x,y,c) = 0$$

atau $$\prod_{i=1}^{n} f_i(x,y,c) = 0$$

Contoh.1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\,\frac{dy}{dx} + 6 = 0$$

$$p^2 + 5p + 6 = 0$$

$$(p + 2)(p + 3) = 0$$

$$p + 2 = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$y + 2x - c = 0$$

$$p + 3 = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

$$y + 3x - c = 0$$

Jadi jawab umumnya : $(y + 2x - c)(y + 3x - c) = 0$

Contoh.2.

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0$$

$$(xp + x + y)(yp + x) = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + x + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -1 \quad ; \quad R = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

$$xy = -\int x\,dx + c \longrightarrow 2xy + x^2 - c = 0$$

$$y\,dy + x\,dx = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 - c = 0$$

Jawab umumnya :

$$(2xy + x^2 - c)(x^2 + y^2 - c) = 0$$

III.2. PERSAMAAN YANG DAPAT DISELESAIKAN UNTUK X.

a. **Persamaan** tidak mengandung perubah tak bebas y ; $x = f(p)$.

Jika (2) tidak mengandung y sedangkan x dapat dinyatakan sebagai fungsi dari p.

$x = f(p)$; differensialkan ke $-y$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = f'(p)\frac{dp}{dy}$$

$$dy = p\,f'(p)\,dp$$

$$y = \int p\,f'(p)\,dp + c \quad \text{dan}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = f(p) \\ y = \int p\,f'(p)\,dp + c \end{array}\right. \quad \text{adalah jawab umumnya.}$$

Contoh : $x = p^3 + p$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = (3p^2 + 1)\frac{dp}{dy}$$

$$dy = (3p^3 + p)\,dp$$

$$y = \tfrac{3}{4}p^4 + \tfrac{1}{2}p^2 + C$$

Jadi jawab umumnya menjadi :

$$x = p^3 + p$$

$$y = \tfrac{3}{4}p^4 + \tfrac{1}{2}p^2 + C$$

b. Persamaan mengandung x,y dan p ; $x = f(p,y)$

Jika (2) mengandung x,y dan p sedangkan x dapat dinyatakan sebagai fungsi dari p dan y.

(6) $x = f(p,y)$ differensialkan ke y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \quad \text{atau}$$

$\frac{1}{p} = F(y,p,\frac{dp}{dy})$ adalah PD tingkat satu pangkat satu.

Jika penyelesaian dari $\frac{1}{p} = F(y,p,\frac{dp}{dy})$ adalah

(7) $\emptyset(y,p,c) = 0,$

maka jawab umumnya diperoleh dengan mengeliminir p dari (6) dan (7), jika mungkin atau dengan menyatakan x dan y secara terpisah sebagai fungsi dari p.

Contoh : $yp^2 - 2xp + y = 0$

$$x = \frac{y(1+p^2)}{2p}$$

$$dx = \frac{p(1+p^2)dy - y(1-p^2)dp}{2p^2} = \frac{dy}{p}$$

$$2p\,dy = p(1+p^2)dy - y(1-p^2)\,dp$$

$$(1-p^2)(p\,dy + y\,dp) = 0$$

1). $1 - p^2 = 0 \qquad p = \pm 1$

Setelah $p = \pm 1$ disubstitusikan kedalam persamaan yang diberikan kita peroleh $y = \pm x$

2). $p\,dy + y\,dp = 0$

$py = c$

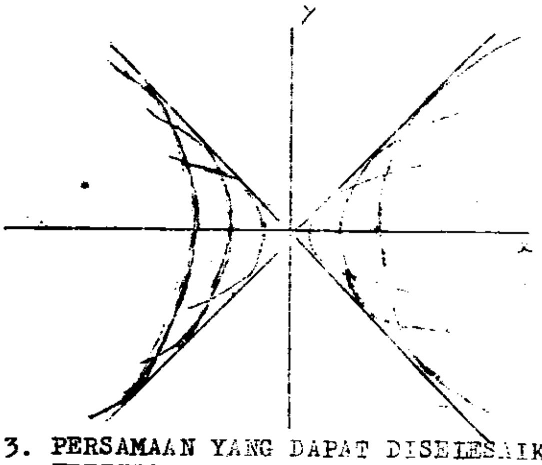
Setalah $p = \frac{c}{y}$ disubstitusikan kedalam persamaan diatas maka diperoleh : $y^2 - 2cx + c^2 = 0$

Catatan :

a. Jawaban 1). $y = \pm x$, kelihatan tidak mengandung konstanta c dan jawaban ini tidak pula dihitung dari penyelesaian umum $y^2-2cx+c^2=0$ seperti halnya dengan jawaban khusus.

Dalam hal ini $y = \pm x$ disebut penyelesaian singgulair.

b. Jawaban umum 2). $y^2-2cx+c^2=0$, melukiskan suatu sistem parabola yang menyinggung garis-garis $y=\pm x$. Sehubungan dengan bentuk kurva yang demikian maka garis-garis $y = \pm x$ disebut envelopeda.



III.3. PERSAMAAN YANG DAPAT DISELESAIKAN UNTUK Y.

a. **Persamaan tidak** mengandung perubah bebas x ; $y = f(p)$.

Jika (2) tidak mengandung x sedangkan y dapat dinyatakan sebagai fungsi dari p.

$y = f(p)$; differensialkan ke x

$$\frac{dy}{dx} = p = f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$dx = \frac{f'(p)}{p}\,dp \; ; \quad \text{dan} \quad y = f(p)$$

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp \quad \text{adalah jawab umumnya.}$$

Contoh : $y = p^2 + 3$

$$\frac{dy}{dx} = p = 2p\,\frac{dp}{dx}$$

$$dx = 2\,dp \longrightarrow x = 2p + c$$

Jadi jawab umumnya :

$$y = \left(\frac{x-c}{2}\right)^2 + 3 \quad \text{atau} \quad 4y = (x-c)^2 + 12$$

b. Persamaan mengandung x,y dan p ; $y = f(x,p)$.

Jika (2) mengandung x,y dan p sedangkan y dapat dinyatakan sebagai fungsi dari x dan p ; jadi :

(8) $y = f(x,p)$

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{atau} \quad p = F(x,y,\frac{dp}{dx}) \text{ adalah PD tingkat satu pangkat satu.}$$

Jika penyelesaian dari $p = F(x,y,\frac{dp}{dx})$ adalah

(9) $\phi(x,p,c) = 0$

maka jawab umumnya diperoleh dengan mengeliminir p dari (8) dan (9) " jika mungkin " atau dengan menyatakan x dan y secara terpisah sebagai fungsi dari p.

Contoh.1. $xp^2 - 2yp = x$

$$y = \tfrac{1}{2}px - \tfrac{1}{2}\frac{x}{p}$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}x\frac{dp}{dx} - \tfrac{1}{2}\,\frac{p-x\frac{dp}{dx}}{p^2}$$

$$\left(p + \frac{1}{p} \right) dx = \left(x + \frac{x}{p^2} \right) dp$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$$

$$p = cx$$

$$y = \tfrac{1}{2}px - \tfrac{1}{2}\frac{x}{p} \quad \text{atau} \quad y = \tfrac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{2c}$$

Contoh.2.

$$x = yp + p^2$$

Tulis y sebagai fungsi dari x dan p

$y = \frac{x}{p} - p$; differensialkan ke -x

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{1}{p} - \frac{x}{p^2}\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx} \quad \text{atau}$$

$$p^3 - p + (x + p^2) \frac{dp}{dx} = 0$$

$$(p^3 - p) \frac{dx}{dp} + x + p^2 = 0 \quad \text{atau}$$

$\frac{dx}{dp} + \frac{x}{p^3-p} = \frac{-p}{p^2-1}$ adalah PD linear tingkat satu.

$$R = e^{\int \frac{dp}{p^3-p}} = \frac{\sqrt{p^2-1}}{p} \quad \text{dan}$$

$$\frac{x\sqrt{p^2-1}}{p} = -\int \frac{dp}{\sqrt{p^2-1}} = -\ln\left(p+\sqrt{p^2-1}\right) + c$$

Jawab umumnya ialah :

$$x = \frac{-p}{\sqrt{p^2-1}} \ln\left(p + \sqrt{p^2-1} \right) + \frac{cp}{\sqrt{p^2-1}}$$

$$y = -p - \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \ln\left(p + \sqrt{p^2-1} \right) + \frac{c}{\sqrt{p^2-1}}$$

c. Persamaan Differensial d'Alembert.

Jika dalam persamaan (8) linear dalam x, jadi :

(10) $$y = x\,F(p) + f(p)$$

disebut persamaannya d'Alembert

$$\frac{dy}{dx} = F(p) + x\,F'(p)\,\frac{dp}{dx} + f'(p)\,\frac{dp}{dx} = p$$

$$\left[\,p - F(p)\,\right]\frac{dx}{dp} - x\,F'(p) = f'(p)$$

adalah PD linear tingkat satu (contoh 2 diatas)

d. Persamaan Differensial Clairant.

Jika dalam (10) $F(p) = p$ maka

(11) $$y = px + f(p)$$

disebut persamaannya Clairant.

Penyelesaian umumnya diperoleh dengan mengganti p dengan c, jadi :

$$y = cx + f(c)$$

Contoh.1. Tentukan jawab umum dari PD :

$$y = px + p^3 + 3p^2 + 2$$

Jawab umumnya ialah :

$$y = cx + c^3 + 3c^2 + 2$$

Contoh.2. Tentukan jawab umum dari PD :

$$\cos^2 y\ p^2 + \sin x \cos y\ p - \sin y \cos^2 x = 0$$

Jawab :

Misalkan : $\sin y = u$, $\sin x = v$; $\dfrac{p \cos y}{\cos x} = \dfrac{du}{dv}$

Persamaan menjadi :

$$u = v\,\frac{du}{dv} + \left(\frac{du}{dv}\right)^2 \quad \text{(persamaan Clairant)}$$

Jawab umumnya :

$$u = cv + c^2 \quad \text{atau} \quad \sin y = c \sin x + c^2$$

SOAL-SOAL LATIHAN :

1. $p^2 - 3 = 0$
2. $xy^2p^2 + (x^3 + xy^2 - y^3)p + x^3 - y^3 = 0$
3. $2p^3 + 3p^2 = x + y$
4. $y^2 - 2xyp + p^2x^2 - p^3 = 0$
5. $y = 4xp^2 + 2xp$
6. $y + p^2 = xp + 1$
7. $x - xp^2 = 0$
8. $y = px + \ln p$

Bab.IV.

A P L I K A S I

Dalam bab ini akan diberikan beberapa aplikasi dari PD order ke- satu.

IV.1. GEOMETRI.

Trajektori-tarjektori Orthogonal.

Trajektori orthogonal dari suatu sistem (family) kurva dimaksudkan suatu kurva yang memotong tegak lurus setiap kurva dari sistem kurva yang diberikan. Sebagaimana telah diketahui bahwa bentuk umum PD order satu dapat ditulis dengan :

$f(x,y,y') = 0$, dimana sebagai jawab umumnya adalah :

(1) $$F(x,y,c) = 0$$

Untuk suatu harga c tertentu, ada satu garis lengkung (kurva) yang termasuk sistem (1).

Apabila diketahui, suatu kurva L yang memotong tegak lurus sertiap anggota dari sistem (1) maka L dinamakan trajektori dari (1).

Jika ada suatu sistem kurva L^* yang memotong tegak lurus setiap anggota dari sistem (1) maka L^* dinamakan sistem trajektori-trajektori orthogonal dari persamaan (1).

Jelas kiranya bahwa pada setiap titik potong L^* dengan sistem (1) garis-garis singgungnya tegak lurus sesamanya. Dengan pengertian geomerti telah diketahui bahwa hasil kali koeffisien arah dari garis-garis singgung itu sama dengan -1.

Contoh.1.

Tentukan trajektori-trajektori orthogonal garis-garis lulus $y = mx$ (m berubah).

Jawab :

$y = mx$, adalah sistem garis-garis lurus yang melalui titik pangkal 0.

Koeffisien arah garis untuk sembarang titik (x,y) ialah $\frac{dy}{dx} = m$;

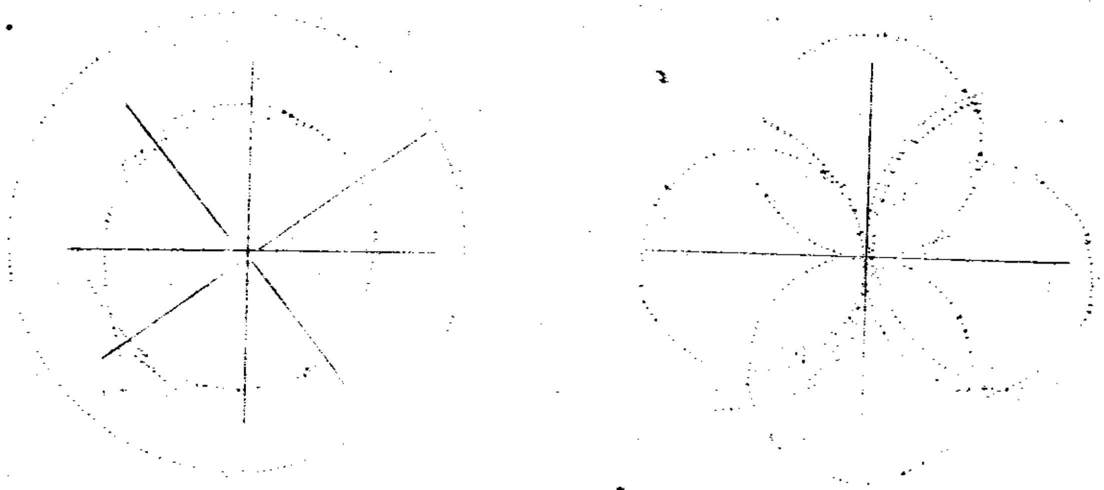
Eliminir m dari $y = mx$ dan $\frac{dy}{dx} = m$ dan diperoleh :

$y = x\frac{dy}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ dan koeffisien arah trajektori ialah

$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{-y}$

Setelah diintegrir, maka diperoleh persamaan trajektori-trajektori yang diminta itu.

$x^2 + y^2 = c$; merupakan sistem lingkaran dengan titik pusatnya pada titik pangkal 0.



Contoh.2.

Tentukan trajektori-trajektori orthogonal dari :

$$x^2 + y^2 = cx$$

Jawab. $x^2 + y^2 = cx$; adalah famili lingkaran yang melalui titik pangkal 0 dengan pusat pada sumbu x.

$2x\, dx + 2y \frac{dy}{dx} = c$. Eleminir c dari kedua persamaan ini, kita dapatkan :

$x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xy \frac{dy}{dx}$ dan miringnya lingkaran-lingkaran ini pada setiap titik (x,y) diberikan oleh :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Akibatnya PD dari trajektori-trajektori yang dikehendaki ialah :

$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; merupakan suatu PD Homogen derajat 2 (periksalah).

Akan tetapi persamaan ini dapat juga diselesaikan bila ditulis dalam bentuk :

$$2xy\, dy - x^2 dy + y^2 dy = 0$$

Kombinasi dari dua suku pertama terkandung dalam differensial dari $\frac{x^2}{y}$,

$$d\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy\, dx - x^2 dy}{y^2}$$

Jadi : $2xy\, dx - x^2 dy + y^2 dy = 0$

$$\frac{2xy\,dx - x^2 dy}{y^2} + dy = 0$$

$$d\left(\frac{x^2}{y}\right) + dy = 0$$

$\frac{x^2}{y} + y = c'$ atau $x^2 + y^2 = cy$, adalah **trajektori-trajektori** orthogonal yang dicari yang berbentuk lingkaran-lingkaran dengan pusatnya pada sumbu y dan melelui titik pangkal 0.

IV.2. D I N A M I K A.

Hukum Newton tentang gerakan :

1. Suatu partikel diam atau bergerak menurut suatu garis lurus dengan kecepatan konstan , kecuali ada pengaruh gaya lain yang merobah keadaan itu.
2. Rata-rata perobahan momen dari pertikel itu berbanding lurus dengan gaya yang bekerja padanya dan berarah sama dengan gaya tersebut.
3. Aksi = reaksi, sedangkan arahnya berlawanan .

Pandanglah suatu partikel dengan massa m bergerak dengan kecepatan v dibawah pengaruh suatu gaya F, maka dengan hukum 1 dan 2 diatas kita peroleh bahwa gaya F berbanding lurus dengan waktu rata-rata dari momentum mv atau

(2) $$F = k\frac{d}{dt}(mv) = km\frac{dv}{dt} = kma$$

dimana $a = \frac{dv}{dt}$ = percepatan partikel dan

k = koeffisien perbandingan yang besarnya tergantung kepada sistem satuan yang dipakai.

Apabila kita memakai sistem satuan cgs (centimeter, gram, second); artinya massa diukur dengan gram-dyne percepatan dengan centimeter/second dan F dalam dyne maka k = 1, atau jika F dinyatakan dalam gram, maka $k = \frac{1}{g}$ ($g \approx 980.5$ cm2/sec).

Jika yang dipergunakan itu sistem fps (feet, pound, second), dimana massa diukur dengan pound, percepatan dengan feet dan F dengan pound-massa, maka k = 1, dan jika F dinyatakan dengan pound maka $k = \frac{1}{g}$ ($g \approx 32.17$ ft/sec2)

Contoh.1.

Pandanglah suatu partikel dengan massa 100 lb bergerak sepanjang permukaan yang kasar dibawah pengaruh suatu gaya sebesar 30 lb.

Misalkan gaya gesekkan 20 lb dan tahanan udara dalam pound sama dengan duakali kecepatan partikel dalam foot persecond.

Tentukan kecepatan dan jarak yang dilalui partikel pada akhir detik pertama.

Jawab.

Misalkan x (foot) jarak yang dilalui partikel dan v kecepatannya pada setiap waktu t.

Resultant gaya yang bekerja pada benda adalah

$30 - 20 - 2v = 10 - 2v$

Jadi menurut (2) kita peroleh persamaan :

$$10 - 2v = \frac{100}{g} \frac{dv}{dt}$$

dimana $g = 32.17$ ft/sec2.

atau : $\frac{dv}{5-v} = \frac{g}{50}\,dt$ adalah PD order satu dengan perubah terpisah.

Cara.I.

$$\int \frac{dv}{5-v} = \int \frac{g}{50}\,dt$$

$$\ln (5-v) = -\frac{gt}{50} + \ln C \text{ atau}$$

$$5 - v = Ce^{-gt/50}$$

Untuk $t = 0$, $v = 0 \Longrightarrow C = 5$

$$5 - v = 5\,e^{-gt/50}$$

$$V = 5 (1 - e^{-gt/50}) \text{ ft/sec}$$

$$V_{t=1} = 5 (1 - e^{-32.17/50}) = 5 (1 - e^{-0,6434})$$

$$= 5 (1 - 0,5255) = 2.37 \text{ ft/sec}$$

Kita tahu bahwa :

$V = \frac{dx}{dt}$ atau $dx = v\,dt$

$$\int dx = \int v\,dt$$

$$x = 5 \int (1 - e^{-gt/50})\,dt$$

$$= 5 \left(t + \frac{50}{g} e^{-gt/50} \right) + C$$

Untuk $t = 0$, $x = 0$ $\quad C = -5 \frac{50}{g}$

$$x = 5 \left(t + \frac{50}{g} (e^{-gt/50} - 1) \right) \text{ ft}$$

$$= x]_1 = 5 \left(1 + \frac{50 (0,5255 - 1)}{32.17} \right) = 1.31 \text{ ft}$$

Cara.II. $\int \frac{dv}{5-v} = \int g/50\ dt$

Untuk $t = 0$, $v = 0$ dan $t = t$; $v = v$

$$\int_0^v \frac{dv}{5-v} = \int_0^t g/50\ dt$$

$$\ln (5 - v) \Big]_0^v = -gt/50 \Big]_0^t$$

$$\ln \frac{5-v}{5} = -gt/50$$

$$\frac{5-v}{5} = e^{-gt/50}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 5 \left(1 - e^{-gt/50} \right) \text{ ft/sec}$$

$$v_{t=1} = 5 \left(1 - e^{-32.17/50} \right) = 2,37 \text{ ft/sec}$$

$$\frac{dx}{dt} = 5 \left(1 - e^{-gt/50} \right)$$

Untuk $t = 0$; $x = 0$ dan $t = t$; $x = x$

$$\int_0^x dx = \int_0^t 5 \left(1 - e^{-gt/50} \right) dt$$

$$x = 5 \left(t + \frac{50}{g} e^{-gt/50} - \frac{50}{g} \right) \text{ ft}$$

$$x_{t=1} = 5 \left(1 + \frac{50 (0,5255 - 1)}{32.17} \right) = 1,31 \text{ ft}$$

Contoh.2.

Seorang penerjun, terjun dengan kecepatan 176 ft/sec ketika parasutnya mulai terbuka. Jika tekanan udara sama dengan $wv^2/256$ lb, dimana w jumlah berat dari orangnya dan parasut. Nyatakanlah kecepatan v sebagai fungsi dari waktu t setelah parasut terbuka.

Jawab.

Gaya yang bekerja pada sistem = berat sistem - tahanan udara.

$$\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - \frac{wv^2}{256} \quad \text{atau}$$

$$\frac{dv}{v^2 - 256} = -\frac{dt}{8}$$

Untuk $t = 0$, $v = 176$ dan $t = t$, $v = v$

$$\int_{176}^{v} \frac{dv}{v^2 - 256} = -\int_0^t \frac{dt}{8}$$

$$\frac{1}{32}\ln\frac{v-16}{v+16}\Big|_{176}^{v} = -\frac{t}{8}\Big|_{0}^{t}$$

$$\ln\frac{v-16}{v+16} - \ln\frac{5}{6} = -4t$$

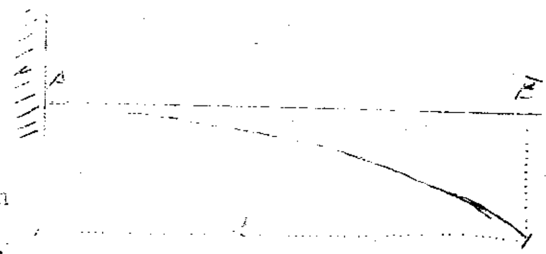
$$\frac{v-16}{v+16} = \frac{5}{6}e^{-4t} \quad \text{atau} \quad v = 16.\frac{6+5e^{-4t}}{6-5e^{-4t}}$$

IV.3. MEKANIKA

DEFLECTION atau LENTURAN

Contoh :

Sebuah gelegar yang salah satu ujungnya A dijepit dan pada ujung yang lain B terdapat beban sebesar P kg.



Ditanyakan :

a. Lenturan Maksimum.

b. Sudut lenturan maksimum.

c. Lenturan dan sudut lenturan maksimum jika diketahui gelegar diatas dari baja profil normal 16 dengan $I = 935\ cm^4$ dan $E = 2,1.10^6\ kg/cm^2$ sedangkan $l = 1,2$ m dan $P = 1$ ton.

Jawab :

$EIy'' = Mx$

$Mx = -Pl + Px$

$EIy'' = -Pl + Px$

$EIy'' = -Plx + \frac{1}{2}Px^2 + C_1$

Untuk $x = 0$ $\quad y' = 0$

$0 = 0 + 0 + C_1 \qquad C_1 = 0$

$EIy' = -Plx + \frac{1}{2}Px^2$

$EIy = -\frac{1}{2}Plx^2 + \frac{1}{6}Px^3 + C_2$

Untuk $x = 0$, $y = 0 \qquad C_2 = 0$

$EIy = -\frac{1}{2}Plx^2 + \frac{1}{6}Px^3$

a. Lenturan di B (y_{max}) adalah pada $x = l$

$EIy_{max} = -\frac{1}{2}Pl^2 + \frac{1}{6}Pl^3$

$y_{max} = \frac{-Pl^3}{3\ EI}$ (tanda - menentukan arah) maka :

$$q = \frac{1}{(100+144\pi^2)^{\frac{1}{2}}} \sin(120\pi t - \varphi) + A\, e^{-100t}$$

Untuk $t = 0$, $q = 0$ maka $A = \frac{3\pi}{25+36\pi^2}$ dan

$$q = \frac{1}{2(25+36\pi^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin(120\pi t - \varphi) + \frac{3\pi e^{-100t}}{25+36\pi^2}$$

c. $$q = \frac{1}{(100+144\pi^2)^{\frac{1}{2}}} \sin(120\pi t - \varphi) + A\, e^{-100t}$$

Differensialkan ke t, karena $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = \frac{60\pi}{(25+36\pi^2)^{\frac{1}{2}}} \cos(120\pi t - \varphi) - 100\, A e^{-100t}$$

Untuk $t = 0$, $i = 5$, maka $100A = \frac{60\pi}{(25+36\pi^2)^{\frac{1}{2}}} \cos\varphi - 5$

$$= \frac{300\pi}{25+36\pi^2} - 5 \quad \text{dan}$$

$$i = \frac{60\pi}{(25+36\pi^2)^{\frac{1}{2}}} \cos(120\pi t - \varphi) - \left(\frac{300\pi}{25+36\pi^2} - 5\right) e^{-100t}$$

IV.5. PEMINDAHAN PANAS.

Hukum-hukum pemindahan panas :

I. Jumlah panas suatu benda berbanding lurus dengan massa dan temperaturnya.

II. Panas mengalir dari temperatur yang lebih tinggi kepada temperatur yang lebihrendah.

III. Berkurangnya panas suatu benda berbanding lurus dengan selisih antara temperatur benda dan temperatur median dimana benda itu berada.

IV. Jumlah panas yang melalui suatu penampang berbanding lurus dengan penampang itu dan gradient temperatur; yakni perubahan rata-rata temperatur terhadap jarak, normal ke penampang.

Contoh.1.

Sebuah bola tembaga dari 100^o berada diudara selama 15 menit, berkurang panasnya menjadi 70^o. Jika diketahui temperatur udara waktu itu 30^o. Hitunglah kapan panas benda menjadi 40^o.

Jawab :

Soal ini dapat dipecahkan dengan pertolongan hukum II dan III.

Misalkan T temperatur benda pada saat t menit, maka dengan III :

$$\frac{dT}{dt} = -k\ (T - 30) \quad \text{atau}$$

$$\frac{dT}{T-30} = -k\ dt$$

k diambil negatip karena benda memberikan panas untuk t = 0,

T = 100 dan t = 15, T = 70

$$\int_{100}^{70} \frac{dT}{T-30} = -k \int_{o}^{15} dt$$

$$\ln T - 30 \Big|_{100}^{70} = -kt \Big|_{o}^{15}$$

$$\ln 40 - \ln 70 = -15\ k \ ; \ \frac{4}{7} = e^{-15k}$$

Untuk t = 0, T = 100 dan t = t ; T = 40

$$\int_{100}^{40} \frac{dT}{T-30} = -k \int_{o}^{t} dt$$

$$\ln 10 - \ln 70 = -kt \ ; \ \frac{1}{7} = e^{-kt}$$

$$e^{-15kt} = (e^{-15k})^{t} = \left(\frac{4}{7}\right)^{t} = \left(\frac{1}{7}\right)^{15}$$

$$t \ln \frac{4}{7} = 15 \ln \frac{1}{7}$$

$$t = \frac{-15 \ln 7}{\ln \frac{4}{7}} = 52 \text{ menit.}$$

Pemakaian hukum IV, terutama dalam problem steady-state, dimana jumlah panas yang mengalir tidak tergantung kepada waktu. Pada umumnya problem ini terikat kepada waktu, [illegible] akan membawa kita kepada PD Partiel, yang tidak kita bicarakan [illegible]siri.

Misalkan q (kal/sec) jumlah panas yang konstan melalui suatu penampang seluas A cm2 dan tegak lurus arah aliran, misalkan $t^{o}c$ temperatur suatu titik P dari benda itu dan x jawak dari titik asal yang dipilih ketitik P.

Dengan hukum IV diperoleh :

(5) $$q = KA \frac{dt}{dx}$$

dimana K = koeffisien hantaran yang besarnya tergantung kepada **sifat** material dari benda tersebut.

Oleh karena temperatur berkurang dalam arah aliran, maka dengan II $\frac{dt}{dx}$ bertanda negatip.

Dengan demikian (5) menjadi :

(6) $$q = -KA\frac{dt}{dx}$$

Sekarang pandanglah sebuah pipa yang berbentuk silinder yang berisi uap. Pipa dilapis dengan suatu bahan lain dengan koeffisien **hantaran**-nya K. Misalkan radius bagian dalam dan luar dari dinding pipa yang terjadi masing-masing x_1 dan x_2 dan temperaturnya t_1 dan t_2.

Dengan syarat steady-state panas akan mengalir **secara radial** dan penampang A yang diuraikan diatas disini merupakan permukaan **datar** dari dinding pipa dengan radius x dimana $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$

Jika panjang pipa L (cm) maka $A = 2\pi x L$

Persamaan (6) menjadi :

$$q = -2\pi KLx\frac{dt}{dx} \quad \text{atau}$$

$$q\frac{dx}{x} = -2\pi KL\,dt \quad \text{adalah PD dengan perubah terpisah.}$$

Untuk $x = x_1$, $t = t_1$ dan $x = x_2$, $t = t_2$

$$q\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x} = -2\pi KL\int_{t_1}^{t_2}dt$$

$$q\ln\frac{x_2}{x_1} = -2\pi KL\,(t_2 - t_1) \quad \text{atau}$$

(7) $$q = \frac{2\pi KL\,(t_1 - t_2)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

Contoh.2.

Sebuah pipa panjangnya 20 meter dan diameternya 30 cm, berisi uap dari 100^oc. Pipa dilapis dengan suatu bahan lain dengan koeffisien **hantaran** 0,00225 kal/cm dan tebalnya 10 cm. Jika temperatur bagian **luar sekarang** menjadi 35^o, hitunglah :

a. Panas yang hilang perjam.

b. Temperatur tengah-tengah dari pipa yang terjadi.

Jawab : Dengan rumus (7).

a. $$q = \frac{2\pi KL\,(t_1 - t_2)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

$L = 20$ m $= 2000$ cm $\qquad x_1 = \frac{30}{2} = 15$

$K = 0{,}00225 \qquad x_2 = 15 + 10 = 25$

$t_1 = 100^\circ$; $t_2 = 35^\circ$

$$q = \frac{2\,\pi .\ 0{,}00225\ .\ 2000\ (100 - 35)}{\ln(25/15)} \text{ kal/sec}$$

$$= 3586{,}0257 \text{ kal/sec}$$

Jadi jumlah panas yang hilang perjam :

$$q = 3600\ .\ 3586{,}0257 \text{ kal} = 1.29\ 10^7 \text{ kal}$$

b. Radius sampai dinding tengah dari pipa ialah

$$x_2 = 15 + \frac{10}{2} = 20$$

Jadi : $$3586.0257 = \frac{2\,\pi .\ 0{,}00225\ .\ 2000\ (100 - t_2)}{\ln(20/15)}$$

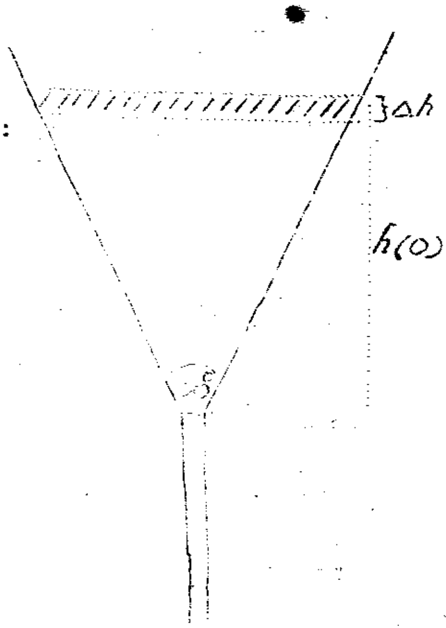
$$98{,}283\ 288t = 6242.3031$$

$$t = 63{,}5^\circ$$

IV.6. MEKANIKA FLUIDA.

Sebuah corong berisi air, sudut keluar melalui pipa adalah 60° dan penampang pipa 0,5 cm2. Tinggi air dalam corong pada $t = 0$ dalah $h(0) =$ 10 cm. Pada waktu $t = 0$, mulut pipa dibuka dan air mengalir keluar. Ditanyakan kapan corong itu akan kosong.

Jawab :



Volume air yang keluar dalam waktu t adalah :

(8) $\Delta V = 0{,}5\ v \Delta t$

dimana v kecepatan aliran air.

Menurut hukum Torricelli kecepatan zat cair yang mengalir melalui suatu saluran adalah :

(9) $v = 0{,}6 \sqrt{2gh}$

dengan $g = 980$ cm/sec2 dan

h = tinggi zat cair ketika itu.

Subsitusikan (9) kedalam (8) kita peroleh :

(10) $\qquad \triangle V = 0,3 \sqrt{2gh}\, \triangle t$

Misalkan perobahan volume air dalam corong dalam waktu t adalah :

(11) $\qquad \triangle V^{*} = - \pi r^{2} \triangle h,$

dimana h berkurangnya tinggi air dan $r = h \operatorname{tg} 30^{o}$

$$= h/\sqrt{3}$$

(12) $\qquad \triangle V^{*} = - \pi \frac{h^{2}}{3} \triangle h$

Sekarang kita peroleh kesamaan dari (10) dan (12)

$$\triangle V = \triangle V^{*}$$

$$0,3 \sqrt{2gh}\, \triangle t = - \pi \frac{h^{2}}{3} \triangle h \quad \text{atau}$$

$$\frac{\triangle h}{\triangle t} = - \frac{0,9 \sqrt{2g}}{\pi} h^{-3/2}$$

$$\frac{dh}{dt} = - k h^{-3/2} \quad \text{dengan } k = \frac{0,9 \sqrt{2g}}{\pi} = 12,7$$

$h^{3/2} dh = - k\, dt$; adalah PD dengan perubah terpisah

$$\frac{2}{5} h^{5/2} = - kt + c$$

Untuk $t = 0$, $h = 10$ $\qquad c = \frac{2}{5} 10^{5/2}$

$$\frac{2}{5} h^{5/2} = - kt + \frac{2}{5} 10^{5/2} \qquad k = 12,7$$

$$t = \frac{2}{5k} \left(10^{5/2} - h^{5/2} \right) = 10 - 0,0315\, h^{5/2}$$

Jadi corong akan kosong, bila $h = 0$, maka $t = 10$ second.

IV.7. ILMU KIMIA.

Contoh.1.

Dalam suatu reaksi kimia, satu molekul zat A bersenyawa dengan satu molekul zat B dan terbentuklah satu molekul zat C. Jika pada $t = 0$ jumlah molekul A dan B masing-masing misalnya a dan b dan apabila dalam waktu t jumlah molekul c yang terbentuk mengandung x, maka jumlah molekul A dan B setelah waktu t menjadi a-x dan b-x.

Reaksi tersebut dapat ditulis dengan :

$$\frac{dx}{dt} = k (a - x) (b - x)$$

Selesaikan proses reaksi diatas jika diketahui $a = 5$, $b = 4$ dan untuk $t = 5$, $x = 1$ dan tentukan nilai x setelah $t = 10$.

$$\frac{dx}{(5-x)(4-x)} = k\,dt$$

$$\frac{dx}{4-x} - \frac{dx}{5-x} = k\,dt$$

Untuk $t = 0$, $x = 0$ dan $t = 5$, $x = 1$; $t = 10$, $x = x$.

(13) $\quad \ln \frac{5-x}{4-x} \Big|_0^1 = kt \Big|_0^5$ dan

(14) $\quad \ln \frac{5-x}{4-x} \Big|_0^x = kt \Big|_0^{10}$

Selanjutnya bagi (14) dengan (13) diperoleh :

$$\frac{\ln \frac{5-x}{4-x} \cdot \frac{4}{5}}{\ln \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}} = 10/5 = 2 \quad \text{atau}$$

$$\frac{5-x}{4-x} = \frac{5}{4}\left(\frac{16}{15}\right)^2 = \frac{64}{45}$$

$$225 - 45x = 256 - 64x$$

$$19x = 31$$

$$x = 1,63$$

Contoh.2.

Suatu tanki berisi 100 gal larutan garam dari 50 lb. Kemudian dimasukkan 3 gal larutan permenit yang setiap galnya mengandung 2 lb garam. Dengan jalan menggoyang-goyangkan terjadilah larutan yang homogen. Tentukanlah berat garam yang tinggal dalam tanki setelah 30 menit, jika diketahui rata-rata larutan yang keluar 2 gal permenit.

Jawab :

Jika dimisalkan berat garam dalam tanki setelah t menit sama dengan x pound, maka : Rata-rata tambahan garam permenit $= \frac{dx}{dt}$ (lb/menit)

Garam yang masuk permenit = 3 (gal/lb). 2 (lb/gal) = 6 (lb/gal).

Rata-rata tambahan larutan permenit = 3 gal - 2 gal = 1 gal.

Jumlah larutan setelah t menit menjadi (100 + t) gal.

Konsentrasi larutan setelah t menit $= \frac{x}{100+t}$

Garam yang keluar permenit = 2 (gal/menit) . $\frac{x}{100+t}$ (lb/gal).

$$= \frac{2x}{100+t} \text{ (lb/menit)}$$

Sekarang kita peroleh kesamaan sebagai berikut :

Rata-rata tambahan garam (lb/menit) = garam yang masuk (lb/menit) $-$ **garam yang keluar (lb/menit)**

atau :

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{2x}{100+t}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{100+t} = 6$$; adalah PD linear order satu.

$$R = e^{\int \frac{2dt}{100+t}} = e^{2\ln(100+t)} = (100+t)^2$$

$$(100+t)^2 x = \int 6\,(100+t)^{2}dt$$

Untuk $t = 0$, $x = 50$; $t = 30$, $x = x$

$$(100+t^2)\,x \Big|_{\substack{t=0\\ x=50}}^{\substack{t=30\\ x=x}} = 2\,(100+t)^3 \Big|_{0}^{30}$$

$$120^2 x - 100^2 \cdot 50 = 2\,(\text{[illegible]})$$

$$x = \frac{2\ .\ 130^3 - 150\ \ 100^2}{130^2}$$

$$= 250 - \frac{150}{1.69}$$

$$= 171 \text{ lb.}$$

SOAL-SOAL :

1. Tentukan trayektori-trayektori orthogonal **yang melalui titik** (0,1) dari sistem **garis lingkung** $y = 2x + Ce^x$

2. Tentukan trayektori-trayektori orthogonal dari ellips $4x^2 + y^2 = cx$

3. Suatu partikel beratnya 20 lb bergerak menurut **suatu garis lurus** horizontal dibawah pengaruh suatu gaya konstan **yang besarnya** dalam pound sama dengan empat kali kecepatan dalam feet. Hitunglah kecepatan partikel dan jarak yang dilaluinya **setelah** ½ detik.

4. Suatu benda dari 100 lb dijatuhkan dari suatu tempat. **Jika tahanan** udara berbanding **lurus** dengan kecepatannya, **dan kecepatan maksimum** adalah 173 ft/detik. Tentukan kecepatan benda **pada akhir detik ke lima.**

5. Suatu tanki mula-mula berisi 50 gal air. Kemudian dimasukkan kedalam tanki tersebut rata-rata 2 gal larutan garam permenit dimana setiap galnya mengandung 2 lb garam. Dengan jalan menggoyang-goyangkan tanki diperoleh larutan yang homogen dan pada saat yang sama keluar dari tanki rata-rata 1 gal larutan permenit :

   Ditanyakan :

   a. Jumlah garam pada saat tanki berisi 60 gal larutan.

   b. Konsentrasi garam dalam tanki pada akhir menit ke 20.

6. Sebuah pipa dengan diameter 20 cm dialirkan uap dari $100^{\circ}C$. Pipa dilapis dengan suatu bahan tertentu yang tebalnya 5 cm. Temperatur bagian luar menjadi $40^{\circ}C$. Berapakah seharusnya tebal lapisan itu agar supaya panas yang hilang berkurang 20%.

7. Sebuah pipa diketahui diameternya 10 cm berisi uap dari $100^{\circ}C$. Pipa dilapisi dengan dua macam bahan penyekat masing-masing 2,5 cm tebalnya, yakni dari asbest (K = 0,00060 kal/cm deg, sec) dan yang lain magnesium (K = 0,00017 cal/cm deg, sec).

   Jika temperatur permukaan luar adalah $30^{\circ}C$ dan panjang pipa 1 meter, hitunglah panas yang hilang per-jam apabila asbest pada bagian dalam dan magnesium pada bagian luar dan sebaliknya. Bandingkan juga kedua hasil diatas untuk tujuan effisiensi.

8. Suatu induksi dari 2 henry dan tahanan dari 20 ohm dihubungkan seri dengan suatu emf dari E volt. Jika pada t = 0, arus i = 0. Hitung kuat arus setelah 0,01 detik apabila :

   a. E = 100 volt.

   b. E = 100 sin 150 t volt.

9. Apabila suatu tahanan R (ohm) dan suatu kapasitansi C (farat) dihubungkan seri dengan emf E (volt), pengisian Q (Coulomb) pada Kondensator dan arus I (amp) diberikan oleh :

   $$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E, \quad I = \frac{dQ}{dt}, \quad R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE}{dt}$$

   Jika R = 2000 ohm, $C = 5 \times 10^{-4}$ farat untuk t = 0, I = 10 amp

   Hitung kuat arus ketika t = 0,01 detik jika :

   a. E = 100 volt.

   b. E = 100 sin 120 t

10. Suatu tanki yang berbentuk kerucut lingkaran tegak dan puncaknya kebawah, mempunyai lobang pada alasnya yang besarnya dapat diatur dengan sebuah katup pengapung adalah berbanding lurus dengan dalamnya air dalam tanki pada setiap menit. Berapa % waktu yang diperlukan untuk membuangkan separoh dari volume air dibandingkan dengan untuk mengosongkan tanki sama sekali.

11. Sebuah bola tembaga dipanaskan hinga temperaturnya menjadi $100^{\circ}C$. Kemudian pada $t = 0$ bola dicelupkan kedalam air dari $30^{\circ}C$. Setelah 3 menit temperatur bola menjadi $70^{\circ}C$. Hitung waktu yang diperlukan sehingga temperatur bola menjadi $31^{\circ}C$.

12. Percobaan pada sebuah termometer 70°, dibawa kedalam sebuah ruangan yang temperaturnya [illegible]$^{\circ}F$. Setelah satu menit termometer menunjuk angka $45^{\circ}F$. Tentukan temperatur yang ditunjukkan termometer tersebut setelah 3 menit berada dalam ruangan itu.

13. Dalam suatu kehidupan bakteri, jumlahnya menjadi dobol setelah 4 jam, berapakah jumlah bakteri tersebut setelah 8 jam jika pembiakan bakteri itu berbanding lurus dengan waktu.

14. Sebuah gelegar yang panjangnya L foot, dijepit horizontal pada kedua ujungnya dengan memancangkan ujung-ujungnya itu kepada tembok penahan. Tentukan persamaan dari larutan elastisitet batang tersebut jika terdapat beban yang uniform sebesar q lb/ft.

15. Suatu batang panjangnya 2L ft, terdapat beban yang uniform dari q lb/ft yang disokong pada ujung-ujungnya dan pada titik tengahnya.

Ambil titik permulaan pada titik tengah dan tentukanlah persamaan lenturan elastisitet.

Perlihatkan bahwa lenturan maksimum adalah $(39 + 55\sqrt{33})qL^4/2^{16}EI$, dan perlihatkan juga bahwa nilai ini adalah 42% dari nilai yang diperoleh jika batang dipotong dua pada titik tengahnya.

DAFTAR BACAAN

AYRES FRANK, Differential Equations, Mc Grow Hill Book Company Inc New York.

DOROTHY, Modern Mathematics for Engineers, Prentice Hall New Yersey.

HARRY.W.REDDICK, Advanced Mathematics for Engineers, Yohn Willey & Sons, New York.

HARRY.W.REDDICK, Differential Equations, Yohn Willey & Sons, New York.

KAJ.L.NIELSON, Differential Equations, Barnes & Noble, Inc New York.

KREIYZIG,ERWIN, Advenced Engineering Mathematics, Yohn Willey and Sons, New York.

-tr-