ILMU UKUR PROYEKTIF

Drs. RUSTAM NURDIN, MA

Diterbitkan oleh

PROYEK PENINGKATAN DAN PENGEMBANGAN PERGURUAN TINGGI

IKIP PADANG

1980

KATA PENGANTAR

Sudah menjadi kenyataan di Perguruan Tinggi di Indonesia, tidak banyak buku - buku matematika yang di olah dalam bahasa Indonesia. Umumnya literatur yang dipakai selalu dalam buku yang berbahasa asing baik yang berbahasa Inggris atau bahasa Belanda.

Sehubungan dengan itulah kami mencoba menyusun sebuah buku yang merupakan salah satu pegangan untuk mahasiswa tingkat - Sarjana jurusan matematika.

Buku pegangan mahasiswa ini kami beri judul :

"PENGANTAR ILMU UKUR PROYEKTIF "

Terujudnya buku ini adalah merupakan bantuan yang diberikan oleh Proyek Pembinaan Pengembangan Perguruan Tinggi, P_4T - IKIP Padang 1979 / 1980, dalam memperbanyak buku ini sehingga para mahasiswa dapat memanfaatkannya. Maka sudah selayaknya kami sebagai penyusun mengucapkan ribuan terima kasih atas bantuan yang telah diberikan oleh P4T yang kami utarakan diatas.

Kami sangat berkeyakinan, bahwa materi yang kami sajikan dalam diktat ini masih dalam serba kekurangan, dan untuk itulah kami memohon bantuan pemikiran rekan-rekan sejawat dalam menyempurnakan buku ini, untuk lebih bermanfaat hendaknya. Untuk itu kami mengucapkan terima kasih.

Padang, Februari 1980

Penyusun,

Drs. Rustam Nurdin MA
NIP. 130187094

DAFTAR ISI

halaman

-0-

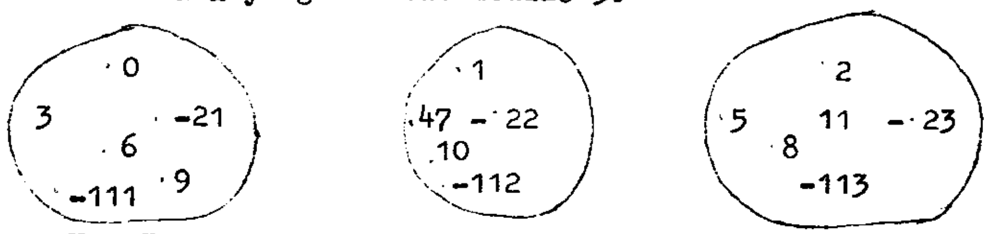
BAB I

P E N D A H U L U A N

Ilmu Ukur Proyektif ialah suatu cabang matematika yang mempela - jari sifat-sifat kalau diproyeksikan suatu benda, maka proyeksinya berubah, tetap, dan sebagai.

Garis-garis pada bidang Euclides (bidang datar), ditambah dengan satu titik tak berhingga (∞) , disebut garis proyektif. Lagi pula Ilmu Ukur Proyektif sangat bergantung pada field (bidang) tempat bekerja. Fieldnya tempat operasionalnya matematika ini mungkin bidang kompleks, bidang nyata, bidang dimensi I (R_1), dimensi II (R_2), atau Field modular berkarakteristik 2, atau 3, dan sebagai.

Contoh : Dalam bidang modular berkarakteristik 3, hanya akan mempunyai unsur modula 0,1, dan 2. Semua bilangan bulat jika dibagi dengan 3, akan mempunyai sisa 0,1 dan 2. Inilah yang disebut modulo 3.



Kls I wakilnya : 0 | Kls II wakilnya : 1 | Kls III wakilnya : 2

Ilmu Ukur Proyektif dalam buku ini, dijabarkan dengan menyajikan terlebih dahulu sifat-sifat transformasi, grup transformasi, dan sesudah itu bervarian, group of motion, Proyeksi, Cross Ratio serta titik tetapnya suatu Proyektifity.

Catatan : Angka-angka dalam lingkaran sembarang letak. Dalam kelas I angka-angkanya : 0,3 , 6, -21, 9, -111 dan dalam kelas II : 1, 4, 7, -22, 10, -112, dan kelas III : 2,5, 11, -23, 8, -113.

Fasal 1 : Transformasi

Definisi : Suatu hukum yang menggabungkan suatu titik P dengan suatu titik P' disebut transformasi.

$$P \xrightarrow{T} P' \qquad T = \text{tramsformasi.}$$

Titik P berobah ke P', sumbu tetap.

Kalau dari suatu titik P dibawah suatu transformasi terdapat satu titik P', maka dikatakan 1 lawan 1 (1 - 1).
Jadi transformasi menghasilkan satu titik P' tunggal.

Bentuk umum suatu transformasi adalah :

$$T \begin{cases} x' = f(x_1 y) \\ y' = g(x_1 y) \end{cases}$$

Kalau diketahui garis lingkung c (= kumpulan titik-titik), maka pada umumnya hasil transformasinya c dibawah suatu transformasi T , merupakan suatu garis lingkung c pula dan berlainan dengan c.

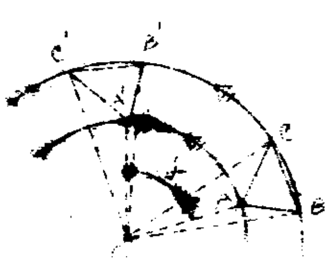
Dalam transformasi ini mencakup masalah :

a. Rotasi
b. Refleksi
c. Translasi
d. Identitas.

a. Rotasi (Pemutaran).

Dalam masalah ini yang perlu kita ketahui adalah :

1. Titik pusat Rotasi.
2. Arah Rotasi (sudut rotasi).



Perhatikan gambar.

Pada gambar hampak segitiga ABC di - putar sejauh / sebesar sudut O, dengan arah berlawanan dengan jarum jam.

Maka : A' mapping dari A
B' mapping dari B
C' mapping dari C

dan O adalah titik pusat rotasi.
Rotasi tersebut biasa ditulis dengan :

$$S(\,O, @\,) : \begin{cases} A \text{ ----- } A' \\ B \text{ ----- } B' \\ C \text{ ----- } C' \end{cases}$$

A B C ------- A' B' C'

Persamaan umum dari rotasi dapat dinyatakan dengan

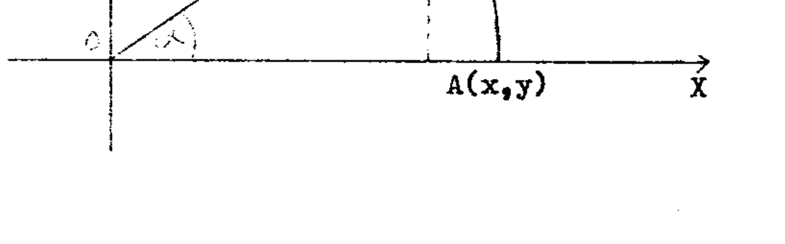
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos @ & -\sin @ \\ \sin @ & \cos @ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Persamaan diatas dengan mudah kita memperolehnya bila kita li - hat gambar dibawah ini.
Kita misalkan titik A terletak pada sumbu X dari sumbu koordinat Kartesius.
O(O,O) sebagai titik pusat kita putar A sejauh θ, dengan arah berlawanan dengan jarum jam. Kita memperoleh titik A!
Tentu sudut AOA' = θ dan titik A' (x',y') dapat kita tulis dalam bentuk lain :

$$x' = r \cos @ \qquad x' = r \cos (\,@ + O\,)$$
$$y' = r \sin @ \qquad y' = r \sin (\,@ + O\,)$$

dari $\cos(\,@ + O\,) = \cos @ \cos O - \sin @ . \sin O$
$\sin(\,@ + O\,) = \sin @ . \cos O + \cos @ . \sin O$

maka : $x' = r \cos @ . \cos O - r \sin @ . \sin O$
$y' = r \sin @ . \sin O + r \cos @ . \sin O .$



karena titik A (x,y) kita ambil pada sumbu X, tentu sudut AOA $= @^0$ dan tentu $x = r \cos 0$ dan $y = r \sin 0$.
harga x dan y kita substitusikan pada x' dan y'.

- kita dapat : $x' = x \cos@ - y \sin \theta$

$y' = y \sin@ + y \cos \theta$

Persamaan itu kita tulis : $R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos@ & -\sin@ \\ \sin@ & \cos@ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Contoh : Titik p(2,6) kita putar dengan 0 sebagai pusat, sejauh 90° positif. Tentukanlah p'.

<u>Jawab.</u> $@ = 90^\circ$ $x = 2$ $y = 6$

menurut persamaan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos 90^\circ - 6 \sin 90^\circ \\ 2 \sin 90^\circ + 6 \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi : $x' = -6$ dan $y' = 2$

tentu : p' (-6,2)

<u>Soal :</u> 1. Segitiga ABC dimana A (3,0) : B(4,4) dan C(0,4) , diputar dengan pusat titik pangkal sejauh 45° positif. Tentukanlah koordinat A', B' dan C'. Kemudian gambarlah bangun itu.

2. Jika segitiga ABC soal no.1 diatas setelah diputar itu diputar lagi sejauh 15° positif, tentukanlah matrik pemetaannya.

b. <u>REPLEKSI (Pencerminan).</u>

Transformasi yang tidak mengubah jarak disebut Isometri. Perhatikanlah gambar disebelah ini.

P........... P'

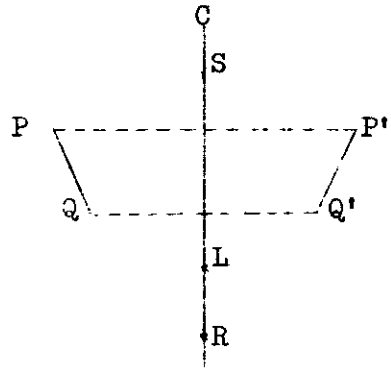
Q ——————— Q'

PQ = P'Q'

c = sebuah cermin

Titik-titik pada cermin

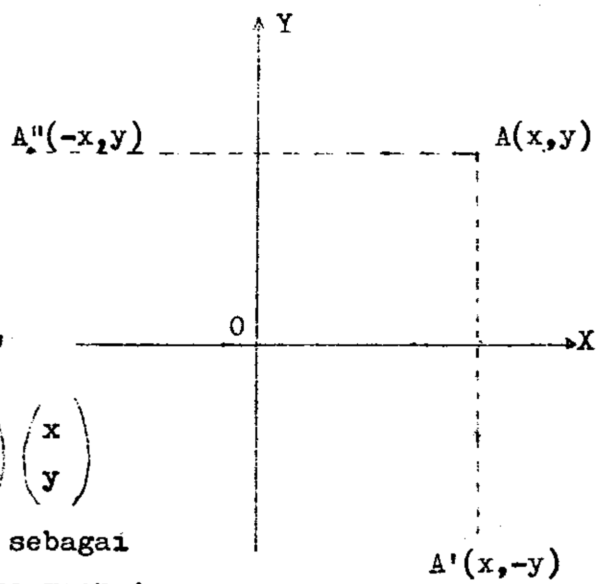
dipetakan pada dirinya sendiri.



Titik-titik yang pemetaannya adalah pada dirinya sendiri, titik itu disebut titik invariant. Seperti titik S, L dan R.

Ada baiknya kita melihat refleksi ini dengan mengganggap sumbu-sumbu koordinat Karetsius sebagai cermin seperti tergambar.

Kita cerminkan titik P (x,y) dengan cerminnya adalah sumbu X, maka akan didapat P' (x',y'



Tentu : x' = x dan y' = -y

$$x' = 1.x + 0.y$$

$$y' = 0.x + -1.y$$

Jadi : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

dan bila kita anggap sumbu y, sebagai cermin, akan didapat persamaan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Selanjutnya bila garis Y = x sebagai cermin kita akan dapatkan persamaan :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Akhirnya kita akan menemukan persamaan umum dari refleksi ini yaitu :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<u>Contoh</u> : Akibat dari suatu pemetaan kita peroleh persamaan : $x' = 3x + 5y$ dan $y' = x - 2y$. Tentukan A' (x',y') dari pemetaan itu. Jika diketahui titik A (6,3).

<u>Caranya</u> : Persamaan : $x' = 3x + 5y$
$y' = x - 2y$

kita perdapat persamaan : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

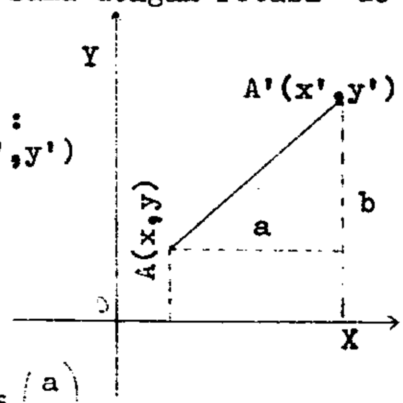
maka : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ @ \end{pmatrix}$

Jadi : A' (33,@).

<u>Soal</u> : 1. Segitiga ABC dimana A (1,2) ; B (6,1) dan C (5,5) kita cerminkan dengan garis y = x, tentukanlah imagonya.

2. Buktikanlah bahwa refleksi dengan Sb.y dan dilanjutkan dengan refleksi dengan sumbu X sama dengan rotasi dengan 180°.

c. <u>TRANSLASI (Perpindahan)</u>.

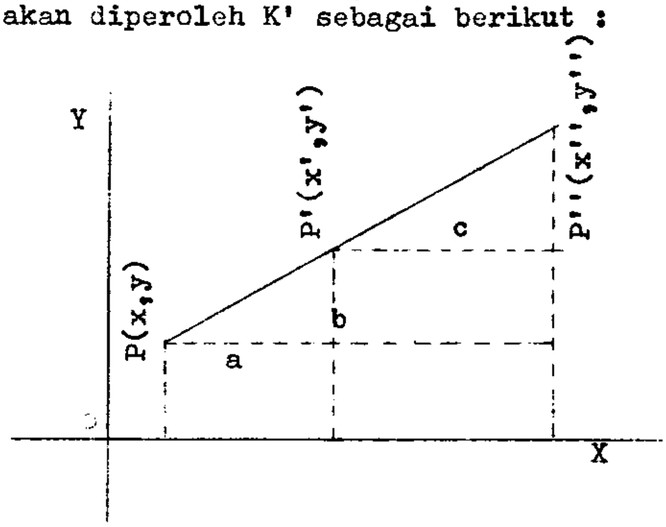


Perhatikanlah gambar disebelah kanan ini :
Titik A(x,y) digeser menjadi titik A' (x',y')
Akibat dari pergeseran itu, terjadi perobahan x menjadi x', sehingga $x' = x + a$ dan y menjadi y' , dimana $y' = y + b$.
Sehingga kita dapat persamaan :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Translasi diatas biasa ditulis dengan $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

<u>Contoh</u> : Misalnya titik K (5,10) kita translasi dengan $T = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ akan diperoleh K' sebagai berikut :



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Maka : K' (8,15).

Sekarang kita lakukan translasi itu berturut-turut seperti ter - gambar. Titik P ditranslasi dengan T_1 didapat P' , kemudian P' ditranslasi lagi dengan T_2 diperoleh P'' .

Maka $P\,(x,y) \xrightarrow{\ \ 1\ \ } P'$

$P' \xrightarrow{\ \ T_2\ \ } P''$

Bila $T_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

Maka persamaan untuk :

$P \longrightarrow P''$ adalah :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

atau : $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

Contoh : Titik Q (-2,1) ditranslasi berturut-turut oleh $T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

maka Q' : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+5 \\ 3+2 \end{pmatrix}$

tentu : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+7 \\ 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Jadi Q' (5,6).

<u>Soal</u> : Tentukanlah koordinat A' , B' dan C' akibat translasi $T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

dimana A (0,2) ; B(6,2) dan C (3,0).

d.ELEMEN........

d. ELEMEN IDENTITAS (Elemen netral).

Pengertian : Suatu bangun dikalikan dengan elemen identitas - tidak berobah. Dalam hal transformasi, bila suatu bangun ditransformasikan dengan elemen identitas, maka hasilnya adalah bangun itu sendiri.

Bila kita tinjau kembali dari masalah-masalah yang telah kita bicarakan maka :

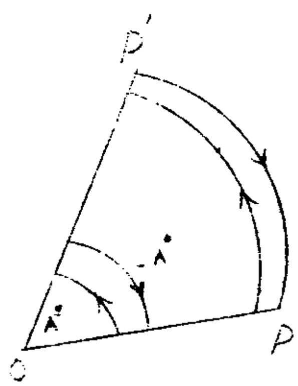
1. Dalam rotasi :

$S(O, A) \circ S(O, -A) = I$ (I = identitas)

2. Refleksi :

Kalau kita lakukan refleksi terhadap cermin yang sama maka hasilnya adalah I.

Jadi : $R \circ R = R^2 = I$



Untuk jelasnya lihat gambar :

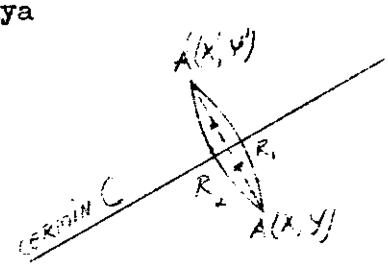
Kita dapat membuat persamaan umumnya :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

maka : $x' = x$ dan $y' = y$

Contoh :

Titik P (2,4), ditransformasi dengan elemen Identitas, maka hasilnya juga titik P sendiri.



Bukti :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jadi : P' (2,4).

Selanjutnya ada baiknya kita melihat apa yang dinamakan :

a. Titik invarian :

Pada suatu transformasi :

F : T ------- T

T adalah invarian.

Pada rotasi ada satu titik invarian yaitu titik pusat rotasi. Pada refleksi ada satu garis inverian yaitu cermin sendiri. Pada translasi tidak ada invarian.

Pada identitas setiap titik invarian.

b. Rotasi yang berturutan.

Jika rotasi pertama disebut S (O,A), kedua S (O,B)dan ketiga disebut S (O,C), maka kita akan melihat :

1. S (O,A).S(O,B).S(O,C) = S(O,A+B+C)
2. S (O,A).S(O.B)= S(O,S).S(O,A), sifat komutatif.
3. S (O,A). S(O.B).S(O.G) = S(O.A).S(O.B) S(O.C),assosiatif low.
4. S (O.A).S(O,-A) = I (elemen identitas)
5. S^{-1}(O,A) = S (O,-A) (elemen invers).

c. Dua refleksi berturutan :

1. Terhadap dua cermin yang saling berpotongan :

   $R_2 \cdot R_1 = S(O,2A)$.

   $R_1 \cdot R_1 = R_1^2 = I$ (identi[illegible]).

2. Terhadap dua cermin yang saling tegak lurus.

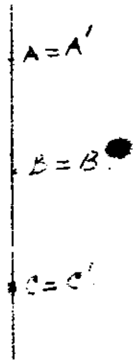
   $R_2 \cdot R_1 = S(O,180^\circ)$ adalah H = half-turn

3. Kalau cerminnya sejajar :

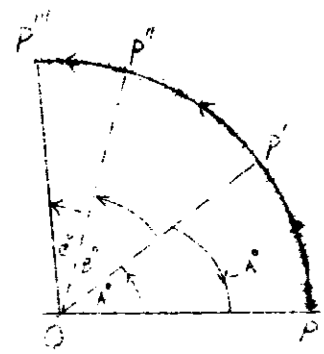
   $R_2 \cdot R_1 = T_{2d}$ dan $R_1 \cdot R_2 = T_{-2d}$ d = jarak kedua cermin.

   Dua kali refleksi disini berobah menjadi translasi.

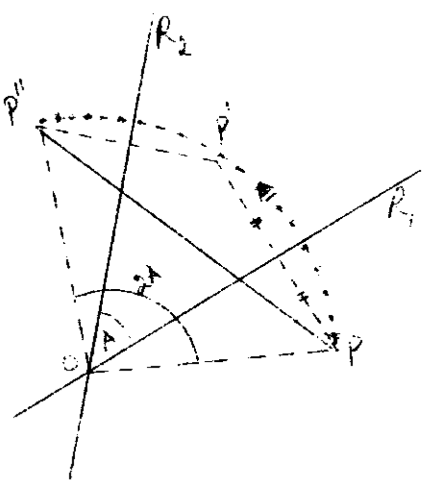
Gambar.a



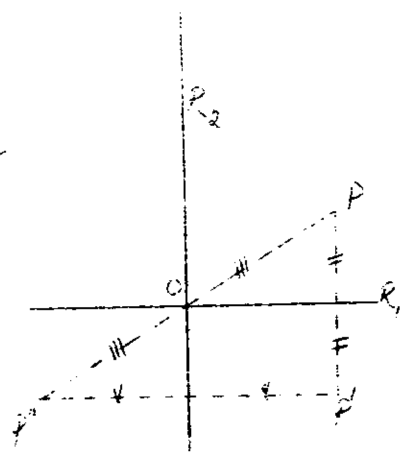
Gambar. b



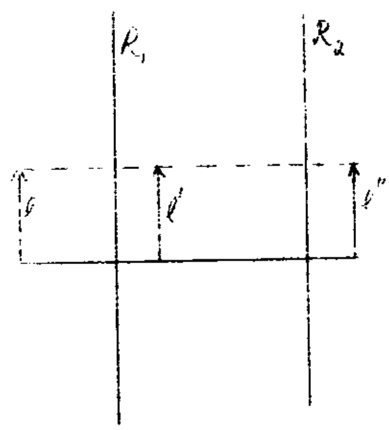
Gambar c.1



Gambar c.2



Gambar.c.3



Fasal 2. Group Transformasi.

Penggrtian :

1. Group adalah set yang tidak kosong, dimana berlaku operasi li near yang memenuhi sifat-sifat berikut :

   Jika a, b, c $\in$ G, maka :

   1. a + b $\in$ G dan a.b $\in$ G (closure)
   2. (. b). c = a (b.c) (Assosiatif)_
   3. Terdapat unsur e (identitas) pada G, hingga a.e = e.a = a untuk semua a $\in$ G.

4. Untuk setiap a $\in$ G, terdapat a' $\in$ G hingga a.a' =a'.a=e e $\in$ G (Invers). Jika pada G tersebut berlaku hukum Komutatif, maka disebut : Group Abilian (Bahan kuliah Aljabar Modern - Dra.Murtiana Ramli).

2. <u>Transformasi meliputi</u> :

   1. Translasi
   2. Rotasi
   3. Refleksi
   4. Identitas.

3. Suatu himpunan transformasi disebut <u>Group Transformasi</u>, jika

   a. mempunyai inversi dari setiap transformasi.

   b. tertutup dalam operasi perkalian dari setiap dua tranformasi.

   c. memiliki identitas

   d. memenuhi sifat assosiatif untuk hasil kali transformasi.

1. <u>T R A N S L A S I</u> :

<u>Hasil kali dua translasi.</u>

Hasil kali dua translasi adalah satu translasi yang dilanjutkan dengan translasi yang lain.

Umpamakan : T_1 memetakan titik P ----- P'

T_2 memetakan titik P' ---- P''

Hasil kali kedua translasi ini dapat kita nyatakan :

$$T_2 \circ T_1 (P) = P''$$

<u>Keterangan</u> : T_1 dikerjakan dulu, kemudian dilanjutkan T_2

Contoh :............

<u>Contoh</u> :

1. Mis. $T_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $T_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   maka $T_2 o . T_1$ dan titik P (2, -1) adalah :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1+3 \\ 2+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

<u>P'' (4,3)</u>

Sama halnya : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

P'' (<u>4,3</u>)

Jadi hasil kali dua translasi adalah suatu translasi juga (tertutup dibawah operasi perkalian).

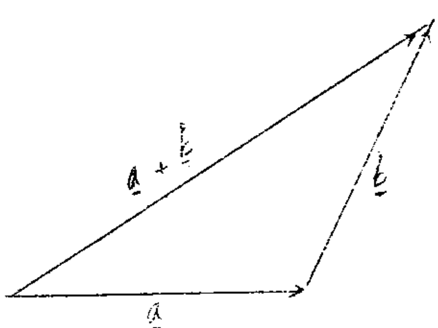
2. $T_2 o\ T_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

   $T_1 o\ T_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

   $T_2 o\ T_1 = T_1 o\ T_2$ (komutatif).

Secara umum himp.translasi dapat kita tuliskan :

1. $T_b o T_a = T_{a+b}$ (tertutup)
2. $T_a(T_b + T_c) = (T_a . T_b) . T_c$ (Assosiatif)
3. $T_a . T_a = T = I$ (Identitas)
4. $T_a . T_b : T_b . T_a$ (Komutatif)
5. $T_b . T_a{-'} = T_{-a}$ (Invers).



Berhubungan hal.1 s/d 5, maka himpunan translasi merupakan Group Transformasi dan disebut juga Group Abillian (Group komutatif).

2. R O T A S I (S)

Hasil kali dua Rotasi :

Hasil kali dua rptasi adalah suatu rotasi yang dilanjutkan dengan rotasi yang lain.

Jika A ___ A' dengan rotasi S (0,α)

A' ___ A'' dengan rotasi S (0, β)

1. S_2 , S_1 : S (0,α) . S (0. β) = S (0,$\alpha+\beta$)
(tertutup dibawah operasi perkalian atau perkalian dua rotasi menghasilkan rotasi juga).

2. S (0, α) . S (0, β) = S (0, β) . S (0,α)
(komutatif).

3. S (0,α) . {S (0, β) . S(0, γ)} = {S(0,α) :S(0, β)} S (0, γ). (Assosiatif).

4. S (0, α). S(0,-α) = S (0,-α). S(0, α) = I
(Ada element Identitas).

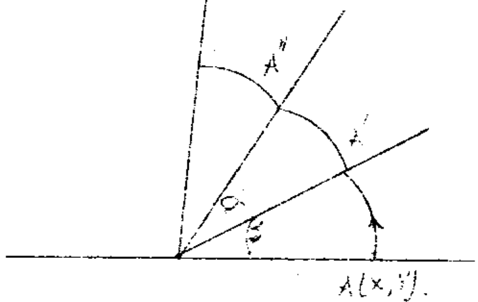
5. S^{-} (0,α) = S (0,-α) (Ada element Invers untuk setiap element).

Karena memenuhi hukum-hukum diatas, maka himpunan rotasi merupakan suatu Group Transformasi dan disebut juga dengan Group Abillian (Group Komutatif).

Untuk jelasnya dapat kita perhatikan hal dibawah ini :
Pers.Matrik rotasi :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(d = sd putaran.



Sekarang S (0, β). S (0,α) = S (0, $\beta+\alpha$)

$|\vec{OA}| = |\vec{OA'}| = |\vec{OA''}| = r$ A(x,y)

$\vec{OA} = r \cos 0^\circ i + r \sin 0^\circ j$ A'(x'', y'')

$\vec{OA}'' = r \cos \{(\beta+\alpha)+0^\circ\} i + r \sin \{(\beta+\alpha)+0^\circ\} j$

$\vec{OA''} = r \{ \cos\{(\beta+\alpha). \cos 0^\circ - \sin\{(\beta+\alpha) + \sin 0^\circ\} i +$

$r \sin(\beta+\alpha). \cos 0^\circ + \cos\{(\beta+\alpha). \sin 0^\circ\} j$

$= \cos(\beta+\alpha).(r \cos 0^\circ i) - \sin(\beta+\alpha).(r \sin 0^\circ i) +$

$\sin(\beta+\alpha).(r \cos 0^\circ j) + \cos(\beta+\alpha).(r \sin 0^\circ j).$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{matrix} \cos.(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{matrix} \begin{pmatrix} r \cos 0 \\ r \sin 0 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian berlaku S (0,β). S (0,α) = S (0,$\beta+\alpha$)
(hasil kali dua rotasi, juga merupakan rotasi.)

<u>Contoh</u> :

Diketahui titik P (2,3) dirotasikan dengan sd.90° dan kemudian dilanjutkan dengan sd 90°. Pusatnya O.

Tentukan . P''(x'', y'') S(0,90°).S(0,90°) =S(0,180°)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos.180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin.180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cos 180^\circ - 3 \sin 180^\circ \\ 2 \sin 180^\circ . 3 \cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ P'' (-2 , -3)

3. <u>R E F L E K S I.</u>

Ump. R_1 : memetakan titik P ____ P'

R_2 : memetakan titik P'____ P''

Hal ini dapat kita nyatakan :

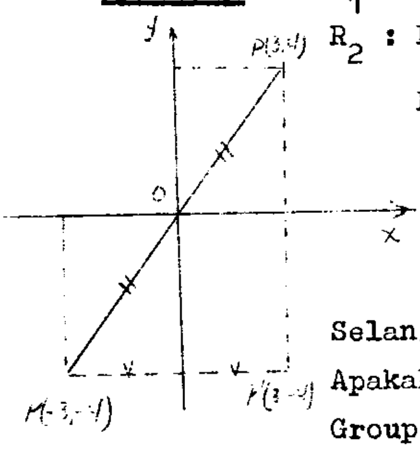
1. $R_1(P) = P'$ atau $PR_1 = P'$
2. Kemudian kita lanjutkan lagi : R_2 (P') = P''

Kedua refleksi ini dapat kita nyatakan :

$$R_2 \cdot R_1 (P) = P''$$

<u>Keterangan</u> : R_1 dikerjakan dahulu, kemudian dilanjutkan dengan R_2

<u>Contoh I</u> : R_1 : P (3,4) ____ P' (3,-4) __ refleksi terhadap sb-x
R_2 : P'(3,-4)____ P''(-3,-4)__ -"- -"- sb-y



$R_2 : R_1 (P) = R_2 \; R_1 (3,4)$
$= R_2 (3, -4)$
$= (-3, -4).$
P'' <u>(-3,-4)</u>

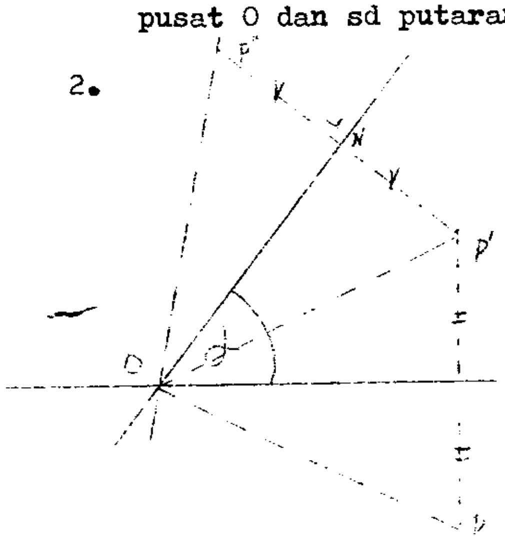
Selanjutnya marilah kita tinjau himpunan refleksi. Apakah himpunan refleksi tersebut merupakan suatu Group Transformasi.

1. <u>Pada cermin yang saling tegak lurus</u> :
Perhatikan contoh I :

$$R_2 \cdot R_1 = S (0,180^\circ)$$

(Perkalian dua refleksi menghasilkan suatu rotasi (S) dengan pusat O dan sd putaran 180°) yang disebut :"Half Turn" (H).

2.



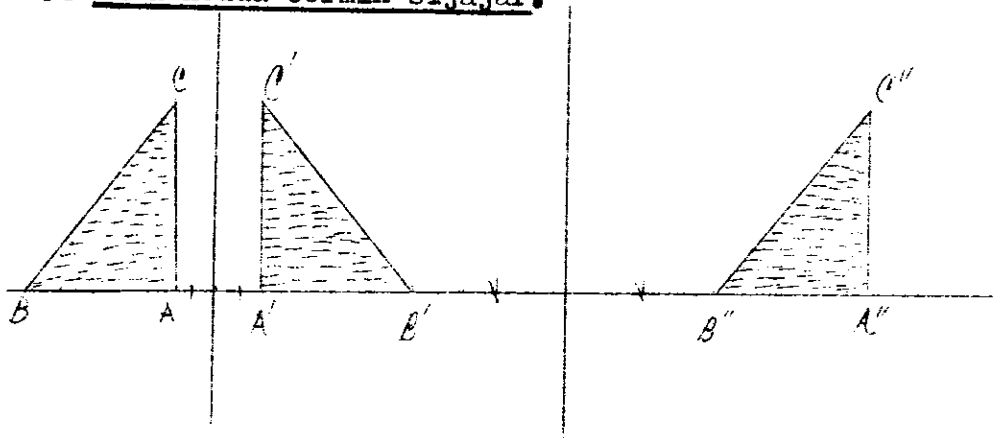
Dua cermin yang berpotongan :
Untuk ini kita tinjau $R_2 \; R_1$
R_1 : P _____ P'
R_2 : P'_____ P''
$\angle POM = \angle P'OM$
$\angle P'ON = \angle P''ON$
$\angle POP'' = \angle POP' + \angle P'OP''$
$= 2 \angle MOP' + 2 \angle NOP'$
$= 2 (\angle MOP' + \angle NOP')$
$= 2 \angle MON$
$= 2 \alpha .$

Maka $R_2 \circ R_1 = S(O, 2\alpha)$

Jadi perkalian dua refleksi menghasilkan satu rotasi $S(O,2\alpha)$ (α= sd antara kedua cermin).

Jika kedua cermin sama : $R_1^2 = I$ (Identitas)

3. Jika kedua cermin sijajar.



Disini dapat kita lihat : $\triangle$ ABC ____ $\triangle$ A'B'C'

Selanjutnya : $\triangle$ A'B'C' ____ $\triangle$ A''B''C''

Pemetaan ABC ___ A''B''C'' (Translasi). $\therefore$ $R_2 \circ R_1 = T_2d$ (d=jarak).

Dari pencerminan (1) , (2) dan (3) dapat disimpulkan : Himpunan refleksi bukan suatu Group Transformasi karena hasil kali refleksi bukan menghasilkan refleksi, tapi menghasilkan rotasi atau dapat juga menghasilkan translasi.

Jika kita lihat refleksi dari dua cermin yang saling $\perp$ dan rotasi $\frac{1}{2}$ putaran, maka akan terbentuk suatu Group Transformasi yang disebut "Four Group" dari kelin.

Dan Group ini merupakan Group Abilian (Group Komutatif).

Transformasi I

O	I	H	X	Y
I	I	H	X	Y
H	H	I	Y	X
X	X	Y	I	H
Y	Y	X	H	I

Mis. Refleksi terhadap sb x = X

" " " y = Y

Rotasi ½ putaran = H

Refleksi Identitas = I

G = { I, H, X, Y }

Disebut Group, karena memenuhi syarat-syarat berikut :

1. <u>Closure</u> : H∈G, X∈G X θ H = Y∈G

2. $\underbrace{(X\ \theta\ H)}_{Y}\ \theta Y = X\theta\ (H\theta Y)$

$\underbrace{Y\ \theta Y}_{I} = X\theta\ X$ (Assosiatif)

I = I

3. Ada element Identitas (I)

4. X θ $\boxed{X}$ = I X = Invers

(X∈G)

H θ $\boxed{H}$ = I

∈G

5. $\underbrace{X\ \theta\ Y}_{H} = \underbrace{Y\ \theta\ X}_{H.}$ (komutatif)

-o-

BAB II

I N V A R I A N

Pengertian Invarian.

I. Kalau suatu titik P di bawah oleh suatu Transformasi

$$T \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

sehingga terdapat P'.

Kalau sekiranya P = P' maka P dinamakan invarian di bawah Transformasi T.

Contoh : P (2,3) dibawah transformasi.

$$T \begin{cases} x' = f(x, y) = 2x + y - 5 \\ y' = g(x,y) = 3x + 2y - 9 \end{cases}$$

jawab :

$$x' = 2.2 + 3 - 5 = 2$$

$$y' = 3.2 + 2.3 - 9 = 3$$

$$P'(x', y') = P'(2.3)$$

$$(x, y) = P'(x', y')$$

maka P invarian di bawah Transformasi T.

II. Jika ada dua titik P dan Q dengan $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dan diketahui pula Transformasi.

$$M \begin{cases} x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi \\ y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{cases}$$

$P'(x_1', y_1')$ $\qquad$ $Q'(x_2', y_2')$

$P(x_1, y_1)$ $\qquad$ $Q(x_2, y_2)$

Kemudian ada fungsi $d(P, Q) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

dan $d(P', Q') = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2$

Jika ternyata d $(P, Q) = d(P', Q')$ maka d dinamakan **invarian** dibawah group M

d = fungsi hubungan antara P dan Q

Definisi : Jika C = kumpulan titik-titik variabel di suatu daerah (domain).

f = suatu bilangan tertentu

$\{T\}$ = group dari transformasi titik

C' = hasil transformasi

Jika $f(C) = f(C')$ untuk tiap transformasi dari $\{T\}$, maka f dinamakan invarian C di bawah $\{T\}$

Contoh : Jarak antara dua buah titik adalah invarian di bawah :

a. di bawah translasi T

b. di bawah transformasi $\{M\}$

Penyelesaian :

a. Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, dua buah titik yang diketahui dan translasi.

$$T \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

titik $P(x_1, y_1) \xrightarrow{T} P'(x_1', y_1')$

titik $Q(x_2, y_2) \xrightarrow{T} Q'(x_2', y_2')$

$x_1' = x_1 + a \qquad x_2' = x_2 + a$

$y_1' = y_1 + b \qquad y_2' = y_2 + b$

maka titik $P'(x_1', y_1') = P'(x_1 + a, y_1 + b)$

titik $Q'(x_2', y_2') = Q'(x_2 + a, y_2 + b)$

Jarak titik P dengan Q $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Jarak titik P' dengan Q' $= \sqrt{(x_1 + a - x_2 - a)^2 + (y_1 + b - y_2 - b)^2}$

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Jadi jarak (P, Q) = jarak (P' , Q')

Terbuktilah bahwa jarak antara dua titik invarian di bawah Translasi T

b. Misalkan dua titik P (x_1, y_1) dan Q (x_2, y_2) dan transformasi :

$$\{M\} \begin{cases} x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi \\ y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{cases}$$

yang membawa titik P (x_1, y_1)

ke titik P' (x_1' , y_1')

dan membawa titik Q (x_2, y_2) ke titik Q' (x_2' , y_2')

$$x_1' = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi$$

$$y_1' = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi$$

$$x_2' = x_2 \cos\varphi - y_2 \sin\varphi$$

$$y_2' = x_2 \sin\varphi + y_2 \cos\varphi$$

Jarak (P, Q) $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Jarak (P' , Q') $= \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2}$

$$= \sqrt{(x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi)^2 + (x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi - y_2 \cos\varphi)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1^2 \cos^2\varphi + y_1^2 \sin^2\varphi + x_2^2 \cos^2\varphi + y_2^2 \sin^2\varphi + x_1^2 \sin^2\varphi + y_1^2 \cos^2\varphi + x_2^2 \sin^2\varphi + y_2^2 \cos^2\varphi - 2x_1x_2 \cos^2\varphi - 2y_1y_2 \sin^2\varphi - 2x_1x_2 \sin^2\varphi - 2y_1y_2 \cos^2\varphi}$$

$$= \sqrt{x_1^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + y_1^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + x_2^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + y_2^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2x_1x_2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}$$

$$-2y_1y_2\ (\cos^2 \ + \sin^2\ )$$

$$= \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2)}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Jadi jarak (P' , Q') = jarak (P' , Q').

<u>Sifat Invarian</u>

Misalkan kita ketahui titik P (x_1, y_1) dan titik Q(x_2,y_2) dan transformasi.

$$\{L\} \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad \triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

titik P (x_1, y_1) $\xrightarrow{\{L\}}$ P' (x_1', y_1')

titik Q (x_2, y_2) $\xrightarrow{\{L\}}$ Q' (x_2', y_2')

lalu kita bentuk fungsi d (P, Q) = $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$

dan fungsi d (P',Q') = $\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$$x' = ax_1 + by_1 \qquad x_2' = ax_2 + by_2$$

$$y' = ax_1 + dy_1 \qquad y_2' = ax_2 + ay_2$$

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ ax_1 + dy_1 & ax_2 + dy_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

dari sini ternyata :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

tetapi kedua bentuk ini dapat dijadikan sama,dengan syarat :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

yang berarti (x_1, y_1) dan (x_2 , y_2) colliner

karena $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, maka tentulah

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

maka dikatakanlah titik P dan Q mempunyai sifat invarian di bawah $\{ L \}$. Usaha menyamakan ruas kiri = ruas kanan sehingga dia mempunyai invarian . Usaha ini disebut <u>sifat invarian</u>.

<u>Relasi Invarian</u>.

Misalkan C = kumpulan titik-titik dari suatu daerah D

P(C)= kemungikinan titik-titik juga yang ditentukan tunggal pada C

F (C) berelasi invarian terhadap C di bawah transformasi $\{ T \}$ bila untuk tiap-tiap C dari D berlaku F' (C) = F (C') ,dimana

F' = hasil transformasi F

C' = hasil transformasi C

Penjelasan : Misal C = kumpulan titik-titik pada parabola C

(C = parabola)

F (C) = fokus dari para bola

G (C) = direktrik dari parabola

Apakah hasil transformasi F (C) akan merupakan fokus dari parabola yang baru. Dan apakah juga direktriknya bersifat demikian ?

Kalau P' (C) dan G' (C) dan merupakan fokus dari direktrik dari parabola yang baru maka dikatakan F (C) dan G (C)

F (C) dan G (C) berelasi invarian dibawah transformasi $\{T\}$.

Contoh :

1. Fokus dan direktrik suatu parabola berelasi invarian - terhadap parabola di bawah group $\{M\}$

Bukti :

Kita gunakan sifat parabola, bahwa T K titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik dan suatu garis(fokus dan direktriknya).

Kita ambil sembarang titik F pada parabola C

titik $P \xrightarrow{\{M\}} P'$

$F \xrightarrow{\{M\}} P'$

$G \xrightarrow{\{M\}} G'$

jadi P' pada C'

Jarak P ke F di bawah $\{M\}$ = jarak P' ke F'

begitu pula jarak P ke G = jarak P' ke G'

P' berjarak sama terhadap P' dan garis G'

Jadi C' = parabola dengan F' sebagai fokus dan G' sebagai direktrik.

Benarlah bahwa fokus dan direktrik berelasi di bawah $\{M\}$

2. Buktikan bahwa parabola di bawah Affine group $\{A\}$ tetap tetapi Direktrik dan fokus tidak berelasi invarian terhadap parabola dibawah group ini ?

Jawab :

$$\{A\} \quad \begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= cx + dy + f \end{aligned}$$

persamaan parabola = $y^2 = 2\,px$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x' - c & b \\ y' - f & d \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{dx' - by' + bf - dc}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & x' - e \\ c & y' - f \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-cx' + ay' + ce - af}{\Delta}$$

$$y^2 = 2\,px \xrightarrow{\{A\}}$$

$$\left(\frac{-cx' + ay' + ce - af}{\Delta}\right)^2 = 2p\left(\frac{dx' - by' + bf - de}{\Delta}\right)$$

hilangkan aksennya.

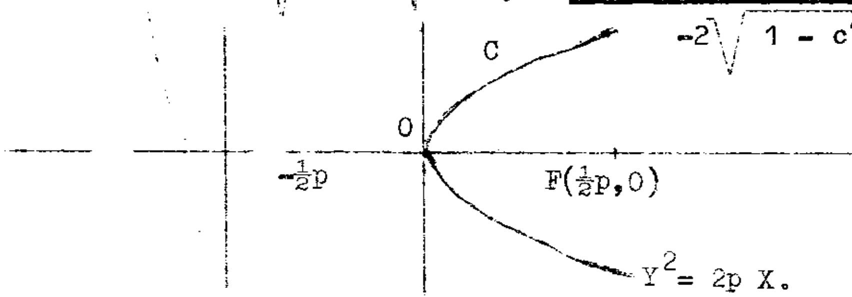
$$\left(\frac{-cx + ay + ce - af}{\Delta}\right)^2 = 2p\left(\frac{dx - by + bf - de}{\Delta}\right)$$

$c^2x^2 + a^2y^2 - 2acx\,y + (2acf - 2c^2e - 2p\Delta d)\,x +$
$(2ace - 2a^2f + 2\,pab)\,y + (c^2e^2 - 2acef + a^2y^2 - 2p\Delta\,by +$
$2p\Delta\,dc\,) = 0$

ini merupakan parabola yang fokus dan direktriknya

$F\left[(p, \left\{ace + af - pab + \sqrt{\frac{1 - a^2}{1 - c^2}}\,(\,2acf - 2c^2e - 2p\Delta\,d \;+\right.\right.$
$\left.\left.2p\;)\right\}\right] = F'\,(\,c\,)$

dan : $d = \sqrt{1 - c^2}\,x + \sqrt{1 - a^2}\,y + \dfrac{2acf - 2c^2e - 2p\;\;d + 2p}{-2\sqrt{1 - c^2}} = G'(C)$



$d \equiv x + \frac{1}{2}p = 0 \xrightarrow{\{A\}} \frac{dx - by + bf - de}{\Delta} + \frac{1}{2}p = G\ (C')$

$F\ (\frac{1}{2}p, 0) \xrightarrow{\{A\}} (\frac{1}{2}ap + e\ , \frac{1}{2}cp + f\ ) = F\ (\ C')$

$G'\ (c) \neq G\ (\ c'\ )$

$F'\ (c) \neq F\ (\ c'\ )$

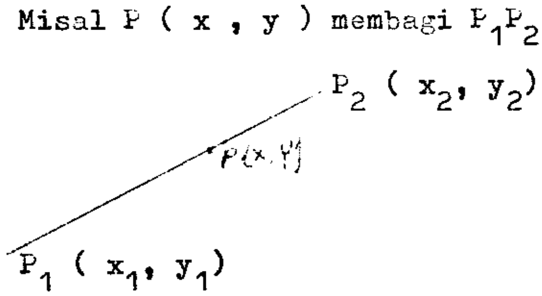
Maka dikatakan fokus dan direktrik tidak berelasi Invarian.

3. Kalau P terletak pada segmen garis yang berarah P_1P_2 maka titik P berelasi invarian terhadap P_1 dan P_2 dibawah group $\{A\}$. Buktikan.

Bukti :

Misal segmen garis variabel c bertitik pangkal $P_1(x_1, y_1)$ dan bertitik ujung $P_2(x_2, y_2)$ maka F (c) adalah titik P yang membagi segmen garis P_1P_2 itu

Misal P (x , y) membagi P_1P_2 atas perbandingan k : 1 maka:



$(x - x_1) : (x_2 - x_1) = k : 1$

$(x - x_1 + x_2 - x\ ) : (x - x_1) = k + 1 : k$

$(k + 1\ )x - (k + 1\ )x = -kx_1 + kx_2$

$x = \frac{x_1 + kx_2}{k + 1}$ analog : $y = \frac{y_1 + ky_2}{k + 1}$

Misalkan $P'\ (x'\ , y')$ dan $P_1'(x_1'\ , y_1')$: $P_2'\ (x_2'\ , y_2'\ )$ adalah titik-titik setelah ditransformasikan di bawah $\{A\}$

$x' = ax + by + c$

$y' = dx + ey + f$

$$x' = a\,\frac{x_1 + kx_2}{1+k} + b\,\frac{y_1 + ky_2}{1+k} + c$$

$$= \frac{1}{1+k}\,(ax_1 + akx_2 + by_1 + bky_2 + c + ck)$$

$$= \frac{1}{1+k}\,(ax_1 + by_1 + c) + k\,(ax_2 + by_2 + c)$$

$$= \frac{1}{1+k}\,(x_1' + kx_2')$$

$$x' = \frac{x_1' + kx_2'}{1+k} \qquad \text{analog : } y' = \frac{y_1' + ky_2'}{1+k}$$

$F (c) = (x , y)$

$F' (c) = (x' , y')$

$c = (x_1, y_1) , (x_2, y_2) \qquad c' = (x_1' , y_1') , (x_2' , y_2')$

$F' (c) = f (c')$

Maka dikatakan P berelasi invarian terhadap P_1 dan P_2 dibawah $\{A\}$

Soala-soal :

1. Buktikan sudut ABC invarian dibawah group M
2. Jarak antara sebuah titik dan sebuah garis adalah invarian dibawah group M. Buktikan :
3. Kalau P terletak pada segmen garis yang berarah P_1P_2 maka titik P berelasi invarian terhadap P_1 dan P_2 dibawah group $\{A\}$ dimana :

$$\{A\} \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

Buktikan !

-0-

B A B III

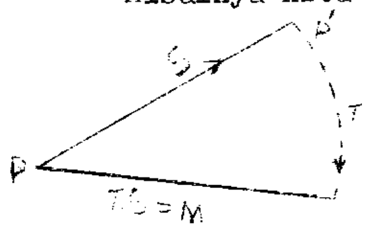
Fasal 1 : GROUP OF MOTION

Definisi :

Apabila dua buah transformasi (atau lebih)S dan T digabung dimana S membawa titik P ke P' dan T membawa P' ke P'', maka operasi (lanjutan) kedua transformasi itu disebut motion dan dinyatakan dalam bentuk :

$$TS = M : \begin{cases} x' = x \cos@ - y \ \sin @ \ ' \ a \\ y' = x \sin @ + y \cos @ \ ' \ b \end{cases}$$

Misalnya kita ambil sebuah contoh :



Suatu translasi S : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

suatu rotasi T : $\begin{cases} x'' = x'\cos@ - y'\sin@ \\ y'' = y'\sin@ + y'\cos@ \end{cases}$

maka TS : $\begin{cases} x'' = (x+a)\cos@ - (y+b)\sin@ \\ y'' = (x+a)\sin @ + (y+b)\cos @ \end{cases}$

$$\begin{cases} x'' = x \cos@ - y \sin@ + a \cos @ - b \sin @ \\ y'' = x \sin@ + y \cos@ + b \cos @ + a \sin @ \end{cases}$$

a cos @ - b sin @ dan b cos @ + a sin @ adalah bilangan konstan dan masing-masing dimisalkan P dan Q.

$$TS \begin{cases} x'' = x \cos@ - y \sin@ \ 'p \\ y'' = x \sin@ + y \cos@ + Q \end{cases}$$

adalah suatu motion.

Kumpulan transformasi yang berbentuk motion disebut group motion dan ditulis $\{ M \}$

Kita akan membuktikan apakah $\{ M \}$ merupakan suatu group.

Bukti : $M \begin{cases} x' = x \cos@ - y \sin@ + a \\ y' = x \sin@ + y \cos@ + b \end{cases}$

$$M_1 \begin{cases} x' = x \cos@_1 - y \sin@_1 + a1 \\ y' = x \sin@_1 + y \cos@_1 + b_1 \end{cases}$$

$$M_2 : \begin{cases} x' = x \cos@_2 - y \sin@_2 + a_2 \\ y' = x \sin@_2 + y \cos@_2 + b_2 \end{cases}$$

$$M_3 : \begin{cases} x' = x \cos@_3 - y \sin@_3 + a_3 \\ y' = x \sin@_3 + y \cos@_3 + b_3 \end{cases}$$

Syarat group :

1. M_2M_1 harus merupakan suatu motion

$$M_2M_1 : \begin{cases} x'=(x \cos@_1-y \sin@_1+a_1)\cos@_2-(x \sin@_1+y \cos@_1+b_1)\sin@_2+a_2 \\ y'=(x \cos@_1-y \sin@_1+a_1)\sin@_2+(x \sin@_1+y\cos@_1+b_1)\cos@_2+b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=(\cos@_1\cos@_2-\sin@_1\sin@_2)x-(\sin@_1\cos@_2+\cos@_1\sin@_2)y \\ \qquad +a_1\cos@_2-b_1\sin@_2+a_2 \\ y'=(\cos@_1\sin@_2+\sin@_1\cos@_2)x+(\cos@_1\cos@_2-\sin@_1\sin@_2)y \\ \qquad +a_1\sin@_2+b_1\cos@_2+b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=x \cos(@_1+@_2)-y \sin(@_1+@_2) + p \\ y'=x \sin(@_1+@_2)+y \cos(@_1+@_2) + q \end{cases}$$

Jadi hasil kali 2 buah motion adalah motion

2. Harus mempunyai invers.

$$M_1 : \begin{cases} x'=x \cos@_1-y \sin@_1+a_1 \\ y'=x \sin@_1+y \cos@_1+b_1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x'-a_1=x \cos@_1-y \sin@_1 \\ y'-b_1=x \sin@_1+y \cos@_1 \end{matrix} \left/ \begin{matrix} \cos@_1 \\ \sin@_1 \end{matrix} \right/$$

$$(x'-a_1)\cos@_1 = x \cos^2@_1 - y \sin@_1\cos@_1$$

$$\underline{(y'-b_1)\sin@_1 = x \sin^2@_1 + y \sin@_1\cos@_1 \quad +}$$

$$(x'-a_1)\cos@_1+ (y' -b_1) \sin@_1= x(\cos^2@_1 + \sin^2@_1)$$

$$x= (x' - a_1)\cos@_1+ (y' - b_1)\sin@_1$$

$x'-a_1= x\cos@_1-y\sin@_1 \quad / x\sin@_1 /$

$y'-b_1= x\sin@_1+y\cos@_1 \quad / x\cos@_1 /$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} x'-a & -\sin@ \\ y'-b & \cos@ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos@ & -\sin@ \\ \sin@ & \cos@ \end{vmatrix}} = \triangle = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos@ & x-a \\ \sin@ & y-b \end{vmatrix}}{\triangle = 1}$$

$(x'-a_1)\sin@_1-(y'-b_1)\cos@_1= -(\sin^2@_1+\cos^2@_1)y$

$y=(y'-b_1)\cos@_1-(x'-a_1)\sin@_1$

$M_1^{-1}: \begin{cases} x'=(x-a_1)\cos@_1+(y-b_1)\sin@_1 \\ y'=(y-b_1)\cos@_1-(x-a_1)\sin@_1 \end{cases}$

Jadi M_1 mempunyai invers.

3. Harus mempunyai identity.

$M_1M_1^{-1} \begin{cases} x'=\{(x-a_1)\cos@_1+(y-b_1)\sin@_1\}\cos@_1-\{(y-b_1)\cos@_1- \\ \qquad (x-a_1)\sin@_1\}\sin@_1+a_1 \\ y'=\{(x-a_1)\cos@_1+(y-b_1)\sin@_1\}\sin@_1+\{(y-b_1)\cos@_1- \\ \qquad (x-a_1)\sin@_1\}\cos@_1+b_1 \end{cases}$

$\begin{cases} x'=(x-a_1)\cos^2@_1+\cancel{(y-b_1)\sin@_1\cos@_1}-\cancel{(y-b_1)\sin@_1\cos@_1}+(x-a_1) \\ \qquad \sin^2@_1+a_1 \\ y'=(x-a_1)\cancel{\sin@_1\cos@_1}+(y-b_1)\sin^2@_1+(y-b_1)\cos^2@_1-\cancel{(x-a_1)} \\ \qquad \cancel{\sin@_1}\cos@_1+b_1 \end{cases}$

$\begin{cases} x'=(x-a_1)\cos^2@_1 + (x-a_1)\sin^2@_1+a_1 \\ y'=(y-b_1)\sin^2@_1 + (y-b_1)\cos^2@_1+b_1 \end{cases}$

$x'=(x-a_1)(\sin^2@_1+\cos^2@_1) + a_1 \quad y'=(y-b_1)(\sin^2@_1+\cos^2@_1)+b_1$

$\begin{cases} x'=x-a_1+a_1 \\ y'=y-b_1+b_1 \end{cases}$ $\qquad M_1M_1^{-1} : x' = x \quad y' = y$

Jadi mempunyai identity.

4. Harus mempunyai sifat assosiatif.

$$(M2M1)M3 \begin{cases} x' = \cos(@_1+@_2)(x\cos@_3 - y\sin@_3 + a_3) - \sin(@_1+@_2)(x\sin@_3 \\ \quad + y\cos@_3 + b_3) + P \\ y' = \sin(@_1+@_2)(x\cos@_3 - y\sin@_3 + a_3) + \cos(@_1+@_2)(x\sin@_3 \\ \quad + y\cos@_3 + b_3) + Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \{\cos(@_1+@_2)\cos@_3 - \sin(@_1+@_2)\sin@_3\}\, x - \{\cos(@_1+@_2) \\ \quad \sin @_3 + \sin(@_1+@_2)\cos@_3\}\, y + a_3\cos(@_1+@_2) - b_3\sin(@_1+@_2) \\ y' = \{\sin(@_1+@_2)\cos@_3 + \cos(@_1+@_2)\sin@_3\}\, x + \{-(\sin(@_1+@_2) \\ \quad \sin @_3 + \cos(@_1+@_2)\cos@_3\}\, y + a_3\sin(@_1+@_2) + b_3\cos \\ \quad (@_1+@_2) + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos(@_1+@_2+@_3) - y\sin(@_1+@_2+@_3) + a_3\cos(@_1+@_2) - b_3\sin \\ \quad (@_1+@_2) + P \\ y' = y\sin(@_1+@_2+@_3) + y\cos(@_1+@_2+@_3) + a_3\sin(@_1+@_2) + b_3 \\ \quad \cos(@_1+@_2) + q \end{cases}$$

$$M1M3 \quad \begin{cases} x' = x\cos(@_1+@_2) - y\sin(@_1+@_3) + a_3\cos@_1 - b_3\sin@_1 + a_1 \\ y' = x\sin(@_1+@_3) + y\cos(@_1+@_3) + a_3\sin@_1 + b_3\cos@_1 + b_1 \end{cases}$$

$$M2(M1M3) \begin{cases} x' = \cos@_2\{x\cos(@_1+@_3) - y\sin(@_1+@_3) + a_3\cos@_1 - b_3\sin@_1 + a_1\} - \\ \sin@_2\,\{x\sin(@_1+@_3) + y\cos(@_1+@_3) + a_3\sin@_1 + b_3\cos@_1 + b_1\} + a_2 \\ y' = \sin@_2\{x\cos@_1+@_3) - y\sin(@_1+@_3) + a_3\cos@_1 - b_3\sin@_1 + a_1\} + \\ \quad \cos@_2\{x\sin@_1+@_3) + y\cos(@_1+@_3) + a_3\sin@_1 + b_3\cos@_1 + b_1\} + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\{\cos@_2\cos(@_1+@_2) - \sin@_2\sin(@_1+@_3)\} - y\{\sin(@_1+@_3) \\ \quad \cos @_2 + \sin@_2 \\ \quad \cos(@_1+@_3)\} + a_3(\cos@_1\cos@_2 - \sin@_1\sin@_2) - b_3(\sin@_1 \\ \quad \cos@_3 + \cos@_1\sin@_2) + a_1\cos@_2 - b_1\sin@_2 + a_2 \\ y' = x\{\sin@_2\cos(@_1+@_3) + \cos@_2\sin(@_1+@_3)\} + y\{\cos@_1+@_3) \\ \quad \cos @_2 - \sin(@_1+@_3)\sin @_2\} + a_3(\sin @_1\cos@_2 + \cos@_1 \\ \quad \sin@_2) + b_3(\cos@_1\cos@_2 - \sin@_1\sin@_2) + a_1\sin@_2 + b_1\cos@_2 \\ \quad + b2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos(@_1+@_2+@_3) - y\sin(@_1+@_2+@_3) + a_3\cos(@_1+@_2) + b_3 \\ \quad \sin@_1+@_2) + P \\ y' = x\sin(@_1+@_2+@_3) + y\cos(@_1+@_2+@_3) + a_3\sin(@_1+@_2) + b_3 \\ \quad \cos(@_1+@_2) + Q \end{cases}$$

Jadi (M2M1)M3 = M2(M1M3)

Definisi :

Obyek-obyek yang mempunyai korespondensi satu-satu dengan semua pasangan beraruran dari bilangan-bilangan real disebut titik.

Definisi :

Korespondensi yang terdapat antara titik dan pasangan-pasangan elemen disebut sistem koordinat.

Pasangan berurutan dari bilangan real yang berkorespondensi dengan tiap titik disebut koordinat-koordinat titik itu.

Definisi :

Ilmu Ukur yang mempelajari tentang kumpulan dari invarian-invarian sifat-sifat invarian dan relasi-relasi invarian dari suatu kumpulan titik dibawah group $\{M\}$ disebut Ilmu Ukur bidang Euclides.

Definisi :

Apabila suatu transformasi dari group $\{M\}$ dapat membawa suatu kumpulan titik kekumpulan titik yang lainnya, maka kedua kumpulan titik itu disebut kongruen ($\cong$).

Dalil :

Setiap dua garis adalah kongruen dibawah $\{M\}$

Bukti :

Persamaan garis : $Ax + By + c = 0$

koefisien arah $\longrightarrow m = tg@ = -\frac{A}{B}$

$Sec^2@ = tg^2@+1$, $\frac{1}{sec^2@} = \frac{1}{tg^2a+1} \rightarrow cos^2@ = \frac{1}{tg^2@+1}$

maka........

maka $\cos @ = \sqrt{\frac{1}{tg^2 @ + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{A^2}{B^2} + 1}} = \sqrt{\frac{B^2}{A^2+B^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\sin @ = \cos @ \; tg @$

$$= -\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Apabila garis itu ditransformasikan kesumbu x maka :

$$M : \begin{cases} x' = x \cos @ - y \sin @ + a \quad \text{menjadi} \\ y' = x \sin @ + y \cos @ + b \end{cases}$$

$$M : \begin{cases} x' = \frac{a}{\sqrt{A^2+B^2}} X + \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} Y + P \\ y' = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}} X + \frac{a}{\sqrt{A^2+B^2}} Y + Q \end{cases}$$

Ditransformasikan kesumbu x berarti $y' = 0$ dan ini merupakan tran formasi garis $AX + By + C = 0$ dibawah M. Sekarang kita perhati - kan $l_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$l_2 = A_2X + B_2y + C_2 = 0$

akan ditransformasikan l_1 ke l_2 dan sebaliknya.

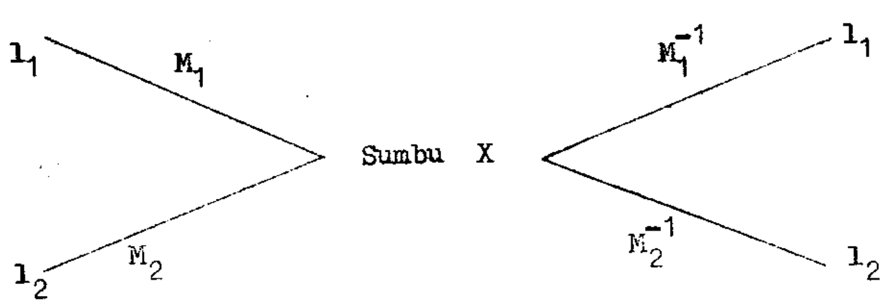
$l_1 \xrightarrow{M1} y = 0$ berarti M_1 membawa l_1 kesumbu x

$l_2 \xrightarrow{M2} y = 0$ " M_2 " l_2 kesumbu x

maka M_1^{-1} membawa sumbu x ke l_1

M_2^{-2} " " x ke l_2

Dengan diagram dibawah ini dapat kita simpulkan



$$\text{maka } l_1 \xrightarrow{M_2^{-1}\ M_1} l_2$$

$$l_2 \xrightarrow{M_1^{-1}\ M_2} l_1$$

Jadi transformasi $M_2^{-1} M_1$ membawa l_1 ke l_2

" $M_1^{-1} M_2$ " l_2 ke l_1

Jadi ada transformasi yang membawa l_1 ke l_2 dan sebaliknya, maka $l_1 \cong l_2$

Dalil :

Sebuah garis dapat dianggap sebagai 2 buah garis yang mempunyai arah dengan arahnya @

Bukti :

Persamaan garis lurus $l \equiv Ax + By + C = 0$

melalui $(x_o , y_o) \rightarrow Ax_o + By_o + C = 0$ -

$$A(x - xo) + B(y-yo) = 0$$

$$\frac{x - xo}{B} + \frac{y - yo}{A} = 0$$

Yang akan kita buktikan ada 2 buah garis yaitu :

$$x = a + s \cos @$$

$$y = b + s \sin @$$

telah kita peroleh $\sin @ = \frac{-A}{\sqrt{A^2+ B^2}}$, $\cos @ = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$A = - \sin @ \sqrt{A^2+ B^2}$$

$$B = \cos @ \sqrt{A^2+ B^2}$$

Maka $\frac{x - xo}{\cos@\sqrt{A^2+B^2}} \quad \frac{y - yo}{-\sin@\sqrt{A^2+ B^2}} = 0$

$$\frac{x - xo}{\cos@ \sqrt{A^2+ B^2}} - \frac{y - yo}{\sin@ \sqrt{A^2+ B^2}} = 0$$

$$\frac{x - xo}{\cos @} = \frac{y - yo}{\sin @} = s \quad (s = \text{parameter})$$

$$\frac{x - xo}{\cos @} = s \longrightarrow x = xo + s \cos @$$

$$\frac{y - yo}{\sin @} = S \longrightarrow y = yo + S \sin @$$

Jadi terdapat 2 buah garis yang mempunyai arah @

Definisi :

Sudut @ disebut sudut arah dan garis yang mempunyai persamaan :

$$\begin{cases} x = xo + S \cos @ \\ y = yo + S \sin @ \end{cases}$$ adalah garis yang berarah

Dalil

Kalau l_1 dan l_2 dengan sudut arah $@_1$ dan $@_2$ adalah 2 buah garis yang berarah maka $@_2 - @_1$ adalah invarian dibawah $\{M\}$

Bukti : $l_1 : \begin{cases} x_1 = xo + S_1 \cos @_1 \\ y_1 = yo + S_1 \sin @_1 \end{cases}$ $\quad l_2 : \begin{cases} x_2 = xo + S_2 \cos @_2 \\ y_2 = yo + S_2 \sin @_2 \end{cases}$

$$M : \begin{cases} x' = x \cos @ - y \sin @ + a \\ y' = x \sin @ + y \cos @ + b \end{cases}$$

$$l_1 \xrightarrow{M} l_1' \qquad l_2 \xrightarrow{M} l_2'$$

$$l_1' \begin{cases} x_1' = (xo + S_1 \cos @_1) \cos @ - (yo + S_1 \sin @_1) \sin @ + a \\ y_1' = (yo + S_1 \cos @_1) \sin @ + (yo + S_1 \sin @_1) \cos @ + b \end{cases}$$

$$l_1' \begin{cases} x' = xo\cos @ + S_1 \cos @ \cos @_1 - yo \sin @ - S1 \sin @ \sin @_1 + a \\ y_1' = yo \sin @ + S_1 \sin @ \cos @_1 + yo \cos @ + S_1 \cos @ - \sin @_1 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = xo \cos @ - yo \sin @ + S_1 \cos (@_1 + @) + a \\ y' = xo \sin @ + yo \cos @ + S_1 \sin (@_1 + @) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = xo \cos @ - yo \sin @ + a + S_1 \cos (@_1 + @) \\ y' = xo \sin @ + yo \cos @ + b + S_1 \sin (@_1 + @) \end{cases}$$

$l_1' : x_1' = xo' + S_1 \cos (@_1 + @) \qquad @_1 + @ = W_1 (\text{mod } 2\pi)$

$y_1' = yo' + S_1 \sin (@_1 + @)$

analog :

$$l2' = x2' = xo' + S2\cos(@_2 + @) \qquad @_2 + @ = W2 \pmod{2\pi}$$
$$y2' = yo' + S2\sin(@_2 + @)$$
$$W_2 = W1 = @2 + @ - @2 - @ = @2 - @1$$

Sudut antara $l2'$ dan $l1'$ = @2-@1 ⎫ jadi @2-@1 invarian
" " l_2' dan l_1 = @2-@1 ⎭ dibawah { M }

Definisi :

Suatu titik adalah titik tetap dari suatu transformasi bila hasil transformasinya berimpit dengan titik itu.

Definisi :

• Titik tetap suatu rotasi disebut titik pusat dan nilai @ disebut sudut.

Translasi yang tidak mempunyai titik tetap mempunyai sudut 0^o

Dalil :

Tiap translasi dapat dianggap sebagai hasil kali 2 rotasi dimana satu diantaranya sembarangan (bukan identity)

Bukti :
Misalkan translasi itu T
Rotasi itu R

$$M = R^{-1}T$$
$$RM = R\,(R^{-1}T) = (RR^{-1})\,T = IT = T$$

Kita akan membuktikan M merupakan suatu rotasi :

$$RM = T$$
$$(RM)M^{-1} = TM^{-1}$$
$$R(MM^{-1}) = TM^{-1}$$
$$RI = TM^{-1}$$
$$R = TM^{-1}$$

Jika M adalah translasi maka M^{-1} juga suatu translasi ,tentu TM^{-1} juga translasi sehingga R juga translasi, sedangkan diketahui R adalah rotasi. Jadi M bukanlah translasi melainkan rotasi.

Soal-soal.........

Soal-soal :

Buktikanlah :

1. Kalau P_1 dan P_2 terletak pada garis $\begin{cases} x = xo + S \cos @ \\ y = yo + S \sin @ \end{cases}$

   maka jarak yang berarah $S_2 - S_1$ dari P_1 ke P_2 adalah invarian dibawah $\{M\}$

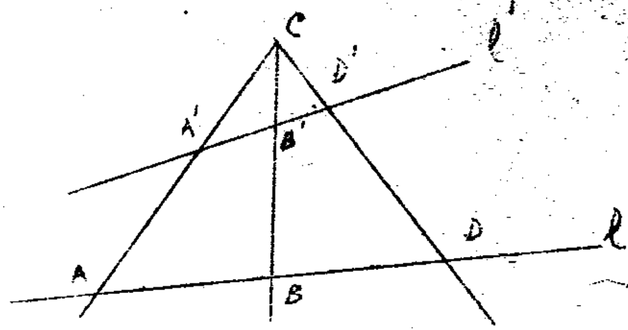
2. Transformasi dari sebuah sistem koordinat cartesius ke koordinat cartesius lainnya ditentukan oleh persamaan $\{M\}$

3. Suatu motion merupakan suatu translasi atau suatu rotasi dengan titik tetap.

4. Hasil kali 2 motion merupakan sebuah motion dan besar sudutnya sama dengan jumlah sudut kedua motion tadi mod. 2π

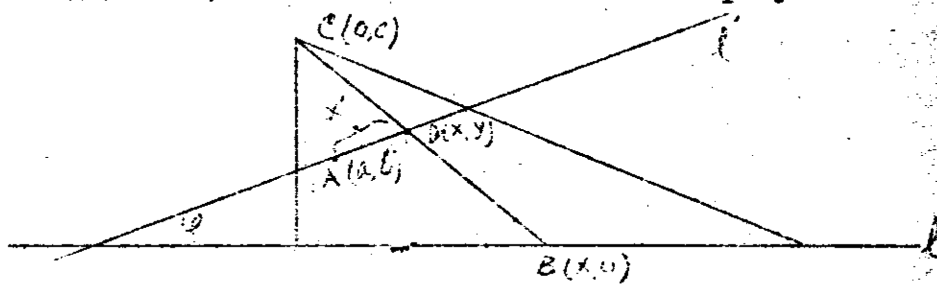
-

Fasal 2 : P R O Y E K S I



Definisi :

Transformasi titik antara l dan l' yang ditentukan dengan syarat bahwa yang berkorespondensi kollinir dengan titik C (C diluar l dan l') disebut proyeksi central.



l' $\equiv$ garis berarah melalui A (a, b)

l' $\equiv$ $\begin{cases} x = a + x' \ \text{Cos} \ @ \\ y = b + x' \ \text{Sin} \ @ \end{cases}$

x' = patenmeter / jarak.

Supaya C (0, C), D (x, y) dan B (x. 0) kollinier ,haruslah

$$\begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ x & 0 & 1 \\ a + x' \text{Cos}@ & b + x' \text{Sin} @ & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Syarat 3 titik kolinier)

Dalil....

Dalil : Tiap proyeksi sentral atau paralel antara 2 garis ... des l dan l' ditentukan oleh suatu transformasi yang ... singuler, liner dan pecahan yang terbentuk.

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \quad dg \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

<u>Catatan</u> :3 titik koliner P_1 (x_1, y_1) , P_2 (x_2, y_2) dan P_3(...

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ atau}$$

$$\frac{x2 - x1}{x3 - x1} = \frac{y2 - y1}{y3 - y1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ x & 0 & 1 \\ a + x' \cos @ & b + c + x' \sin @ & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \frac{b_2 - b_1}{b3 - b1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ x & -c & 0 \\ a + x' \cos @ & b - c + x' \sin @ & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} x & -c \\ a + x' \cos @ & b - c + x' \sin @ \end{vmatrix} = 0$$

$x(b - c + x' \sin @) + C (a + x' \cos @) = 0$

$x(b - c) + x' x \sin @ + ca + x' c \cos @ = 0$

$(x \sin @ + c \cos @) x' = (c - b) x - Ca$

$$\boxed{x' = \frac{(c - b) x - ca}{x \sin @ + C \cos @} \qquad x' = \frac{px + q}{x + d}} \qquad \text{Rumus :}$$

Jika : C titik pada 1 ——————→ $C \neq 0$

C titik pada l' ——→ $1 = y - b = tg \quad (x - a)$

$c - b = tg \quad (0 - a)$

$\frac{a - b}{a} + tg = 0$

C tidak...

Kemungkinan perubahan :

4 titik ---- Permutasi 4 ! = 24, ada 4 yang sama. Jadi ada $\frac{24}{4} = 6$ jenis Cross Ratio, yaitu :

(AB,CD) ; (AC, BD) ; (AD,BC)

(AB,DC) ; (AC, DB) ; (AD,CB)

Contoh :

1. Tunjukkanlah harga-harga Cross Ratio untuk semua unsur dari titik-titik A,B,C dan D. Jika A(2,1) , B (1,2) C(-1,1) ; D (1,0).

Jawab.

$$(AB,CD) = \frac{|ac|}{|ad|} \bullet \frac{|bd|}{|bc|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} \bullet \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2+1}{0-1} \bullet \frac{0-2}{1+2} = 2$$

$$(AB,DC) = \frac{|ad|}{|ac|} \bullet \frac{|bc|}{|bd|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} \quad \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{2+1} \bullet \frac{1+2}{0-2} = \frac{1}{2}$$

$$(AC,BD) = \frac{|ab|}{|ad|} \bullet \frac{|cd|}{|cb|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} \bullet \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{4-1}{0-1} \bullet \frac{-1}{-2-1} = -1$$

$$(AD,BC) = \frac{|ab|}{|ac|} - \frac{|dc|}{|db|}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} \bullet \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4-1}{2+1} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(AC,DB) = \frac{|sd|}{|ab|} \cdot \frac{|cb|}{|cd|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-1}{4-1} \cdot \frac{-2 \quad -1}{-1} = -1$$

$$(AD,CB) = \frac{|ac|}{|ab|} \cdot \frac{|db|}{|dc|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2+1}{4-1} \cdot \frac{2}{1} = 2$$

Contoh

2. Jika titik A,B,C dan D pada contoh 1, Tentukanlah Cross-Ratio (AA,BC) ; (AB,CC) dan (AB, AC)

Jawab :

$$(AA,BC) = \frac{|ab|}{|ac|} \cdot \frac{|ac|}{|ab|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1$$

$$(AB,CC) = \frac{|ac|}{|ac|} \cdot \frac{|bc|}{|bc|} = 1$$

$$(AB\ ,\ AC) = \frac{|aa|}{|ac|} \cdot \frac{|bc|}{|ba|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2-2}{2+1} \quad \frac{1+2}{1-4} = 0$$

Defenisi : Jika (AB,CD) = -1, maka titik-titik ini dinamakan titik-titik yang <u>terpisah harmonis</u>.

Defenisi : Jika (AB,CD) -1, maka A dan B memisah C dan D secara Harmonis. A dan B ; C dan D dinamakan <u>Harmonis sekawan</u>, atau A dan B Harmonis sekawan terhadap C dan D.

<u>Dalil</u> : Dalam R, O adalah koordinat non homogen, artinya x = O dan O^* adalah titik terkecuali artinya x = ∞, maka ada dua buah titik Y dan Z dengan koordinat non homogen, dimana Y dan Z adalah Harmonis sekawan terhadap O dan O^* jika Y + Z = O

Y koordinat titik non homogen Y = y

Z koordinat titik non homogen Z = z.

kalau O koordinat non homogen x = O $\longrightarrow$ homogen (0,1)

kalau O^* titik terkecuali x = ∞ $\longrightarrow$ homogen (1,0)

kalau Y koordinat titik non homogen Y = y $\longrightarrow$ homogen (y,1)

kalau Z koordinat titik non homogen Z = z $\longrightarrow$ homogen (z,1)

$(OO^*,YZ) = -1$ jika $y + z = 0 \longrightarrow y = -z$

menurut defenisi :

$$(OO^*,YZ) = \frac{|OY|}{|OZ|} \cdot \frac{|O^*Y|}{|O^*Z|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ z & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{-z} \cdot \frac{1}{1} = \frac{y}{z}$$

$$y = -z \longrightarrow \frac{-z}{z} = -1$$

maka jelaslah bahwa ya dan z harmonis sekawan terhadap O dan O^*.

Dalil , Dalam R, pasangan titik-titik yang dihasilkan oleh $aX_1^2 + 2b\, X_1X_2 + c\, X_2^2 = 0$ dimana $b^2 - 4ac \neq 0$ memisah harmonis titik-titik O^* dan O jika b = 0.

titik a dan b $(ab, 0^*0) = -1$ $b = 0$

$a X_1^2 + 2\ bx_1x_2 + ax_2^{*2} = 0$

$a\left(\frac{x1}{x_2}\right)^2 + 2\ b\ \left(\frac{x1}{x_2}\right) + c = 0$

misalkan $\frac{x1}{x_2} = y \dashrightarrow ay^2 + 2by + c = 0$

$b^2 - 4\ ac\ = \neq 0$

$\dashrightarrow y_1$ dan y_2 nyata dan y_1 dan y_2 complek

Bukti :

Cross Ratio $(y_1y_2, 0^*0)$

dalam $R_1 = \frac{|y_10^*|}{|y_10|} \cdot \frac{|y_2\ 0^*|}{|y_2\ 0|}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{y_1} \cdot \frac{-1}{y_2} = \frac{1}{y_1y_2}$$

menurut dalil $y + z = 0$

$(yz, 00^*) = -1$

$(y_1y_2, 00^*) = y_1 + y_2 = \frac{-2b}{a} = \frac{0}{a} = 0$

$\dashrightarrow y_1 + y_2 = 0 \dashrightarrow (y_1y_2,\ 0\ 0^*) = -1$

kalau $(yz, 00^*) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ 0^1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-1} \cdot \frac{z}{-1} = \frac{yz}{1}$

$(00^*, yz) = \frac{|oy|}{|0z|} \cdot \frac{|0^*\ y|}{|0^*\ z|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ z & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{vmatrix}}$

$$= \frac{-y}{-z} \cdot \frac{1}{1} = \frac{y}{z} = \frac{-z}{z} = -1$$

seharusnya $\frac{yz}{1} = \frac{y}{z}$ jadi $(yz, 00^*) \neq (00^*, yz)$

Dalil : Dalam R_2 O^* titik terkecuali dari sistem koordinat pro - yektif non Homogen , maka kawan O^* terhadap titik $x = a$ dan $x = b$ adalah titik $x = \frac{1}{2}(a + b)$.

$O^* \dashrightarrow x = \qquad \dashrightarrow O^*(1,0)$

$A - x = a \dashrightarrow A(a,1)$

$B - x = b \dashrightarrow B(b,1)$

$(O^*x , AB) = -1 \dashrightarrow$ jika $x = \frac{1}{2}(a + b)$ non homogen

$\dashrightarrow$ homogennya $C(\frac{1}{2}(a+b), 1)$

Defenisi : Pasangan AB memisah pasangan CD ditulis $AB \int CD$
Jika (AB,CD) 0 dan AB tidak memisah CD jika (AB,CD)=0 ditulis $AB \not\int CD$

Contoh :

3. Buktikan bahwa titik yang dihasilkan oleh $x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 0$. memisahkan harmonis titik yang ditentukan oleh :

$3x_1^2 - 4x_1x_2 - 7x_2^2 = 0$

Bukti : $x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 0 \qquad x_2 \neq 0$

$$\frac{x_1}{x_2} = Y \quad \text{non homogen}$$

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} - 4\frac{x_1}{x_2} + 5 = 0 \text{ ---- } Y^2 - 4y + 5 = 0$$

$$Y_{12} = 2 \pm \sqrt{4 - 5}$$

$$= 2 \pm 1$$

titik yang dihasilkan persamaan I $\dashrightarrow$ A(2-i,1) ;B(2+i,1)

$3x^2 - 4x_1x_2 - 7x_2^2 = 0$

$$3Z^2 - 4Z - 7 = 0 \dashrightarrow Z_{12} = \frac{4 \pm 10}{6}$$

titik yang dihasilkan oleh persamaan II $\dashrightarrow$ C(-1,1) ; D(7/3,1) atau D (7,3).

Dalam koordinat Homogen :

$$(AB,CD) = \frac{|ac|}{|ad|} \cdot \frac{|bd|}{|bc|} = \frac{\begin{vmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2-i & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 2+i & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+i & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2-i+1}{6-3i-7} \cdot \frac{6+3i-7}{2+i+1} = \frac{(3-i)}{-1-3i} \cdot \frac{-1+3i}{3+i}$$

$$= \frac{(3-i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} \cdot \frac{(-1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{(3-i)^2(-1+3i)^2}{(1+9)(9+1)} = \frac{-64-36}{100} = -1$$

jadi (AB,CD) = -1 ---→ AB memisah harmonis.

Soal-soal :

1. Jika (AB , CD) = λ

   Buktikan : a. $(AC,BD) = 1 - \lambda$

   b. $(AD,BC) = 1 - \frac{1}{\lambda}$

   c. $(AB,DC) = \frac{1}{\lambda}$

   d. $(AC,DB) = \frac{1}{1-\lambda}$

   e. $(AD,CD) = \frac{\quad}{\lambda-1}$

2. Buktikan : (AB,CD) (AB,DE)(AB,BC) = 1

3. Buktikan : a. Pemisah adalah sifat proyektif dari 4 titik

   b. Jika AB memisah CD maka AB memisah DC dan CD memisah AB

   c. Jika AB memisah CD maka AC tidak memisah DB dan AB tidak memisah BC.

-0-

BAB V

TITIK TETAP SUATU PROYEKTIVITY

Dalil : Di R_1^* suatu proyektivity mempunyai 2 titik tetap nyata berlainan, atau 2 titik tetap complec sekawan atau suatu titik tetap (dihitung titik rangkap), atau proyektivity identity.

Yang dikatakan titik tetap ialah titik yang sama hasilnya sebelum dan sesudah transpormasi yang kalau kita determinankan harganya sama dengan nol.

Bukti : $\left\{\pi^{(1)}\right\} \alpha \begin{cases} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$ $\qquad |a_{ij}| \neq 0$

Titik tetap : $x_1 = x_1' = a_{11}x_1 + a_{12} x_2$

$x_2 = x_2' = a_{21} x_1 + a_{12} x_2$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_{22}x_1 + a_{12}x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{vmatrix} = 0$$

$a_{21} x_1^2 + a_{22} x_1x_2 - a_{11} x_1 x_2 - a_{12} x_2^2 = 0$

$a_{21} x_1^2 + (a_{22} - a_{11}) x_1x_2 - a_{12} x_2^2 = 0$ ini adalah suatu persamaan kwadrat.

Pada persamaan kwadrat tergantung pada Diseriminant :

Kalau : $D > 0$ ---> 2 titik nyata dan berlainan

$D = 0$ ---> 1 titik nyata.

$D < 0$ ---> 2 titik yang complex sekawan.

Bila $a_{21} = (a_{22} - a_{11}) = a_{12} = 0$

maka $a_{11} = a_{22} = 0$

$a_{22} - a_{11} = 0 \qquad a_{11} = a_{22}$ ini dinamakan proyektivity = identity.

Jadi bentuk proyektivity atau identity ialah :

$$\left\{ \pi^{(1)} \right\} \qquad \begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 \\ x_2' &= a_{22}x_2 \end{aligned}$$

$a_{22} = a_{11} \dashrightarrow x_1' = a_{11}\ x_1$ atau $x_1' = a_{22}\ x_1$

identity $\quad x_2' = a_{11}\ x_2 \qquad x_2' = a_{22}\ x_2$

Kita lihat pada persamaan kwadrat :

$Q\ (\ x_1,\ x_2) = ax_1^2 + 2\ ba_1x_2 + cx_2^2$

Q disebut berbentuk binary (rangkap) dalam x_1 dan x_2 atau polinom dalam x_1 dan x_2.

Kalau Q ditranspormasikan menjadi Q' : $\dashrightarrow Q \xrightarrow{T} Q'$

$$T = \left\{ \pi^{(1)} \right\} \quad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$ ini secara biasa.

Q $\qquad$ Q''

$$T_1 = \begin{cases} x_1' = \rho\ (\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \\ x_2' = \rho\ (\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{cases}$$ $\rho \neq 0$ bilangan tetap.

Q' dan Q" hanya berbeda dalam ρ (bilangan tetap) saja

Q' tetap ekiuvalen dengan Q"

Akibatnya timbul masalah-masalah yang didefinisikan sebagai berikut :

Dari $Q\ (\ x_1,\ x_2) = 0$

I $\quad a \neq 0 \quad Q\ (\ x_1,\ x_2) = a\ x_1^2 + 2\ b\ x_1x_2 + c\ x_2^2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a}\ (\ a^2x_1^2 + 2\ ab\ x_1x_2 + ac\ x_2^2\ ) \\
&= \frac{1}{a}\ (\ a^2x_1^2 + 2\ ab\ x_1x_2 + b^2\ x_2^2 + b^2x_2^2 + ac\ x_2^2) \\
&= \frac{1}{a} \left\{ (a^2x^2 + 2abx_1x_2 + b^2x_2^2) + acx_2^2 - b^2\ x_2^2 \right\} \\
&= \frac{1}{a} \left\{ (a\ x_1 + b\ x_2)^2 + x_2^2\ (\ ac - b^2\ ) \right\}
\end{aligned}$$

Ada suatu transpormasi : $\begin{cases} x_1' = ax_1' + b\,x_2 \\ x_2' = k\,x_2 \end{cases}$

dimana k $= \sqrt{ac - b^2}$,kalau $ac - b^2 > 0$

atau k $= \sqrt{- ac + b^2}$ kalau $ac - b^2 > 0$

atau k kalau $ac - b^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maka } Q(x_1 . x_2) = x_1'^2 + x'^2_2 = 0 \\ \text{atau} \quad : x'^2_1 = x'^2_2 = 0 \\ \text{atau} \quad : x'^2 = 0 \end{array}\right\} \text{ini dinamai bentuk-bentuk KANONIK}$$

bergantung kepada harga k nya.

II. $a = 0$, $C \neq 0$ indek (1) dan (2) dapat ditukar dan kita mendapatkan hasil seperti diatas yaitu :

$$Q(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{c} \left\{ (cx_2 + bx_1)^2 + (ac - b^2)\,x_1 \right\}$$

III. $a = 0$, $C = 0$ -- $Q(x_1, x_2) = 2\,b\,x_1 x_2 = 0$

$$= x_1 - x_1' + x_2, \qquad x_1 x_2 = x_1'^2 + x_2'^2$$

Bentuk Q apa saja = 0 dapat diubah menjadi salah satu bentuk kanonik. Dengan perkataan lain tiap $Q(x_1 + x_2) = 0$ adalah ekiuvalen proyektif dengan salah satu dari ;

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Dalilnya : Di R_1^* sistim $Q(x_1, x_2) = 0$ dapat diganti,bila kita memilih koordinat-koordinat yang sesuai dengan salah satu dari persamaan-persamaan berikut :

$$x_1^2 = x_2^2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad x_1^2 = 0$$

Contoh : (1) Titik apakah yang terjadi dari persamaan :

$$Q\ (x_1 + x_2) \equiv x_1^2 - x_1 x_2 - 2\ x_2^2 = 0$$

Jawab : $x_1^2 - x_1\ x_2 - 2\ x_2^2 = 0$ $\qquad x_1 - 2\ x_2 = 0$

$x_1 = 2\ x_2$

$x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2\ x_2^2 = 0$ $\qquad x_2 = 1 \quad x_1 = 2$

$x_1(\ x_1 + x_2) - 2x_2(x_1 + x_2) = 0$ $\quad (\ 2\ ,\ 1\ ).$

$(\ x - 2\ x\ )\ (\ x + x\ ) = 0$

$x_1 + x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = -\ x_2 \qquad x_1 = -1\ \ \&\ \ x_2 - 1\ (\ -\ 1\ ,\ 1\ )$

<u>Titik tetap nyata dan berlainan</u> :

Contoh : (2) Tentukan suatu transpormasi koordinat yang memudah kan proyektivity $\begin{cases} x_1' - 2\ x_1 + 5\ x_2 \\ x_2' - y\ x_1 - x_2 \end{cases}$ menjadi salah – satu bentuk ka- nonik.

Jawab : Titik tetap $Q\ (\ x\ .\ x\ ) = \begin{vmatrix} x & x \\ 2\ x_1 + 5\ x_2 & 3\ x_1 - x_2 \end{vmatrix} = 0$

$3\ x_1^2 - x_1x_2 - 2\ x_1x_2 - 5\ x_2^2 = 0$

$Q\ (\ x_1\ ,\ x_2)\ 3\ x_1^2 - 3\ x_1x_2^2 - 5\ x_2^2 = 0$

$a = 3 \rightarrow \frac{1}{3}\ (\ 9\ x_1 - 9\ x_1x_2 - 15\ x_2^2\ ) = 0$

$\frac{1}{3}\ (\ 9\ x_1 - 9\ x_1x_2 + \frac{9}{4}\ \ x_2^2 - \frac{9}{4}\ x_2^x - 15\ x_2^2\ ) = 0$

$\frac{1}{3}\left\{(\ 3\ x_1 - \frac{3}{2}\ x_2)^2 - 17\ \frac{1}{4}\ \ x_2^2 = 0\right.$

$k = \sqrt{-17\ \frac{1}{4}} = \sqrt{-\ \frac{69}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{-\ 69}$

$x_1' = 3\ x_1 - \frac{3}{2}\ x_2 \qquad x_2' = \frac{1}{2}\sqrt{-\ 69\ \ x_2}$

Definisi : Di R_1 suatu proyektivity adalah <u>prabolic</u> jika proyektivity itu hanya mempunyai satu titik tetap. Hiperbolic jika proyektivity itu mempunyai 2 titik tetap yang nyata dan berlainan dan eliptic jika proyektivity mem–

punyai 2 titik complex sekawan.

Titik tetap : $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x' & x' \end{vmatrix} = a_{21} \quad x_1^2 - (a_{11} - a_{22})x_1x_2 - a_{21}x_2^2 = 0$

Proyektivity adalah parabolic $a_{11} - a_{22} = 0$

$a_{11} = 0$

Proyektivity adalah hiperbolic $a_{11} - a_{22} = 0$

$a_{12} - a_{21} \neq 0$

Proyektivity adalah eliptic $a_{11} - a_{12} = 0$

$a_{21} - a_{12} \quad 0$

Transpormasi dalam R_1

$$\left\{ \pi^{(i)} \right\} \quad \begin{cases} x_1' - a_{11}\, x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' - a_{21}\, x_1 + a \quad x_2 \end{cases}$$

(a) Parabolic $x'_1 = \alpha x_1$

$x'_2 = \beta x_1 + x_2 \qquad \alpha^2 \neq 0$

(b) Hiperbolic $x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$

$x' = \beta x_1 + \alpha x_2 \qquad \alpha + \beta \neq 0$

(c) Eliptic $\begin{cases} x'_1 - \alpha x_1 - \beta x_2 \\ x' + \beta x + \alpha x \end{cases} \qquad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

Contoh :

$Q (x_1, x_2) = a_{21}x_1^2 - (a_{11} - a_{22}) x_1x_2 - a_{12}x_2^2 = 0$

Jika $_{21} - a_{12} = 0$

$Q (x_1 , x_2) = \rho x_1 x_2$

Proyektivity menjadi : $\left.\begin{matrix} x_1' = a_{11}\, x_1 \\ x_2' = a_{22}\, x_2 \end{matrix}\right\}$ adalah hiperbolic

Kalau $\beta = 0 \longrightarrow \begin{matrix} x'_1 = \alpha\, x_1 \\ x'_2 = \alpha\, x_2 \end{matrix}$ identity

Dalam bentuk non homogen

(a) Parabolic proyektivity $x' = \dfrac{\beta}{\alpha} + x \qquad \dfrac{x_2}{x_1} = x$

(b) Hiperbolic proyektivity $x' \; \dfrac{\alpha x + \beta}{\beta x + \alpha} \qquad \dfrac{x_1}{x_2} = x$

(c) Eliptic proyektivity $x' = \dfrac{\alpha x - \beta}{\beta x + \alpha} \qquad \dfrac{x_1}{x_2} = x$

Dalil : Jika suatu proyektivity yang diketahui di R_1^* adalah parabolic hiperbolic dan eliptic maka koordinat-koordinat dapat dipilih demikian sehingga proyektivity itu berbentuk seperti diatas.

Dalil : Jika A dan B adalah titik tetap yang berlainan dari suatu non parabolic proyektivity, x adalah titik variable tidak sama dengan A dan B , dan x' adalah hasil transpormasinya C R (AB, XX), adalah tetap.

Bukti : Umpamakan titik C ($\neq$ A, B, X) dan hasil transpormasinya C' (AB, CX) - (A'B' , C' X') - (AB,C' X') karena CR invarian dibawah $\{\pi^{(1)}\}$

$$\frac{|a\ c|\ |b\ x|}{|a\ x|\ |b\ c|} = \frac{|a\ c'|\ |b\ x'|}{|a\ x'|\ |b\ c'|}$$

$$\frac{|a\ x'|\ |b\ x|}{|a\ x|\ |b\ X'|} = \frac{|a\ c'|\ |b\ c|}{|a\ c|\ |b\ c'|}$$

$$\frac{|a\ x|\ |b\ x'|}{|a\ x'|\ |b\ x|} = \frac{|a\ c|\ |b\ c'|}{|a\ c'|\ |b\ c|}$$

maka (A B , X X') = (A B , C C') tetap .

Definisi :

Jika A dan B adalah titik tetap yang berlainan suatu non parabolic proyektivity, maka harganya (A B , X X') yang tetap itu disebut karakteristik proyektivity sesuai dengan urutan A , B.

Karekteristik proyektivity suatu hiperbolic proyektivity dengan titik tetap x - 1 dan x = - 1
(A) (B)

CATATAN :

Homogen $\begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x' = \beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases}$ non homogen $\left\{ x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\beta x + \alpha} \right.$

(A B , X X') adalah bilangan tetap nyata dan 0 , atau jika transpormasi titik tidak mengubah 2 titik complex sekawan.

A dan B dan (A B , X X') adalah bilangan tetap yang complex dengan harga mutlak, maka transpormasinya itu adalah suatu proyektivity.

-0-

DAFTAR BACAAN

B. Demidovich (1950), Problem in Mathematical Analysis, Peace Publishers, Moscon.

Bremekamp.H, dan Van Os.C.H (1947), Algebra Hoofdetukken, Delftsche Uitgevers Maatschappij - Delft.

Departemen P & K (1976), Matematika untuk SMA jilid VII , VIII, IX, X , XI dan XII , Jakarta.

Gibson, G.A (1958), Advanced Calculus , Mac Millan & Co, New-York.

Klein,F (1960), Elementary Mathematics from advanced stand - Point , Mac Millan & Co New York.

-0-