ILMU PELUANG

Oleh :

DRA. PUTRI YUANITA

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

IKIP PADANG

1990

KATA PENGANTAR

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai kejadian-kejadian atau peristiwa-peristiwa yang sifatnya belum pasti, apakah suatu peristiwa tersebut akan terjadi atau tidak.

Untuk mengukur ketidak pastian dari peristiwa-peristiwa tersebut digunakan ukuran peluang. Jadi peluang merupakan sebuah ukuran yang dipakai untuk mengetahui apakah suatu peristiwa akan terjadi atau tidak.

Sehubungan dengan peranan penting peluang, terutama sebagai dasar dalam pengambilan keputusan, penulis berusaha untuk menghimpun uraian-uraian mengenai peluang yang dikutip dari berbagai buku dan kemudian disajikan dalam bentuk sebuah buku.

Buku ini terdiri dari empat bab dan penulis berharap agar para pemakai buku ini dapat mengerti dengan mudah mengenai uraian-uraiannya.

Mudah-mudahan buku ini dapat bermamfaat bagi para pembaca yang mempelajari masalah-masalah mengenai peluang dan untuk kesempurnaan buku ini, penulis dengan senang hati menerima saran-saran dan kritikan dari segala pihak

Padang, Agustus 1990

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

ANALISA KOMBINATORIAL

1. PRINSIP DASAR MENGHITUNG

Dalam beberapa masalah statistik, kita harus mendaftarkan semua unsur yang mungkin dalam keadaan tertentu atau setidak-tidaknya menentukan banyak kemungkinan yang berbeda. Dalam menentukan kemungkinan yang berbeda ini, kita sering menggunakan dalil yang disebut dengan "PRINSIP PERKALIAN", seperti dikemukakan oleh John E. Freund dan Ronal E. Walpole (1987 ; 2).

Dalil 1.1 : Jika suatu prosedur terdiri dari dua tahap, tahap pertama dilakukan dalam n_1 cara berbeda dan untuk masing-masing cara ini tahap kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara berbeda, maka keseluruhan prosedur dapat dilakukan dalam $n_1 . n_2$ cara.

Contoh 1.1: Beberapa cara yang mungkin, apabila kita melakukan pengundian dengan menggunakan satu mata uang logam Rp.50,- dan satu mata uang logam Rp.100,-

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan permasalahan ini, mata uang logam Rp.50,- dapat terjadi dalam 2 cara (yaitu keluarnya angka 50 dan gambar burung) dan untuk masing-masing cara ini mata uang logam Rp.100,- dapat juga terjadi dalam 2 cara. Sehingga seluruhnya dapat terjadi dalam 2 x 2 = 4 cara berbeda.

Dalil 1.1 ini dapat diperluas untuk sebuah prosedure yang terdiri dari beberapa tahap. Seperti yang terlihat dalam dalil berikut yang ditulis SEYMOUR LIPSCHUTZ (1981 ; 16).

Dalil 1.2 : Jika sebuah prosedur terdiri dari k tahap, tahap pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara berbeda untuk masing-masing cara ini tahap kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara berbeda, untuk masing-masing cara ini tahap ketiga dapat dilakukan dalam n_3 cara, dan demikian seterusnya; maka keseluruhan prosedur dapat dilakukan dalam $n_1 . n_2 . n_3 \ldots\ldots\ldots n_k$ cara.

Contoh 1.2: Seorang anak perempuan mempunyai stelan pakaian dan perhiasan yang terdiri dari 4 helai gaun 3 macam kalung dan 2 pasang sepatu. Ada beberapa cara anak perempuan tersebut dapat memakai stelan pakaian dan perhiasan tersebut ?

Penyelesaian :

Dalam hal ini, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$; maka $n_1 x n_2 x n_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$. Jadi terdapat 24 stelan yang berbeda yang dapat dipakai oleh anak perempuan itu.

2. NOTASI FAKTORIAL

Notasi Faktorial akan banyak kita gunakan untuk perhitungan-perhitungan berikut ini. Defenisi **Faktorial** ini dapat dilihat seperti berikut, seperti yang dikemukakan oleh **Seymour Lipschutz** (1981 ; 16).

Defenisi 1.1 : Jika n adalah bilangan bulat positif, maka perkalian bilangan bulat dari 1 sampai dengan n dinamakan "n faktorial" yang dinotasikan dengan n..

Sehingga "n faktorial" dapat ditulis sebagai berikut :

$n! = 1.2.3....(n-2).(n-1).n$

Khususnya : $0! = 1$

Contoh 1.3: a. $3! = 1.2.3 = 6$

b. $4! = 1.2.3.4 = 24$

c. $5! = 1.2.3.4.5 = 120$

d. $9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362880$

Untuk dapat menghitung faktorial pada contoh di atas, dapat juga digunakan hubungan sebagai berikut :

$$(n + 1)! = (n + 1)\ n!$$

Contoh 1.4: a. $4! = 4.3! = 4.6 = 24$

b. $5! = 5.4! = 5.24 = 120$

c. $10! = 10.9! = 10.362880 = 3628800$

d. $\frac{8!}{6!} \quad \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$

3. PERMUTASI

Dalam banyak hal sering kita menjumpai banyak susunan berbeda yang mungkin dengan memperhatikan urutannya. Susunan yang berbeda seperti ini disebut "**PERMUTASI**" yang defenisinya seperti yang dikemukakan oleh J. Supranto. MA (1985 ; 51).

Defenisi 1.2 : Susunan yang mungkin dari objek-objek yang berbeda dengan memperhatikan urutannya disebut "Permutasi".

Jika yang disusun hanya sebanyak r dari n objek ($r \le n$) maka susunan itu disebut Permutasi r objek dari n objek.

Berikut ini dapat kita lihat beberapa dalil yang berkaitan dengan permutasi untuk beberapa kondisi yang berbeda.

Dalil 1.3 : Banyak permutasi dari n objek yang berbeda adalah n.

Contoh 1.5: Misalkan kita mempunyai 4 angka, yaitu 2,4, 6,8.

Berapa banyak permutasi yang terdiri dari 4 angka yang berbeda dari 4 angka tersebut ?

Penyelesaian :

Posisi 1 Posisi 2 Posisi 3 Posisi 4

Pada posisi 1, kita dapat memilih 4 angka

Pada posisi 2, kita dapat memilih 3 angka

Pada posisi 3, kita dapat memilih 2 angka

Pada posisi 4, kita dapat memilih 1 angka

Jadi banyaknya permutasi yang mungkin adalah :

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Dalil 1.4 : Banyak permutasi dari n objek yang berbeda diambil r objek adalah :

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1) = \frac{n!}{(n-1)!}$$

<u>Contoh 1.6</u>: Misalkan kita punya 4 abjad, yaitu a,b,c,d. Berapa banyak permutasi yang terdiri dari pada abjad yang berbeda dari 4 abjad di atas?

Penyelesaian :

Kita ketahui $n = 4$ dan $r = 2$

Jadi banyaknya permutasi $= \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{2!}{2!} = 12$

Ke-12 permutasi tersebut adalah :

ab ac ad bc bd cd

ba ca da cb db dc

<u>Dalil 1.4</u> : Di atas dapat dibuktikan sebagai berikut :

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r-+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Bukti :

Seperti yang telah diketahui :

$$n! = 1.2.3\ldots.n$$

$$(n-r)! = 1.2.3.\ldots..(n-r)$$

Maka :

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{1.2.3.\ldots\ldots..n}{1.2.3.\ldots\ldots(n-r)}$$

$$= \frac{1.2.3.\ldots(n-r-1)(n-r)(n-r+1)\ldots(n-1)n}{12.3.\ldots.(n-r-1)(n-r)}$$

4. PERMUTASI DENGAN PENGULANGAN

Bentuk-bentuk rumus seperti yang telah dijelaskan pada bagian permutasi terdahulu tidak dapat digunakan untuk menentukan permutasi dari sebuah kata yang mengandung abjad yang sama seperti kata-kata "aljabar", "papa","Eddy" dan sebagainya.

Menurut J. Supranto, MA (1985 ; 64)

Dalil 1.5 : Banyak permutasi dari n objek, dengan n_1 adalah banyak objek pertama yang serupa, n_2 banyaknya objek kedua yang serupa, ..., n_k adalah banyaknya objek ke-k yang serupa dan $n_1+n_2+ \ldots +n_k = n$ adalah :

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

yang dapat ditulis dengan notasi :

$${}_nP_{n_1 . n_2 \ldots n_k}$$

Contoh 1.7: Berapa permutasi berbeda yang dapat dibentuk dari semua huruf-huruf untuk kata "EDDY"?

Penyelesaian :

Pada kata "EDDY" terdapat dua huruf yang sama yaitu huruf D. Kedua huruf ini, jika masing-masingnya berbeda yaitu D_1 dan D_2 maka banyak permutasi yang mungkin adalah 4! = 24. Sedangkan banyak permutasi dengan huruf yang sama adalah 2! = 2. Jadi banyaknya permutasi yang berbeda dari kata "EDDY" dengan dua huruf yang sama adalah : $\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$

Susunan tersebut dapat dilihat sebagai berikut :

$ED_1YD_2 = ED_2YD_1$	$YD_1ED_2 = YD_2ED_1$
$EYD_1D_2 = EYD_2D_1$	$YD_1D_2E = YD_2D_1E$
$ED_1D_2Y = ED_2D_1Y$	$YED_1D_2 = YED_2D_1$
$D_1D_2YE = D_2D_1YE$	$D_1EYD_2 = D_2EYD_1$
$D_1D_2EY = D_2D_1EY$	$D_1YED_2 = D_2YED_1$
$D_1ED_2Y = D_2ED_1Y$	$D_1YD_2E = D_2YD_1E$

5. PERMUTASI KELILING

Ronald E. Walpole dan Raymond H. Myers (1986 ; 13) mengemukakan defenisi berikut :

Defenisi 1.3 : Permutasi keliling adalah permutasi yang diperoleh bila objek-objek yang disusun melingkar.

Permutasi keliling dari n objek adalah :

$$_nP_n = (n-1)!$$

Contoh 1.8: Tiga orang BPH SEMA yang terdiri dari Ketua, Wakil Ketua dan Sekretaris akan mengadakan pertemuan. Mereka akan duduk secara melingkar.

Berapa banyak susunan yang mungkin dapat dibuat?

Penyelesaian :

Permutasi yang mungkin adalah :

1.

2.

Jadi terdapat 2 permutasi keliling yang dapat dibuat.

6. SAMPEL YANG DIURUTKAN

Di dalam analisis kombinatorial, khususnya mencari peluang sebuah kelereng yang diambil secara acak dari sebuah kotak berisi n kelereng ; apabila diambil sebuah kelereng sesudah yang lainnya, katakanlah r kali, maka dikatakan pengambilan sebuah sampel yang diurut berukuran r.

Dalam hal ini terdapat dua kasus, yaitu :

(i). Pengambilan Sampel Dengan Pengembalian

Dalam hal ini, kelereng yang sudah diambil disimpan kembali ke dalam kotak sebelum kelereng berikutnya diambil. Karena ada n cara yang berbeda untuk mengambil masing-masing kelereng, dengan menggunakan prinsip dasar perhitungan titik-titik sampel, maka ada :

$$n.n.n.\ldots\ldots n \text{ (sebanyak } r \text{ kali)} = n^r$$

Sampel yang diurut yang berbeda berukuran r dengan pengembalian.

(ii). Pengembalian Sampel Tanpa Pengembalian.

Dalam hal ini, kelereng yang sudah diambil tidak disimpan kembali ke dalam kotak sebelum kelereng berikutnya diambil. Jadi, sebuah sampel yang diurutkan tanpa pengembalian adalah r-permutasi dari objek-objek yang ada dalam kotak itu. Dengan demikian akan diperoleh :

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Sampel yang diurutkan berukuran r yang berbeda tanpa pengembalian dari populasi berukuran n objek.

<u>Contoh 1.9</u>: Dengan beberapa cara kita dapat mengambil 3 kelereng dari 40 kelereng yang ada dalam satu kotak.

a. dengan pengembalian

b. tanpa pengembalian

Penyelesaian :

a. Dengan Pengembalian

Karena kita akan mengambil 3 kelereng, maka berarti kita akan mengambil satu persatu kelereng tersebut dimana setelah melakukan pengambilan yang pertama, kelereng tersebut dikembalikan lagi. Demikian juga untuk pengambilan selanjutnya. Masing-masing kelereng dapat kita pilih dalam 40 cara yang berbeda.

Jadi terdapat : 40 x 40 x 40 = 12000

cara pengambilan 3 kelereng dengan pengembalian.

b. Tanpa Pengembalian.

Jika masing-masing kelereng tidak dikembalikan lagi ke dalam kotak sebelum kelereng berikutnya diambil, maka pengambilan kelereng pertama dapat dilakukan dalam 40 cara berbeda, pengambilan kelereng kedua dilakukan dalam 39 cara berbeda, dan pengambilan ketiga dilakukan dalam 38 cara berbeda.

Jadi terdapat : 40 x 39 x 38 = 59280

cara pengambilan 3 kelereng tanpa pengembalian.

7. KOMBINASI

Kombinasi dapat didefenisikan seperti apa yang ditulis dalam buku "Ilmu Peluang Dan Statistik Untuk Insinyur Dan Ilmuwan" oleh Ronald E. Walpole dan Raymond H Myers (1986 ; 14).

Defenisi 1.4 : Kombinasi adalah susunan dari objek-objek yang berbeda tanpa memperhatikan urutannya.

Contoh 1.10 : Misalkan kita mempunyai 4 huruf pertama yaitu A,B,C, dan D. Maka kombinasi yang terdiri dari 3 huruf berdasarkan 4 huruf di atas adalah: ABC, ABD, ACD dan BCD.

Hal yang harus diperhatikan dalam kombinasi ini adalah tiap susunan yang mungkin mempunyai unsur atau elemen yang berbeda satu dengan yang lainnya. Jadi, setiap susunan-susunan yang mempunyai elemen yang sama walaupun urutan elemen-elemennya berlainan maka susunan-susunan itu dianggap sama.

Di dalam tabel berikut ini akan terlihat jelas perbedaan antara Permutasi dan Kombinasi.

Permutasi	Kombinasi
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA	ABC
ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA	ABD
ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA	ACD
BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB	BCD

Dengan memperhatikan tabel di atas, maka banyak kombinasi dikalikan dengan 6 sama dengan 3. Sama banyak dengan banyaknya permutasi.

$$_4C_3 = \frac{1}{3!}\ _4P_3$$

Sehingga kita peroleh dalil berikut, seperti yang ditulis dalam buku "Probabilitu" oleh Seymour Lipschutzs.

Dalil 1.6 :

$$_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

<u>Contoh 1.11</u> : Ada beberapa cara suatu Panitia yang beranggotakan 3 orang dipilih dari 4 pasangan suami istri,

a. Kalau masing-masing punya kesempatan yang sama untuk menjadi anggota Panitia.

b. Kalau panitia harus terdiri dari 2 wanita dan 1 pria.

Penyelesaian :

a. Dalam kepanitiaan urutan tidak diperhatikan. Jadi persoalan memilih 3 objek dari 8 objek adalah :

$$ {}_8C_3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\ 5!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56 $$

b. Memilih 2 wanita dari 4 wanita :

$$ {}_4C_2 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4.3}{2.1} = 6 \text{ cara} $$

Kemudian memilih 1 pria dari 4 wanita :

$$ {}_4C_1 = \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\ 3!} = 4 \text{ cara} $$

Dengan menggunakan prinsip perkalian, kita peroleh :

$$ \binom{4}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24 \text{ cara} $$

8. KOEFISIEN BINOMINAL

Jika n adalah bilangan bulat positif dan misalkan kita ingin mengalikan $(x + y)^n$ suku demi suku, maka masing-masing suku akan nerupakan perkalian dari x dan y.

Misalkan untuk n = 2, maka :

$$ (x + y)^2 = (x + y) (x + y) $$
$$ = x.x + x.y + y.x + y.y $$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

Untuk x^2 : koefisien 1 menunjukkan banyak cara, dimana kita dapat memilih suku yang tidak mengandung faktor y.

Jadi : $1 = \binom{2}{0}$

Untuk xy : koefisien 2 menunjukkan banyak cara, dimana kita dapat memilih suku yang mengandung satu faktor y.

Jadi : $2 = \binom{2}{1}$

Untuk y^2 : Koefisien 1 menunukkan banyak cara, dimana kita dapat memilih suku yang mengandung dua faktor y.

Jadi : $1 = \binom{2}{2}$

Secara umum, jika n adalah bilangan bulat positif dan kita ingin mengendalikan $(x+y)^2$ suku demi suku, maka koefisien dari $x^{n-r}\ y^r$ adalah $\binom{n}{r}$ yaitu banyak cara dimana kita dapat memilih suku yang mengandung r faktor y. Hal ini akan dijelaskan dalam dalil berikut seperti yang terdapat dalam buku "Probability" oleh Seymour Lipschutz (1981 ; 20).

<u>Dalil 1.7</u> : Dalil Binominal

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\ x^{n-r}\ y^r$$

untuk beberapa bilangan bulat positif n.

Dan $\binom{n}{r}$ sering dikenal sebagai Koefisien Binominal dimana n dan r adalah bilangan bulat positif ($r \leq n$), didefenisikan sebagai berikut :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2).......(n-r+1)}{1.2.3......(r-1)r}$$

Jika diperhatikan, $\binom{n}{r}$ mempunyai tepat r faktor, baik dipembilangnya maupun dipenyebutnya. Perumusan defenisi Koefisien Binominal ini dapat juga ditulis sebagai berikut :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2).......(n-r+1)(n-r)}{1.2.3...........(r-1)r\ (n-r)}$$

$$= \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

<u>Contoh 1.12</u> : Tentukan hasil dari $(x+y)^5$

Penyelesaian :

$$(x+y)^5 = \sum_{r=0}^{5} \binom{5}{r} x^{5-r}\ y^r$$

$$= \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2\ y^3$$

$$+ \binom{5}{4} x^1 y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$= x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Untuk sederhananya, perhitungan Koefisien Binominal dapat digunakan dalil-dalil berikut :

<u>Dalil 1.8</u> : Untuk beberapa bilangan bulat positif n dan r = 0,1 ...... n berlaku :

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

<u>Contoh 1.13</u> : Diketahui $\binom{7}{3} = 35$ dan $\binom{7}{1} = 7$

Tentukan : $\binom{7}{6}$ dan $\binom{7}{4}$

Penyelesaian :

$$\binom{7}{6} = \binom{7}{7-6} = \binom{7}{1} = 7$$

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{7-4} = \binom{7}{3} = 35$$

<u>Dalil 1.9</u> : Untuk beberapa bilangan bulat positif n dan

$r = 1,2,3.......,n-1$; berlaku :

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

<u>Contoh 1.14</u>:

$$\binom{7}{4} = \binom{6}{4} + \binom{6}{3}$$

$$\binom{8}{3} = \binom{7}{3} + \binom{7}{2}$$

$$\binom{9}{2} = \binom{8}{2} + \binom{8}{1}$$

<u>Dalil 1.10</u> :

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$$

<u>Contoh 1.15</u> : Buktikan rumus di atas untuk $m = 3$, $n = 4$ dan $k = 3$

Penyelesaian :

$$\sum_{r=0}^{3} \binom{3}{r}\binom{4}{3-r} = \binom{3+4}{3}$$

$$\binom{3}{0}\binom{4}{3} + \binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{3}\binom{4}{0} = \binom{7}{3}$$

$$(1)(4) + (3)(6) + (3)(4) + (1)(1) = 35$$

$$4 + 18 + 12 + 1 = 35$$

$$35 = 35 \text{ (terbukti)}$$

BAB II

TEORI PELUANG DASAR

1. PERCOBAAN ACAK

Jika kita melakukan percobaan berulang kali, dimana kondisi dari percobaan yang satu dengan percobaan yang lainnya mendekati identik, maka pada dasarnya masing-masing percobaan itu memberikan hasil yang sama. Akan tetapi ada percobaan yang apabila diulang, masing-masing percobaan itu memberikan hasil yang berbeda sekalipun kondisi dari pada percobaan yang satu dengan percobaan lainnya sangat mendekati identik. Percobaan yang seperti inilah yang dinamakan dengan PERCOBAAN ACAK.

<u>Contoh 2.1</u>: Jika kita ingin melakukan pelemparan sebuah mata uang untuk mengundi, maka hasil yang mungkin muncul dari percobaan ini adalah berupa muka (M) atau belakang (B).

<u>Contoh 2.2</u> : Apabila kita melakukan percobaan dengan mengundi sebuah dadu, maka hasil pengundian setelah diulang belum tentu sama dengan hasil pada waktu percobaan itu dilakukan pertama kali. Hasil dari masing-masing percobaan sudah pasti merupakan salah satu dari kemungkinan munculnya mata 1, mata 2, mata 3, mata 4, mata 5 atau mata 6.

2. RUANG SAMPEL

Di dalam buku Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan oleh Ronald E. Walpole dan Raymond H. Myers (1986 ; 2), terdapat defenisi tentang ruang sampel ini.

Defenisi 2.1 : Apabila dilakukan percobaan acak, maka semua hasil yang mungkin dari percobaan tersebut dinamakan "Ruang Sampel".

Sedangkan setiap anggota dari ruang sampel dinamakan "titik-titik sampel". Ruang sampel ini biasanya dinotasikan dengan huruf besar atau kapital. Dan yang paling sering dipakai adalah S. Di bawah ini dapat dilihat contoh dari ruang sampel tersebut.

Contoh 2.3 : Jika kita melakukan percobaan dengan pelemparan sebuah mata uang, maka hasil yang mungkin muncul adalah "Gambar (G)" atau "Angka (A)".

Jadi ruang sampelnya : $S = \{G, A\}$

Contoh 2.4 : Jika kita melakukan percobaan dengan pelemparan dua mata uang sekaligus, maka hasil yang mungkin muncul adalah :

a. "Gambar" untuk kedua-duanya.

b. "Gambar" untuk mata uang yang satu dan "Angka" untuk mata uang yang lainnya.

c. "Angka" untuk mata uang yang satu dan "Gambar" untuk mata uang yang lainnya.

d. "Angka" untuk kedua-duanya.

Jadi ruang sampelnya : $S = \{GG, GA, AG, AA\}$.

Contoh 2.5 : Jika kita melakukan percobaan dengan pelemparan satu buah dadu, maka hasil yang mungkin munculnya adalah mata 1, mata 2, mata 3, mata 4, mata 5, atau mata 6.

Jadi ruang sampelnya : $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

3. KEJADIAN ATAU PERISTIWA

Apabila kita melakukan suatu percobaan, dan kita memperoleh ruang sampelnya, maka himpunan bagian dari ruang sampel tersebut adalah merupakan suatu "Kejadian" atau "Peristiwa".

Contoh 2.6 : Misalkan kita melakukan suatu percobaan dengan melempar satu mata uang. Ternyata akan kita peroleh ruang sampel $S = \{G, A\}$. Maka kejadian yang mungkin muncul dari ruang sampel ini adalah :

a. $\{G\}$ adalah kejadian munculnya sisi yang bergambar.

b. $\{A\}$ adalah kejadian munculnya sisi yang berangka.

c. $\{G, A\}$ adalah kejadian munculnya sisi angka atau gambar.

d. $\{\ \}$ adalah kejadian tidak munculnya sisi angka atau gambar.

Contoh 2.7 : Misalkan kita melakukan percobaan dengan pelemparam dua mata uang. Ruang sampel yang kita peroleh adalah $S = \{GG, GA, AG, AA\}$

Maka kejadian-kejadian yang mungkin muncul adalah :

a. $\{GG\}$
b. $\{GA\}$
c. $\{AG\}$
d. $\{AA\}$
e. $\{GG, AG\}$
f. $\{GG, GA\}$
g. $\{GG, AA\}$
h. $\{GA, AG\}$
i. $\{GA, AA\}$
j. $\{AG, AA\}$
k. $\{GG, GA, AG\}$
l. $\{GG, GA, AA\}$
m. $\{GG, AG, AA\}$
n. $\{GA, AG, AA\}$
o. $\{GG, GA, AG, AA\}$
p. $\{\ \}$

Dari dua contoh di atas dapat disimpulkan bahwa banyaknya "kejadian" adalah 2^n, untuk n merupakan titik- titik sampel.

4. OPERASI HIMPUNAN PADA RUANG SAMPEL

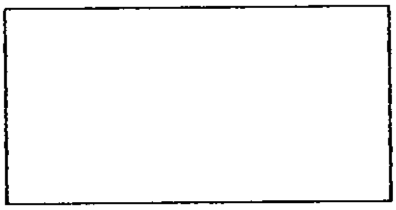
Dengan menggunakan operasi-operasi himpunan pada peristiwa-peristiwa atau kejadian-kejadian dalam ruang sampel S, maka kita akan memperoleh peristiwa-peristiwa atau kejadian-kejadian lainnya dalam ruang sampel S.

Jika A dan B merupakan dua kejadian, maka :

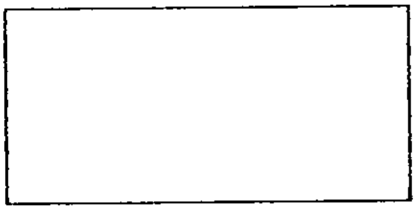
1. $A \cup B$ merupakan kejadian dimana A terjadi atau B terjadi (atau kedua-duanya terjadi).
2. $A \cap B$ merupakan kejadian dimana A terjadi dan B terjadi.
3. $A' = A^c$ adalah komplemen dari A, merupakan kejadian dimana A tidak terjadi.
4. $A - B$ merupakan kejadian dimana A terjadi tetapi B tidak terjadi.

Dengan diagram Venn dapat ditunjukkan sebagai berikut :

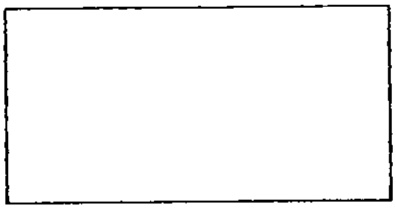
1.



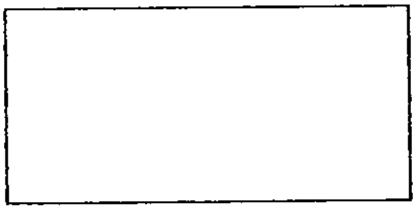
2.



3.



4.



Contoh 2.8 : Misalkan kita ingin melakukan percobaan dengan mengundi 3 mata uang logam sekaligus. Jika A adalah munculnya mata uang logam kedua buka "angka" dan B adalah banyaknya "gambar" yang muncul tepat 2 kali. Maka kita dapat menentukan :

Jika G = gambar dan A = angka

$S = \{GGG, GGA, GAG, GAA, AGG, AGA, AAG, AAA\}$

$A = \{GGG, GGA, AGG, AGA\}$

$B = \{GGA, GAG, AGG\}$

Maka :

1. $A \cup B = \{GGG, GGA, GAG, GAA, AGG, AGA\}$
2. $A \cap B = \{GGA, GAG, AGG\}$
3. $a^c = \{GGG, GGA, AGG, AGA\}$
4. $A - B = \{GGA, GAG, AGG\}$

5. KONSEP PELUANG

Jika kita melakukan beberapa percobaan acak, kita selalu dihadapkan pada ketidakpastian apakah suatu peristiwa tertentu terjadi atau tidak.

Jika sudah pasti bahwa suatu kejadian tidak akan terjadi maka kita katakan bahwa peluang dari kejadian itu adalah nol. Namun sebaliknya, jika sudah pasti bahwa suatu kejadian akan terjadi, maka kita katakan bahwa peluang dari peristiwa itu adalah 1.

Kejadian yang berpeluang satu atau nol ini sangat jarang terjadi, namun yang sering kita jumpai adalah suatu kejadian yang punya peluang antara satu dan nol.

Ada dua hal yang penting untuk menentukan nilai peluang suatu kejadian ini yaitu :

1. Jika suatu peristiwa (kejadian) dapat terjadi dalam cara yang berbeda dari total n cara yang mungkin, semuanya mempunyai kesempatan yang sama, maka peluang dari peristiwa itu adalah : k/n

   Contoh 2.9 :

   Misalkan pada pengundian satu mata uang logam, kita ingin menentukan peluang munculnya. Dalam pengundian ini terdapat dua hal yang mungkin, yang masing-masingnya punya kesempatan yang sama, yaitu munculnya "gambar" dan munculnya "angka". Artinya n = 2. Dari dua cara tersebut, munculnya "angka" ada 1 cara. Ini berarti k = 1, sehingga peluang munculnya "angka" adalah 1/2.

2. Misalkan suatu percobaan diulang sebanyak n kali, dengan n sangat besar dan diperhatikan terjadinya peristiwa A. Jika dari n kali pengulangan itu, peristiwa A dapat terjadi sebanyak k kali, maka peluang terjadinya peristiwa A adalah k/n.

   Contoh 2.10 :

   Misalkan kita melakukan pengundian sebuah mata uang logam dan kita ingin menentukan besarnya peluang munculnya "angka". Jika pengundian diulang terus menerus sampai 1200 kali dengan menghasilkan munculnya "angka" sebanyak 615 kali, maka besarnya peluang untuk munculnya "angka" adalah 615/1200 atau 0,5125.

6. DALIL-DALIL DASAR PELUANG

Pertama-tama akan kita lihat beberapa postulat tentang peluang. Seperti yang telah kita ketahui bahwa ruang sampel dinyatakan dengan S, sedangkan peluang dari kejadian A ditulis P(A), dan peluang dari kejadian B dinyatakan sebagai P(B), dan seterusnya.

Untuk ruang sampel S yang diskrit, maka berlaku beberapa postulat seperti yang tertera dalam buku "Probability and Statistics" karangan Murray R. Spiegel (1981 ; 25)

Postulat 1 : Peluang dari sebuah peristiwa merupakan bilangan real yang positif, yaitu P(A) 0 untuk beberapa himpunan bagian A dari S.

Postulat 2 : $P(S) = 1$

Postulat 3 : Jika $A_1, A_2, A_3, \ldots$ adalah barisan terhingga atau tak terhingga dari peristiwa- peristiwa yang saling lepas dari S, maka :

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$

Khususnya jika hanya dua kejadian yang saling lepas A_1 dan A_2,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Berikut ini dapat dilihat beberapa dalil untuk menghitung peluang dari sebuah sampel yang dapat dilakukan berdasarkan peluang dari masing-masing titik sampel.

Dalil 2.1 : Jika A suatu kejadian dalam ruang sampel S, maka P(A) merupakan penjumlahan dari pelung untuk masing-masing titik sampel di A.

Dalil di atas merupakan salah satu dalil peluang yang dikemukakan oleh J. Supranto, M.A. (1985 ; 94).

Contoh 2.11 : Misalkan kita melakukan pengundian dua mata uang logam sekaligus. Berapa peluangnya akan diperoleh paling sedikit satu "gambar"

Penyelesaian :

Ruang sampel S adalah $S = \{GG, GA, AG, AA\}$

dengan G = gambar dan A = angka.

Dalam hal ini masing-masing titik sampel mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi, karena mata uang logam yang digunakan seimbang.

Jika A adalah peristiwa bahwa kita akan memperoleh paling sedikit satu "gambar", maka ruang sampel A adalah :

$A = \{GG, GA, AG\}$

Sehingga : $P(A) = P(GG) + P(GA) + P(AG)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Dari postulat-postulat di atas dapat diturunkan beberapa dalil yaitu :

Dalil 2.2 : Jika A^c merupakan komplemen dari peristiwa A maka $P(A^c) = 1 - P(A)$

Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa peluang peristiwa A tidak akan terjadi sama dengan satu dikurang peluang terjadinya peristiwa A, dimana peristiwa A dan peristiwa A^c merupakan dua peristiwa yang saling lepas.

<u>Contoh 2.12</u> : Andaikan kita melakukan pengundian dengan dua mata uang logam sekaligus. Berapa peluangnya tidak akan diperoleh "gambar"?

Penyelesaian :

Dalam soal 2.11, A merupakan peristiwa akan diperolehnya paling sedikit "gambar" dan sudah diperoleh $P(A) = \frac{3}{4}$. Jadi A^c merupakan peristiwa bahwa kita akan memperoleh "gambar"

Sehingga $P(A^c) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

<u>Contoh 2.13</u> : Andaikan kita melakukan pengundian dua buah dadu, yaitu dadu berwarna merah dan dadu berwarna hijau. Berapa peluang akan diperoleh dua mata dadu yang jumlahnya :

a. Paling banyak 7

b. Paling sedikit 4

c. Lebih dari 5

Penyelesaian :

Ruang sampel dari pengundian dua buah mata dadu dapat dilihat pada tabel berikut dengan m = merah dan h = hijau.

	mata 1	mata 2	mata 3	mata 4	mata 5	mata 6
mata 1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
mata 2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
mata 3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
mata 4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
mata 5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
mata 6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a. Misalkan A adalah peristiwa munculnya dua mata dadu yang jumlahnya lebih dari 7.

Ruang sampel dari A adalah :

S = (6,2),(5,3),(4,4),(3,5),(2,6),(3,6),(4,5)(5,4),
(6,3),(6,4),(5,5),(4,6),(5,6),(6,5),(6,6)

$$P(A) = P(6,2) + P(5,3) + P(4,4) + P(3,5) + P(2,6) + P(3,6) + P(4,5) + P(5,4) + P(6,3) + P(6,4) + P(5,5) + P(4,6) + P(5,6) + P(6,5) + P(6,6) +$$

$$= 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36$$

$$= 15/36$$

Jadi A^c adalah peristiwa munculnya dua buah mata dadu yang jumlahnya paling banyak 7.

Sehingga : $P(A^c) = 1 - P(A)$

$$= 1 - 15/36$$

$$= 21/36$$

b. Misalkan B adalah peristiwa munculnya dua buah mata dadu yang jumlahnya kurang dari 4.

Ruang sampel B adalah :

$S = (1,1),(1,2),(2,1)$

$P(B) = P(1,1) + P(1,2) + P(2,1)$

$= 1/36 + 1/36 + 1/36$

$= 3/36$

Maka B^c adalah peristiwa munculnya dua buah mata dadu yang jumlahnya paling sedikit 4.

Sehingga " $P(B^c) = 1 - P(B)$

$= 1 - 3/36$

$= 33/36$

c. Misalkan C adalah peristiwa munculnya dua buah mata dadu yang jumlahnya paling banyak 5.

Ruang sampel C adalah :

$S = (1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),(4,1),(3,2),$
$(2,3),(1,4)$

$P(C) = P(1,1) + P(2,1) + P(1,2) + P(3,1) + P(2,2)$
$+ P(1,3) + P(4,1) + P(3,2) + P(2,3) + P(1,4)$

$= 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36$
$+ 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36$

$= 10/36$

Maka C^c adalah peristiwa munculnya dua buah mata dadu yang jumlahnya lebih dari 5.

Sehingga : $P(C^c) = 1 - P(C)$

$= 1 - 10/36$

$= 26/36$

Dalil 2.3 : Jika A dan B merupakan dua kejadian dalam sebuah ruang sampel A dan A B, maka P(A) P(B).

Contoh 2.14 : Andaikata kita mempunyai seperangkat kartu bridge yang terdiri dari 52 kartu. Jika A adalah peristiwa terambilnya kartu Heart dan B adalah peristiwa terambilnya sebuah kartu yang berwarna merah, maka dalam hal ini A B.

Peluang peristiwa A, P(A) = 13/52 = 1/4

Peluang peristiwa B, P(B) = 26/52 = 1/2

Jadi ternyata : P(A) P(B), yaitu 1/4 1/2

Dalil 2.4 : P(O) = 0 untuk beberapa ruang sampel S

Contoh 2.15 : Seekor monyet disuruh menulis kaliamt "AKU AKAN PERGI" tanpa membuat kesalahan sedikit pun. Maka untuk kasus ini, kejadian tersebut mempunyai peluang nol.

Dalil 2.5 : Untuk setiap peristiwa A, maka besar peluangnya makin kecil sama dengan nol dan paling banyak sama dengan satu atau dapat ditulis :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Dalil 2.6 : Jika A dan B adalah dua buah peristiwa yang saling lepas maka : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Peristiwa A dan peristiwa B dikatakan saling lepas, adalah apabila peristiwa A dan peristiwa B tidak bisa terjadi bersama-sama secara serentak. Sehingga apabila peristiwa A sudah terjadi, maka peristiwa B tidak akan terjadi lagi. Dan demikian juga sebaliknya, jika peristiwa B sudah terjadi, maka peristiwa A tidak terjadi.

<u>Contoh 2.16</u> : Andaikata kita melakukan percobaan dengan mengundi dua buah dadu. Berapa peluangnya untuk memperoleh dua mata dadu yang jumlahnya 7 atau 10 ?

Penyelesaian :

Andaikata A adalah peristiwa munculnya dua mata dadu yang jumlahnya 7, maka akan diperoleh ruang sampelnya adalah :

$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

Karena masing-masing titik sampel punya kesempatan yang sama untuk muncul, maka $P(1,6) = P(2,5) = \ldots = P(6,1) = 1/36$. Maka $P(A) = P\{(1,6)$ atau $(2,5)$ atau $(3,4)$ atau $(4,3)$ atau $(5,2)$ atau $(6,1)\}$.

Karena (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2) dan (6,1) masing-masingnya tidak terjadi secara bersama-sama, maka :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(1,6)+P(2,5)+P(3,4)+P(4,3)+P(5,2)+P(6,1) \\ &= 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 \\ &= 6/36 \end{aligned}$$

Andaikata B adalah peristiwa munculnya dua mata dadu yang jumlahnya 10, maka ruang sampelnya adalah :

$B = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

Dalam kasus ini $P(4,6) = P(5,5) = P(6,4) = 1/36$

Jadi $P(B) = P\{(4,6)$ atau $(5,5)$ atau $(6,4)\}$

Munculnya (4,6),(5,5) dan (6,4) adalah saling lepas, maka :

$P(B) = P(4,6) + P(5,5) + P(6,4)$

$= 1/36 + 1/36 + 1/36$

$= 3/36$

Peristiwa A dan peristiwa B saling lepas, karena dua mata dadu yang jumlahnya 7 dan 10 tidak akan muncul atau terjadi secara bersamaan pada penundian yang sama. Dengan demikian :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= 6/36 + 3/36$

$= 9/36$

<u>Dalil 2.7</u> : Jika A dan B adalah dua peristiwa dalam ruang sampel S, maka :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>Contoh 2.17</u> : Jika suatu kelas terdiri dari 16 orang siswa laki-laki dan 24 orang siswa perempuan. Setengah dari siswa perempuan mempunyai rambut ikal dan setengah dari siswa laki-laki juga berambut ikal.

Apabila seorang guru akan menyuruh salah seorang siswa secara acak, maka berapa peluangnya bahwa yang terpanggil adalah siswa laki-laki atau siswa perempuan yang berambut ikal.

Penyelesaian :

Andaikata A adalah suatu peristiwa bahwa seorang siswa yang terpanggil itu adalah siswa laki-laki. Dan B adalah peristiwa bahwa seorang siswa yang terpanggil itu adalah siswa yang berambut ikal.

Maka : P(A) = 16/40

P(B) = (8 + 12)/40 = 20/40

A B adalah peristiwa bahwa seorang siswa yang terpanggil itu adalah laki-laki dan mempunyai rambut ikal.

Jadi $P(A \cap B) = 8/40$

Maka besarnya peluang yang dicari adalah :

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= 16/40 + 20/40 - 8/40 \\
&= 28/40
\end{aligned}
$$

7. PELUANG BERSYARAT

Untuk menghitung peluang suatu peristiwa, selalu berdasarkan kepada ruang sampelnya. Apabila A suatu peristiwa maka untuk menghitung suatu peluang dari peristiwa A harus selalu didasarkan pada ruang sampel keseluruhan S. Sehingga peluang dari peristiwa A ditulis P(A/S), yang maksudnya adalah peluang A bersyarat S. Peluang seperti ini dinamakan "Peluang Bersyarat".

Coba perhatikan uraian berikut ini :

$$
\begin{aligned}
P(A|S) &= \frac{n(S \cap A)}{n(S)} \\
&= \frac{\dfrac{n(S \cap A)}{n(S)}}{\dfrac{n(S)}{n(S)}} \\
&= \frac{P(S \cap A)}{P(S)}
\end{aligned}
$$

Dengan memperhatikan perumusan di atas, maka dapat dibuat defenisi dari peluang bersyarat.

Defenisi 2.2 : Jika A dan B adalah dua peristiwa dalam ruang sampel S dan $P(A) \neq 0$, maka peluang bersyarat dari B diberikan A, didefenisikan sebagai :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dalam hal ini, $P(B|A)$ berarti bahwa kita ingin menghitung peluang peristiwa B, apabila peristiwa A sudah terjadi.

Atau kita juga dapat mengatakan bahwa peluang peristiwa A dan B kedua-duanya terjadi sama dengan peluang peristiwa A terjadi dikalikan peluang peristiwa B akan terjadi apabila peristiwa A sudah terjadi.

Dalam hal terakhir ini dapat ditulis :

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B|A)$$

Contoh 2.18 : Misalkan kita melakukan pengundian dengan sebuah dadu. Tentukan peluang bahwa pengundian itu akan menghasilkan mata dadu kurang dari 4, jika :

a. Tidak ada informasi lain yang diberikan.

b. Diberikan bahwa pengundian menghasilkan mata dadu yang berangka ganjil.

Jawab :

a. Misalkan B adalah peristiwa munculnya angka mata dadu kurang dari 4.

Karena P(mata 1) = P(mata 2) =P(mata 3)=. . . .

= P(mata 6) = 1/6

Maka : $P(B) = P(\text{mata } 1 \text{ atau mata } 2 \text{atau} \text{mata } 3)$

$= P(\text{mata } 1) + P(\text{mata } 2) + P(\text{mata } 3)$

$P(B) = 1/6 + 1/6 + 1/6$

$= 3/6 = 1/2$

b. Misalkan A adalah peristiwa munculnya angka mata dadu yang ganjil.

Maka : $P(A) = P(\text{mata } 1 \text{ atau mata } 3 \text{ atau mata } 5)$

$= P(\text{mata } 1) + P(\text{mata } 2) + P(\text{mata } 5)$

$= 1/6 + 1/6 + 1/6$

$= 3/6$

Sedangkan $A \cap B$ adalah peritiwa munculnya angka mata dadu yang ganjil kurang dari 4.

Maka : $P(A \cap B) = P(\text{mata } 1 \text{ atau mata } 3)$

$= P(\text{mata } 1) + P(\text{mata } 3)$

$= 1/6 + 1/6$

$= 2/6 = 1/3$

Sehingga : $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \dfrac{1/3}{1/2} = 2/3$

<u>Contoh 2.19</u> : Misalkan kita mempunyai setumpuk kartu bridge sebanyak 52 buah. Apabila seseorang mengambil dua kartu secara acak dari tumpukan kartu itu, maka berapa peluangnya bahwa kartu yang terambil itu kedua-duanya adalah As, jika kartu pertama setelah diambil :

a. disimpan kembali.

b. tidak disimpan kembali.

Jawab :

Misal A adalah peristiwa munculnya kartu As pada pengambilan kartu pertama.

B adalah peristiwa munculnya kartu As pada pengambilan kartu kedua.

a. Karena untuk pengambilan kartu pertama ada 4 kartu As yang mungkin diambil dari 52 kartu, maka $P(A) = 4/52$.

Jika kartu pertama disimpan kembali sebelum kartu kedua diambil, maka masih ada 4 kartu As yang mungkin diambil dari 52 kartu sehingga $P(B|A) = 4/52$

Maka : $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B|A)$

$= 4/52 \,.\, 3/51$

$= 16/2704 = 1/169$

b. Karena untuk pengambilan kartu pertama ada 4 kartu As yang mungkin diambil dari 52 kartu, maka $P(A) = 4/52$.

Jika kartu pertama tidak disimpan kembali sebelum kartu kedua diambil, maka banyak kartu As yang mungkin diambil ada 3 buah sedangkan banyak keseluruhan kartu ada 51 buah, sehingga $P(B|A) = 3/51$.

Maka : $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B|A)$

$= 4/52 \,.\, 3/51$

$= 12/2652 = 1/221$

Uraian yang sudah dijelaskan di muka hanya berlaku untuk dua peristiwa, dan hal ini dapat diperluas untuk lebih dari dua peristiwa. Berikut ini akan diuraikan hal serupa untuk tiga peristiwa.

<u>Dalil 2.8</u> : Jika A,B dan C adalah tiga buah peristiwa dalam ruang sampel S sedemikian hingga $P(A) = 0$ dan $P(A \cap B) = 0$, maka :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \, . \, P(B|A) \, . \, P(C|A \cap B)$$

Jadi peluang bahwa peristiwa-peristiwa A,B dan C semuanya terjadi sama dengan peluang bahwa peristiwa A terjadi dikalikan peluang bahwa peristiwa B terjadi diberikan peristiwa A sudah terjadi dikalikan peluang bahwa peristiwa C terjadi apabila peristiwa A dan B kedua-duanya sudah terjadi.

<u>Contoh 2.20</u> : Sebuah kotak berisi bola pingpong dari bermacam-macam warna dengan perincian : 10 buah warna hijau, 8 buah berwarna putih dan 12 buah berwarna biru. Kemudian kita mengambil tiga bola pingpong secara acak dari kotak itu. Berapa peluangnya bahwa ketiga bola pingpong itu berwarna hijau, putih dan biru; jika masing-masing bola pingpong setelah diambil dari kotak itu :

a. disimpan kembali.

b. tidak disimpan kembali.

Jawab :

Misalkan : H_1 adalah peristiwa bahwa bola ping-pong yangg terambil itu berwarna hijau pada pengambilan pertama.

P_2 adalah peristiwa bahwa bola ping-pong yang terambil itu berwarna putih pada pengambilan kedua.

B_3 adalah peristiwa bahwa bola ping-pong yang terambil itu berwarna biru pada pengambilan ketiga.

a. Jika masing-masing bola pingpong setelah diambil disimpan kembali ke dalam kotak itu, maka ketiga peristiwa itu independen atau bebas.

$$P(H_1 \cap P_2 \cap B_3) = P(H_1).P(P_2|H_1).P(B_3|H_1 \cap P_2)$$
$$= P(H_1).P(P_2).(B_3)$$
$$= \left(\frac{10}{10+8+12}\right).\left(\frac{8}{10+8+12}\right).\left(\frac{12}{10+8+12}\right)$$
$$= 16/450$$

b. Jika masing-masing bola pingpong setelah diambil tidak disimpan kembali ke dalam kotak itu, maka ketiga peristiwa itu bergantungan atau independen.

$$P(H_1 \cap P_2 \cap B_3) = P(H_1).P(P_2|H_1).P(B_3|H_1 \cap P_2)$$
$$= \left(\frac{10}{10+8+12}\right).\left(\frac{8}{9+8+12}\right).\left(\frac{12}{9+ \quad +12}\right)$$
$$= 8/203$$

8. PERISTIWA-PERISTIWA YANG BEBAS

Dalam pembicaraan secara tidak resmi, dua peristiwa A dan B dikatakan <u>Bebas</u> atau <u>Independen</u>, jika terjadinya atau tidak terjadinya salah satu peristiwa tersebut tidak dipengaruhi oleh peluang terjadinya peristiwa lainnya. Dari contoh-contoh terdahulu, untuk masalah yang ada kaitannya dengan pengambilan sampel, maka peristiwa-peristiwa yang bebas dihubungkan dengan perkataan <u>disimpan kembali</u>. Hal ini disebabkan apabila setiap pengambilan sampel disimpan kembali, maka jumlah semula menjadi tetap sehingga peristiwa yang sudah terjadi kemungkinan dapat terjadi lagi.

Sebenarnya perumusan dua peristiwa yang bebas didasarkan pada peluang bersyarat. Jika kita lihat kembali peluang bersyarat, yaitu $P(A \cap B) = p(A).P(B|A)$ maka secara simbul dua peristiwa A dan B adalah bebas jika $P(B|A) = P(B)$, sehingga akan diperoleh :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Perumusan inilah yang akan digunakan sebagai defenisi dari dua peristiwa yang bebas.

<u>Defenisi 2.3</u> : Dua peristiwa A dan B adalah <u>bebas</u> atau <u>independen</u>, jika dan hanya jika :

$$P(A \cap B) \; n= P(A).P(B)$$

Jika dua peristiwa tidak bebas, maka dua peristiwa itu dikatakan <u>bergantungan</u> atau <u>dependen</u>.

Dengan didasarkan pada defenisi di atas, maka akan diperoleh dalil sebagai berikut :

Dalil 2.9 : Jika dua peristiwa A dan B bebas, maka :

a. dua peristiwa A dan B^c juga bebas.

b. dua peristiwa A^c dan B juga bebas.

c. dua peristiwa A^c dan B^c juga bebas.

Contoh 2.21 : Misalnya dilakukan pengundian sebuah mata uang loga Rp.50 sebanyak tiga kali.

Jika A adalah peristiwa munculnya "ANGKA 50" pada pengundian pertama.

B adalah peristiwa munculnya "ANGKA 50" pada pengundian kedua.

C adalah peristiwa munculnya dua "ANGKA 50" berturut-turut pada pengundian tersebut.

Maka :

a. Apakah peristiwa-peristiwa A dan B bebas.

b. Apakah peristiwa-peristiwa A dan C bebas.

c. Apakah peristiwa-peristiwa B dan C bebas.

d. Apakah peristiwa-peristiwa A dan B^c bebas.

e. Apakah peristiwa-peristiwa A^c dan B bebas.

f. Apakah peristiwa-peristiwa A^c dan B^c bebas.

Jawab :

Dalam hal ini ruang sampel dari pengundian tersebut adalah :

$$S = \{AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, GGG\}$$

dengan : A = ANGKA 50

G = GAMBAR BURUNG

Karena uang logam yang digunakan dalam pengundian itu seimbang, maka masing-masing titik-titik sampel mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi, yaitu 1/8.

A adalah peristiwa munculnya "ANGKA 50" pada pengundian pertama.

Ruang sampelnya : $A = \{AAA, AAG, AGA, AGG\}$

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \{AAA, AAG, AGA, AGG\} \\
&= P(AAA) + P(AAG) + P(AGA) + P(AGG) \\
&= 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 \\
&= 4/8 = 1/2
\end{aligned}
$$

B adalah peristiwa munculnya "ANGKA 50" pada pengambilan kedua.

Ruang sampelnya : $B = \{AAA, AAG, GAA, GAG\}$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \{AAA, AAG, GAA, GAG\} \\
&= P(AAA) + P(AAG) + P(GAA) + P(GAG) \\
&= 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 \\
&= 4/8 = 1/2
\end{aligned}
$$

C adalah peristiwa munculnya dua "ANGKA 50" pada pengundian tersebut.

Ruang sampelnya : $C = \{AAG, GAA, AAA\}$

$$
\begin{aligned}
P(C) &= \{AAG, GAA, AAA\} \\
&= P(AAG) + P(GAA) + P(AAA) \\
&= 1/8 + 1/8 + 1/8 \\
&= 3/8
\end{aligned}
$$

A^c adalah peristiwa munculnya bukan "ANGKA 50" pada pengundian pertama.

Ruang samplenya : $A^c = \{GAA, GAG, GGA, GGG\}$

$$P(A^c) = P\{GAA, GAG, GGA, GGG\}$$
$$= P(GAA) + P(GAG) + P(GGA) + P(GGG)$$
$$= 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$$
$$= 4/8 = 1/2$$

B^c adalah peristiwa munculnya bukan "ANGKA 50" pada pengundian kedua.

Ruang sampelnya : $A^c = \{AGA, AGG, GGA, GGG\}$

$$P(A^c) = P\{AGA, AGG, GGA, GGG\}$$
$$= P(AGA) + P(AGG) + P(GGA) + P(GGG)$$
$$= 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$$
$$= 4/8 = 1/2$$

Berdasarkan peristiwa-peristiwa di atas, maka :

a. $A \cap B$ adalah peristiwa munculnya dua "ANGKA 50" berturut-turut pada pengundian pertama dan kedua.

   Ruang sampelnya : $A \cap B = \{AAA, AAG\}$

$$P(A \cap B) = P(AAA, AAG)$$
$$= P(AAA) + P(AAG)$$
$$= 1/8 + 1/8$$
$$= 2/8 = 1/4$$

   Sedangkan : $P(A).P(B) = (1/2)\ (1/2) = 1/4$

$$= P(A \cap B)$$

   Jadi peristiwa-peristiwa A dan B adalah bebas.

b. $A \cap C$ adalah peristiwa munculnya dua "ANGKA 50" berturut-turut pada pengundian pertama dan kedua.

Ruang sampelnya : $A \cap C = \{AAA, AAG\}$

$$P(A \cap C) = P(AAA, AAG)$$
$$= P(AAA) + P(AAG)$$
$$= 1/8 + 1/8$$
$$= 2/8 = 1/4$$

Sedangkan : $P(A).P(C) = (1/2)\ (3/8) = 3/16$

$$\neq P(A \cap C)$$

Jadi peristiwa-peristiwa A dan C tidak bebas atau bergantungan.

c. $B \cap C$ adalah peristiwa munculnya dua "ANGKA 50" berturut-turut pada pengundian tersebut, dengan salah satu darinya terjadi pada pengundian kedua.

Ruang sampelnya : $B \cap C = \{AAA, AAG, GAA\}$

$$P(B \cap C) = P(AAA, AAG, GAA)$$
$$= P(AAA) + P(AAG) + P(GAA)$$
$$= 1/8 + 1/8 + 1/8$$
$$\neq 3/8$$

Sedangkan : $P(B).P(C) = (1/2)\ (3/8) = 3/16$

$$= P(B \cap C) \text{ *)}$$

d. $A \cap B^c$ adalah peristiwa munculnya "ANGKA 50" pada pengundian pertama dan "GAMBAR BURUNG" pada pengundian kedua.

*) Jadi peristiwa-peristiwa B dan C tidak bebas atau bergantungan

Ruang sampelnya : $A \cap B^c = \{AGA, AGG\}$

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B^c) &= P(AGA, AGG) \\
&= P(AGA) + P(AGG) \\
&= 1/8 + 1/8 \\
&= 2/8 = 1/4
\end{aligned}
$$

Sedangkan : $P(A).P(B^c) = (1/2)\ (1/2) = 1/4$

$$= P(A \cap B^c)$$

Jadi peristiwa-peristiwa A dan B^c bebas

f. $A^c \cap B^c$ adalah peristiwa munculnya dua "GAMBAR BURUNG" berturut-turut pada pengundian pertama dan kedua.

Ruang sampelnya : $A^c \cap B^c = \{GGA, GGG\}$

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= P(GGA, GGG) \\
&= P(GGA) + P(GGG) \\
&= 1/8 + 1/8 \\
&= 2/8 = 1/4
\end{aligned}
$$

Sedangkan : $P(A^c).P(B^c) = (1/2)\ (1/2) = 1/4$

$$= P(A^c \cap B^c)$$

Jadi peristiwa-peristiwa A^c dan B^c bebas

Berikut ini akan diberikan defenisi mengenai tiga peristiwa yang bebas, dimana hal ini harus dipenuhi oleh beberapa syarat yang lebih banyak dari pada dua peristiwa yang bebas. Dan persyaratan ini harus dipenuhi semuanya. Jika salah satu syarat yang tidak dipenuhi, maka ketiga peristiwa itu dikatakan tidak bebas atau bergantungan.

Defenisi 2.4 : Tiga peristiwa A, B dan C dikatakan bebas, jika dan hanya jika dipenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

1. Peristiwa-peristiwa yang berpasangan bebas, yaitu :

   a. $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

   b. $P(A \cap C) = P(A).P(C)$

   c. $P(B \cap C) = P(B).P(C)$

2. $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$

Contoh 2.22 : Lihat kembali Contoh 2.21.

Coba selidiki apakah ketiga peristiwa itu bebas atau tidak ?

Jawab :

1. Peristiwa-peristiwa yang berpasangan.

   a. Untuk peristiwa-peristiwa A dan B, ternyata dihasilkan peristiwa-peristiwa yang bebas.

   b. Untuk peristiwa-peristiwa A dan C, ternyata dihasilkan peristiwa yang tidak bebas atau bergantungan.

   c. Untuk peristiwa-peristiwa B dan C, ternyata dihasilkan peristiwa yang tidak bebas atau bergantungan.

2. $A \cap B \cap C$ adalah peristiwa munculnya dua "ANGKA 50" berturut-turut pada pengundian pertama dan kedua.

Ruang sampelnya : $A \cap B \cap C = \{AAA, AAG\}$

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C) &= P(AAA, AAG) \\
&= P(AAA) + P(AAG) \\
&= 1/8 + 1/8 \\
&= 2/8 = 1/4
\end{aligned}
$$

Sedangkan :
$$
\begin{aligned}
P(A).P(B).P(C) &= (1/2)(1/2)(3/8) \\
&= 3/32 \\
&\neq P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Karena ada beberapa syarat yang tidak dipenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa ketiga peristiwa A, B dan C tidak bebas atau bergantungan.

9. ATURAN BAYES

Berikut ini akan diberikan dalil-dalil mengenai partisi ruang sampel ke dalam k himpunan bagian atau subset, yaitu DALIL TEORI PELUANG atau ATURAN ELIMINASI dan ATURAN BAYES.

Akan tetapi sebelumnya akan diberikan defenisi dari partisi ruang sampel.

Defenisi 2.5 : Peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, \ldots, B_k$ menunjukkan partisi dari ruang sampel S, jika :

a. $B_i \cap B_j = \emptyset$, untuk semua i = j

b. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$.

c. $P(B_i) > 0$, untuk semua i

<u>Contoh 2.33</u> : Misalkan dilakukan pengundian sebuah dadu.

Jika B_1 adalah peristiwa munculnya angka mata dadu paling banyak dua.

B_2 adalah peristiwa munculnya angka mata dadu paling sedikit 3 dan paling banyak 5.

B_3 adalah peristiwa munculnya angka mata dadu yang tertinggi.

Coba selidiki apakah peristiwa-peristiwa B_1, B_2, dan B_3 merupakan partisi dari ruang sampel S.

<u>Jawab</u> :

Apabila kita melakukan pengundian sebuah dadu, maka ruang sampelnya adalah :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sedangkan ruang sampel untuk masing-masing peristiwa adalah :

a. $B_1 = \{1, 2\}$

b. $B_2 = \{3, 4, 5\}$

c. $B_3 = \{6\}$

Sedangkan peluang untuk masing-masing peristiwa adalah:

a. $P(B_1) = P(1,2)$

$= P(1) + P(2)$

$= 1/6 + 1/6$

$= 2/6 = 1/3$

b. $P(B_2) = P(3,4,5)$

$= P(3) + P(4) + P(5)$

$= 1/6 + 1/6 + 1/6$

$= 3/6 = 1/2$

c. $P(B_1) = P(6)$

$= 1/6$

Dan apabila kita perhatikan $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S$ dan irisan antara peristiwa tidak mempunyai unsur yang sama. Dengan demikian peristiwa-peristiwa B_1, B_2, dan B_3 merupakan partisi dari ruang sampel S.

Dalil 2.10 : ATURAN ELIMINASI

Jika peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, \ldots, B_k$ merupakan partisi dari ruang sampel S sedemikian hingga $P(B_i) \neq 0$, untuk $i = 1,2,\ldots,k$; maka untuk peristiwa A yang sembarang dari S berlaku :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A|B_i)$$

Contoh 2.24 : Misalkan kita mempunyai tiga buah kotak yang masing-masing berisi :

Kotak I berisi 10 lampu dengan 4 lantai di antaranya rusak.

Kotak II berisi 6 lampu dengan 1 lampu diantaranya rusak.

Kotak III berisi 8 lampu dengan 3 lampu diantaranya rusak.

Kita memilih sebuah kotak secara acak dan kemudian sebuah lampu diambil secara acak dari kotak yang terpilih itu. Berapa peluang bahwa lampu yang terambil itu adalah rusak ?

Jawab :

Dalam hal ini kita melakukan dua percobaan, yaitu :

1. Memilih sebuah kotak.
2. Mengambil sebuah lampu secara acak dari kotak yang terpilih.

B_1 adalah peristiwa terpilihnya kotak I.

B_2 adalah peristiwa terpilihnya kotak II.

B_3 adalah peristiwa terpilihnya kotak III.

A adalah peristiwa terambilnya sebuah lampu yang rusak.

$A|B_1$ adalah peristiwa terambilnya sebuah lampu yang rusak dari kotak I.

$A|B_2$ adalah peristiwa terambilnya sebuah lampu yang rusak dari kotak II.

$A|B_3$ adalah peristiwa terambilnya sebuah lampu yang rusak dari kotak III.

Sedangkan peluang untuk masing-masing peristiwa itu adalah :

$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$

$P(A|B_1) = 4/10$

$P(A|B_2) = 1/6$

$P(A|B_3) = 3/8$

Jadi peluang bahwa lampu yang terambil itu rusak adalah :

$$P(A) = P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+P(B_3).P(A|B_3)$$
$$= (1/3)(4/10)+(1/3)(1/6)+(1/3)(3/8)$$

Jadi peluang bahwa lampu yang terambil itu rusak adalah :

$$P(A) = P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+P(B_3).P(A|B_3)$$
$$= (1/3)(4/10)+(1/3)(1/6)+(1/3)(3/8)$$
$$= 4/30+1/18+1/8$$
$$= 113/360$$

Dari contoh di atas, kita hanya dapat memperoleh peluang sebuah lampu yang rusak, tidak diketahui apakah lampu yang rusak itu berasal dari kotak I, kotak II, atau kotak III. Apabila kita ingin mengetahui bahwa lampu rusak itu berasal dari kotak tertentu, maka hal ini dapat dilakukan berdasarkan dalil berikut ini.

<u>Dalil 2.11</u> : <u>ATURAN BAYES</u>

Jika peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, \ldots, B_k$ merupakan partisi dari ruang sampel S, dimana $P(B_i) = 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,k$; maka untuk partisi A yang sembarang dalam S sedemikian hingga $P(A) = 0$ berlaku :

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r).P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A|B_i)}$$

Untuk $r = 1,2,\ldots,k$

<u>Contoh 2.25</u> : Lihat kembali Contoh 2.24.

a. Berapa peluang bahwa lampu rusak yang terambil itu berasal dari kotak I ?

b. Berapa peluang bahwa lampu rusak yang terambil itu berasala dari kotak II ?

a. Peluang bahwa lampu rusak yang terambil itu berasal dari kotak I adalah :

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1).P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i).P(A|B_i)} = \frac{P(B_1).P(A|B_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{(1/3)(4/10)}{113/360}$$

$$= \frac{4/30}{113/360} = 48/113$$

b. Peluang bahwa lampu rusak yang terambil itu berasal dari kotak II adalah :

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2).P(A|B_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i).P(A|B_i)} = \frac{P(B_2).P(A|B_2)}{P(A)}$$

$$= \frac{(1/3)(1/6)}{113/360}$$

$$= \frac{1/18}{113/360} = 20/113$$

c. Peluang bahwa lampu rusak yang terambil itu berasal dari kotak III adalah :

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3).P(A|B_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i).P(A|B_i)} = \frac{P(B_3).P(A|B_3)}{P(A)}$$

$$= \frac{(1/3)(3/8)}{113/360}$$

$$= \frac{1/8}{113/360} = 45/113$$

BAB III

DISTRIBUSI PEUBAH ACAK

1. PEUBAH ACAK

Dalam kebanyakan penggunaan dari teori peluang, kita hanya memfokuskan dalam satu aspek tertentu (atau dalam dua atau lebih aspek tertentu) dari hasil-hasil eksperimen.

Misalnya : Apabila kita melakukan pengundian dua buah mata dadu, biasnya kita memperhatikan dalam hal jumlah dua mata dadu dan bukan dalam hal hasil dari masing-masing dadu.

Apabila kita mengambil sampel mengenai bola lampu yang diproduksi, biasanya kita memperhatikan dalam hal daya tahannya atau keterangannya dan bukan dalam hal harganya.

Dalam masing-masing contoh di atas, kita biasanya memperhatikan nilai-nilai yang dihubungkan dengan hasil-hasil dari eksperimennya. Hal ini dinamakan peubah acak.

Dalam bahasa peluang dan statistika, jumlah dari dua mata dadu yang diundi adalah peubah acak ; daya tahan dan keterangan dari bola lampu yang dipilih secara acak untuk pemeriksaan merupakan peubah acak.

Defenisi 3.1 : Misalkan E adalah suatu eksperimen dengan ruang sampel S. Sebuah fungsi X yang memetakan setiap elemen atau anggota $s \in S$ dengan sebuah bilangan real $X(s)$ dinamakan <u>peubah acak</u>.

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat dalam gambar dibawah ini :

s X X(s)

S = Ruang Sampel dari E R_X = Nilai-nilai yang mungkin dari X
= Daerah Hasil

<u>Contoh 3.1</u> : Misalkan kita melakukan eksperimen E mengenai pengundian dua mata uang logam Rp.50 sekaligus.

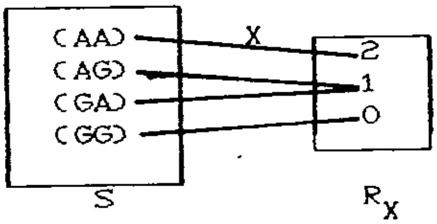
Misalkan X adalah banyaknya "ANGKA 50" yang muncul.

Maka ruang sampelnya adalah $S = \{AA, AG, GA, GG\}$

Dan R_X = Nilai-nilai yang mungkin dari X

= (0,1,2)

Jadi : $X(AA) = 2$
$X(AG) = 1$
$X(GA) = 1$
$X(GG) = 0$



Dalam statistika kita mengenal dua peubah acak, yaitu <u>peubah acak diskrit</u> dan <u>peubah acak kontinu</u>. Untuk semua pembahasan dalam diktat ini, hanya akan dibahas dan digunakan peubah acak diskrit saja.

Berikut ini akan diberikan defenisi dari peubah acak diskrit disertai contohnya.

Defenisi 3.2 : Misalkan X adalah peubah acak. Jika banyaknya nilai-nilai yang mungkin dari X (yaitu R_X, daerah hasil) adalah terhingga (yaitu x_1, x_2 $\ldots, x_n, \ldots$), maka X dinamakan peubah acak diskrit.

Contoh 3.2 : Dalam pengundian dua mata uang logam Rp.50 sekaligus dengan X adalah banyaknya "ANGKA 50", maka dalam hal ini X merupakan peubah acak diskrit, karena daerah hasilnya (R_X) merupakan nilai-nilai yang banyaknya terhingga, yaitu (0,1,2).

2. DISTRIBUSI PELUANG

Apabila kita memperhatikan Contoh 3.1, maka kita dapat menghitung peluang dalam ruang sampel S, sehingga secara otomatis memberikan peluang bahwa peubah acak akan mengambil nilai yang diberikan dalam daerah hasil-nya.

Defenisi 3.3 : Misalkan X adalah peubah acak diskrit dengan nilai-nilai yang mugkin adalah $x_1, x_2, x_3,$ $\ldots$ kemudian disusun menurut urutan dari ter-kecil sampai terbesar. Nilai-nilai tersebut mem-punyai peluangnya masing-masing, yaitu :

$$P(X = x_i) = p(x_i), \text{ untuk } i = 1,2,3,\ldots$$

Bilangan $p(x_i)$, $i = 1,2,3,\ldots$ dinamakan peluang dari x_i dan harus memenuhi syarat-syarat berikut :

a. $p(x_i) \geq 0$, untuk semua i.

b. $\sum_{i=1} p(x_i) = 1$.

Fungsi p yang didefenisikan di atas dinamakan <u>fungsi peluang</u> dari peubah acak X.

Kumpulan dari pasangan $(x_i, p(x_i))$, $i = 1,2,3,\ldots$ kadang-kadang dinamakan <u>distribusi peluang</u> dari X.

<u>Contoh 3.3</u> : Misalkan kita melakukan pengundian dengan dua buah mata dadu.

Tentukan distribusi peluangnya untuk jumlah dua mata dadu.

<u>Jawab</u> :

Misalkan peubah acak X (dengan nilai-nilainya x) adalah jumlah dua mata dadu.

Seperti kita ketahui ruang sampelnya terdiri dari 36 titik sampel, sehingga masing-masing titik sampel mempunyai kesempatan 1/36.

Berikut ini akan diberikan nilai peluang untuk beberapa harga x.

$$P(X = 2) = P\left\{(1,1)\right\} = 1/36$$

$$P(X = 3) = P\left\{(1,2),(2,1)\right\} = 2/36$$

$$P(X = 4) = P\left\{(1,3),(2,2),(3,1)\right\} = 3/36$$

$$P(X = 5) = P\left\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\right\} = 4/36$$

$$P(X = 6) = P\left\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\right\} = 5/36$$

$$P(X = 7) = P\left\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\right\}$$

$$= 6/36$$

$$P(X = 8) = P\left\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\right\} = 5/36$$

$$P(X = 9) = P\left\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\right\} = 4/36$$

$$P(X = 10) = P\left\{(4,6),(5,5),(6,4)\right\} = 3/36$$

$$P(X = 11) = P\left\{(5,6),(6,5)\right\} = 2/36$$

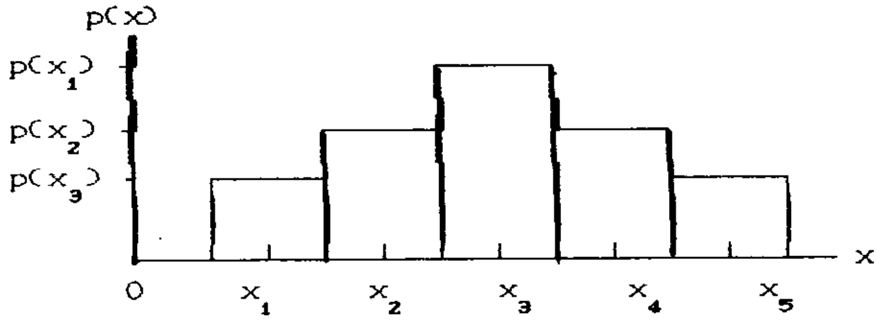
$$P(X = 12) = P\left\{(6,6)\right\} = 1/36$$

Jadi distribusi peluangnya adalah :

x	P(X = x)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Apabila distribusi peluang digambarkan grafiknya maka grafiknya dapat berupa <u>histogram</u> <u>peluang</u> <u>atau</u> <u>diagram</u> <u>batang</u>.

Misalkan histogram peluang dari suatu distribusi peluang secara umum dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.1 : Histogram Peluang

Tinggi dari masing-masing empat persegi panjang sama dengan peluang bahwa X mengambil nilai di titik tengah yang mendasarinya.

Titik tengah x_1 mempunyai interval dari $x_1 - \frac{1}{2}$ sampai $x_1 + \frac{1}{2}$.

Titik tengah x_2 mempunyai interval dari $x_1 + \frac{1}{2}$ sampai $x_2 + \frac{1}{2}$.

Titik tengah x_3 mempunyai interval dari $x_2 + \frac{1}{2}$ sampai $x_3 + \frac{1}{2}$.

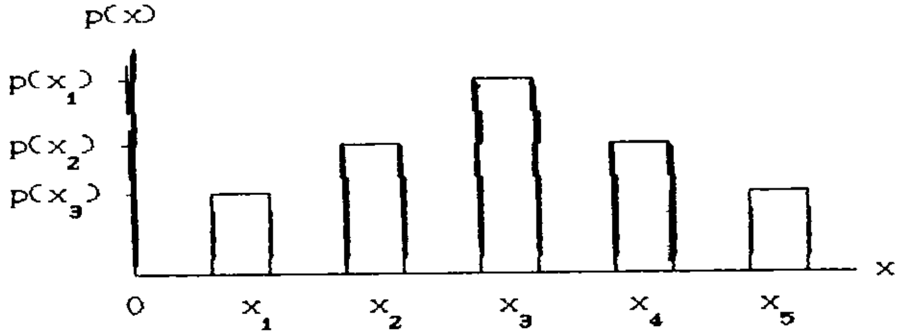
Titik tengah x_4 mempunyai interval dari $x_3 + \frac{1}{2}$ sampai $x_4 + \frac{1}{2}$.

Titik tengah x_5 mempunyai interval dari $x_4 + \frac{1}{2}$ sampai $x_5 + \frac{1}{2}$.

Karena masing-masing empat persegi panjang mempunyai satuan lebar, maka kita dapat mengatakan bahwa <u>luas dari empat persegi panjang sama dengan peluang bahwa X mengambil nilia di titik tengahnya.</u>

Untuk menggambarkan distribusi peluang dalam sebuah grafik, maka selain akan diperoleh histogram peluangnya, juga akan diperoleh diagram batangnya.

Misalkan diagram batang dari suatu distribusi peluang secara umum dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.2 : Diagram Batang

Dalam diagram batang, <u>tinggi dari masing-masing empat persegi panjang atau batang sama dengan peluang dari nilai peubah acak</u>.

<u>Contoh 3.4</u> : Misalkan kita mempunyai sebuah kotak yang berisi 2 bola kuning dan 2 bola putih. Jika diambil 2 bola secara acak tanpa pengembalian dari kotak itu dan X menunjukkan banyaknya bola yang putih, maka :

a. Tentukan distribusi peluang dari X.

b. Gambarkan grafiknya.

<u>Jawab</u> :

Banyak titik sampel dalam ruang sampel adalah :

$$\frac{4!}{(4-2)} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Misalkan 2 bola kuning disimbolkan dengan K_1 dan K_2. Dan 2 bola putih disimbolkan dengan P_1 dan P_2.

Jadi ruang sampelnya adalah :

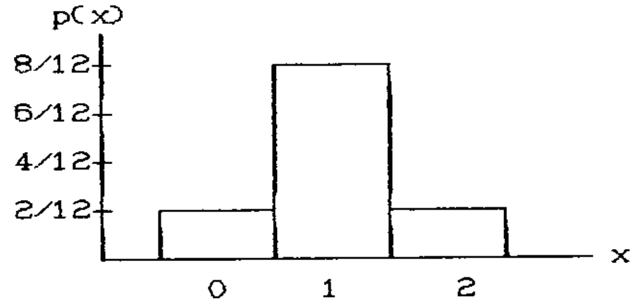
$$S = \{(K_1,K_2),(K_1,P_1),(K_1,P_2),(K_2,P_1),(K_2,P_2),$$
$$(P_1,P_2),(K_2,K_1),(P_1,K_1),(P_2,K_1),(P_1,K_2),$$
$$(P_2,K_2),(P_2,P_1)\}$$

Dari ruang sampel di atas, maka masing-masing titik sampel mempunyai kesempatan yang sama untuk terambil, yaitu 1/12.

a. Sehingga distribusi peluangny adalah :

x	0	1	2
P(X=x)	2/12	8/12	2/12

b.



Histogram Peluang

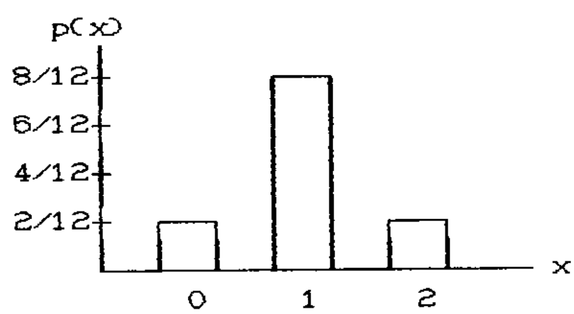


Diagram Batang

Contoh 1.5 : Dari soal Contoh 3.4, sekarang apabila kita mengambil dua bola secara acak dengan pengembalian dari kotak itu dan X menunjukkan banyaknya bola yang putih.

a. Tentukan distribusi peluang dari X.

b. Gambarkan grafik dari distribusi peluangnya.

Jawab :

Banyaknya titik sampel dalam ruang sampel ada : $4^2 = 16$

Jadi ruang sampelnya adalah :

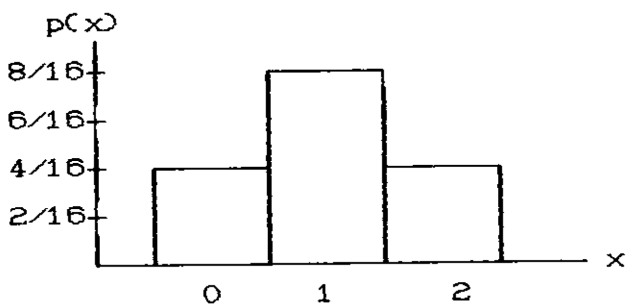
$$S = \{(K_1,K_1),(K_2,K_2),(P_1,P_1),(P_2,P_2),(K_1,P_1),(K_1,K_2),(K_1,P_2),(K_2,P_1),(K_2,P_2),(P_1,P_2),(K_2,K_1),(P_1,K_1),(P_2,K_1),(P_1,K_2),(P_2,K_2),(P_2,P_1)\}$$

Dari ruang sampel di atas, maka masing-masing titik sampel mempunyai kesempatan yang sama untuk terambil, yaitu 1/16.

a. Sehingga distribusi peluangnya adalah :

x	0	1	2
P(X=x)	4/16	8/16	4/16

b.



Histogram Peluang

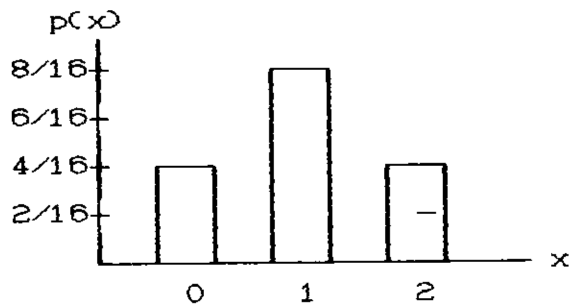


Diagram Batang

3. FUNGSI DISTRIBUSI

Dalam menghitung peluang dari sebuah peubah acak, katakanlah X, maka X dapat mengambil beberapa nilai sesuai dengan tandanya. Dalam hal ini kita dapat menghitung peluang dari peubah acak X yang mengambil nilai kurang dari atau sama dengan bilangan real x, atau dapat ditulis $F(x) = P(X < x)$.

Fungsi yang dirumuskan seperti di atas dinamakan fungsi distribusi atau distribusi kumulatif dari peubah acak X.

Defenisi 3.4 : Jika X adalah peubah acak diskrit, maka fungsi yang dinyatakan dengan :

$F9x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} p(t)$, untuk $- \quad < x <$

dimana $p(t)$ merupakan nilai distribusi peluang dari X di t dinamakan fungsi distribusi atau distribusi kumulatif dari X.

Jika banyak nilai-nilai dari X adalah terhingga, yaitu $x_1, x_2, \ldots, x_n$; maka fungsi distribusinya diberikan dengan :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , - \ \le x < x_1 \\ p(x_1) & , x_1 \le x < x_3 \\ p(x_1) + p(x_2) & , x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \\ p(x_1) + \ldots + p(x_n) & , x_n \le x < \end{cases}$$

<u>Dalil 3.1</u> : Nilai F(x), yaitu fungsi distribusi dari peubah acak diskrit X memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

a. $F(- \ ) = 0$

b. $F(\ ) = 1$

c. Jika $a \le b$, maka $F(a) \le F(b)$ untuk setiap bilangan real a dan b.

<u>Contoh 3.6</u> : Misalkan kita melakukan pengundian dengan tiga mata uang logam Rp.50 sekaligus.

Jika X menunjukkan banyak "GAMBAR BURUNG" yang muncul, maka tentukan fungsi distribusi dari X.

<u>Jawab</u> :

Untuk menentukan fungsi distribusi dari X, sebelumnya akan ditentukan dahulu distribusi peluangnya.

Ruang sampel dari pengundian itu adalah :

$$S = \{ GGG, GGA, GAG, GGA, GAA, AGA, AAG, AAA \}$$

Dari ruang sampel di atas, maka masing-masing titik sampel mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi, yaitu 1/8.

Jadi distribusi peluang dari X adalah :

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Kemudian fungsi distribusinya baru dapat ditentukan.

<u>Untuk</u> $x = 0$.

$$F(0) = P(X \le 0) = \sum_{t \le 0} p(t)$$

$$= p(0) = 1/8$$

<u>Untuk</u> $x = 1$.

$$F(1) = P(X \le 1) = \sum_{t \le 1} p(t)$$

$$= p(0) + p(1)$$

$$= 1/8 + 3/8$$

$$= 4/8$$

<u>Untuk</u> $x = 2$.

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{t \le 2} p(t)$$

$$= p(0) + p(1) + p(2)$$

$$= 1/8 + 3/8 + 3/8$$

$$= 7/8$$

<u>Untuk</u> $x = 3$.

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{t \le 3} p(t)$$

$$= p(0)+p(1)+p(2)+p(3)$$

$$= 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8$$

$$= 8/8 = 1$$

Sehingga fungsi distribusinya adalah :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } x < 0 \\ 1/8 & , \text{ untuk } 0 \le x < 1 \\ 4/8 & , \text{ untuk } 1 \le x < 2 \\ 7/8 & , \text{ untuk } 2 \le x < 3 \\ 1 & , \text{ untuk } x \ge 3 \end{cases}$$

Jika kita memperhatikan batas-batas dari nilai x, maka fungsi distribusi ini didefenisikan tidak hanya untuk nilai-nilai yang diambil pada peubah acak yang diberikan, tetapi <u>untuk semua bilangan real</u>.

<u>Contoh 3.7</u> : a. $F(0,8) = 1/8$

b. $F(1,4) = 3/8$

c. $F(2,6) = 7/8$

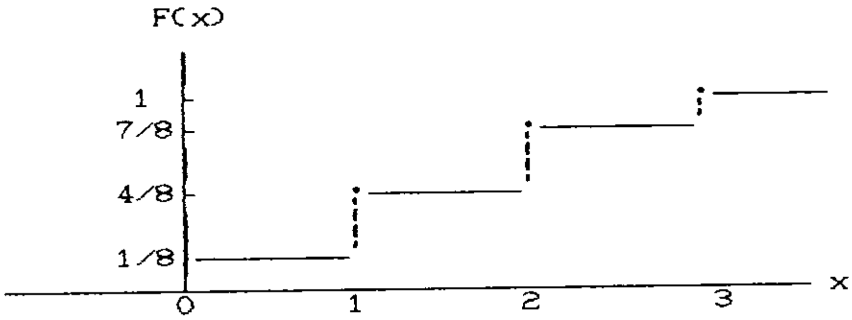
d. $F(25) = 1$

Seperti halnya dalam distribusi peluang, fungsi distribusi ini juga dapat digambarkan grafiknya. Dalam hal ini, grafik dari fungsi distribusi berupa <u>fungsi tangga</u>.

<u>Contoh 3.8</u> : Lihat kembali soal Contoh 3.6.

Gambarkan grafik dari fungsi distribusinya.

<u>Jawab</u> :



<u>Fungsi Tangga</u>

Contoh 3.9 : Lihat kembali soal Contoh 3.3

Dari soal Contoh 3.3, sudah diperoleh distribusi peluangnya, yaitu :

x	0	1	2
P(X=x)	2/12	8/12	2/12

a. Tentukan fungsi distribusinya.

b. Gambarkan grafik dari fungsi distribusinya.

Jawab :

a. Untuk $x = 0$.

$$F(0) = P(X \le 0) = \sum_{t \le 0} p(t)$$
$$= p(0) = 2/12$$

Untuk $x = 1$.

$$F(1) = P(X \le 1) = \sum_{t \le 1} p(t)$$
$$= p(0) + p(1)$$
$$= 2/12 + 8/12$$
$$= 10/12$$

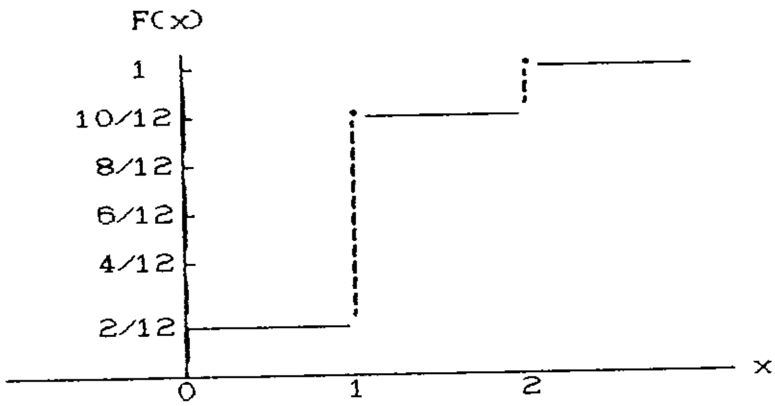
Untuk $x = 2$.

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{t \le 2} p(t)$$
$$= p(0) + p(1) + p(2)$$
$$= 2/12 + 8/12 + 2/12$$
$$= 12/12 = 1$$

Sehingga fungsi distribusinya adalah :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } x < 0 \\ 2/12 & , \text{ untuk } 0 \le x < 1 \\ 10/12 & , \text{ untuk } 1 \le x < 2 \\ 1 & , \text{ untuk } x \ge 2 \end{cases}$$

b. Grafik dari $F(x)$ dapat dilihat dalam gambar berikut ini.



Fungsi Tangga

Dengan menggunakan hasil fungsi distribusi, kita juga dapat menghitung nilai dari fungsi peluangnya. Hal ini akan dijelaskan dalam dalil berikut ini :

Dalil 3.2 : Jika daerah hasil dari peubah acak X terdiri dari nilai-nilai $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_n$ maka :

a. $f(x_1) = F(x_1)$

b. $f(x_1) = F(x_i) - F(x_{i-1})$, untuk $i = 2, 3, \ldots, n$

Contoh 3.10 : Misalkan diketahui fungsi distribusi dari X adalah :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } x < 0 \\ 1/8 & , \text{ untuk } 0 \le x < 1 \\ 4/8 & , \text{ untuk } 1 \le x < 2 \\ 7/8 & , \text{ untuk } 2 \le x < 3 \\ 1 & , \text{ untuk } x \ge 3 \end{cases}$$

Tentukan nilai-nilai dari distribusi peluangnya

Jawab :

$f(0) = 1/8$

$f(1) = F(1) - F(0)$

$= 4/8 - 1/8$

$= 3/8$

$f(2) = F(2) - F(1)$

$= 7/8 - 4/8$

$= 3/8$

$f(3) = F(3) - F(2)$

$= 1 - 7/8$

$= 1/8$

Apabila kita perhatikan hasil di atas, ternyata cocok dengan hasil distribusi peluang pada halaman 60.

Contoh 3.11 : Misalkan diketahui fungsi distribusi dari X adalah :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } x < 0 \\ 2/12 & , \text{ untuk } 0 \le x < 1 \\ & \\ 10/12 & , \text{ untuk } 1 \le x < 2 \\ 1 & , \text{ untuk } x \ge 2 \end{cases}$$

Tentukan nilai-nilai dari distribusi peluangnya.

Jawab :

Berdasarkan Dalil 3.2, maka diperoleh :

$f(0) = 2/12$

$f(1) = F(1) - F(0)$

$= 10/12 - 2/12$

$= 8/12$

$f(2) = F(2) - F(1)$

$= 1 - 10/12$

$= 2/12$

Apabila kita perhatikan hasil di atas, ternyata cocok dengan hasil distribusi peluang pada halaman 62.

4. EKSPEKTASI MATEMATIKA

Jika dua buah uang logam Rp.50 diundi sebanyak 10 kali. Dalam setiap kali pengundian, maka kemungkinan yang akan terjadi adalah salah satu dari titik-titik sampel dalam ruang sampelnya, yaitu :

$$S = \{AA, AG, GA, GG\}$$

dengan : A = ANGKA 50

G = GAMBAR BURUNG

Jika X adalah banyak A yang terjadi dalam setiap pengundian dan misalkan dari 10 kali pengundian dihasilkan:

bukan A sebanyak 3 kali

satu A sebanyak 5 kali

dua A sebanyak 2 kali

Maka rata-rata banyak A terjadi dalam setiap pengundian dari dua buah uang logam Rp.50 adalah :

$$\frac{(0)(3) + (1)(5) + (2)(2)}{3 + 5 + 2} = 0,9$$

Untuk menghitung rata-rata di atas dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

$$(0)(3/10) + (1)(5/10) + (2)(2/10) = 0,9$$

Bilangan-bilangan 3/10, 5/10, dan 2/10 merupakan pecahan-pecahan dari total pengundian yang masing-masing menghasilkan bukan A, satu A, dan dua A. Pecahan-pecahan ini juga merupakan frekwensi realtif untuk nilai-nilai X yang berbeda dalam eksperimen itu. Sehingga rata-rata dari sekumpulan data dapat dihitung berdasarkan nilai-nilai X yang berbeda itu terjadi dan frekwensi relatifnya, tanpa mengetahui banyak data keseluruhan.

Oleh karena itu, jika 3/10 dari pengundian itu menghasilkan bukan A, 5/10 dari pengundian itu menghasikan satu A, dan 2/10 dari pengundian itu menghasilkan dua A, maka rata-rata banyak A dalam setiap pengundian adalah 0,9. Perhitungan ini tidak memasalahkan banyak pengundian keseluruhan, apakah 10 kali, 1000 kali, atau 10000 kali.

Dari uraian di atas, maka kita sudah memperoleh perhitungan rata-rata banyak terjadinya A yang diharapkan dalam tiap pengundian dalam jangka waktu yang lama dengan menggunakan metoda frekwensi relatif. Kita akan menamakan nilai rata-rata ini sebagai <u>rata-rata dari</u>

peubah acak X atau rata-rata dari distribusi peluang X, dan disimbolkan dengan μ_X atau μ saja.

Para ahli statistika menamakan rata-rata ini sebagai ekspektasi matematika atau nilai ekspektasi dari peubah acak X dan disimbolkan dengan E(X).

Defenisi 3.5 : Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai distribusi peluang di x, maka nilai ekspektasi dari peubah acak X adalah :

$$E(X) = \sum_{x} x \cdot p(x)$$

Contoh 3.12 : Lihat kembali soal Contoh 3.4. Dari soal tersebut, kita sudah memperoleh distribusi peluangnya, yaitu :

x	0	1	2
P(X=x)	2/12	8/12	2/12

Dengan X menunjukkan banyaknya bola putih.

Tentukan nilai ekspektasi dari X, E(X).

Jawab :

Menurut defenisi dari perumusan ekspektasi, maka

$$E(X) = \sum_{x=0}^{2} x \cdot p(x)$$
$$= (0).p(0) + (1).p(1) + (2).p(2)$$
$$= (0)(2/12) + (1)(8/12) + (2)(2/12)$$
$$= 0 + 8/12 + 4/12$$
$$= 1$$

Ini berarti bahwa untuk setiap pengambilan 2 bola secara acak tanpa pengembalian dari 4 bola, maka diharapkan dari 2 bola yang diambil itu satu diantaranya bola berwarna putih.

Dalam masalah statistika, kita tidak saja menghitung nilai ekspektasi dari peubah acak, tetapi kadang-kadang juga menghitung nilai ekspektasi dari fungsi peubah acak. Apabila peubah acaknya X, maka fungsi dari peubah acak X dapat ditulis dengan persamaan $y = g(x)$.

Untu menghitung nilai ekspektasi dari fungsi peubah acak itu dapat digunakan dalil berikut :

Dalil 3.3 : Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai dari distribusi peluangnya di x, maka nilai ekspektasi dari peubah acak $g(X)$ diberikan dengan :

$$E(g(X)) = \sum_{x} g(x).p(x)$$

Contoh 3.13 : Jika X adalah banyak mata dadu dari pengundian sebuah dadu, maka tentukan nilai ekspektasi dari peubah acak $g(X) = 2X^2 - 3$.

Jawab :

Ruang sampel dari pengundian itu adalah :

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Dari ruang sampel itu, masing-masing titik sampel mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi, yaitu 1/6.

Berdasarkan dalil 3.3, maka :

$$E(g(X)) = E(2X^2 - 3)$$

$$= \sum_{x=1}^{6} (2X^2 - 3).p(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{6} (2X^2 - 3).(1/6)$$

$$= (2\ .\ 1^2-3)(1/6)+...+(2\ .\ 6^2-3)(1/6)$$

$$= -1/6 +...+69/6$$
$$= 164/6$$

Penentuan nilai ekspektasi sering dapat disederhanakan dengan menggunakan dalil-dalil berikut ini.

Dalil 3.4 : Jika X adalah peubah acak dan a & b adalah dua buah konstanta, maka :

$$E(aX + b) = a.E(X) + b$$

Contoh 3.14 : a. Jika E(X) = 10, maka :

$$E(2X + 5) = 2.E(X) + 5$$
$$= (2)(10) + 5$$
$$= 25$$

b. Jika E(X) = 15, maka :

$$E(3X - 5) = 3.E(X) - 5$$
$$= (3)(15) - 5$$
$$= 40$$

Dalil 3.5 : Jika $c_1, c_2, ...,$ dan c_n adalah konstanta-konstanta, maka :

$$E(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(g_i(X))$$

Jawab :

$g(X) = (X + 1)^2$

$= X^2 + 2X + 1$

Berdasarkan dalil 3.5, maka :

$c_1 g_1(X) = X^2$, dengan $c_1 = 1$

$c_2 g_2(X) = 2X$, dengan $c_2 = 2$

$c_3 g_3(X) = 1$, dengan $c_3 = 1$

$= 1X^0$

Jadi : $E(X^2+2X+1) = 1.E(X^2) + 2.E(X) + 1.E(X^0)$

$= (1)(49) + (2)(5) + (1)(1)$

$= 49 + 10 + 1$

$= 60$

BAB IV

BEBERAPA DISTRIBUSI PELUANG KHUSUS

1. DISTRIBUSI BINOMINAL

Misalkan kita melakukan suatu eksperimen yang hanya menghasilkan dua peristiwa, yaitu peristiwa A dan peristiwa bukan A (yang dinyatakan dengan $\bar{A}$), dimana peluang terjadinya peristiwa A, P(A), adalah 0 dan peluang terjadinya peristiwa $\bar{A}$, P($\bar{A}$), adalah $1 - \theta$.

Kemudian kita mengulangi eksperimen di atas sebanyak n kali secara bebas. Dari n kali pengulangan itu, misalkan peristiwa A terjadi dalam x kali, sisanya (n - x) klai terjadi peristiwa $\bar{A}$. Maka salah satu susunan yang mungkin (dari $\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}$) adalah :

$$\underbrace{A\ A\ A\ \ldots\ A}_{x\ \text{kali}}\ \underbrace{\bar{A}\ \bar{A}\ \bar{A}\ \ldots\ \bar{A}}_{(n-x)\ \text{kali}}$$

Karena semua pengulangan bebas dan $P(A) = \theta$ harganya tetap untuk semua pengulangan, maka peluang dari susunan di atas sama dengan $\theta^x(1-\theta)^{n-x}$. Dalam hal ini kita hanya memperhatikan peristiwa A. Jadi banyak semua susunan yang mungkin ada $\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}$, dengan masing- masing susunan mempunyai peluang $\theta^x(1-\theta)^{n-x}$.

Sehingga peluang peristiwa A terjadi dalam x kali adalah :

$$P(X = x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

Dari uraian di atas, maka kita dapat membuat defenisi dari distribusi binominal.

<u>Defenisi 4.1</u> : Peubah acak X mempunyai <u>distribusi binominal</u> dan dikatakan sebagai peubah acak binominal, jika dan hanya jika fungsi peluangnya adalah :

$$b(x;n,\ \theta) = \binom{n}{x}\ \theta^{x}(1\ -\ \theta),\ \text{untuk } x = 0,1,2,\ldots,n$$

Rata-rata dan varians dari distribusi binominal ini akan diberikan dalam dalil berikut ini dan kita akan membuktikan dalil tersebut.

<u>Dalil 4.1</u> : Rata-rata dan varians dari distribusi binominal adalah :

$$\mu = n\ \ \theta \text{ dan } \ \theta^{2} = n\ \ \theta\ (1\ -\ \theta)$$

<u>Contoh 4.1</u> : a. $b(2;5,1/2) = \binom{5}{2}\ (1/2)^{2}(1/2)^{3}$

$$= \frac{5.4}{1.2}\ (1/2)^{5}$$

$$= 10/32$$

b. $b(3;4,1/2) = \binom{4}{3}\ (1/4)^{3}(1/2)^{1}$

$$= \frac{4.3.2}{1.2.3}\ (1/64)(3/4)$$

$$= 3/64$$

<u>Contoh 4.2</u> : Misalkan kita melakukan pengundian dengan sebuah mata uang logam Rp.50. Apabila pengundian itu diulang sampai 10 kali, maka berapa peluangnya akan diperoleh 4 "ANGKA 50" dan 6 "GAMBAR BURUNG" ?

<u>Jawab</u> :

Dalam hal ini, mata uang logam yang digunakan <u>seimbang</u>, artinya peluang munculnya "ANGKA 50" sama dengan peluang munculnya "GAMBAR BURUNG".

Jadi : P("ANGKA 50) = P("GAMBAR BURUNG) = 1/2.

Misalkan X adalah peubah acak yang menunjukkan banyaknya "ANGKA 50" yang muncul.

Dari soal diketahui : n = 10, θ = 1/2 dan x = 4; maka :

$$P(X = 4) = b(4;10,1/2) = \binom{10}{4} (1/2)^4(1/2)^6$$

$$= \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} (1/2)^{10}$$

$$= 210/1024$$

Contoh 4.3 : Dalam suatu pertandingan bola basket, tim A mempunyai peluang untuk menang sebesar 2/3 apabila bertanding. Jika tim A bermain dalam 4 babak, hitung peluangnya bahwa tim A akan menang.

a. tepat 2 babak.

b. paling sedikit 1 babak.

c. lebih setengah dari babak yang dimainkan.

Jawab :

Dalam hal ini : n = 4

θ = P(tim A akan menang apabila bertanding) =2/3

1- θ = P(tim A akan kalah apabila bertanding) =1/3

X = Banyak babak yang menang oleh tim A

a. $P(X = 2) = b(2;4,2/3) = \binom{4}{2} (2/3)^2(1/3)^2$

$$= \frac{4.3}{1.2} (4/9)(1/9)$$

$$= 24/81$$

b. $P(X \geq 1) = P(X = 1)+P(X = 2)+P(X = 3)+P(X = 4)$

$$= 1 - P(X < 1)$$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - b(0,4,2/3)$

$= 1 - 1/81$

$= 80/81$

c. $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$P(X = 3) = b(3;4,2/3) = \binom{4}{3} (2/3)^3 (1/3)^1$

$= \frac{4.3.2}{1.2.3} (8/27)\ (1/3)$

$= 32/81$

$P(X = 4) = b(4;4,2/3) = \binom{4}{4} (2/3)^4 (1/3)^0$

$= \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} (16/81)$

$= 16/81$

Jadi : $P(X > 2) = 32/81 + 16/81$

$= 48/81$

<u>Contoh 4.4</u> : Misalkan kita mempunyai sebuah kotak berisi kelereng yang bermacam-macam warnanya, 25 % diantaranya kelereng berwarna putih. Jika kita mengambil kelereng sebanyak 40 buah secara acak dari kotak itu, maka berapa peluangnya kelereng-kelereng yang diambil itu berwarna putih :

a. semuanya.

b. Tentukan rata-rata terdapatnya kelereng berwarna putih.

<u>Jawab</u> :

Dalam hal ini : $n = 40$

X = Banyaknya kelereng berwarna putih.

$\theta = P(\text{kelereng berwarna putih}) = 0,25 = 1/2$

a. $P(X = 40) = b(40;40,1/2) = \binom{40}{40}(1/4)^{40}(3/4)^{0}$

$= \frac{40.39. \; ... \; .1}{1.2.3}(4 \times 10^{-40})$

$= 4 \times 10^{-40}$

Harga di atas merupakan sebuah harga yang sangat kecil sekali yang praktis sama dengan nol.

b. $P(X \geq 1) = P(X = 1)+P(X = 2)+ \; ... \; +P(X = 40)$

$= 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - b(0;40,2/4)$

$= 1 - \binom{40}{0}(1/2)^{0}(3/4)^{40}$

$= 1 - 0,00001$

$= 0,99999$

c. $\mu = E(X) = n.\theta$

$= 40 \times 1/4$

$= 10$

Jadi rata-rata diharapkan akan terdapar 10 buah kelereng berwarna putih dalam setiap pengambilan kelereng sebanyak 40 buah.

2. PENDEKATAN DISTRIBUSI BINOMINAL KE DISTRIBUSI NOMINAL

Distribusi Binominal $b9x;n,\theta)$ dapat didekati oleh distribusi normal, jika dalam distribusi binominal terdapat :

a. ukuran sampel

b. peluang terjadinya suatu peristiwa (= θ) atau peluang tidak terjadinya suatu peristiwa (=1 - θ) tidak mendekati nol.

Ini berarti bahwa untuk menyelesaikan persoalan mengenai distribusi binominal untuk ukuran sampel n yang besar dan besarnya peluang θ atau 1 - θ tidak mendekati nol, terutama dalam menyelesaikan perhitungan kombinasinya (misalnya $\binom{400}{217}$, $\binom{300}{158}$), dapat diselesaikan dengan menggunakan bantuan distribusi normal, khususnya distribusi normal baku. Karena kita menggunakan tabel distribusi normal, maka nilai-nilai yang diketahui X perlu dibakukan lebih dahulu ke peubah acak Z yang berdistribusi normal baku. Karena kita merubah distribusi binominal yang berpeubah acak diskrit menjadi distribusi normal yang berpeubah acak kontinu, maka sebelum dilakukan pembakuan nilai-nilai yang diketahui X perlu disesuaikan lebih dahulu, yaitu dengan menambah atau mengurangi 0,5. Kemudian kita dapat menyelesaikan persoalan di atas dengan menggunakan tabel distribusi normal baku.

Untuk pembakuan digunakan transformasi berikut :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - n\theta}{n\theta(1-\theta)}$$

Untuk keperluan perhitungannya, Tabel Distribusi Normal Baku dapat dilihat dalam Apendika.

<u>Contoh 4.5</u> : Jika kita melakukan pengundian sebuah mata uang logam Rp.50 sebanyak 400 kali, maka berapa

peluang bahwa banyaknya "ANGKA 50" yang muncul lebih dari 210 kali

Jawab :

Dalam hal ini : n = 40

θ = P(munculnya "ANGKA 50") = 1/2

$1-\theta$ = P(munculnya "GAMBAR BURUNG") = 1/2

X = Banyaknya "ANGKA 50" yang muncul.

$\mu = n.\theta = 400 \times 1/2 = 200$

$\sigma = (n\theta(1-\theta))^{1/2} = (400 \times 1/2 \times 1/2)^{1/2} = 10$

$$P(X > 210) = P(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{209,5 - 200}{10}$$

$$= P(Z > 0,95)$$

$$= 0,5 - P(0 \le z \le 0,95)$$

Dari Tabel Distribusi Normal Baku, maka :

$$P(0 \le z \le 0,95) = 0,5 - 0,3289$$

$$= 0,1711$$

3. DISTRIBUSI MULTINOMINAL

Distribusi multinominal ini merupakan generallisasi atau perluasan dari distribusi binominal. Eksperimen binominal akan menjadi eksperimen multi - nominal, jika masing-masing percobaan mempunyai lebih dari dua hasil yang mungkin.

Misalkan kita melakukan suatu eksperimen yang dapat menghasilkan k peristiwa yang saling eksklusif atau meniadakan (MUTUALLY EXCLUSIVE) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ masing-masing dengan peluang terjadinya adalah $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

Kemudian kita mengulangi eksperimen di atas sebanyak n kali secara bebas. Misal $\theta_i = P(A_i)$, $i = 1,2,\ldots,k$ adalah tetap selama pengulangan eksperimen sehingga :

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$$

Jika peubah acak X didefenisikan sebagai banyak terjadinya peristiwa-peristiwa A_i, $i = 1,2,\ldots,k$ dalam n pengulangan eksperimen tersebut, maka besar peluang terjadinya peristiwa A_1 sebanyak x_1 kali, peristiwa A_2 sebanyak x_2 kali, ..., peristiwa A_k sebanyak x_k kali ditentukan oleh :

$$P(X_1=x_1, x_2, \ldots, x_k=x_k) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_k!}\cdot \theta_1^{x_1}\cdot\theta_2^{x_2}\cdot\ \ldots\theta_k^{x_k}$$

di mana : $\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$

Dari uraian di atas, maka kita dapat membuat defenisi dari distribusi multinominal.

Defenisi 4.2 : Peubah acak $X_1, X_2, \ldots, X_k$ mempunyai distribusi multinominal, dan dikatakan sebagai peubah acak multinominal, jika dan hanya jika fungsi peluang gabungannya adalah :

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k; n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

$$= \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_k!}\cdot \theta_1^{x_1}\cdot\theta_2^{x_2}\cdot\ \ldots\theta_k^{x_k}$$

untuk $x_i = 0,1,2,\ldots,n$ untuk masing-masing i, di mana $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ dan $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$.

Rata-rata dan varians dari distribusi multinominal akan diberikan dalam dalil berikut :

Dalil 4.2 : Rata-rata dan varians dari distribusi multinominal adalah :

$$\mu = n\theta_i \text{ dan } \sigma^2 = n\theta_i(1 - \theta_i)$$

Contoh 4.6 : Tentukan peluang untuk memperoleh mata 1 sebanyak 2 kali, mata 2 sebanyak 1 kali, mata 3 sebanyak 1 kali, mata 4 sebanyak 2 kali, mata 5 sebanyak 3 kali dan mata 6 sebanyak 1 kali dalam 10 kali pengundian sebuah dadu ?

Jawab :

Dalam hal ini : $n = 10$ dengan $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$ dan $x_6 = 1$.

Sedangkan : A_1 = Peristiwa munculnya mata 1.

A_2 = Peristiwa munculnya mata 2.

A_3 = Peristiwa munculnya mata 3.

A_4 = Peristiwa munculnya mata 4.

A_5 = Peristiwa munculnya mata 5.

A_6 = Peristiwa munculnya mata 6.

Dan $\theta_i = P(A_i) = 1/6$, untuk $i = 1,2,3,\ldots,6$.

Jadi besarnya peluang yang dicari adalah :

$P(X_1=2, X_2=1, X_3=1, X_4=2, X_5=3, X_6=1) =$

$$\frac{10!}{2!1!1!2!3!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= (151.200)\ (1/6)^{10}$$

Contoh 4.7 : Pada akhir bulan ini di Jakarta akan diadakan suatu konprensi yang dihadiri oleh para delegasi dari beberapa daerah di seluruh Indonesia.

Peluang sebuah delegasi yang datang ke Jakarta dengan menggunakan pesawat terbang, bis, mobil pribadi dan kereta api masing-masing sebesar 0,4 ; 0,2 ; 0,3 dan 0,1. Berapa peluangnya bahwa di antara 9 delegasi yang dipilih secara acak pada konprensi itu, 3 delegasi datang dengan pesawat terbang, 3 delegasi datang dengan bis, 1 delegasi datang dengan mobil pribadi dan 2 delegasi datang dengan kereta api ?

<u>Jawab</u> :

Dalam hal ini : $n = 9$ dengan $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, dan $x_4 = 2$.

Misalkan : A_1 = Peristiwa sebuah delegasi datang dengan pesawat terbang.

A_2 = Peristiwa sebuah delegasi datang dengan bis.

A_3 = Peristiwa sebuah delegasi datang dengan mobil pribadi.

A_4 = Peristiwa sebuah delegasi datang dengan kereta api.

Sehingga : $\theta_1 = P(A_1) = 0,4$

$\theta_2 = P(A_2) = 0,2$

$\theta_3 = P(A_3) = 0,3$

$\theta_4 = P(A_4) = 0,1$

Maka besarnya peluang yang dicari adalah :

$P(X_1=3, X_2=3, X_3=1, X_4=2)$

$= \frac{9!}{3!3!1!2} . (0,4)^3(0,2)^3(0,3)^1(0,1)^2$

$= (5040)(0,064)(0,008)(0,3)(0,01)$

$= 0,0077$

4. DISTRIBUSI POISSON

Distribusi poisson ini diperoleh dari distribusi Binominal, apabila dalam distribusi Binominal berlaku syarat-syarat sebagai berikut :

a. ukuran sampel n

b. peluang terjadinya suatu peristiwa $\theta \longrightarrow 0$

c. perkalian $n.\theta = \lambda$, sehingga $\theta = \frac{\lambda}{n}$

Seperti kita ketahui bahwa distribusi Binominal mempunyai fungsi peluang berbentuk :

$$b(x;n,\theta) = \binom{n}{x} \theta^x(1 - \theta)^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} (\frac{\lambda}{n})^x (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-x}$$

$$= \frac{(n(n-1)(n-2)...(n-(x-1))}{x!} (\frac{\lambda}{n})^x (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-1}$$

$$= \frac{n.n(1 - \frac{\lambda}{n}).n(1 - \frac{\lambda}{n}). \ ... \ .(1 - \frac{x-1}{n})}{x!} .$$

$$\frac{\lambda^x}{n^x} . (1 - \frac{\lambda}{n})^n(1 - \frac{\lambda}{n})^{-x}$$

$$= \frac{n.n^{x-1}}{} . \frac{(1 - \frac{1}{n}).(1 - \frac{2}{n}). \ ... \ .(1 - \frac{x-1}{n}) . \lambda^x}{} .$$

$$(1 - \frac{\lambda}{n})^n(1 - \frac{\lambda}{n})^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} b(x;n,\theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots$$

$$(1 - \frac{x-1}{n})(1 - \frac{\lambda}{n})^n(1 - \frac{\lambda}{n})^{-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\ldots(1 - \frac{x-1}{n})(1 - \frac{\lambda}{n})^n(1 - \frac{\lambda}{n})^{-x}$$

Kita akan menguraikan satu per satu harga limitnya.

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\ldots(1 - \frac{x-1}{n}) \longrightarrow 1$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^n \longrightarrow e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-x} \longrightarrow 1$$

Sehingga akan diperoleh :

$$\lim_{n\to\infty} b(x;n,\theta) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}, \text{ untuk } x = 0,1,2,3,\ldots$$

Jadi distribusi pendekatannya adalah :

$$P(x;\lambda) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}, \text{ untuk } x = 0,1,2,3,\ldots$$

Dari uraian di atas, maka kita dapat membuat defenisi dari distribusi secara umum, distribusi Poisson akan merupakan pendekatan yang baik dari distribusi Binominal, apabila $n \geq 100$ dan $n\theta \leq 10$ atau $n \geq 20$ dan $\theta \leq 0,05$

<u>Defenisi 4.3</u> : Peubah acak X mempunyai <u>distribusi Poisson</u>, dan dikatakan sebagai peubah acak Poisson, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk :

$$P(x;\lambda) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}, \text{ untuk } x = 0,1,2,3,\ldots$$

Rata-rata dan varians dari distribusi Poisson akan diberikan dalam dalil berikut ini :

Dalil 4.3 : Rata-rata dan varians dari distribusi Poisson adalah :

$$\mu = \lambda \text{ dan } \sigma^2 = \lambda$$

Contoh 4.8 : Misalkan 0,5% dari bola lampu yang diproduksi oleh Perusahaan "ALADIN" selama sebulan adalah rusak.

Jika kita mengambil 800 buah lampu secara acak, maka berapa peluangnya akan terdapat paling sedikit 2 buah lampu rusak ?

Jawab :

Dalam hal ini: $n = 800$

θ = P(bola lampu rusak) = 0,005

X = Banyak bola lampu yang rusak.

$\lambda = n.\theta = (800)(0,005) = 4$

$$P(X \geq 2) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+ \ldots + P(X=1000)$$

$$= 1 - P(X<2)$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$P(X = 0) = p(0;4) = \frac{4^0 . e^{-4}}{0!} = e^{-4}$$

$$P(X = 1) = p(1;4) = \frac{4^1 . e^{-4}}{1!} = e$$

Jadi : $P(X \geq 2) = 1 - e^{-4} - 4e^{-4}$

$$= 0,9084$$

5. DISTRIBUSI HIPERGEOMETRI

Misalkan kita mempunyai populasi berukuran N yang terdiri dari k barang sukses dan (N - k) barang gagal. Kemudian kita mengambil sampel acak sebanyak n barang dari populasi itu ($n \leq N$) tanpa pengembalian, dan ternyata dari sampel acak itu berisi x barang sukses dan (n - x) barang gagal.

Untuk mendapatkan x barang sukses dari k buah dapat dipilih dalam $\binom{k}{x}$ cara yang berbeda, sedangkan untuk mendapatkan (n - x) barang gagal dari (N - k) buah dapat dipilih dalam $\binom{N-k}{n-k}$ cara yang berbeda. Dan untuk mendapatkann barang dari populasi berukuran N barang dapat dipilih dalam $\binom{N}{n}$ cara yang berbeda dan masing-masing cara diasumsikan mempunyai kesempatan yang sama untuk terpilih ke dalam sampel. Maka besar peluang bahwa sampel acak itu berisi x barang sukses ditentukan oleh :

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Dari uraian di atas, maka kita dapat membuat defenisi dari distribusi hipergeometri.

<u>Defenisi 4.4</u> : Perubahan acak X mempunyai <u>distribusi hipergeometri</u>, dan dikatakan sebagai peubah acak hipergeometri, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk :

$$h(x;N,n,k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \text{ untuk } x = 0,1,2,\ldots,n$$

Rata-rata dan varians dari distribusi hipergeometri akan diberikan dalam dalil berikut ini :

$$\mu = \frac{nk}{N} \text{ dan } \sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Contoh 4.9 : Apabila kita memperhatikan kartu bridge yang berjumlah 52 buah maka akan didapat 26 buah berwarna merah dan 26 buah berwarna hitam. Jika kita mengambil 5 kartu secara acak dari setumpukan kartu itu, berapa peluang dari 5 kartu yang diambil itu, kartu yang berwarna hitam ada :

a. 3 buah.

b. paling banyak 2 buah.

c. tentukan rata-ratanya.

Jawab :

Dalam hal ini : N = Banyaknya kartu keseluruhan = 52

k = Banyak kartu hitam pada setumpukan kartu bridge = 26

n = Banyak katu yang diambil secara acak = 5

X = Banyak katu hitam yang terdapat dalam sampel acak.

a. $P(X = 3) = h(3;52,5,26) = \dfrac{\binom{26}{3}\binom{26}{2}}{\binom{52}{5}}$

$$= \frac{\dfrac{26.25.24}{1.2.3} \times \dfrac{26.25}{1.2}}{\dfrac{52.51.50.49.48}{1.2.3.4.5}}$$

$$= \frac{845.000}{2.598.690} = 0,3251$$

b. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X = 0) = h(0;52,5,26) = \dfrac{\binom{26}{0}\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}}$

$$= \frac{1 \times \dfrac{26.25.24.23.22}{1.2.3.4.5}}{\dfrac{52.51.50.49.48}{1.2.3.4.5}}$$

$$= \frac{65.780}{2.598.690} = 0,0253$$

$P(X = 1) = h(1;52,5,26) = \dfrac{\binom{26}{1}\binom{26}{4}}{\binom{52}{5}}$

$$= \frac{26 \times \dfrac{26.25.24.23.22}{1.2.3.4.5}}{\dfrac{52.51.50.49.48}{1.2.3.4.5}}$$

$$= \frac{388.700}{2.598.690} = 0,1496$$

$P(X = 2) = h(2;52,5,26) = \dfrac{\binom{26}{2}\binom{26}{3}}{\binom{52}{5}}$

$$= \frac{\dfrac{26.25}{1.2} \times \dfrac{26.25.24}{1.2.3}}{\dfrac{52.51.50.49.48}{1.2.3.4.5}}$$

$$= \frac{485.000}{2.598.690} = 0,3251$$

Jadi $P(X \leq 2) = 0,0253 + 0,1496 + 0,3251$

c. Rata-rata $= \mu = \dfrac{(5)(26)}{52} = 2,5$

Jadi untuk setiap pengambilan 5 buah kartu secara acak tanpa pengembalian dari setumpukan kartu bridge yang berjumlah 52 buah, maka diharapkan rata-rata akan terdapat 2,5 buah kartu yang berwarna hitam.

6. DISTRIBUSI GEOMETRIK

Misalkan kita melakukan percobaan yang menghasilkan dua peristiwa, yaitu peristiwa A dan peristiwa bukan A ($\bar{A}$). Kemudian kita mengulangi percobaan di atas sampai beberapa kali, dimana masing-masing pengulangan peluang terjadinya peristiwa A, yaitu $P(A) = \theta$, dan peluang terjadinya peristiwa $\bar{A}$, yaitu $P(\bar{A}) = 1 - \theta$ bersifat tetap. Diduga kita mengulang percobaan itu sampai peristiwa A terjadi <u>pertama kali</u>.

Didefenisikan peubah acak X sebagai banyaknya pengulangan percobaan sampai peristiwa A terjadi pertama kali, maka nilai-nilai X adalah 1,2,3,4,5,.... Jika $X = x$, ini berarti bahwa $(x - 1)$ pengulangan pertama menghasilkan peristiwa $\bar{A}$ dan pengulangan ke-x menghasilkan peristiwa A, sehingga susunan peristiwa yang terjadi adalah :

$$\overbrace{\begin{array}{ccccccc} \bar{A} & \bar{A} & \bar{A} & \cdots & \bar{A} & \bar{A} & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1-\theta & 1-\theta & 1-\theta & & 1-\theta & 1-\theta & \theta \\ & & & & \text{ke-}(x-1) \leftarrow & & \rightarrow \text{ke-} \end{array}}^{x \text{ pengulangan}}$$

Maka peluang bahwa peristiwa A terjadi pertama kali pada pengulangan ke-x ditentukan oleh :

$$P(X = x) = (1 - \theta)^{x-1}.\theta, \text{ untuk } x = 1,2,3,\ldots$$

Dari uraian di atas, maka dapat membuat defenisi dari distribusi geometrik.

Defenisi 4.5 : Peristiwa acak X mempunyai distribusi geometrik, dan dikatakan sebagai peubah acak geometrik, jiak dan hanya jika fungsi peluangnya bebentuk :

$$g(x;\theta) = (1 - \theta)^{x-1}.\theta, \text{ untuk } x = 1,2,3,\ldots$$

Rata-rata dan varians dari distribusi geometrik akan diberikan dalam dalil berikut ini.

Dalil 4.5 : Rata-rata dan varians dari distribusi geometrik adalah :

$$\mu = \frac{1}{\theta} \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \frac{1 - \theta}{\theta^2}$$

Contoh 4.10: Misalkan kita melakukan percobaan mengenai pengundian sebuah dadu, Kemudian kita mengulangi pengundian tersebut beberapa kali sampai dadu itu menghasilkan mata 5.

Berapa peluangnya bahwa mata dadu 5 itu akan muncul pada pengundian ke-8 ?

Jawab :

Dalam hal ini : A = Peristi

$\overline{A}$ = Peristiwa

mata 5.

θ = P(A) = 16

1 - θ = P($\overline{A}$) = 5/6

X = Banyaknya pengundian yang

dilakukan.

Jadi P(X = 8) = g(8;1/6) = $(5/6)^7(1/6)$

= 0,0465