TRANSFORMASI LAPLACE

O L E H :

DRA. PUTRI YUANITA
DRA. NURHAYATI LUKMAN

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
P A D A N G

1 9 9 3

KATA PENGANTAR

Buku "Transformasi Laplace" ini saya tulis dengan tujuan agar dapat membantu pembaca dalam mempelajari transformasi laplace dari suatu fungsi dan juga dapat digunakan untuk dipakaikaan pada bidang lain seperti misalnya bidang ilmu Fisika.

Buku ini terdiri dari 3 bab, yang dimulai dari bab I tentang Transformasi Laplace, bab II tentang Invers Transformasi Laplace dan diikuti terakhir dengan bab III mengenai Pemakaian Transformasi Laplace.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu terlaksananya penulisan buku ini. Saran dan kritik dari pihak pembaca akan penulis terima dengan tangan terbuka.

Padang, Agustus 1993

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

TRANFORMASI LAPLACE

1. DEFENISI TRANNFORMASI LAPLACE.

Misalkan F(t) suatu fungsi dari t dimana $t > 0$ maka tranformasi laplace dari fungsi F(t) dinyatakan dengan simbol L {F(t)} dan didefenisikan sebagai

$$L\,\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\;F(t)\;dt = f(s)\;,\; s\text{ real} \qquad (1)$$

Dari defenisi tranformasi laplace diatas, maka akan dapat ditentukan tranformasi laplace dari beberapa bentuk fungsi.

2. TRANFORMASI LAPLACE BEBERAPA FUNGSI

1. Tranformasi laplace dari fungsi F(t) = 1

$$L\,\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\;F(t)\;dt$$

untuk F(t) = 1 maka

$$L\,\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(-\frac{1}{s}\int_0^p d\,e^{-st}\right)$$

$$= -\frac{1}{s}\lim_{p\to\infty} e^{-st}\Big|_0^p$$

$$= \frac{1}{s}\left[\lim_{p\to\infty} e^{-ps} - 1\right]$$

(2)

$$L\ \{1\} = \frac{1}{s} \quad ; \quad s > 0$$

2. Tranformasi laplace dari fungsi $F(t) = t$

$$L\ \{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \quad F(t)\ dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left(-\frac{1}{s} \int_0^p t\ d\ e^{-st} \right)$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \left(t\ e^{-st} \Big|_0^p - \int_0^p e^{-st}\ dt \right)$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} t\ e^{-st} \Big|_0^p + \frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-st}\ dt$$

subsitusi persamaan (2) :

$$L\ \{t\} = -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} t\ e^{-st} \Big|_0^p + \frac{1}{s}\ \frac{1}{s}$$

$$L\ \{t\} = \frac{1}{s^2} \quad ; s > 0 \qquad (3)$$

3. Transformasi laplace fungsi $F(t) = t^2$

$$L\ \{\ F(t)\ \} = \int_0^{\infty} e^{-st} \quad F(t)\ dt$$

Untuk $F(t) = t^2$

$$L\ \{\ t^2\ \} = \int_0^{\infty} e^{-st} \quad t^2\ dt$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \int_0^p t^2 \, d\, e^{-st}$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \left(t^2 e^{-st} \Big|_0^p - 2 \int_0^p e^{-st}\, t \, dt \right)$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} t^2 e^{-st} \Big|_0^p + \frac{2}{s} \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-st}\, t \, dt$$

Subsitusikan persamaan (3) :

$$L\{t^2\} = -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} t^2 e^{-st} \Big|_0^p + \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{2}{s^3} = \frac{2.!}{s^3} . ; s > 0 \qquad (4)$$

Analog dengan persamaan (3) dan (4) :

maka :

$$L\{t^n\} = \frac{n\,!}{s^{n+1}} \quad ; \quad s > 0$$

4. Transformasi laplace fungsi F(t) = Sin at

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \; F(t) \, dt$$

untuk F(t) = sin at

$$L\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left(-\frac{1}{s}\right) \int_0^p \sin at \, d\, e^{-st})$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \left\{ \sin at \; e^{-st} \Big|_0^p - a \int_0^p \cos a t e^{-st} \right.$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \left\{ \sin at\ e^{-st} \Big|_0^p + \frac{a}{s} \int_0^p \cos at\, de^{-st} \right.$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} (\sin at\ e^{-st} \Big|_0^p + \frac{a}{s} \int_0^p \cos at\, de^{-st}$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \left\{ \sin at\ e^{-st} \Big|_0^p + \frac{a}{s} (\cos at\ e^{-st} \right.$$

$$\left. + a \int_0^p \sin at\ e^{-st}\, dt) \right\}$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \sin at\ e^{-st} \Big|_0^p$$

$$- \frac{a}{s^2} \lim_{p \to \infty} \cos at\ e^{-st} \Big|_0^p$$

$$- \frac{a^2}{s^2} \lim_{p \to \infty} \int_0^p \sin at\ e \quad dt$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) L \quad \sin at = -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \sin at\ e^{-st} \Big|_0^p -$$

$$- \frac{a}{s^2} \lim_{p \to \infty} \cos at\ e^{-st} \Big|_0^p$$

$$= \frac{a}{s^2}$$

$$L\ \{\sin at\} = \frac{a}{s^2} \left(\frac{s^2}{s^2 + a^2}\right)$$

$$L\ \{\sin at\} = \left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right). \ ; s > 0$$

5. Transformasi laplace fungsi F(t) = cos at

$$L\ \{\ F(t)\ \} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ F(t)\ dt$$

untuk F(t) = cos at

$$L\ \{\cos\ at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin\ at\ dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} (-\frac{1}{s}) \int_0^{p} \cos\ at\ d\ e^{-st})$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} (\cos\ at\ e^{-st}\Big|_0^p + a \int_0^p e^{-st} \sin\ at.dt)$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} (\cos\ at\ e^{-st}\Big|_0^p - \frac{a}{s} \int_0^p \sin\ at\ de^{-st})$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \Big\{\cos\ at\ e^{-st}\Big|_0^p - \frac{a}{s} (\sin\ at\ e^{-st}\ \Big|_0^p$$

$$- a \int_0^p e^{-st} \cos\ at\ dt)\Big\}$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{p \to \infty} \cos\ at\ e^{-st}\ \Big|_0^p + \frac{a}{s^2} \lim_{p \to \infty} \sin\ at$$

$$e^{-st}\ \Big|_0^p - \frac{a^2}{s^2} \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-st} \cos\ at\ dt$$

$$\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right) L\,\{\cos at\} = -\frac{1}{s}\lim_{p\to\infty} \cos at\; e^{-st}\Big|_0^p$$

$$+\frac{a}{s^2}\lim_{p\to\infty} \sin at\; e^{-st} = \frac{1}{s^2}$$

$$L\,\{\cos at\} = \frac{1}{s^2}\left(\frac{s^2}{s^2+a^2}\right)$$

$$L\,\{\cos at\} = \underline{\underline{\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)}} \quad ; \quad a > 0$$

6. Transformator Laplace fungsi $F(t) = e^{at}$

$$L\,\{\,F(t)\,\} = \int_0^\infty e^{-st}\; F(t)\;dt$$

Untuk $F(t) = e^{at}$

$$L\,\{\,e^{at}\,\} = \int_0^\infty e^{-st}\; e^{at}\;dt$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-st}\,e^{at}dt$$

$$= -\frac{1}{(s-a)}\lim_{p\to\infty}\int_0^p d\;e^{-(s-a)t}$$

$$= -\frac{1}{(s-a)}\lim_{p\to\infty} e^{-(s-a)t}\Big|_0^p$$

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)} \quad ; \quad s > (a) \tag{5}$$

7. Tranformasi Laplace fungsi $F(t) = e^{-at}$

$$L\{F(t)\} = e^{-st} \quad F(t)\, dt$$

untuk $F(t) = e^{-at}$

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^p e^{-st} \; e^{-at} \; dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-(s+a)} \; dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} - \frac{1}{s+a} \int_0^p e^{-(s+a)t} \quad dt$$

$$= - \frac{1}{(s+a)} \lim_{p \to \infty} \; e^{-(s+a)t} \Big|_0^p$$

$$L\{e^{-at}\} = \frac{1}{(s+a)} \quad ; \quad s > (a) \tag{6}$$

8. Tranformasi Laplace fungsi $F(t) = \sinh at$.

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

untuk $F(t) = \sinh at$

$$L\{\sinh at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sinh at \; dt$$

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

$$L\{\sinh at\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{(e^{at} - e^{-at})}{2}\,dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left[\int_0^{p} \frac{1}{2} e^{-(s-a)t} - \frac{1}{2} e^{-(s+a)t}\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{p \to \infty} \int_0^{p} e^{-(s-a)}\,dt - \frac{1}{2} \lim_{p \to \infty} \int_0^{p} e^{-(s-a)t}\,dt$$

subsitusi (5) dan (6)

$$L\{\sinh at\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

$$L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad ; \quad s > |a|$$

9. Tranformasi Laplace fungsi $F(t) = \cosh at$

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) = \cosh at$$

untuk $F(t) = \cosh at$

$$L\{\cosh at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cosh at\,dt$$

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$L\{\cosh at\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{(e^{at} + e^{-at})}{2}\,dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left\{ \int \frac{1}{2} e^{-(s-a)} - \frac{1}{2} e^{-(s+a)} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-(s-a)} dt - \frac{1}{2} \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-(s-a)} dt$$

substitusi (5) dan (6)

$$L\,\{\cosh at\} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{s-a} \right\} + \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{s+a} \right\}$$

$$L\,\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad ; \; s > |a|$$

Untuk lengkapnya transformasi Laplace dari beberapa fungsi dapat dilihat sebagai berikut :

Transformasi Laplace Dari Beberapa Fungsi

No.	F(t)	L {F(t)} = f(s)	
1.	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
3.	t^n , n = 1,2,3,..	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > 0$
5.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$s > 0$
6.	sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$

7.	cos at	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
8.	sinh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > \|a\|$
9.	cosh at	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > \|a\|$

3. TEOREMA-TEOREMA DASAR TRANSFORMASI LAPLACE

Dengan memperhatikan bentuk-bentuk dari fungsi F(t), maka di bawah ini akan diperlihatkan beberapa teorema transformasi Laplapce.

Teorema 1

Jika c_1 dan c_2 adalah constanta-constanta sementara $F_1(t)$ dan F_2 (t) merupakan fungsi-fungsi dengan transformasi Laplacenya masing-masing f_1 dan f_2 maka :

$$L\left\{ c_1 F_{1(t)} + c_2 F_{2(t)} \right\} = c_1 \, L\left\{ F_{1(t)} \right\} + c_2 L\left\{ F_{2(t)} \right\} =$$

$$c_1 f_1 (s) + c_2 f_2 (s)$$

Bukti :

$$L\left\{F_1(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\, F_1(t)\, dt \quad = f_1(s) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$L\left\{F_2(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\, F_2(t)\, dt \quad = f_2(s) \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

c_1 dan c_2 adalah constanta - constanta.

$$L\left\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}(c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\ )\, dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st}\, F_1(t)\, dt \; + c_2 \int_0^\infty e^{-st}\, F_2(t)\, dt$$

$$= c_1L\left\{F_1\ (t) + c_2L\ F_2(t)\right\}$$

Subsitusi persamaan (7) dan (8)

maka : $L\left\{F_1\ (t) + c_2L\ F_2(t)\right\} = \underline{c_1f_1(s) + c_2f_2(s)}$

Akibatnya :

$$L\left\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ c_nF_n(t)\right\}$$

$$= c_1f_1(s) + c_2f_2(s) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ c_nF_n(s)$$

Contoh :

1. Tentukan $L\left\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\right\}$

Solusinya :

$$L\left\{ 4e^{5t} + 6t^{3} - 3\sin 4t + 2\cos 2t \right\} =$$

$$4L\{e^{5t}\} + 6L\{t^{3}\} - 3L\{\sin 4t\} + 2L\{\cos 2t\}$$

$$= 4\left(\frac{1}{s-5}\right) + 6\left(\frac{3!}{s^{4}}\right) - 3\left(\frac{4}{s^{2}+16}\right) + 2\left(\frac{s}{s^{2}+4}\right)$$

$$= \frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^{4}} - \frac{12}{s^{2}+16} + \frac{2s}{s^{2}+4}$$

<u>Teorema 2</u>

$$\text{Jika } L\left\{F(t)\right\} = f(s)$$

$$\text{maka } L\left\{e^{at}F(t)\right\} = f(s-a)$$

Bukti :

$$L\left\{F(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} F(t)\,dt$$

$$\text{maka} \quad L\left\{e^{at}F(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} e^{at} F(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t} F(t)\,dt$$

$$L\left\{e^{at}F(t)\right\} = f(s-a)$$

contoh :

1. Tentukan $L\left\{e^{-2t}\sin 4t\right\}$

solusinya : Karena L { sin 4t } = $\dfrac{4t}{s^2+16}$, maka

$$L\left\{ e^{-2t} \sin 4t \right\} = \frac{4}{(s+2)^2+16}$$

$$= \frac{4}{s^2+4s+20}$$

2.Tentukan $L\left\{ e^{3t}(a_1 t + a_2 t^2)\right\}$

solusinya :

$$L\left\{ e^{3t}(a_1 t + a_2 t^2)\right\}$$

$$= L\left\{ a_1 e^{3t} t + a_2 e^{3t} t^2 \right\}$$

$$= a_1 L\left\{ e^{3t} t \right\} + a_2 L\left\{ e^{et} t^2 \right\}$$

$$= a_1 \frac{1}{(s-3)^2} + a_2 \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$= \frac{a_1(s-3) + 2a_2}{(s-3)^3}$$

$$\left\{ e^{3t}(a_1 t + a_2 t^2)\right\} = \underline{\frac{a_1 s - 3a_1 + 2a_2}{s^3 - 9s^2 + 27s - 27}}$$

<u>Teorema 3</u>

Jika $L\left\{ F(t) \right\} = f(s)$, dan

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & ; \quad t>a \\ 0 & ; \quad t<a \end{cases}$$

maka $L\left\{ G(t) \right\} = e^{-as} f(s)$

Bukti :

$$L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, G(t)\, dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}\, G(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-st}\, G(t)\, dt.$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, 0\, dt + \int_a^a e^{-st}\, F(t-a)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, F(t-a) dt$$

Misalkan : $u = t - a$ $\qquad t = u + a$

$du = dt$

Untuk : $t = a$ $\qquad u = 0$

$t = \infty$ $\qquad u = \infty$

Maka :

$$L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(u+a)} F(u)\, du$$

$$= e^{-as} \int_0^\infty e^{-su}\, F(u)\, du$$

$$L\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$$

Contoh :

Tentukan $L\{F(t)\}$ jika :

$$F(t) = \begin{cases} \cos\left(t-\frac{2\Pi}{3}\right) & ; t > \frac{2\Pi}{3} \\ 0 & ; t < \frac{2\Pi}{3} \end{cases}$$

solusinya :

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi/3} e^{-st} F(t)\, dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi/3} e^{-st}\, 0\, dt + \int_{\pi/3}^\infty e^{-st} \cos(t-2\Pi/3)dt$$

$$= \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} \cos(t-2\Pi/3)dt$$

Misalkan :

$$u = t - 2\Pi/3 \longrightarrow t = u + 2\Pi/3$$

$$du = dt$$

Untuk :

$$t = 2\Pi/3 \longrightarrow u = 0$$

$$t = \infty \longrightarrow u = \infty$$

Maka :

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(u + 2\pi/3)} \cos u\, du$$

$$= e^{-2\pi/3} \int_{2\pi/3}^{\infty} e^{-su} \cos u \, du$$

$$= e^{-2\pi/3} \left(\frac{s}{s^2 + 1^2} \right)$$

$$L \{ F(t) \} = \underline{\frac{s \, . \, e^{-2\pi s/3}}{s^2 + 1^2}}$$

Teorema 4 :

Jika $L \{ F(t) \} = f(s)$

maka $L \{ F(t) \} = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$

Bukti :

$$L \{F(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(at) dt$$

Misalkan : $t = u/a$,

$dt = 1/a \ da$

untuk $t = 0$ $u = 0$

$t = \infty$ $u = \infty$

Maka : $L \{F(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-u/a} F(u).1/a \ du$

$$= 1/a \int_0^{\infty} e^{-u/a} F(u) \, du$$

$$L \{F(at)\} = \underline{1/a \ f(s/a)}$$

Contoh

Diketahui $L\{F(t)\} = \dfrac{e^{-1/s}}{s}$

Ditanya $L\left\{e^{-t}\ F(2t)\right\}$

Solusinya

$$L\{F(t)\} = \frac{e^{-1/s}}{s}$$

Maka :

$$L\{F(2t)\} = 1/2 \cdot \frac{e^{-1/\frac{s}{2}}}{s/2}$$

$$= \frac{e^{-2/s}}{s}$$

$$L\left\{e^{-t}\ F(2t)\right\} = \frac{e^{-\frac{2}{s+1}}}{s+1}$$

Teorema 5

Turunan dari Tranformasi Laplace

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka $L\{F'(t)\} = s.f(s) - F(0)$

Bukti :

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\ F'(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\ dF(t)$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-st}\ dF(t)$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left\{ e^{-st} F(t) \Big|_0^p + s \int_0^p e^{-st} F(t)dt \right\}$$

$$= \lim_{p \to \infty} e^{-st} F(t) \Big|_0^p + s \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-st} F(t)dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left\{ e^{-st} F(P) - F(0) + s \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-st} F(t)dt \right.$$

$$= - F(0) - s\ L\ \{F(t)\}$$

$$L\ \{F'(t)\} = sf(s) - F(0) \quad \text{.....................(9)}$$

Contoh :

Perlihatkan $L\ \{\cosh 2t\} = \dfrac{s}{s^2 - 4}$

Jika $F(t) = \sinh 2t$

Solusinya :

$$L\ \{F(t)\} = L\ \{\sinh 2t\}$$

$$= \frac{2}{s^2 - 4}$$

$$F(t) = \sinh 2t \longrightarrow F(0) = 0$$

$$F'(t) = 2 \cosh 2t$$

$$L\ \{F'(t)\} = s\ L\ \{ F(t) \} - F(0)$$

$$2L\ \{\cosh 2t\} = s \frac{2}{s^2 - 4}$$

$$L\ \{\cosh 2t\} = \frac{s}{s^2 - 4}$$

Teorema 6

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$

Maka $L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$

Bukti :

Misalkan : $L\{G(t)\} = L\{F'(t)\}$

Dari persamaan (9) ; $L\{G'(t)\} = sL\{G(s)\} - G(0)$

Maka $L\{G'(t)\} = L\{F''(t)\} = sL\{F'(t)\} - F'(0)$

$$= s\left\{ (sL\{F(t)\} - F(0) \right\} - F'(0)$$

$$L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

Contoh 1 :

Tunjukan bahwa $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

Solusinya :

Misalkan $F(t) = \sin at$

Maka $F'(t) = a \cos at$

$F''(t) = -a^2 \sin at$

$F(0) = 0$

$F'(0) = a$

Dari persamaan (10)

$$L\{ F''(t) \} = s^2 L\{ F(t) \} - sF(0) - F'(0)$$

$$L\{ -a^2 \sin at \} = s^2 L\{ \sin at \} - s(0) - a$$

$$- a^2 L\{ \sin at \} = s^2 L\{ \sin at \} - a$$

$$(s^2 + a^2) L \{ \sin at \} = a$$

$$L \{ \sin at \} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Contoh 2 :

Tunjukan bahwa $L \left\{ t\ e^{at} \right\} = \dfrac{1}{(s - a)^2}$

Solusinya :

$$F(t) = t\ e^{at} \longrightarrow F(0) = 0$$

$$F'(t) = at\ e^{at} + e^{at} \longrightarrow F'(0) = 1$$

$$F''(t) = a^2\ te^{at} + a\ e^{at} + ae^{at}$$

Menurut (10) :

$$L \{F''(t)\} = s^2\ L\ \{F(t)\} - s\ F(0) - F'(0)$$

$$L \left\{ a^2 t\ e^{at} + 2a\ e^{at} \right\} = s^2\ L \left\{ t\ e^{at} \right\} - 1$$

$$a^2\ L \left\{ t\ e^{at} \right\} + 2aL \left\{ e^{at} \right\} = s^2 L \left\{ t\ e^{at} \right\} - 1$$

$$(s^2 - a^2)L\left\{t\ e^{at}\right\} = 2a\left(\frac{1}{s-a}\right) + 1$$

$$= \frac{s+a}{s-a}$$

$$L\left\{t\ e^{at}\right\} = \frac{s+a}{s-a}\left[\frac{1}{s^2 - a^2}\right]$$

$$= \frac{(s+a)}{(s-a)(s-a)(s+a)}$$

$$L\left\{t\ e^{at}\right\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

Contoh : Tentukan $L\left\{\int_c^t (u^2 - u + e^{-u})\ du\right\}$

Solusinya :

$F(u) = u^2 - u + e^{-u}$ $\qquad\qquad$ $F(t) = t^2 - t + e^{-t}$

$$f(s) = L\ \{F(t)\} = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

Maka :

$$L\left\{\int_c^t F(u)\ du\right\} = 1/s\left[\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\right]$$

$$L\left\{\int_c^t (u^2 - u + e^{-u})\ du\right\} = \underline{\frac{2}{s^4} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s(s+1)}}$$

Dari Teorema 5 dan Teorema 6 dapat disimpulkan bahwa :

$L\ \{F^n(t)\ \ K\ \} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F\ '(0) -$

$F^{n-1}(0)$

Teorema 8 :

Jika $L\{F(t)\} = f(s)$

Maka $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$

$= (-1)^n f^n(s)$

Bukti : $L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$

Menurut Hukum Leibuz mengenai differensial dari integral nya

$$\frac{df}{ds} = f'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)\, dt$$

$$= - \int_0^\infty e^{-st}\, t\, F(t)\, dt$$

$$f'(s) = - L\{t F(t)\}$$

$$L\{tF(t)\} = - f'(s) \text{.....................} (11)$$

Persamaan (11) merupakan pembuktian untuk n = 1. Untuk meneliti apakah berlaku semua harga n dapat digunakan induksi lengkap.

Untuk $n = k$; $L\{t^k F(t)\} = (-1)^k f^k(s)$.............(12)

$$\int_0^\infty e^{st}\ t^k\ F(t)\ dt = (-1)^k\ f^k\ (s)$$

$$\frac{d}{ds}\ \int_0^\infty e^{-st}\ t^k\ F(t)\ dt = (-1)^k\ f^{k+1}\ (s)$$

Menurut Hukum Leibuz $\int_0^\infty e^{-st}\ t^{k+1}\ F(t)\ dt = (-1)^k\ f^{k+1}\ (s)$

$$\int_0^\infty e^{-st}\ t^{k+1}\ F(t)\ dt = (-1)^{k+1}\ f^{k+1}\ (s)$$

$$L\left\{ t^{k+1}\ F(t) \right\} = (-1)^{k+1} f^{k+1} (s) \qquad (13)$$

Persamaan (12) benar yaitu jika teorema memenuhi $n = k$. Maka persamaan (13) juga benar dengan $n = k + 1$. Sedangkan dari persamaan (11) telah terbukti untuk $n = 1$ sehingga berlaku untuk semua harga n (untuk semua bilangan bulat positif). Maka terbukti

$$L\ \{\ t^n\ F(t)\ \}\ = \underline{(-1)^n\ f^n\ (s)}$$

Contoh 1.

Tentukan $L\ \{\ t^2\ \sin\ t\ \}$

Solusinya : $L\ \{\ \sin\ t\ \} = \frac{1}{s^2 + 1}$

Maka

$$L\ \{\ t^2\ \sin\ t\ \} = (-1)^2\ \frac{d^2}{ds^2}\ \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\ \left(\frac{-2s}{2 \qquad 2}\right)$$

$$(s \quad + 1)$$

$$= \frac{-2\ (s^2+1)^2 - 2\ (s^2+1)\ 2s\ (-2s)}{(s^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2s^2 - 2 + 8s^2}{(s^2+1)^3}$$

$$L\ \{\ t^2 \sin t\ \} = \frac{6s^2 - 2}{(s^2+1)^3}$$

Contoh 2 :

Tentukan $L\ \{\ t^2 \cos at\ \}$

Solusinya :

$$L\ \{\ \cos at\ \} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\text{Maka} \quad L\ \{\ t^2 \cos at\ \} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)$$

$$= \frac{2s^3 - 6a^2 s}{(s^2 + a^2\ )}$$

<u>Teorema 9</u> :

Jika $L\ \{\ F(t)\ \} = f(s)$

$$\text{Maka} \quad L\left\{\frac{F\ (t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} f\ (u)\ du$$

Bukti : Misalkan $G(t) = \dfrac{F(t)}{t}$

$$F\ (t) = t\ G\ (t)$$

$$L\{F(t)\} = L\{t\,G(t)\}$$

$$f(s) = -\frac{d}{ds}\,g(s)$$

$$g(s) = \int_s^{\infty} f(s)\,ds$$

Dapat juga ditulis $g(s) = -\int_{\infty}^{s} f(u)\,du$

$$= \int_s^{\infty} f(u)\,du$$

$$L\left\{G(t)\right\} = L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} f(u)\,du$$

==========

contoh 1 :

Tentukan $L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\}$

Solusinya:

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} f(u)\,du$$

$$F(t) = e^{-at} - e^{-bt}$$

$$L\{F(t)\} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

Maka : $L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b}\right) du$

$$= \int_s^{\infty} \frac{1}{u+a}\, d(u+a)$$

$$= \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{u + b} \right. d\,(u + b)$$

$$= \ln\,(u + a) \Big|_s^{\infty} - \ln\,(u + a)$$

$$= \ln \infty - \ln\,(s+a) - \ln \infty + \ln\,(s+b)$$

$$= \ln\,(s+b) - \mathrm{Ln}\,(s+a)$$

$$L \left\{ \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b} \right\} = \underline{\ln \left(\frac{s + b}{s + a} \right)}$$

contoh 2 :

Tunjukan bahwa $\int_o^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi/2$

Solusinya :

Misalkan $F(t) = \sin t$ sehingga

$f(s) = \frac{1}{z}$. Karena $\int_o^{\infty} \frac{F(t)}{t}\, dt = \int_o^{\infty} f(u)\, du$

maka $\int_o^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_o^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = tg^{-1}x \Big|_o^{\infty} = \pi/2$

B A B I I

INVERS TRANSFORMASI LAPLACE

1. PENGERTIAN

Pada bab di atas telah dibicarakan mengenai Transformasi Laplace serta teorema-teorema yang berlaku padanya. Dalam definisi transformasi Laplace yang disimbolkan sebagai berikut $L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\ F(t)\ dt =$ $f(s)$, dimana fungsi $F(t)$ yang diketahui di transformasi laplacekan sedemikian hingga terdapat- lah suatu fungsi baru $f(s)$. Kemudian dengan memperhatikan kembali bentuk dari $L\{F(t)\} = f(s)$ dimana fungsi $f(s)$ yang diketahui dan yang hendak dicari adalah fungsi $F(t)$, maka proses inilah yang disebut invers transformasi laplace. Seperti diketahui juga sebuah fungsi dapat diberi invers dari fungsi tersebut dan demikian pula untuk transformasi ini.

DEFINISI INVERS TRANSFORMASI LAPLACE

Jika transformasi laplace dari suatu fungsi $F(t)$ $f(s)$, atau $L\{F(t)\} = f(s)$ maka $F(t)$ disebut invers transformasi laplace dari fungsi $f(s)$ ditulis dengan simbol :

$$L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$$

L^{-1} disebut operator invers transformasi laplace.

Contoh :

$$L\left\{ e^{-3t} \right\} = \frac{1}{s+3}$$

maka $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s+3} \right\} = \underline{\underline{e^{-3t}}}$

Jadi untuk menentukan harga invers transformasi laplace dari fungsi f(s), yang diketahui, adalah sama dengan memperhatikan kembali fungsi f(s) dan transformasinya. Hal ini dapat dilihat seperti berikut :

TABEL :

INVERS TRANSFORMASI LAPLACE

No.	f(s)	$L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^{n+1}}$, n=0,1,2,...	$\frac{t^n}{n!}$
4	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
6	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
7	$\frac{s}{s^2+a^2}$	cos at
8	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
9	$\frac{s}{s^2-a^2}$	cosh at

2. SIFAT - SIFAT INVERS TRANFORMASI LAPLACE

(a) Jika c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta sementara $f_1(s)$ dan f_2 (s) masing-masing merupakan transformasi laplace dari $F_1(t)$ dan $F_2(t)$.

Maka $L^{-1}\left\{ c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) \right\} = c_1 L^{-1}\left\{ f_1(s)\right\} + c_2 L^{-1}\left\{ f_2(s)\right\}$

$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Bukti :

Menurut teorema (1)

$L\left\{ c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \right\} = c_1 L^{-1}\left\{ F_1(t)\right\} + c_2 L\left\{ F_2(t)\right\} = c_1 f_1(s)$

$+ c_2 f_2(s) \quad L^{-1}\left\{ c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) \right\} = c_1 f_1(t) + c_2 F_2(t)$

$= c_1 L^{-1}\left\{ f_1(s)\right\} + c_2 L^{-1}\left\{ f_2(s)\right\}$

Contoh 1 :

Tentukan : $L^{-1}\left\{ \frac{3s - 8}{s^2 + 4} - \frac{4s - 24}{s^2 - 16} \right\}$

Solusinya :

$$L^{-1}\left\{ \frac{3s - 8}{s^2 + 4} - \frac{4s - 24}{s^2 - 16} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{3s}{s^2 + 4} \frac{8}{s^2 - 16} - \frac{4s}{s^2 - 16} + \frac{24}{s^2 - 16} \right\}$$

$$= 3L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + 4} \right\} - 8L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 + 4} \right\} - 4L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 - 16} \right\}$$

$$+ 24L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 - 16} \right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s - 8}{s^2 + 4} \frac{4s - 24}{s^2 - 16}\right\} = 3 \cos 2t - 4 \sin 2t$$

$$\underline{\underline{4 \cosh 4t + \sinh 4t}}$$

Contoh 2

Tentukan $L^{-1}\left\{\frac{4}{s - 2} - \frac{3s}{s^2 + 16} + \frac{5}{s^2 + 4}\right\}$

Solusinya :

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s - 2} - \frac{3s}{s^2 + 16} + \frac{5}{s^2 + 4}\right\}$$

$$= 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 2}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 16}\right\} + 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\}$$

$$= 4e^{2t} - 3 \cos 4t + 5/2 \sin 2t$$

(b) Jika $L^{-1}\{ f(s) \} = F(t)$

Maka $L^{-1}\{ f(s-a) \} = e^{at} F(t)$

Bukti :

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)} F(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} F(t)\, dt$$

$$= L\left\{ e^{at} F(t) \right\}$$

Maka $L^{-1}\{ f(s-a) \} = \underline{\underline{e^{at} F(t)}}$

Contoh 1 : Tentukan $L^{-1}\left\{\dfrac{2s + 1}{s^2 + 4\ s - 13}\right\}$

Solusi.

$$L^{-1}\left\{\frac{2s + 1}{s^2 + 4\ s - 13}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2(s + 2) - 3}{(s + 2)^2 + 9}\right\}$$

$$= 2\ L^{-1}\left\{\frac{(s + 2)}{(s + 2)^2 + 9}\right\} - 3\ L^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 2)^2 + 9}\right\}$$

$$= 2e^{-2t} \cos 3t - e^{-2t} \sin 3t$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 13}\right\}$$

$$= e^{-2t}\ 2 \cos 3t - \sin 3t$$

Contoh 2 :

Tentukan $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 - 2s + 5}\right\}$

Solusinya

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 2s + 5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 1)^2 + 4}\right\}$$

$$= 1/2\ e^{t} \sin 2t$$

(karena $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + 4}\right\} = 1/2 \sin 2t$)

(c) Jika $L^{-1}\{ f(s) \} = F(t)$

Maka Jika $L^{-1}\left\{ e^{-at} f(s) \right\} = G(t)$

dimana : $G(t) \begin{cases} F(t-a) & ; \ t > a \\ 0 & ; \ t < a \end{cases}$

Bukti :

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$e^{-as} f(s) = \int_0^\infty e^{-at}\, e^{-st}\, F(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(a\,+\,t)} F(t)\, dt$$

Misalkan :

$u = a + t \longrightarrow du = dt$

$t = 0 \longrightarrow u = a$

$t = \infty \longrightarrow u = \infty$

$$e^{-as}\ f(s) = \int_0^\infty e^{-us}\ F(u-a)\ du$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\ dt + \int_0^\infty e^{-st}\ F(t-a)\ dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\ G(t)\ dt$$

Maka $L^{-1}\left\{ e^{-as}\ f(s) \right\} = G(t)$

Contoh 1 : Tentukan

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2 - 2s + 5}\right\}$$

Solusinya :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 2s + 5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2 + 4}\right\}$$

$$= 1/2\ e^{t} \sin 2t$$

Maka : $$L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2 - 2s + 5}\right\} = \begin{cases} 1/2\ e^{(t-3)} \sin 2(t-3) & ;\ t>3 \\ 0 & ;\ t<3 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2 - 2s + 5}\right\} = 1/2\ e^{(t-3)} \sin 2(t-3)\ u\ (t-3)$$

(d) Jika $L^{-1}\left\{ f(s) \right\} = F(t)$

Maka : $L^{-1}\left\{ f(ks) \right\} = 1/k\ F(t/k)$

Bukti :

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\ F(t)\ dt$$

$$f(ks) = \int_0^{\infty} e^{-skt}\ F(t)\ dt$$

Misalkan : $u = kt \longrightarrow dt = 1/k\ du$

$$f(ks) = \int_0^{\infty} e^{-us}\ F(u/k).1/k\ du$$

Maka $L^{-1}\{ f(ks) \} = \underline{\underline{1/k\ F\ (t/k)}}$

Contoh : Tentukan $L^{-1}\{ f(ps + q) \}$

Solusinya $L^{-1}\{ f(ps + q) \} = e^{-qt}\ F(t)$

Maka : $L^{-1}\{ f(ps + q) \} = \underline{\underline{1/p \left\{ e^{-q\ t/p}\ \ F\ (t/p) \right\}}}$

(e) Turunan Invers Tranformasi Laplace.

Jika $L^{-1}\{ f(s) \} = F(t)$

Maka : $L^{-1}\{ f^{n}(s) \} = L^{-1}\left\{ \frac{d^{n}}{ds^{n}} f(ks) \right\} = (-1)^{n}\ t^{n}\ F(t)$

Bukti :

Menurut teorema 8 :

$L\ \{ t^{n}\ F(t) \} = (-1)^{n}\ f^{n}\ F(s)$

Maka : $L^{-1}\{ f^{n}(s) \} = (-1)^{n}\ f^{n}\ F(t)$

Contoh :

Tentukan $L^{-1}\left\{ \frac{2s}{(s^{2} + a^{2})^{2}} \right\}$

Solusinya :

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{(s^{2} + a^{2})} = \frac{-2s}{(s^{2} + a^{2})}$$

$$\frac{2s}{(s^2 + a^2)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2 + a^2}\right)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = L^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2 + a^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{ds} \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\}$$

$$= -t\,\frac{\sin at}{a}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = -\frac{t}{a}\sin at$$

(f) Integral invers transformasi laplace.

Jika $L^{-1}\{ f(s) \} = F(t)$

Maka $L^{-1}\left\{ \int_s^{\infty} f(u)\, du \right\} = \frac{F(t)}{t}$

Bukti :

Misalkan $G(t) = \frac{F(t)}{t} \longrightarrow F(t) = t\, G(t)$

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, F(t)\, dt$$

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, G(t)\, dt$$

$$= L\ \{ t\, G(t) \}$$

Menurut teorema (8) :

$$L\ \{ t\ G(t) \} = -\frac{d}{ds} L\ \{ t\ G(t) \} = -\frac{d}{ds} g\ (s)$$

$$f(s) = -\frac{d}{ds} g\ (s)$$

$$\int_s^{\infty} d\ g(s) = -\int_s^{\infty} f(s)\ ds$$

$$g(s) = \int_s^{\infty} f(u)\ du$$

$$L\ \{G(t)\} = \int_s^{\infty} f(u)\ du$$

Maka : $L^{-1}\left\{ \int_s^{\infty} f(u)\ du \right\} = G(t)\ ;\ G(t) = \frac{F(t)}{t}$

Contoh : Tentukan $L^{-1}\left\{ \int_s^{\infty} \frac{1}{u(u+1)}\ du \right\}$

Solusinya : $L^{-1}\left\{ \frac{1'}{s(s+1)} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \quad \frac{1}{(s+1)} \right\}$

$$= t - e^{t}$$

Maka : $L^{-1}\left\{ \int_s^{\infty} \frac{1}{u(u+1)}\ du \right\} = \frac{t - e^{-t}}{t}$

(g) Jika : $L^{-1}\ \{ f(s) \} = F(t)\ ;\ F(0) = 0$

Maka : $L^{-1}\ \{sf(s)\} = F'(t)$

Bukti :

Menurut teorema (5) :

$$L\ \{ F'(t) \} = sf(s) - F(0). \longrightarrow F(0) = 0$$

$$L\ \{ F'(t) \} = sf(s)$$

Maka : $L^{-1}\ \{ sf(s) \} = \underline{\underline{F'(t)}}$

Contoh : Diketahui $f(s) = \dfrac{1}{s^2 + 1}$

Tentukan harga : s f(s)

Penyelesaian : $f(s) = \dfrac{1}{s^2 + 1} \longrightarrow F(t) = \sin t$

$F'(t) = \cos t$

$$L^{-1}\ \{ sf(s) \} = L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} = \underline{\underline{\cos t}}$$

(h) Jika : $L^{-1}\ \{ f(s) \} = F(t)$

Maka : $L^{-1}\ \left\{ \dfrac{f(s)}{s} \right\} = \displaystyle\int_0^t F(u)\ du$

Misalkan $G(t) = \displaystyle\int_c^t F(u)\ du$

$$G(0) = 0\ ;\ G'(t) = F(t)$$

Menurut teorema (5) :

$$L\ \{ G'(t) \} = s\ L\ \{ G(t) \} - G(0)$$

$$L\{F(t)\} = s\,L\{G(t)\}$$

$$f(t) = s\,L\{G(t)\}$$

Maka :

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \underline{\underline{G(t)\;;\;G(t) = \int_0^t F(u)\,du}}$$

Contoh : Tentukan $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+9)}\right\}$

Solusinya : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+9)}\right\} = \dfrac{1}{3}\sin 3t$

Maka : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+9)}\right\} = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{3}\sin 3u\,du$

$$= -\frac{1}{9}\cos 3u \int_0^t$$

$$= -\frac{1}{9}(\cos 3t - 1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+9)}\right\} = \underline{\underline{-\frac{1}{9}(1-\cos 3t)}}$$

(i) Jika : $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$

Maka : $L^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^2}\right\} = \displaystyle\int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv$

Bukti :

Misalkan $G(t) = \displaystyle\int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv$

Didapat :

$$G(0) = 0$$

$$G'(t) = \int_0^t F(u)\,du \longrightarrow G'(0) = 0$$

$$G''(t) = F(t)$$

Menurut teorema (6) :

$$L\{ G''(t) \} = s^2 L\{ G(t) \} - s\,G(0) - G'(0)$$

$$\longrightarrow G(0) = G'(0)$$

$$L\{ G''(t) \} = s^2 L\{ G(t) \}$$

$$L\{ F(t) \} = s^2 L\{ G(t) \}$$

$$f(t) = s^2 L\{ G(t) \}$$

Maka : $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = G(t)\ ;\ G(t) = \int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv$

Secara umum dapat dituliis :

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^t \cdots\cdots\cdots\cdots F(t)\,dt^n$$

Contoh : Tentukan $L^{-1}\left\{\frac{54}{s^3(s-3)}\right\}$

Solusinya : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 54\,e^{3t}$

Maka : $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s - 3} \right\} = 54 \int_0^t e^{3u} \, du$

$$= \frac{54}{3} \, (e^{3t} - 1)$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2(s - 3)} \right\} = 54 \int_0^t (e^{3u} - 1) \, du$$

$$= \frac{54}{9} e^{3t} - \frac{54}{9} - \frac{54}{3} t$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2(s - 3)} \right\} = 54 \int_0^t (\frac{1}{9} e^{3u} - \frac{1}{3} u - \frac{1}{9}) du$$

$$= 54 \, (\frac{1}{27} e^{3u} - \frac{1}{27} - \frac{1}{6} t^2$$

$$= \frac{1}{9} t$$

Maka : $L^{-1}\left\{ \dfrac{54}{s^3(s - 3)} \right\} = \underline{\underline{2 e^{3t} - 9 t^2 - 6t - 2}}$

3. TEOREMA KONVOLUSI

Jika : $L^{-1} \{ f(s) \} = F(t)$; $L^{-1} \{ g(s) \} = G(t)$

Maka $L^{-1} \{ f(s) \, g(s) \} = \int_0^t F(u) \, G(t - u) \, du$

$$= F * G$$

Bukti : $L^{-1} \{ f(s) \, g(s) \} = \int_0^t F(u) \, G(t - u) \, du$

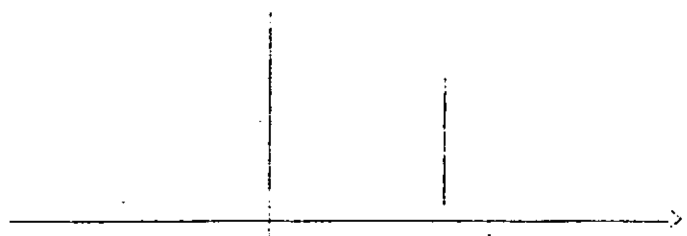
$$f(s)\ g(s) = L\left\{ \int_0^t F(u)\ G(t-u)\ du \right\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t F(u)\ G(t-u)\ du\ dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} S_M$$

Dimana $S_M = \int_0^M \int_0^t e^{-st} F(u)\ G(t-u)\ du\ dt$.............

Misalkan : $(t-u) = v \longrightarrow t = u + v$



Daerah R_{tu} di tranformasikan terhadap daerah R_{uv} menurut teorema tranformasi integral ganda persamaan (14) menjadi .

$$S_M = \iint_{R_{tu}} e^{-st} F(u)\ G(t-u)\ du\ dt$$

$$= \iint_{R_{tu}} e^{-s(u+v)} F(u)\ G(v) \left| \frac{\partial t,u}{\partial u,v} \right| du\ dv \quad ....(15)$$

Menurut tranformasi Jacobian

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

Sehingga persmaan (15)

$$S_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv$$

Misalkan didefenisikan suatu fungsi baru K (u,v) dimana

$$K(u,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v) & ; (u+v) \le M \\ 0 & ; (u+v) > M \end{cases}$$

$$S_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv$$

$$\lim_{M \to 0} {}_M S = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv$$

$$= \int_0^\infty e^{-su} F(u)\, du \int_0^\infty e^{-sv} G(v)\, dv$$

$$= L\left\{F(u)\right\} L\left\{G(v)\right\}$$

$$= f(s)g(s)$$

$$\lim_{M \to o} {}_M S = L \left\{ \int_0 F(u)\ G\ (t-u)\ du\ dv \right\}$$

Maka :

$$L^{-1} \left\{ f(s)\ g(s) \right\} = \int_0^t F(u)\ G\ (t-u)\ du\ dv \left.\right\}$$

Contoh : (1) Tentukan $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)\ (s^2+1)} \right\}$

Solusinya :

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = \sin t$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1} \right\} = e^{-t}$$

Maka :

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)\ (s^2+1)} \right\} = \int_c^t \sin u\ e^{-t+u}\ du$$

$$= \int_c^t \sin u\ d\ e^{-t+u}$$

$$= e^{-t+u} \sin u \Big|_c^t - \int_c^t e^{-t+u} \cos u\ du$$

$$= \sin t - \cos u\ e^{-t+u} - \int_c^t \sin u\ e^{-t+u}\ du$$

$$2L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)\ (s^2+1)} \right\} = \sin t - \cos t + e^{-t}$$

Maka :

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)\ (s^2+1)} \right\} = 1/2\ (\sin t - \cos t + e^{-t}$$

Contoh : (2)

Tentukan $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(s)\quad(s)}{(s^2+4)\ (s^2+4)}\right\}$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\right\} = \cos 2t$$

Jadi :

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}^2 = \int_c^t \cos 2u \cos 2(t-u)\,du$$

$$= \int_c^t \cos 2u\,(\cos 2t \cos 2u + \sin 2t \sin 2u)\,du$$

$$= \cos 2t \int_c^t \cos^2 2u\,du + \sin 2t \int_c^t \cos 2u \sin 2u\,du$$

$$= \cos 2t \int_c^t 1/2(1+\cos 4u)\,du + \sin 2t \int_c^t 1/2 \sin 4u\,du$$

$$= 1/2 \cos 2t(u + 1/4 \sin 4u)\Big|_0^t + 1/2 \sin 2t(-1/4 \cos 4u)\Big|_0^t$$

$$= 1/2 \cos 2t\,(t+1/4 \sin 4t) - 1/8 \sin 2t\,(\cos 4t - 1)$$

$$= 1/2 \cos 2t + 1/8 \cos 2t \sin 4t + 1/8 \sin 2t\,(1-\cos 4t)$$

$$= 1/2 \cos 2t + 1/4 \cos 2t \sin 2t \cos 2t + 1/4 \sin 2t \sin 4t$$

$$= 1/2 \cos 2t + 1/4 \sin 2t\,(\cos^2 2t + \sin^2 2t)$$

Maka :

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} = \underline{\underline{1/2 \cos 2t + 1/4 \sin 2t}}$$

METODA PENYELESAIAN INVERS TRANFORMASI LAPLACE

Secara sepintas lalu kelihatan mudah untuk menetukan harga dari invers transformasi laplace karena hanya dibutuhkan pemikiran untuk memperlihatkan fungsi f(s) dan transformasinya kembali dimana hal tersebut dapat dilihat dalam tabel invers tranformasi Laplace.

Tetapi bukanlah semudah seperti dianggap dan juga tak sulit yang dipikirkan. Karena tidaklah selalu ada hasil invers transformasi Laplace pada tabel yang sudah tersusun sedemikian rupa melainkan kadang kala harus melalui berbagai proses hingga hasilnya dapat dilihat pada tabel invers transvormasi Laplace.

Maka dengan pemikiran tersebut di bawah ini disajikan dua buah metoda penyelesaian invers transformasi Laplace.

(1). Metode Pecahan Bagian

Suatu fungsi rasional $\frac{P(s)}{Q(s)}$ di mana P(s) dan Q(s) polyinomial polynomial dengan derajat polynomial P(s) selalu

lebih kecil dari derajat polonomial Q(s).

Fungsi rasional $\frac{P(s)}{Q(s)}$ tersebut dapat dirobah dalam bentuk perjumlahan. Maka hal ini yang disebut dengan "pecahan bagian pecahan bagian ini mempunyai bentuk :

$$\frac{A}{(as + b)^{r}} \quad ; \quad \frac{As + B}{(as^2 + bs + c)}.$$

dimana r = 1,2, ...

contoh:

(1) $\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{[illegible]}{(3s - 4)(2s + 1)^{3}}$

$$= \frac{A}{(3s - 4)} + \frac{A}{(2s + 1)^3} + \frac{A}{(2s + 1)^3} + \frac{A}{(2s + 1)}$$

(2) $$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{3s^2 - 4s + 2}{(s^2 + 2s + 4)^2 (s - 5)}$$

$$= \frac{As + B}{(s^2 + 2s + 4)^2} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 2s + 4)} + \frac{E}{(s - 5)}$$

Jadi untuk menentukan harga invers transformasi Laplace dar fungsi rasional $\frac{P(s)}{Q(s)}$ adalah sama untuk menentukan invers transformasi Laplace dari tiap-tiap pecahan bagian mana konstanta- konstanta A, B, C, ... dapat dicari harga-harganya.

Contoh:

(1) Tentukan : $L^{-1}\left\{\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}\right\}$

Solusinya :

$$L^{-1}\left\{\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3s + 7}{(s + 1)(s - 3)}\right\}$$

$$\frac{3s + 7}{(s + 1)(s - 3)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s - 3}$$

$$3s + 7 = A(s + 3) + B(s + 1)$$

$$= (A + B)s - 3A + B$$

$$A + B = 3$$

$$-3A + B = 7$$

Didapat harga-harganya : A = -1 ; B = 4

Maka :

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\} + 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = -e^{-t} + 4e^{3t}$$

Metoda lain :

Tentukan : $L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

Solusinya :

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s+1)(s-3)}\right\}$$

$$\frac{3s+7}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} \quad \text{..............(17)}$$

Persamaan (16) digandakan dengan (s + 1), misal s ⟶ -1

$$\lim_{s\to -1} \frac{3s+7}{(s-3)} = A + \lim_{s\to -1} \frac{B(s+\ )}{(s-3)}$$

$$A = \lim_{s\to -1} \frac{3s+7}{s-3}$$

$$A = -1$$

Persamaan (16) digandakan dengan (s - 3): misal s - 3

$$\lim_{s\to 3} \frac{3s+7}{(s+1)} = \lim_{s\to 3} \frac{A(s-3)}{s+1} + B$$

$$B = \lim_{s\to 3} \frac{3s+7}{s+1}$$

$$B = 4$$

sehingga : $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{4}{s-3}\right\}$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = 4e^{3t} - e^{-t}$$

Contoh (2) : Tentukan :

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$$

Solusinya :

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$$

$$=\left\{\frac{A}{(s-2)^3} + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)}\right\}$$

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{(s-2)^3}' + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)} \quad \cdots(17$$

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{5s^2-15s-11}{(s-2)^3}$$

$$A = -1/3$$

$$B = \lim_{s \to 2} \frac{5s^2-15s-11}{(s+1)}$$

$$B = -7$$

Untuk menentukan harga-harga C dan D. Subsitusi s = 0 dalam persamaan (17)

$$-11/-8 = -1/3 + 7/8 + C/4 - D/2$$

$$3C - 6D = -10 \quad \text{.................(18)}$$

Subsitusi $s = 1$ dalam persamaan (17)

$$-21/-2 = -1/6 + 7 + C - D$$

$$3C - 3D = - 11 \quad \text{...................(19)}$$

Dari persamaan (18) dan (19) didapat harga :

$$C = 4 \ ; \ D = 1/3$$

Maka :

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^2 - 15s - 11}{(s + 1)(s - 2)^3}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{-1/3}{(s+1)} + \frac{-7}{(s-2)^3} + \frac{A}{(s-2)^2} + \frac{1/3}{(s-2)} \right\}$$

$$= -1/3\ e^{-t} - 7.1/2\ t^2\ e^{2t} + 4\ t\ e^{2t} + 1/3\ e^{2t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^2 - 15s - 11}{(s + 1)(s - 2)^3}\right\} = -1/3\ e^{-t} + e^{2t}\ (1/3 + 4t - 7/2\ t^2\ )$$

Contoh (3)

Tentukan : $L^{-1}\left\{\frac{s - 1}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}\right\}$

$$\frac{s - 1}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{(s + 3)} + \frac{Bs + C}{(s^2 + 2s + 2)} \quad \text{...........(20)}$$

$$A = \lim_{s \to 3} \frac{s-1}{(s^2 + 2s + 2)} = -4/5$$

Subsitusi A = -4/5 ; s = 0 dan s = 1 dalam persamaan (20)

Didapat harga-harga : B = 4/5 : C = 1/5

Sehingga :

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-4/5}{s+3} + \frac{4/5\ s + 1/5}{s^2+2s+2}\right\}$$

$$= -4/5\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{4/5\ s}{(s+1)^2}\right\}$$

$$= -4/5\ e^{-3t} + 4/5\ e^{-t}\cos t - 3/5\ e^{-t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$$

$$= -4/5\ e^{-3t} + 1/5\ e^{-t}\ (4\cos t - 3\sin t)$$

(2) Metode Heaviside's Expansi

Andaikaan P(s) dn Q(s0 polynomial-polynomiaal dimn polynomial P(s) mempunyi order yaang lebih kecil dari order dari polynimial Q(s)

$$\text{Maka : } L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \frac{P(a_k)\ e^{a_k t}}{Q'(a_k)}$$

Bukti :

Q(s) polynomil ber-order n dengn faktor-faktornya :

$(s - a_1)\ (s - a_2)$ ....$(s - a_n)$

B A B III

PEMAKAIAN TRANSFORMASI LAPLACE

1. PEMAKAIAN PADA PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDER SATU DAN DUA

Transformasi Laplace dapat dipergunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan differensial apabila harga awal dari persamaan differensial itu ditentukan. Pada bab ini penulis membatasi penggunaan transformasi Laplace dalam persamaan differensial hanya dalam persamaan differensial biasa (ordinary differential equation).

Contoh (1)

Ditentukan : Persamaan differensial order satu :

$$\frac{dy}{dx} + 3Y = t \; ; \; Y(0) = 3$$

Ditanyakan : Selesaikan dengan transformasi Laplace.

Solusinya : $\frac{dy}{dx} + 3Y = t \; ; \; Y(0) = 3$

$$Y' + 3Y = t$$

$$L\{Y'\} + 3L\{Y\} = L\{t\}$$

$$sy - 3 + 3y = \frac{1}{s^2}$$

$$(s + 3)y = \frac{1}{s^2} + 3$$

$$y = \frac{1}{s^2(s+3)} + \left[\frac{3}{s + 3}\right]$$

$$L^{-1}(y) = Y = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 \; (s + 3)} \right\} + 3L^{-1}\left\{ \frac{1}{s + 3} \right\}$$

untuk $L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 \; (s + 3)} \right\}$

Menurut sifat h (invers transformasi Laplace);

$$L^{-1}\left\{ \frac{F \; (t)}{s} \right\} = \int_0^t F(u) \; du$$

didapat :

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s(s+3)} \right\} = \int_0^t e^{-3u} \; du$$

$$= \frac{1}{3} \; (e^{-3t} - 1)$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 \; (s + 3)} \right\} = \int_0^t - \frac{1}{3} \; (e^{-3u} - 1) \; du$$

$$= \frac{1}{3} \; (e^{-3t} - 1) + \frac{1}{3}t$$

untuk $3L^{-1}\left\{ \frac{1}{s + 3} \right\} = 3 \; e^{-3t}$

maka :

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 \; (s + 3)} \right\} + 3L^{-1}\left\{ \frac{1}{s + 3} \right\} = \frac{1}{9} \; (e^{-3t} - 1) + \frac{1}{3} \; t \; 3e^{-3t}$$

$$Y = \frac{1}{9} \; (28 \; e^{-3t} + 3t - 1)$$

Contoh (2)

Ditentukan : Persamaan differensial order dua ;

$$Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t} \sin t \; ; \; Y(0) = 0 \; , \; Y'(0) = 1$$

Ditanyakan : Selesaikan dengan transformasi Laplace.

Solusinya :

$$Y'' + Y' + 5Y = e^{-t} \sin t; \; Y(0) = 0, \; Y'(0) = 1$$

$$L\{Y\} + 2L\{Y'\} + 5L\{Y\} = L\left\{ e^{-t} \sin t \right\}$$

$$s^2 y - s\,Y(0) - Y'(0) + 2sy - 2Y(0) + 5y = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

Substitusi harga :

$$Y(0) = 0; \; Y'(0) = 1 \longrightarrow s\,y^2 \; 1 + 2\,sy + 5y = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$(s^2 + 2s + 5)\,y = \frac{1}{s^2+2s+2} + 1$$

$$= \frac{s^2+2s+3}{s^2+2s+2}$$

$$y = \frac{s^2 + 2S + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$L^{-1}\{y\} = Y\,L^{-1}\left\{ \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} \right\}$$

Menurut metoda pedahan bagian:

$$\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{As + B}{(s^2 + 2s + 2)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 2s + 5)}$$

$$(As + B)(s^+ + 2s + 5) + (Cs + D)(s^2 + 2s + 2) = s^2 + 2s + 3$$

$$(A + C)s^3 + (sA + B + 2C + D) + (5A + 2B + 2C + 2D)s + 5B + 2D$$

$$= s^2 + 2s + 3$$

$$\left.\begin{array}{lr} A + C & = 0 \\ 2A + B + 2C + D & = 0 \\ 5A + 2B + 2C + 2D & = 2 \\ 5B + 2D & = 3 \end{array}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Dari persamaan (22) didapat harga-harga :

$A = 0$; $B = 1//3$; $C = 0$; $D = 2/3$

Jadi : $L^{-1}\left\{ \dfrac{s \quad + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} \right\} =$

$$L^{-1}\left\{ \frac{1/3}{(s^2 + 2s + 2)} + \frac{2/3}{(s^2 + 2s + 5)} \right\}$$

$$L^{-1}\{y\} = Y = \frac{1}{3} L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+1)^2+1} \right\} + \frac{2}{3} L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+1)^2+4} \right\}$$

$$Y = \frac{1}{3} e^{-t} \sin t + \frac{1}{3} e^{-t} \sin 2t$$

$$Y = \frac{1}{3} e^{-t} (\sin t + \sin 2t)$$

Contoh (3) :

Ditentukan persamaan differensial order dua :

$$Y'' = 3Y' + 2Y = 4e^{3t} \; ; \; Y(0) = -3, \; Y'(0) = 5$$

Ditanyakan : Selesaikan dengan tranformasi Laplace

Solusinya :

$$Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{3t} \; ; \; Y(0) = -3, \; Y'(0) = 5$$

$$L \{Y''\} - 3L\{Y'\} + 2L \{Y\} = 4L \left\{ e^{3t} \right\}$$

$$s^2 y - s\, Y(0) - Y'(0) - 3\, sy + 3Y(0) + 2Y = 4 \frac{1}{s-3}$$

Subsitusi harga :

$$Y(0) = -3; \; Y'(0) = 5 \longrightarrow s^2 y + 3s - 5 - 3sy - 9 + 2y = \frac{1}{s-3}$$

$$(s^2 - 3s + 2) \, y = \frac{4}{s-3} + 14 - 3s$$

$$y = \frac{4}{(s-3)\,(s^2-3s+2)} + \frac{14 - 3s}{(s^2 - 3s + 2)}$$

$$y = \frac{4(s^2-3s+2) + (14-3s)\,(s-3)\,(s^2-3s+2)}{(s-3)\,(s^2-3s+2)\,(s^2-3s+2)}$$

$$= \frac{4 - 3s^2 + 23s - 42}{(s-3)\,(s^2-3s+2)}$$

$$= \frac{-3s^2+23s-38}{(s-3)(s-2)(s-1)}$$

$$L^{-1}\{y\} = Y = L^{-1}\left\{\frac{-3s^2 + 23s - 38}{(s-3)(s-2)(s-1)}\right\}$$

Menurut metoda Heaviside's Expansi

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}$$

$$P(s) = -3s^2 + 23s - 38$$

$$Q(s) = s^3 - 6s^2 + 11s - 6 \longrightarrow Q'(s) = 3s^2 - 12s + 11$$

dimana $a_1 = 3$; $a_2 = 2$; $a_3 = 1$

Maka :

$$L^{-1}\left\{\frac{-3s^2 + 23s - 38}{(s-3)(s-2)(s-1)}\right\} = \frac{4}{3} e^{3t} + \frac{-4}{-1} e^{2t} + \frac{12}{2} e^{t}$$

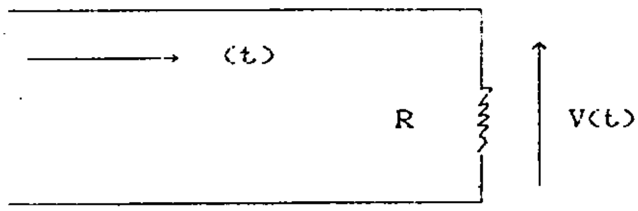
$$\underline{\underline{Y = 2e^{3t} + 4e^{2t} + 6e^{t}}}$$

2. PEMAKAIAN DALAM RANGKAIAN LISTRIK

Pada bidang listrik maka transformasi Laplace dapat dipergunakan untuk menyelesaikan masalah yang terdapat dalam rangkaian listrik. Sebelumnya akan dibentangkan dahulu mengenai beberapa yang menyangkut tentang rangkaian listrik, serta hukum Kirchoff yang merupakan dasar untuk penyelesaian rangkaian listrik.

(a) Resistor.

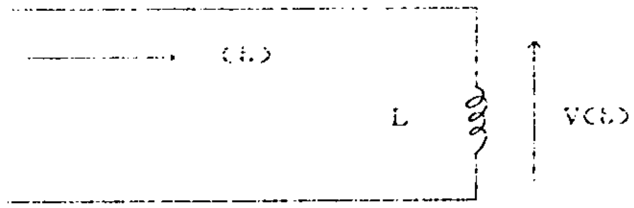
Resistor disimbolkan seperti pada gambar (3) . Jika air mengalir selama waktu t dalam resistor, maka akan terdapat tegangan jatuh V(t0 = Ri(t), dimana R disebut resistant (i=tahanan) dengan satuan ohm ( )



Gambar 3.

(b) Inductor.

Inductor disimbolkan seperti pada gambar (4). Jika arus i mengalir selama waktu t dalam inductor maka terdapat tegangan jatuh V(t) = L (di/dt). Dimana L disebut inductance dengan satuan henry (H).



Gambar 4.

(c) Capasitor

Capasitor disimbolkan seperti pada gambar 5. Jika arus mengalir selama waktu t dalam capasitor maka tegangan jatuh

$$V(t) = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

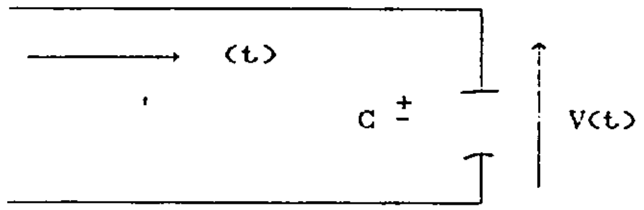
dimana $C = \frac{Q}{V}$

C - capasitance (Farad)

Q - muatan (Coulnb)

V - tegangan (Volt)

$1 \mu F = 1$ microfarad $= 10^{-6}$ Farad (F)



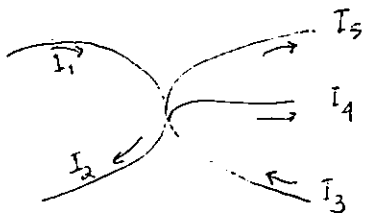
Gambar 5.

Untuk menyelesaikan masalah rangkaian listrik dengan tranformasi Laplace, pertama-tama ditentukan persamaan rangkaiannya lalu dapat dicari penyelesaiannya. Dimana dalam menentukan persamaan rangkaian tersebut selalu berlaku Hukum Kirchoff.

Hukum Kirchoff :

1. Jumlah arus yang masuk pada suatu titik percabangan sama dengan jumlah arus yang keluar dari percabangan tersebut adalah jumlah aljabar dari setiap arus yang bertemu pada suatu titik percabangan adalah sama dengan nol.

Contoh :



Gambar 6

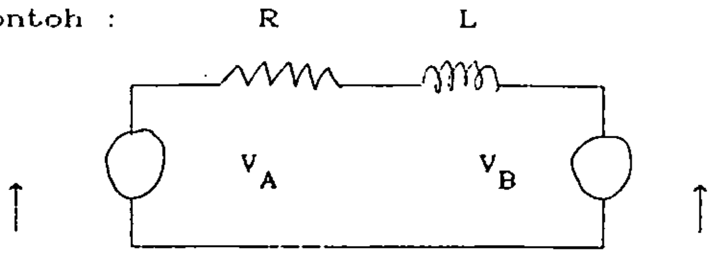
arus masuk = arus keluar

$$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$$

$$i_1 + i_3 - i_2 - i_4 - i_5 = 0$$

2. Jumlah potensial sekeliling rangkaian tertutup sama dengan jumlah tegangan jatuh dalam rangkaian tersebut, atau jumlah aljabar potensial yang berlainan di sekeliling rangkaian tertutup adalah sama dengan nol.

Contoh :



Gambar 7

$$V_A - V_B = Ri + L\ di/dt \quad \text{atau}$$

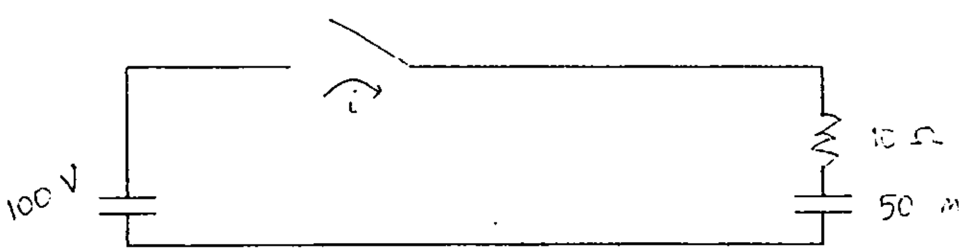
$$V_A - V_B = Ri - L\ di/dt = 0$$

Elemen -elemen rankaian capasitor dan induktor dapat menyimpan elemen-elemen listrik sebelum switch ditutup. Elemen-elemen yang tersimpan ini adalah yang merupakan harga awal dalam menentukan penyelesesaian rangkaian listrik dengan tranformasi Laplace. Sementara harga awal sama dengan nol apabila dalam soal tidak ditentukan berapa banyak elemen-elemen.

Contoh (1)

Diketahui :

Suatu rangkaian listrik mengandung elemen-elemen rangkaian seperti pada gambar 8.



Gambar 8.

Capasitor mempunyai muatan awal :

q_0 = 2500. 10^{-6} coulmb. Pada t = 0 switch ditutup dan suatu sumber tegangan baterai V = 100 volt dimasukkan dalam rangkaian.

Ditanyakan :

Carilah besar arus yang mengalir dengan Tranformasi Laplace.

Solusinya :

Setelah switch ditutup, tegangan jatuh pada R = Ri, tegangan jatuh pada capasitor $\frac{1}{C} \int i \, dt$

Menurut Hukum Kirchoff.

Persamaan rangkaian :

$$Ri + \frac{1}{C} \int i \, dt = V$$

$$10i + \frac{1}{50.10^{-6}} \int i \, dt = 100$$

$$L \{ 10i \} + \frac{1}{50.10^{-6}} \; L \left\{ \int i \, dt \right\} = L \{100\}$$

$$10i(s) \quad \frac{1}{50.10^{-6}} \quad (\frac{I(s)}{s} + \frac{q_0}{s} = \frac{100}{s}$$

$$10I(s) + \frac{1}{50.10^{-6}} + \frac{2500}{50.10^{-6}} \quad \frac{10^{-6}}{s} = \frac{100}{s}$$

$$I(s) \left(\frac{10s + 2.10^4}{s}\right) = \frac{100}{s} - \frac{50}{s}$$

$$I(s) = \frac{50}{10s + 2.10^4}$$

$$= \frac{5}{s + 2.\ 10^3}$$

$$L^{-1}\{I(s)\} = i = L^{-1}\left\{\frac{5}{s + 2.10^3}\right\}$$

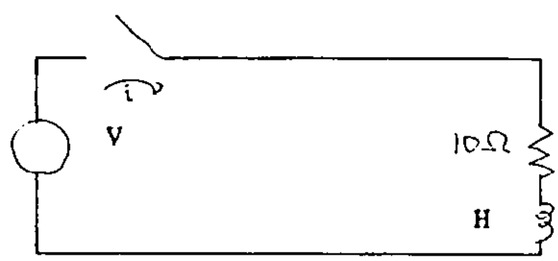
$$= 5e^{-2}.\ 10^3 t$$

Maka besar arus yang mengalir $= 5e^{-2}.10^3\ t$ emp

================

(2) Diketahui : Suatu rangkaian listrik mengandung elemen-elemen rangkaian seperti terlihat pada gambar 9. Sumber tegangan yang dipakai : $V = 50\ e^{-100t}$

Ditanya : Carilah arus yang mengalir dengan Tranformasi Laplace



Gambar 9.

Solusinya :

Setelah swith ditutup tegangan jatuh pada resistor = Ri tegangan jatuh pada inductor = L di/dt

Menurut hukum Kirchoff, persamaan rangkaian :

$$Ri + L\ di/dt = V$$

$$L\ \{Ri\} + L\ \{L\}\ di/dt = L\ \{\ V\ \}$$

$$R\ I\ (s) + L\ s\ I(s) - L\ i(0) = L \left\{ 50\ e^{-100t} \right\}$$

$$10I(s) + 0{,}2\ s\ I\ (s) = \frac{50}{s + 100}$$

$$50\ I(s) + s\ I(s) = \frac{250}{s + 100}$$

$$(50 + s)\ I(s) = \frac{250}{s + 100}$$

$$I(s) = \frac{250}{(s + 100)(s + 50)}$$

$$L^{-1}\{\ I(s)\ \} = i$$

Menurut metoda Heavisde's Expansi :

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}\ e^{a_k t}$$

$$P(s) = 250$$

$$Q(s) = (s + 100)(s + 50) = s^2 + 150s + 5000$$

$$Q'(s) = 2s + 150$$

dimana :

$$a_1 = -100\ ;\ a_2 = -50$$

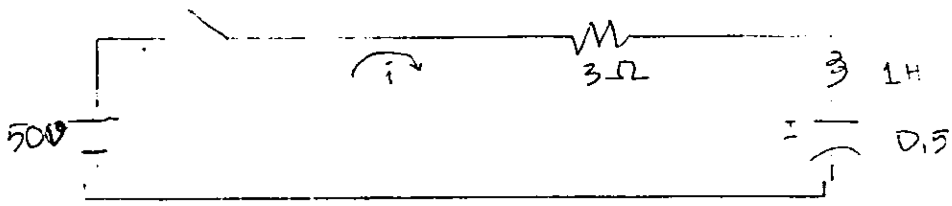
Maka :

$$L^{-1}\left\{\frac{250}{(s + 100)(s + 50)}\right\} = i = \frac{250}{-50}\, e^{-100t} + \frac{250}{50}\, e^{-50t}$$

Besar arus yang mengalir $= 5\,(e^{-50t} - e^{-100})$ amp

=====================

Diketahui : Suatu rangkaian listrik mempunyai elemen-elemen rangkaian seperti terlihat pada gambar 10



Gambar 10.

Ditanyakan : Tentukan besar arus yang mengalir

Solusinya :

Sesudah switch ditutup tegangan jatuh pada resistor = Ri, tegangan jatuh pada indicator = L di/dt, dan tegangan jatuh pada capasitor = $1/c \int i\, dt$

Maka menurut hukum Kirchoff :

$$Ri + \frac{1}{c} \int i\, dt + L\, di/dt$$

$$L\{ Ri\} + \frac{1}{c} \int i\, dt + L\, di/dt + L\left\{ L\, di/dt \right\} = \{ v \}$$

$$R\, I(s) + \frac{1}{s^c} I(s) + \frac{qo}{s^c} + Ls\, I(s) - L\, i(s) = V/s$$

$$3\, I(s) + \frac{1}{0,5s}\, I(s) + s\, I(s) = \frac{50}{s}$$

$$3s\, I(s) + 2\, I(s) + s^2\, I(s) = 50$$

$$(s^2 + 3s + 2)\, I(s) = 50$$

$$I(s) = \frac{50}{(s + 1)(s + 2)}$$

$$L^{-1}\left\{ I(s) \right\} = i = L^{-1}\left\{\frac{50}{(s + 1)(s + 2)}\right\}$$

Menurut metode pecahan bagian :

$$\frac{50}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2}$$

$$A(s + 2) + B(s + 1) = 50$$

$$(A + B) = 0$$

$$2A + B = 50 \quad \text{.....................(23)}$$

Dari persamaan (23) didapat $A = 50$, $B = -50$ maka :

$$i = L^{-1}\left\{\frac{50}{(s + 1)} + \frac{50}{(s + 2)}\right\}$$

Besar arus yang mengalir = $(50\, e^{-t} - 50\, e^{-2t})$ amp

DAFTAR PUSTAKA

1. Pipes, Louis. A & Lawrence R. Harvill. Applied Mathematics for Engineers and Physicists Mc Graw-Hill Book Company. Singapore 1971.

2. Spiegel, Murray. R Fourier Analysis. Schamis Outline Series. Mc Graw-Hill Book Company Singapore 1975

3. Spiegel, Murray. R. Laplace Transforms. Schamis Outline Series. Mc Graw-Hill Book Company. Singapore 1975