M A K A L A H

GEOMETRI ELLIPTIC

Disusun Oleh :

Drs. N U R L I U S

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

1 9 9 5

Disampaikan pada Seminar Mingguan Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Padang pada taggal 18 Agustus 1995.

Geometri Elliptic *)

Drs. Nurlius **)

Geometri Elliptic disebut juga Geometri tanpa kesejajaran karena dalam Geometri ini tidak ada garis-garis yang sejajar. Dengan kata lain teorema-teorema yang berhubungan dengan kesejajaran tidak berlaku dalam Geometri ini.

Kalau dibandingkan dengan Geometri Euclid, maka Geometri Elliptic adalah merupakan Geometri Bidang, namun bidang yang dimaksudkan dalam Geometri Elliptic ini adalah bidang lengkung dari permukaan bola. Bola dalam Geometri Euclid dibicarakan dalam Geometri dimensi tiga.

Garis dalam Geometri Elliptic didefinisikan sebagai Lingkaran Besar bola, yaitu lingkaran yang melalui kulit bola dan berpusat pada pusat bola. Dengan kata lain diameter lingkaran sama dengan diameter bola.

Ada dua model yang digunakan dalam Geometri Elliptik, yaitu :

1. Double Elliptic Geometry.

Pada model ini bidang yang digunakan adalah bidang (kulit) bola seperti pada gambar 1.

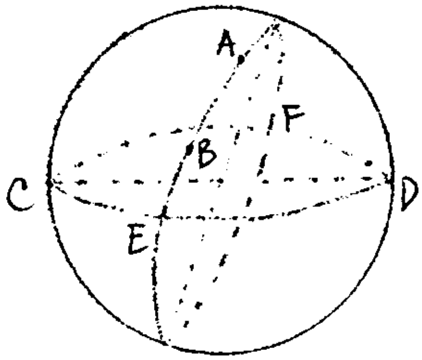
$\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ adalah dua garis yang berpotongan.Dari gambar dapat dilihat bahwa kedua garis itu berpotongan pada

***) Disampaikan pada Seminar Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Padang pada tanggal 18 Agustus 1995.**

****) Dosen Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Padang.**

dua titik yaitu di E dan F namun kedua titik potong ini dianggap satu.

Sedangkan sudut antara dua garis adalah sudut yang dibentuk oleh kedua garissinggung dari garis-garis itu pada titik potongnya.



Gambar 1

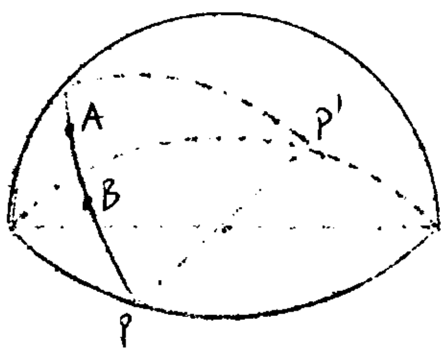
2. Single Elliptic Geometry.

Dalam model ini, bidangnya merupakan bidang (kulit) setengah bola dan garis didefinisikan sebagai setengah lingkaran.

Perhatikan gambar 2.

$\overleftrightarrow{AB}$ adalah garis.

Titik-titik P dan P' disebut Anti podal dari garis $\overleftrightarrow{AB}$.



Gambar 2

Untuk lebih mengenal Geometri Elliptic, di bawah ini diberikan beberapa teorema yang terdapat dalam Geometri Elliptic.

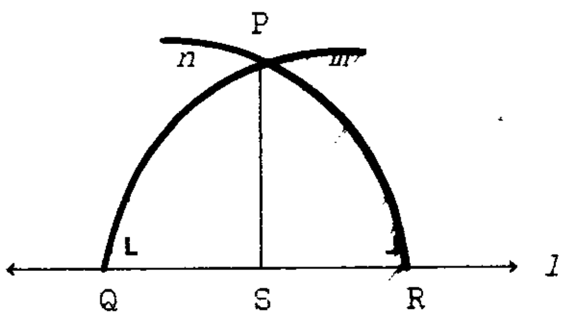
Teorema 1 (Teorema Sifat Polar).

Jika *l* adalah sebarang garis dalam Geometri Elliptic, maka terdapat paling sedikit satu titik P sedemikian

sehingga setiap garis yang melalui P dan memotong l adalah tegak lurus pada l dan P berjarak sama terhadap setiap titik pada l.

Bukti :

Misalkan Q dan R adalah sebarang titik pada l, kemudian buat garis m dan n yang tegak lurus pada l di titik Q dan R (perhatikan gambar 3).



Gambar 3

Dengan postulat karakteristik Elliptic maka garis m dan n akan berpotongan pada suatu titik P.

Dengan demikian maka P, Q dan R adalah tiga titik yang tak segaris yang membentuk sebuah segitiga samakaki, karena $\angle Q \cong \angle R$.

Karena $\overline{QR}$ merupakan segmen garis, maka $\overline{QR}$ pasti mempunyai satu titik tengah, misalkan titik itu S.

Jika P dan S dihubungkan akan terdapat dua segitiga yaitu $\triangle$ PQS dan $\triangle$ PRS, di mana kedua segitiga itu kongruen. Karena $\triangle PQS \cong \triangle PRS$, akibatnya $\overline{PS} \perp \overline{QR}$.

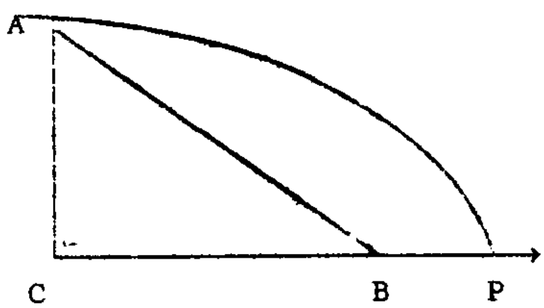
Dengan $\overline{PS} \perp \overline{QR}$, maka dapat dibuktikan bahwa $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$.

Teorema 2.

Dalam sebarang segitiga siku-siku dari Geometri Elliptik besar setiap dua sudut adalah kurang dari, sama atau lebih besar dari sebuah sudut siku-siku tergantung pada apakah sisi berseberangannya mempunyai ukuran kurang, sama atau lebih dari jarak polar.

Bukti :

Misalkan Δ ABC mempunyai sebuah sudut siku-siku di C. Letakkan titik P pada $\overrightarrow{CB}$ sedemikian sehingga CP sama dengan jarak polar (perhatikan gambar 4)



Gambar 4.

Sekarang $\overline{AC}$ mempunyai titik P sebagai titik polar. Dengan demikian $\overline{AP} \perp \overline{AC}$ dan $\angle$ PAC adalah sudut siku-siku. Jika P = B (CB=jarak polar) maka $\angle$ CAB adalah sudut siku-siku.

Jika CB lebih kecil dari jarak polar maka $m\angle$ CAB $< 90^o$ dan jika CB lebih besar dari jarak polar, maka $m\angle$ CAB $> 90^o$.

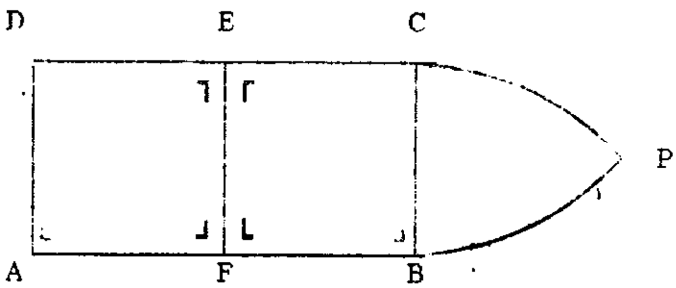
Teorema 3.

Dalam Geometri Elliptic, sudut puncak segiempat Saccheri adalah kongruen dan tumpul.

Bukti :

Misalkan $\square$ ABCD adalah segiempat Saccheri di mana $\angle$ A dan $\angle$ B adalah sudut siku-siku dan $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (gambar 5).

Dal[illegible] Geometri Netral telah



Gambar 5.

dibuktikan bahwa dalam segiempat Saccheri ABCD, $\angle D \cong \angle C$ dan merupakan sudut lancip. Jika E titik tengah $\overline{DC}$ dan F titik tengah $\overline{AB}$ maka $\overline{EF} \perp \overline{DC}$ dan $\overline{EF} \perp \overline{AB}$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa $\angle$ D dan $\angle$ C adalah tumpul.

Menurut sifat garis pada Geometri Elliptic $\overline{EC}$ dan $\overline{FB}$ jika diperpanjang akan berpotongan pada suatu titik P. Dengan demikian maka P adalah titik polar dari $\overline{EF}$ maka EP adalah jarak polar.

Jika BP < FP, menurut **Teorema 3** maka $m\angle$ BCP < 90^o, sedangkan $m\angle$ BCP + $m\angle$ BCD = 180^o (pasangan linear). Dengan demikian maka $m\angle$ BCD > 90^o (tumpul).

Teorema 4 (Akibat dari Teorema 3).

Dalam Geometri Elliptic, sudut ke empat dari segiempat **Lambert** adalah tumpul.

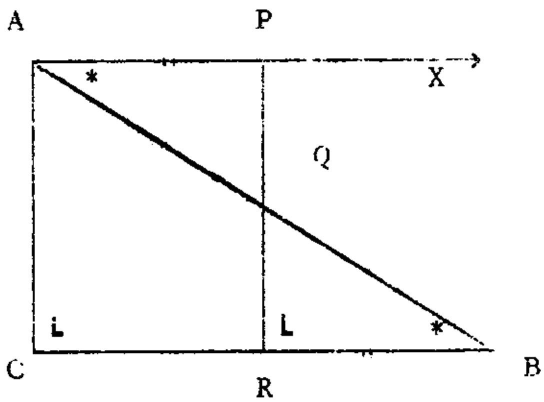
Teorema 5.

Dalam Geometri Elliptic, jumlah besar sudut dalam segitiga siku-siku lebih besar dari 180^o.

Bukti :

Misalkan Δ ABC adalah segitiga siku-siku dengan sudut siku-siku di C. Akan dibuktikan bahwa S(Δ ABC) > 180^o.

Perhatikan gambar 6.



Gambar 6.

Dari Teorema 2, jika AC dan BC masing-masing kurang dari jarak polar, maka $\angle$ A dan $\angle$ B masing-masing lancip.

Sekarang buat $\angle$ BAX $\cong$ $\angle$ ABC.

Ambil titik tengah $\overline{AB}$ yaitu Q.

Buat garis melalui Q dan tegaklurus CB di R.

Buat garis melalui Q dan memotong $\overrightarrow{AX}$ di P sedemikian sehingga $\overline{AP} \cong \overline{BR}$.

Perhatikan Δ QAP dan Δ QBR.

$\overline{AP} \cong \overline{BR}$ ...... (dibuat)

$\angle$ QAP $\cong$ $\angle$ QBR ....(dilukis)

$\overline{QA} \cong \overline{QB}$ ....(karena Q titik tengah $\overline{AB}$).

Dari ketentuan ini maka

Δ QAP $\cong$ Δ QBR (ss sd ss).

Akibatnya $\angle$ APQ siku-siku dan titik-titik P, Q dan R kolinear. Dengan demikian maka $\square$ ACRP adalah segiempat Lambert.

Menurut teorema akibat (teorema 4), maka $\angle$ CAP adalah tumpul yaitu :

$$m\angle\ CAB + m\angle\ BAP > 90^{o}$$

Akibatnya

$$m\angle\ CAB + m\angle\ BAP + m\angle\ ACB > 180^{\circ}$$

atau

$$m\angle\ CAB + m\angle\ ABC + m\angle\ ACB > 180^{\circ}.$$

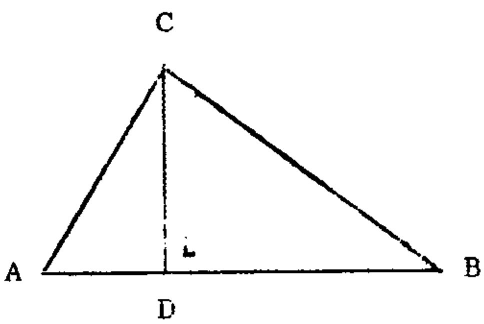
Jadi terbukti bahwa $S(\Delta\ ABC) > 180^{\circ}$.

Teorema 6.

Dalam Geometri Elliptic, jumlah sudut sebarang segitiga adalah lebih besar dari 180°.

Bukti :

Misalkan sebarang Δ ABC dengan $\overline{CD}$ adalah garis tinggi (gambar 7).



Gambar 7.

Perhatikan Δ ADC dan Δ BDC. Kedua segitiga ini adalah segitiga siku-siku.

Menurut teorema 5 maka :

$$m\angle\ A + m\angle\ ADC + m\angle\ ACD > 180^{\circ}$$

$$m\angle\ B + m\angle\ BDC + m\angle\ BCD > 180^{\circ}$$

Jika jumlah sudut dalam Δ ADC dan Δ BDC dijumlahkan, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\begin{array}{l} m\angle\ A + m\angle\ ADC + m\angle\ ACD > 180^{\circ} \\ m\angle\ B + m\angle\ BDC + m\angle\ BCD > 180^{\circ} \\ \hline \end{array} +$$

$$m\angle\ A + \underbrace{m\angle\ ADC + m\angle\ BDC}_{180^{\circ}} + \underbrace{m\angle\ ACD + m\angle\ BCD}_{\angle\ C} + \angle\ B > 360^{\circ}$$

$$m\angle\ A + 180^{\circ} + \angle\ C + \angle\ B > 360^{\circ}$$

Jadi $m\angle\ A + m\angle\ B + m\angle\ C > 180^{\circ}$

Atau dilambangkan dengan $S(\Delta\ ABC) > 180^{\circ}$.

Ada beberapa teorema lagi sebagai berikut :

Teorema 7.

Dalam Geometri Elliptic, jumlah sudut dalam sebarang segiempat convex lebih besar dari 360^{o}.

Teorema 8.

Persegipanjang tidak terdapat dalam Geometri Elliptic.

Teorema 9.

Jika ketiga sudut dari segitiga pertama kongruen dengan ketiga sudut dari segitiga kedua menurut pasangan-pasangannya maka kedua segitiga itu kongruen.

Dalam Geometri Elliptic, satuan luas yang digunakan tidak seperti satuan luas yang digunakan dalam Geometri Euclid. Untuk lebih mengetahui tentang luas dalam Geometri Elliptic, berikut ini diberikan teorema tentang luas.

Teorema 10.

Luas suatu segitiga dalam Geometri Elliptic (misalkan Δ ABC) adalah sama dengan k¡S(Δ ABC) - 180^{o}¿, di mana k adalah suatu konstanta.

DAFTAR PUSTAKA

Moise, Edwin E.(1970). *Elementary Geometry From an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley Publihsing Company. Inc. Bombay.

Prenowitz, Waslter, and M. Jordan. (1969). *Basic Concepts of Geometry*, Ardsley House Publishing Co. New York.

Wylie. C. R. Jr. (1964). *Fondations of Geometry.* McGrow Hill Book Company. New York.

Wallace, Edwin C and West, Stephen F. (1992). *Roads to Geometry*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey.