Laporan Penelitian

WAKTU RATA-RATA KEGAGALAN PADA RELIABILITAS SISTEM SERI DAN PARALEL

Oleh :

Dra. Nonong Amalita, M.Si
Dra.Hj.Minora Longgom Nst

Penelitian ini dibiayai oleh :
Dana DIK/DIKS Universitas Negeri Padang
Tahun Anggaran 2004
Surat Perjanjian Pelaksanaan Penelitian Nomor: 694/J41/KU-RUTIN/2004
Tanggal 12 April 2004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2004

WAKTU RATA-RATA KEGAGALAN PADA RELIABILITAS SISTEM SERI DAN PARALEL

Personalia Peneliti :

Ketua : Dra. Nonong Amalita, M.Si
Anggota : Dra. Hj. Minora Longgom Nst.

LEMBAR IDENTITAS DAN PENGESAHAN

1.	Judul Penelitian	: Waktu Rata-Rata Kegagalan Pada Reliabilitas Sistem Seri Dan Paralel.
2.	a. Ketua Peneliti	
	▪ Nama Lengkap dan Gelar	: Dra. Nonong Amalita. M.Si.
	▪ JenisKelamin	: Perempuan.
	▪ Golongan/Pangkat/NIP	: IIIc/Lektor/132051383
	▪ Jabatan Fungsional	: Lektor.
	▪ Fakultas/Jurusan	: FMIPA / Matematika
	b. Alamat Ketua Peneliti	
	▪ Kantor	: Jurusan Matematika FMIPA UNP Padang
	▪ Rumah	: Perum.Kharismatama Permai H/9 Padang
3.	Jumlah Anggota Peneliti :	
	a. Nama Anggota Peneliti I	: Dra.Hj.Minora Longgom Nst.
	b. Nama Anggota Peneliti II	: --
4.	Lokasi Penelitian	: Jurusan Matematika FMIPA UNP Padang
5.	Kerja sama dengan Institusi Lain	: --
6.	Lama Penelitian	: 6 (enam) bulan
7.	Biaya yang diperlukan	: Rp. 3.000.000,- (Tiga Juta Rupiah)

Mengetahui :
Dekan FMIPA UNP

Drs. Ali Amran, M.Pd, M.A, Ph.D
NIP. 130353264

Ketua Peneliti,

Dra. Nonong Amalita, M.Si
NIP. 132051383

Disetujui oleh :
Ketua Lembaga Penelitian UNP

Prof. Dr.H. Agus Irianto
NIP. 130879791

ABSTRAK

Salah satu tujuan dalam analisis uji hidup adalah menentukan reliabilitas suatu komponen. Di dalam suatu eksperimen komponen-komponen disusun dalam sistem seri dan paralel. Fungsi hazard adalah peluang bersyarat bahwa komponen akan gagal dalam selang waktu, jika diketahui komponen tersebut tetap hidup sampai saat waktu t. Selanjutnya jika komponen-komponen disusun dalam sistem seri dan paralel berdasarkan fungsi hazardnya maka dapat ditentukan waktu rata-rata kegagalan pada kedua sistem ini.

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan waktu rata-rata kegagalan pada reliabilitas sistem seri dan paralel. Adapun metode yang digunakan adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas berlandaskan pada kajian pustaka.

Hasil penelitian ini adalah

1. Waktu rata-rata pada sistem seri.

   a. Fungsi hazard konstan (λ_i)

$$\overset{\approx}{T}(s,k) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

   b. Jika tingkat hazard naik linier $(k_i t)$

$$\overset{\approx}{T}(s,l) = \sqrt{\frac{\pi}{2\sum_{i=1}^{n} k_i}}$$

   c. Jika fungsi hazard model weibull $\left(\frac{1}{\theta_i} t^{\gamma-1}\right)$

$$\overset{\approx}{T}(s,w) = \left[\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right]^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)$$

2. Waktu rata-rata pada sistem paralel

   a. Fungsi hazard konstan (λ_i)

$$\overset{\approx}{T}(p,k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

b. Fungsi hazard naik linier ($k_i t$)

$$\tilde{\tilde{T}}(p,l) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2k_1}} - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(k_i + k_j)}} + \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(k_i + k_j + k_k}} - \dots$$

Fungsi hazard weibull $\left(\frac{1}{\theta_i}t^{\gamma-1}\right)$

$$\tilde{\tilde{T}}(p,w) \quad = \Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)[\sum_{i=1}^{n}\theta_i^{\frac{1}{\gamma}} - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\theta_i + \theta_j)^{\frac{1}{\gamma}} + \dots + (-1)^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right)^{\frac{1}{\gamma}}]$$

PENGANTAR

Kegiatan penelitian mendukung pengembangan ilmu serta terapannya. Dalam hal ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang berusaha mendorong dosen untuk melakukan penelitian sebagai bagian integral dari kegiatan mengajarnya, baik yang secara langsung dibiayai oleh dana Universitas Negeri Padang maupun dana dari sumber lain yang relevan atau bekerja sama dengan instansi terkait.

Sehubungan dengan itu, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang bekerjasama dengan Pimpinan Universitas, telah memfasilitasi peneliti untuk melaksanakan penelitian tentang ***Waktu Rata-Rata Kegagalan pada Reliabilitas Sistem Seri dan Paralel***, berdasarkan Surat Perjanjian Kontrak Nomor : 694/J41/KU/Rutin/2004 Tanggal 12 April 2004.

Kami menyambut gembira usaha yang dilakukan peneliti untuk menjawab berbagai permasalahan pembangunan, khususnya yang berkaitan dengan permasalahan penelitian tersebut di atas. Dengan selesainya penelitian ini, maka Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang akan dapat memberikan informasi yang dapat dipakai sebagai bagian upaya penting dan kompleks dalam peningkatan mutu pendidikan pada umumnya. Di samping itu, hasil penelitian ini juga diharapkan sebagai bahan masukan bagi instansi terkait dalam rangka penyusunan kebijakan pembangunan.

Hasil penelitian ini telah ditelaah oleh tim pembahas usul dan laporan penelitian Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang. Kemudian untuk tujuan diseminasi, hasil penelitian ini telah diseminarkan yang melibatkan dosen/tenaga peneliti Universitas Negeri Padang sesuai dengan fakultas peneliti. Mudah-mudahan penelitian ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pada umumnya, dan peningkatan mutu staf akademik Universitas Negeri Padang.

Pada kesempatan ini kami ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang membantu terlaksananya penelitian ini, terutama kepada pimpinan lembaga terkait yang menjadi objek penelitian, responden yang menjadi sampel penelitian, tim pembahas Lembaga Penelitian dan dosen-dosen pada setiap fakultas di lingkungan Universitas Negeri Padang yang ikut membahas dalam seminar hasil penelitian. Secara khusus kami menyampaikan terima kasih kepada Rektor Universitas Negeri Padang yang telah berkenan memberi bantuan pendanaan bagi penelitian ini. Kami yakin tanpa dedikasi dan kerjasama yang terjalin selama ini, penelitian ini tidak akan dapat diselesaikan sebagaimana yang diharapkan dan semoga kerjasama yang baik ini akan menjadi lebih baik lagi di masa yang akan datang.

Terima kasih.

Padang, Desember 2004
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang,

Prof. Dr. H. Agus Irianto
NIP. 130879791

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Analisis uji hidup merupakan salah satu analisis statistika. Analisis data uji hidup berguna dalam melakukan pengujian tentang daya tahan atau realibilitas suatu komponen. Menurut Elsayed (1996: 4) "Reliabilitas komponen adalah peluang suatu komponen (produk) yang bekerja untuk periode waktu tertentu tanpa kegagalan (kerusakan)." Dengan kata lain reliabilitas komponen itu membandingkan jumlah komponen yang bertahan hidup dengan jumlah total komponen.

Menurut Zanzawi, S (1995: 1) tujuan diadakannnya uji hidup adalah:

1. Untuk mengidentifikasi model statistika yang sesuai bagi distribusi tahan hidup atau proses kegagalan, yaitu proses yang mengakibatkan tidak berfungsinya unit dengan wajar.
2. Untuk menduga parameter-parameter yang tidak diketahui dari model distribusi dan dapat juga dilakukan suatu hipotesis.
3. Untuk menghitung batas konfidensi reliabilitas dari komponen tahan hidup.

Selain reliabilitas suatu komponen di dalam analisia uji hidup dikenal juga dengan fungsi hazard. Fungsi hazard atau tingkat hazard adalah peluang bersyarat bahwa komponen akan gagal pada interval $[t,t+\Delta t]$, Jika diketahui komponen tersebut tetap hidup sampai saat t. Dengan demikian fungsi hazard merupakan fungsi waktu.

Di dalam suatu eksperimen kmponen-komponen dapat disusun dalam bentuk sistem seri dan sisem paralel (Lee.J.Bain, 1978:113) Pada sistem seri, sistem ini akan berfungsi jika dan hanya jika semua komponennya masih berfungsi, sedangkan pada sistem paralel, sistem ini akan berfungsi jika salah satu komponennya masih berfungsi.

Selanjutnya jika komponen komponen disusun secara seri atau paralel maka dapat ditentukan peluang komponen-komponen bekerja selama waktu tertentu, dengan kata lain ini adalah menentukan reliabilitas dari masing-masing sistem ini. Selain itu diperlukan suatu ukuran dalam reliabilitas yaitu waktu rata-rata kegagalan pada kedua sistem ini. Menurut Elsayed (1996: 159) Salah satu ukuran yang penting dari reliabilitas adalah waktu rata-rata kegagalan, yang merupakan nilai ekspestasi atau nilai rata-rata E[T] dari waktu kegagalan T. Waktu rata-rata kegagalan untuk n komponen yang disusun seri dan paralel tergantung fungsi hazard dari masing-masing komponen.

Berdasarkan uraian di atas maka penulis tertarik menulis tentang waktu rata-rata kegagalan pada reliabilitas sistem seri dan paralel.

B. Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimanakah menentukan waktu rata-rata kegagalan pada reliabilitas sistem seri dan paralel ?

C. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan permasalahan yang akan dibahas maka tujuan penelitian ini adalah untuk :

1. Menentukan waktu rata-rata kegagalan pada reliabilitas sistem seri .
2. Menentukan waktu rata rata kegagalan pada reliabilitas sistem paralel.

D. Pertanyaan Penelitian

Adapun pertanyaan penelitian adalah

1. Bagaimana menentukan waktu rata-rata dengan tingkat hazard konstan, naik linier dan weibull pada reliabilitas sistem seri ?
2. Bagaimana menentukan waktu rata-rata dengan tingkat hazard konstan, naik linier dan weibull pada reliabilitas sistem paralel?

BAB II

TINJAUAN KEPUSTAKAAN

Pada bab ini diberikan teori-teori yang akan digunakan untuk mencari waktu rata-rata pada reliabilitas pada sistem seri dan paralel yaitu teori tentang reliabilitas, fungsi hazard, reliabilitas sistem seri dan parelel dan teori waktu rata-rata kegagalan.

A. Reliabilitas

Definisi 1:

Misalkan n_0 adalah jumlah komponen yang akan diuji cobakan dengan interval waktu $(t - \Delta t, t)$, $n_f(t)$ adalah komponen yang gagal dan $n_s(t)$ merupakan komponen survival (bertahan hidup), sehingga

$$[\, n_f(t) + n_s(t) = n_0 \,]$$

Karena reliabilitas didefenisikan sebagai fungsi peluang komulatif yang sukses dalam waktu t sehingga reliabilitas R(t) adalah:

$$R(t) = \frac{n_s(t)}{n_s(t) + n_f(t)} = \frac{n_s(t)}{n_0}$$

(Elsayed, 1986: 5)

Jika T variabel random untuk kegagalan maka fungsi reliabilitas pada waktu t adalah :

$$R(t) = P\,(\,T > t\,)$$

Fungsi distribusi komulatif dari waktu kegagalan F (t) adalah komplemen dari R(t), sehingga

$$R(t) + F(t) = 1$$

$$R.(t) = 1 - F(t) \qquad \text{.............................} \qquad (1)$$

B. Fungsi Hazard

Defenisi 2.

Fungsi hazard h(t) adalah peluang bersyarat dari kegagalan dalam interval waktu $[t, t + \Delta t]$.

Peluang bersayarat bahwa benda akan mati pada interval $[t, t + \Delta t]$, jika diketahui benda tersebut tetap hidup sampai saat t adalah :

$$P[t < T < t + \Delta t] = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

Dengan membagi kuantitas di atas dengan Δt dan mengambil limit untuk

$\Delta t \to 0$,, maka akan diperoleh fungsi hazard h(t) yang didefenisikan sebagai berikut :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t \, R(t)}$$

$$h(t) = \frac{F'(t)}{R(t)}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \qquad \text{...................} \qquad (2)$$

(Zanzawi, 1995: 5)

Jika persamaan (5) diintegralkan maka :

$$\int_0^t h(\zeta)\, d\zeta = \int_0^t \frac{F'(\zeta)}{R(\zeta)}\, d\zeta$$

$$= \int_0^t \frac{F'(\zeta)}{1 - F(\zeta)}\, d\zeta$$

$$= - \ln [\ 1 - F(\zeta)\ ]$$

$$= - \ln [\ 1 - F(t)]$$

$$= - \ln R(t)$$

Serhingga hubungan antara fungsi Reliabilitas dengan fungsi hazard adalah

$$R(t) = \exp [\ - \int_0^t h(\zeta)\, d\zeta\ ] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Beberapa model fungsi hazard :

1. Fungsi Hazard Konstan

Defenisi 3:

Fungsi hazard konstan ditulis sebagai

$$h(t) = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

λ = konstanta

(Elsayed, 1996: 15)

Dari persamaan (2) diperoleh fungsi padat peluang (f.p.p) yaitu

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$f(t) = h(t).R(t)$$

dengan menggunkan persamaan (3) yaitu $R(t) = \exp[-\int_0^t h(\zeta)d\zeta]$, maka

$$f(t) = h(t). \exp[-\int_0^t h(\zeta)d\zeta]$$

$$= \lambda \exp[-\int_0^t \lambda d\zeta]$$

$$f(t) = \lambda \text{ eks}(-\lambda t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

.Teorema 1

Jika fungsi padat peluang $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ maka fungsi komulatif dan fungsi relliabilitas adalah

$F(t) = 1 - \text{eks} -\lambda t$ dan $R(t) = \text{eks} -\lambda t$

Bukti :

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda\zeta} d\zeta$$

$$F(t) = -\int_0^t e^{-\lambda\zeta} d(-\lambda\zeta)$$

$$= -e^{-\lambda\zeta} \Big|$$

$$F(t) = 1 - e^{\lambda t}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh realibilitas adalah

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$R(t) = 1 - (1- e^{-\lambda t})$$

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{.........................} \quad (6)$$

2. Fungsi Hazard naik linier.

Defenisi 4

Fungsi hazard h(t) dengan model linier naik adalah :

$$h(t) = \lambda t \quad \text{.............................} \quad (7)$$

$$\lambda = \text{konstanta}$$

(Elsayed, 1996: 15)

Dari persamaan (2) diperoleh fungsi padat peluang (f.p.p) yaitu

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$f(t) = h(t).R(t)$$

dengan menggunakan persamaan (3) yaitu $R(t) = \exp[-\int_0^t h(\zeta)d\zeta]$, maka

$$f(t) = \lambda t. \exp[-\int_0^t h(\zeta)\, d\zeta]$$

$$= \lambda t. \exp[-\int_0^t \lambda\zeta\, d\zeta]$$

$$= \lambda\, t\, \text{eks}\, [- ½\, \lambda\, \zeta^2]$$

$$= \lambda\, t \text{ eks} [- ½ \lambda\, t^2]$$

$$f(t) \quad = \lambda\, t\, e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} \quad \text{.........................} \quad (8)$$

.Teorema 1

Jika fungsi padat peluang $f(t) = = \lambda\, t\, e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}$ maka fungsi komulatif dan fungsi reliabilitas adalah

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} \text{ dan } R(t) = e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}$$

Bukti :

$$F(t) = \int_0^t \lambda\zeta\, e^{-\frac{\lambda\zeta^2}{2}}\, d\zeta$$

$$= - \int_0^t e^{-\frac{\lambda\zeta^2}{2}}\, d(-\frac{\lambda\zeta^2}{2})$$

$$= - e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh realibilitas R(t) adalah

$$R(t) = e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} \quad \text{.................} \quad (9)$$

3. Fungsi Hazard Model Weibull

Defenisi 5

Fungsi hazard dengan model Weibull adalah

$$h(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \quad \text{.....................} \quad (10)$$

(Elsayed, 1996: 20)

Dari persamaan (2) diperoleh fungsi padat peluang (f.p.p) yaitu

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$f(t) = h(t) .R(t)$$

dengan menggunakan persamaan (3) yaitu $R(t) = \exp[-\int_0^t h(\zeta)d\zeta]$

$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp[-\int_0^t h(\zeta)\, d\zeta]$$

$$= \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp[-\int_0^t \frac{\gamma}{\theta} \zeta^{\gamma-1} d\zeta]$$

$$= \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp -\frac{1}{\theta} \int_0^t d\zeta^{\gamma}$$

$$= \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp[- \frac{1}{\theta} \zeta^{\gamma}$$

$$= \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \exp\left(- \frac{t^{\gamma}}{\theta} \right)$$

$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}} \quad , \quad t > 0 \qquad \text{..........} \qquad (11)$$

.Teorema 1

Jika fungsi padat peluang $f(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}}$, $t > 0$ maka fungsi komulatif dan fungsi reliabilitas adalah

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}} \text{ dan } R(t) = e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}}.$$

Bukti :

$$F(t) = \int_0^t f(\zeta) d\zeta$$

$$= \int_0^t \frac{\gamma}{\theta} \zeta^{\gamma-1} e^{-\frac{\zeta^{\gamma}}{\theta}} d\zeta$$

$$= - \int_0^t d\, e^{\frac{\zeta^{\gamma}}{\theta}}$$

$$= - e^{-\frac{\zeta^{\gamma}}{\theta}}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh realibilitas R(t) adalah

$$R(t) = e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}} \quad \text{.........................} \quad (12)$$

C. Reliabilitas Sistem Seri

Defenisi 6

Misalkan k komponen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ disusun seri. Sistem ini akan berfungsi jika semua komponennya masih berfungsi. Misal s menunjukkan sistem seri, t adalah waktu, k adalah banyaknya komponen dan $R_t(s,k)$ adalah peluang bahwa tak satupun dari k komponen dalam sistem seri yang gagal sebelum waktu t. Jadi reliabilitas dari sistem ini adalah

$$R_t(s,k) = P(x_1 \geq t, x_2 \geq t, \ldots, x_k \geq t)$$

Karena distribusi waktu kegagalan komponen adalah bebas maka :

$$R_t(s,k) = P(x_1 \geq t, x_2 \geq t, \ldots, x_k \geq t)$$

$$= P(x_1 \geq t) . P(x_2 \geq t) \ldots . P(x_k \geq t)$$

$$= R_1(t) \, . \, R_2(t) \, . \, \ldots \, R_k(t)$$

$$R_t(s,k) = \prod P(x_i) = \prod_{i=1}^{k} R_i(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Sinha (1980: 166)

D. Reliabilitas Sistem Paralel

Defenisi 7

Misalkan k komponen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ disusun paralel. Sistem ini akan berfungsi jika salah satu komponennnya masih berfungsi, atau sistem gagal jika tiap komponennya gagal. Misal p menunjukkan sistem paralel, t adalah waktu, k adalah banyaknya komponen dan $R_t(p,k)$ adalah realibilitas dari sistem paralel yang terdiri dari k komponen pada waktu t. Jika $R_t(p,k)$ adalah reliabilitas dari sistem paralel yang terdiri dari sistem paralel yang terdiri dari k komponen pada waktu t, maka:

$$1 - R_t(p,k) = P \text{ (sistem gagal sebelum t)}$$

$$= P(x_1 \leq t, x_2 \leq t, \ldots, x_k \leq t)$$

Karena distribusi waktu kegagalan komponen adalah bebas maka :

$$1 - R_t(p,k) = P(x_1 \leq t, x_2 \leq t, \ldots, x_k \leq t)$$

$$= (1 - R_1(t)).(1 - R_2(t)) \, .. \, (1 - R_k(t))$$

$$= \prod_{i=1}^{k} (1 - R_i(t))$$

$$R_t(p,k) = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1-R_i(t)) \quad \text{.............................} \quad (14)$$

Sinha (1980: 167)

E. Waktu rata-rata kegagalan.

Salah satu ukuran dari sistem reliabilitas adalah menentukan waktu rata-rata kegagalan dari suatu produk. Misalkan waktu kegagalan dari n objek adalah t_1 , t_2 , t_3, ..., t_n dengan t_i adalah peubah acak. Rata-rata waktu kegagalan adalah

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

Jika f(t) adalah fungsi padat peluang dari T maka nilai harapan dari peubah acak T merupakan waktu rata-rata kegagalan, selanjutnya dilambangkan dengan $\overset{\approx}{T}$ yaitu

$$\overset{\approx}{T} = \int_0^{\infty} t\, f(t)\, dt \quad \text{..................} \quad (15)$$

Karena $R(t) = 1 - F(t)$

dan $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$

$$= -\frac{dR(t)}{dt} \quad \text{.................................} \quad (16)$$

persamaan (16) disubsitusi ke persamaan (15) diperoleh:

$$\overset{\approx}{T} = -\int_0^{\infty} t \frac{dR(t)}{dt}\, dt$$

$$= - \int_0^{\infty} t \, dR(t)$$

$$= t\,R(t) \Big| + \int_0^{\infty} R(t)\,dt$$

Karena R (∞) = 0 dan R (0) = 1, maka

$$\tilde{\tilde{T}} = \int_0^{\infty} R\,(t)\,dt \quad \text{.......................... ....} \qquad (17)$$

BAB III

TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

A. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan permasalahan yang akan dibahas maka tujuan penelitian ini adalah :

1. Menentukan waktu rata-rata kegagalan pada reliabilitas sistem seri.
2. Menentukan waktu rata-rata kegagalan pada reliabilitas sistem paralel.

B. Manfaat Penelitian

Tulisan ini di harapkan dapat memberikan manfaat kepada pengembangan IPTEK terutama ilmu matematika dalam menjawab persoalan-persoalan yangh muncul pada pengembangan bidang statistika. Dengan adanya tulisan ini diharapkan berguna sebagai langkah awal bagi peneliti lain .

BAB IV

METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan melalui studi literature (Library Research) yaitu dengan mengumpulkan berbagai teori yang relevan dengan masalah penelitian, dari beberapa buku-buku yang menunjang. Selanjutnya dianalisa dan dijabarkan. Selanjutnya disajikan secara benar dan terperinci yaitu berupa jawaban dari permasalahan yang diajukan.

Adapun proses kerjanya adalah sebagai berikut :

1. Meninjau permasalahan yang dihadapi.
2. Mencari teori-teori pendukung yang dapat dijadikan penunjang untuk menjawab permasalahan.
3. Menganalisa dan dijabarkan secara rinci untuk menjawab permasalahan.

BAB V

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Waktu rata-rata kegagalan pada reliabilitas sistem seri

Waktu rata-rata kegagalan untuk sistem seri dengan n komponen dengan masing-masing komponen mempunyai fungsi hazard konstan, naik linier dan model weibull.

1. Sistem seri dengan fungsi hazard konstan

Dengan mensubsitusi persamaan (6) ke persamaan (17) diperoleh waktu rata-rata kegagalan untuk sebuah komponen dengan fungsi hazard konstan adalah

$$\tilde{T}hk = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{..........................} \qquad (18)$$

Misalkan n komponen disusun seri dengan reliabilitas dari setiap komponen pada waktu t = 0 yaitu $R_i(t) = 1$, (i = 1,2,....n). Reliabilitas dari sistem ini pada waktu t adalah peluang semua komponen dapat bertahan hidup dalam waktu t yaitu

$$R_s(t) = \prod P(x_i) = \prod_{i=1}^{k} R_i(t)\ .$$

Jika setiap komponen mempunyai fungsi hazard konstan maka reliabilitas dari komponen i pada waktu t adalah

$$R_i(t) = e^{-\lambda_i t} \qquad \text{.......................................} \qquad (19)$$

Dengan $R_i(t)$ adalah reliabilitas dari komponen i pada waktu t dan λ_i adalah tingkat kegagalan konstan dari komponen i. Dengan mensubsitusi persamaan (19) ke persamaan (13) diperoleh reliabilitas sistem seri dengan fungsi hazard konstan yaitu:

$$R_s(T) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t}$$

$$= e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t} .$$

Selanjutmya jika untuk n komponen yang disusun seri dengan fungsi hazard konstan maka waktu rata-rata kegagalan untuk sistem ini adalah

$$\tilde{\tilde{T}} = \int_0^{\infty} R_i(t)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\Sigma \lambda_i t}\, dt$$

$$\tilde{\tilde{T}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{1} \lambda_i}$$

2. Sistem seri dengan fungsi hazard naik Linier

Jika persamaan (8) disubsitusi ke persamaan (17) maka diperoleh waktu rata-rata kegagalan untuk fungsi hazard naik linier untuk sebuah komponen adalah :

$$\overset{\approx}{T}hl = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).}{2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

Reliabilitas dari sistem ini pada waktu t adalah peluang semua komponen dapat bertahan hidup dalam waktu t yaitu

$$R_s(t) \quad = \prod P(x_i) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \quad \text{...} \quad (20)$$

Jika setiap komponen mempunyai fungsi hazard naik linier maka reliabilitas dari komponen i pada waktu t adalah

$$R_i(t) = e^{-k_i t^2/2}$$

Dengan $R_i(t)$ adalah reliabilitas dari komponen i pada waktu t dan $k_i t$ adalah tingkat kegagalan konstan dari komponen i. Dengan mensubsitusi persamaan (20) ke persamaan (13) diperoleh reliabilitas sistem seri dengan fungsi hazard naik linier yaitu:

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-k_i t^2/2}$$

$$= e^{-\sum_{i=1}^{n} k_i t}.$$

Untuk sistem ini waktu rata-rata kegagalan adalah

$$\tilde{\tilde{T}} = \int_0^{\infty} R_i(t)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\sum k_i t^2/2}\, dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{k_i}{2}}}$$

$$\tilde{\tilde{T}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\sum_{i=1}^{n} k_i}}$$

3. Fungsi Hazard model Weibull

Waktu rata-rata kegagalan dengan fungsi hazard model Weibull untuk sebuah komponen adalah mensubsitusi persamaan (12) ke persamaan (17) diperoleh

$$\tilde{\tilde{T}}hw = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}}\, dt$$

Misal $x = t^{\gamma/\theta}$ maka

$$\tilde{\tilde{T}}_{hw} = \frac{\theta}{\gamma}\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{\theta^{1-\frac{1}{\gamma}}}x^{\frac{1}{\gamma}-1}\,dx$$

$$= \frac{\theta^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma}\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{1}{\gamma}-1}\,dx$$

$$= \theta^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{\gamma}\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= \theta^{\frac{1}{\gamma}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)$$

Reliabilitas dari sistem ini pada waktu t adalah peluang semua komponen dapat bertahan hidup dalam waktu t yaitu

$$Rs(t) = \prod P(x_i) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \;.$$

Jika setiap komponen mempunyai fungsi hazard model Weibull maka reliabilitas dari komponen i pada waktu t adalah

$$R_i(t) = \text{eks}\left[-\frac{t^{\gamma_i}}{\theta_i}\right] \quad \text{...} \quad (21)$$

Dengan $R_i(t)$ adalah reliabilitas dari komponen i pada waktu t. Dengan mensubsitusi persamaan (21) ke persamaan (13) diperoleh reliabilitas sistem seri n komponen yang masing-masing komponen mempunyai fungsi hazard model Weibull yaitu

$$R_s(T) = \text{eks} - \sum_{i=1}^{n} \frac{t^{\gamma_i}}{\theta_i}$$

Jika n komponen dalam sistem seri dengan masing-masing mempunyai tingkat hazard model Weibull maka waktu rata-rata kegagalan adalah

$$\tilde{\tilde{T}}(s,w) = \int_0^\infty R_S(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{t^{\gamma_i}}{\theta_i}} dt$$

$$\tilde{\tilde{T}}(s,w) = \left[\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right]^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$$

C. Waktu Rata-Rata pada Reliabilitas Sistem Paralel

Reliabilitas dari n komponen yang disusun paralel adalah

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t))$$

A. Fungsi Hazard Konstan

Jika sebuah sistem disusun paralel dari n komponen yang independen dan tingkat kegagalan λ_i dengan fungsi hazard masing-masing komponen maka reliabilitasnya adalah

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i t}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Selanjutnya untuk waktu rata-rata kegagalan dari sistem ini adalah

$$\overset{\approx}{T}(p,k) = \int_0^\infty R_p(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} e^{-(\lambda_i + \lambda_j)t} \ldots \right] dt$$

$$\overset{\approx}{T}(p,k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Jika semua komponen identik dan setiap komponen mempunyai tingkat kegagalan λ maka

$$R_p(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda})^n$$

Waktu rata-rata kegagalannnya adalah

$$\overset{\approx}{T}(p,k) = \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right]$$

B. Fungsi Hazard Naik Linier

Jika sebuah sistem disusun paralel dari n komponen yang independen dan masing-masing komponen mempunyai fungsi hazard naik linier maka reliabilitasnya adalah

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-k_i t^2/2}) \quad \text{.............................} \quad (23)$$

Selanjutnya untuk waktu rata-rata kegagalan dari sistem ini adalah

$$\overset{\approx}{T}(p,l) = \int_0^\infty R_p(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty (1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - e^{-k_i t^2/2})\,dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{n} e^{-1/2 k_i t^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1} e^{-1/2(k_i+k_j)t^2} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} e^{-1/2(k_i+k_j)t^2} + \dots \right] dt$$

$$\overset{\approx}{T}(p,l) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{2k_1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(k_i+k_j)}} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(k_i+k_j+k_k}} - \dots$$

Jika semua komponen identik dan mempunyai fungsi hazard kt maka :

$$\overset{\approx}{T}(p,l) = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \left[n - \binom{n}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + \binom{n}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - \binom{n}{4}\sqrt{\frac{1}{4} + \dots} \right]$$

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada bab sebelumnya didapat kesimpulan sebagai berikut :

1. Waktu rata-rata kegagalan untuk sistem seri

   a. Fungsi hazard konstan (λ_i)

$$\overset{\approx}{T}(s,k) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

   b. Jika tingkat hazard naik linier $(k_i t)$

$$\overset{\approx}{T}(s,l) = \sqrt{\frac{\pi}{2\sum_{i=1}^{n} k_i}}$$

   c. Jika fungsi hazard model weibull $(\frac{1}{\theta_i} t^{\gamma-1})$

$$\overset{\approx}{T}(s,w) = \left[\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right]^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$$

2. Waktu rata-rata untuk sistem paralel

   a. Fungsi hazard konstan (λ_i)

$$\tilde{T}(p,k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}+\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$$

b. Fungsi hazard naik linier ($k_i t$)

$$\tilde{T}(p,l)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2k_1}}-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(k_i+k_j)}}+\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(k_i+k_j+k_k}}-\ldots$$

Fungsi hazard weibull $\left(\frac{1}{\theta_i}t^{\gamma-1}\right)$

$$\tilde{T}(p,w)\quad=\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)[\sum_{i=1}^{n}\theta_i^{\frac{1}{\gamma}}-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\theta_i+\theta_j)^{\frac{1}{\gamma}}+\ldots+(-1)^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right)^{\frac{1}{\gamma}}]$$

B. Saran

Adapun saran yang dikemukakan sehubungan dengan tulisan ini adalah agar peneliti lain dapat mengembangkan tulisan ini dengan sistem reliabilitas yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L.J. 1978. ***Statistical Analysis of Reliability And Life-Testing Models. Marcel Dekker.*** New York.

Elsayed A. Elsayed.1996. ***Realiability Engineering***. Addison Wesley Longman, Inc, New York.

Lawless, J.F. 1982. ***Statistical Models and Methods for Lifetime Data***. Jhon Wiley & Sons, Inc. Canada.

Sinha, S. K. 1980. ***Life Testing and Realibility Estimation***. Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Zanzawi, S. 1995. ***Analisa Data Uji Hidup,*** UGM. Yogyakarta.