# HIPERBOLA



OLEH :

**Dra. Nilawasti Z.A.**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA**
**UNIVERSITAS NEGERI PADANG**
**PADANG**
**2000**

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas karunia-Nya penulis telah dapat menyelesaikan buku ini yang berjudul "Hiperbola".

Buku ini disusun dengan maksud untuk memberi sumbangan bagi pembaca dalam rangka memperluas wawasan dan meningkatkan ilmu pengetahuan di bidang matematika yang lebih lanjut. Buku ini disusun berdasarkan diskusi dengan teman sejawat dan pengalaman penulis selama mengajar di jurusan Matematika FMIPA UNP Padang.

Buku ini disajikan sesederhana mungkin agar pembaca dapat dengan mudah mempelajarinya. Buku Hiperbola ini berisikan 5 bab yaitu :

Bab I. Defenisi

Bab II. Sifat-sifat Hiperbola

Bab III. Persamaan-persamaan Hiperbola

Bab IV. Kedudukan garis terhadap Hiperbola

Bab V. Garis-garis singgung pada Hiperbola

Pada kesempatan ini penulis juga ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada teman-teman sejawat, semua pihak yang telah memberikan kritikan-kritikan dan sumbangan fikiran yang berharga baik secara langsung maupun secara tak langsung khususnya kepada Bapak Drs. Djafri Gani dan Bapak Drs. Syamsul Anwar yang telah membaca buku dan memberikan saran-saran demi perbaikan buku ini. Semoga jasa baiknya dibalas oleh Allah SWT, amin.

Akhir kata penulis menyadari bahwa buku ini masih perlu disempurnakan, oleh karena itu saran-saran dan kritik untuk penyempurnaan buku ini di masa yang akan datang sangat penulis harapkan.

Padang, Maret 1999

Penulis

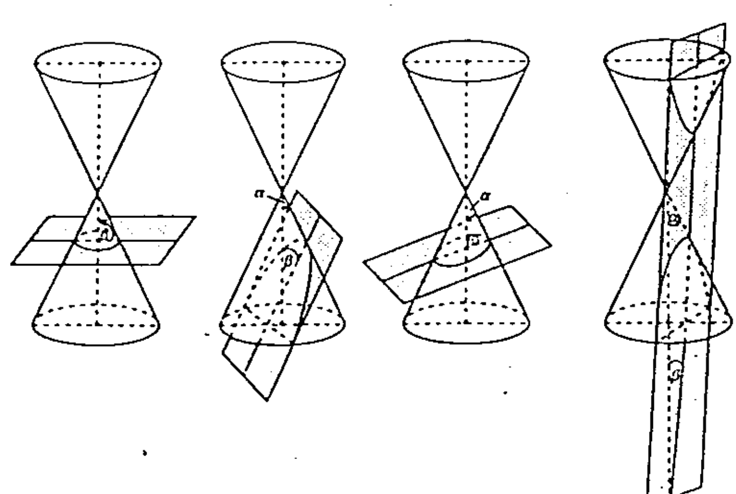
DAFTAR ISI

# IRISAN KERUCUT

Irisan kerucut adalah perpotongan atau irisan antara bidang lengkung kerucut lingkaran tegak dengan bidang datar. Bentuk kurva irisan kerucut itu bermacam-macam, tergantung pada kedudukan bidang datar terhadap sumbu kerucut lingkaran tegak.

Misalkan, setengah sudut puncak kerucut adalah $\alpha$ dan sudut antara bidang datar dengan sumbu kerucut adalah $\beta$ , maka macam -macam kurva irisan kerucut dapat ditetapkan sebagai berikut :

1) Jika $\beta = 90^{\circ}$ atau bidang datar tegak lurus sumbu kerucut, maka kurva irisan kerucut berbentuk lingkaran. (gambar 1-1a)
2) Jika $\alpha = \beta$ , maka kurva irisan kerucut berbentuk parabola. (gambar1-1b)
3) Jika $\alpha < \beta$, maka kurva irisan kerucut berbentuk elips. (gambar1-1c)
4) Jika $\alpha > \beta$, maka kurva irisan kerucut berbentuk hiperbola. (gambar 1-1d)



(a) Lingkaran $\beta = 90^{\circ}$ (b) Parabola $\alpha = \beta$ (c) Elips $\alpha < \beta$ (d) Hiperbola $\alpha > \beta$

Bentuk-bentuk kurva irisan kerucut diatas terjadi apabila bidang datar tidak melalui titik puncak kerucut. Kalau bidang datar melalui titik puncak kerucut maka irisannya dapat berbentuk titik, sebuah garis lurus atau dua buah garis lurus.

Defenisi :

Irisan kerucut yang berbentuk parabola, elips dan hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya ke titik tertentu dengan jaraknya ke garis tertentu mempunyai nilai tetap. (Drs. Sartono Wirodikromo :65)

Titik api (fokus) : titik tertentu dan garis tertentu.

Garis arah : direktriks.

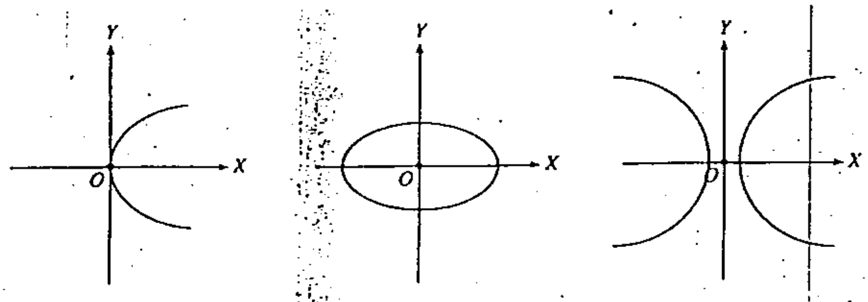
Eksentrisitas(e) : nilai perbandingan tetap.

Nilai eksentrisitas e menentukan macam dari kurva irisan kerucut.

1) Jika $e = 1$, maka irisan kerucut disebut parabola. (gambar 1-2a)

2) Jika $0 < e < 1$, maka irisan kerucut disebut elips. (gambar1-2b)

3) Jika $e > 1$, maka irisan kerucut disebut hiperbola. (gambar1-2c)




(a) Parabola $e = 1$ (b) Elips $0 < e < 1$ (c) Hiperbola $e > 1$

# HIPERBOLA

## I. DEFENISI

Hiperbola adalah himpunan titik-titik dalam sebuah bidang yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu pada bidang itu adalah tetap. (Drs. Sartono Wirodikromo : 161)

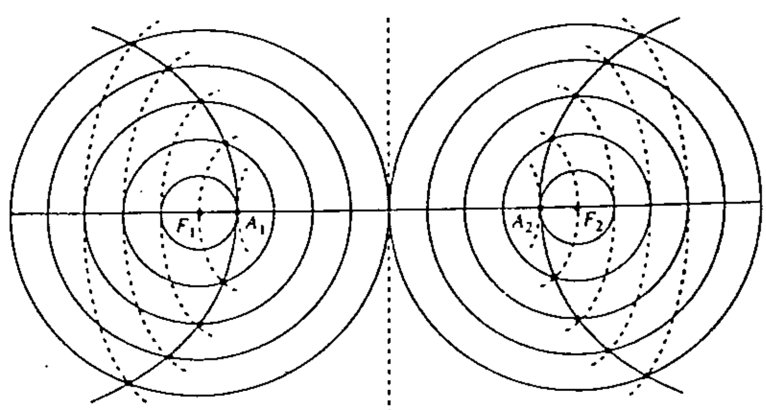
Kedua titik tertentu itu masing-masing disebut fokus atau titik api dari parabola. Misalkan titik-titik $F_1$ dan $F_2$ masing-masing adalah fokus dari sebuah hiperbola dan jarak $F_1F_2$ = 2c. Berdasarkan defenisi hiperbola, titik-titik pada hiperbola yang selisih jaraknya ke $F_1$ dan ke $F_2$ sama dengan 2a (2a tetap dan 2c > 2a > 0) dapat dilukiskan dengan cara berikut.

Buatlah lingkaran yang berpusat di $F_1$ dengan jari-jari $r_1$ ($r_1 \geq$ c-a) dan lingkaran yang berpusat di $F_2$ dengan jari-jari (2a + $r_1$). Lingkaran yang berpusat di $F_2$ ini memotong lingkaran yang berpusat di $F_1$ pada titik-titik yang memenuhi definisi hiperbola. Dengan mengambil nilai $r_1$ yang berbeda-beda maka kita mendapatkan titik lain yang memenuhi definisi hiperbola. Titik-titik pada cabang hiperbola yang lain dapat dilukiskan dengan cara yang sama, hanya saja lingkaran berjari-jari $r_1$ pusatnya di $F_2$ dan lingkaran berjari-jari $r_2$ pusatnya di $F_1$.

Sebagai ilustrasi, pada gambar dibawah ini diperlihatkan cara melukis titik-titik pada hiperbola dengan $F_1F_2$ = 2c = 10 (c = 5) dan selisih jarak yang tetap 2a = 8 (a=4), nilai c - a = 5 - 4 = 1, sehingga r $\geq$ 1. Untuk nilai $r_1$ yang kita pilih, nilai $r_2$ ditentukan melalui hubungan $r_2 = (2a + r_1) = 8 + r_1$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $r_2$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

Berdasarkan tabel di atas, lingkaran yang berpusat di $F_1$ dengan jari -jari $r_1$ ($r_1 = 1,2,\ldots, 5$) dilukiskan dengan garis penuh dan lingkaran yang berpusat di $F_2$ dengan jari-jari $r_2$, ($r_2 = 9,10,\ldots,13$) dilukis dengan garis lengkung terputus-putus. Titik potong antara lingkaran-lingkaran yang berpusat di $F_1$ dan lingkaran-lingkaran yang berpusat di $F_2$ dihubungkan dengan kurva yang mulus sehingga diperoleh tempat kedudukan titik-titik yang bebentuk hiperbola, ( gambar 2.1). Titik-titik pada cabang hiperbola bagian kanan diperoleh dengan cara melukiskan lingkaran-lingkaran yang berjari-jari $r_1$ dengan pusat di $F_2$ dan lingkaran-lingkaran yang berjari-jari $r_2$ dengan pusat $F_1$.



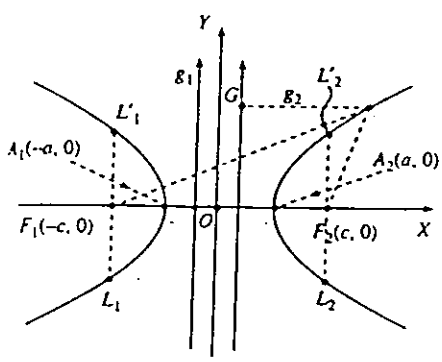
## II. SIFAT-SIFAT HIPERBOLA

1. Perpotongan antara sumbu mayor dengan hiperbola disebut puncak.
2. Ruas garis yang menghubungkan kedua fokus disebut sumbu mayor.
3. Ruas garis yang melalui titik pusat hiperbola dan memotong tegak lurus sumbu mayor disebut sumbu minor
4. Sumbu simetri persamaan hiperbola adalah sumbu x dan sumbu y. Sumbu simetri yang melalui $F_1$ dan $F_2$ disebut sumbu utama atau sumbu nyata.
5. Sumbu simetri yang melalui titik tengah $F_1$ dan $F_2$ serta tegak lurus sumbu mayor disebut sumbu sekawan atau sumbu imajiner.

## III. PERSAMAAN-PERSAMAAN HIPERBOLA

### 1. Persamaan Hiperbola yang Berpusat di O(0,0)

Untuk menentukan persamaan hiperbola yang berpusat di O(0,0), kita pilih sebuah hiperbola dengan sumbu utama berhimpit dengan sumbu x. Fokus di titik $F_1(-c, 0)$ dan $F_2(c, 0)$ serta puncak di titik $A_1(-a, 0)$ dan $A_2(a, 0)$ (dengan $c > a > 0$). Perhatikan gambar berikut ini :




Misalkan titik P(x, y) adalah sembarang titik pada hiperbola.

Berdasarkan defenisi hiperbola , maka berlaku :

$PF_1 - PF_2 =$ 2a (nilai 2a tetap)

Jarak $PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$

$= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Jarak $PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$

$= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Sehingga diperoleh hubungan :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$\Leftrightarrow \quad (x+c)^2+y^2 \quad = \quad 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$, dengan mengkuadratkan kedua ruas persamaan.

$\Leftrightarrow \quad x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$

$\Leftrightarrow \quad 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-4a^2+4xc$

$\Leftrightarrow \quad a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-a^2+xc$

$\Leftrightarrow \quad a^2(x^2-2cx+c^2)+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$ dengan meng kuadratkan kedua ruas persamaan.

$\Leftrightarrow \quad a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$

$\Leftrightarrow \quad (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$ kedua ruas persamaan dibagi dengan $a^2(c^2-a^2)$

Karena c > a, maka $c^2 > a^2$ atau $c^2-a^2=0$, kita tetapkan nilai $c^2-a^2=b^2$.

Sehingga persamaan tersebut menjadi $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ atau $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

Dengan demikian dapat kita simpulkan bahwa persamaan hiperbola yang berpusat di O(0,0) , Fokus di $F_1$ (-c, 0) dan $F_2$(c, 0) dan selisih jaraknya terhadap kedua fokus sama dengan 2a adalah :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ atau } x^2b^2-y^2a^2=a^2b^2$$

dimana hubungan antara a, b dan c ditentukan oleh $b^2 = c^2 - a^2$ atau

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

A. Titik Potong Hiperbola Dengan Sumbu Koordinat

Titik -titik potong hiperbola dengan sumbu-sumbu koordinat dapat ditentukan sebagai berikut:

a. Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika y = 0

$b^2x^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow x^2 = a^2$

$\Leftrightarrow x = \pm a$

Jadi titik potong hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah $A_1(-a,0)$ dan $A_2(a,0)$.

Dalam hal ini titik-titik $A_1(-a, 0)$ dan $A_2(a, 0)$ berfungsi sebagai titik puncak hiperbola. Ruas garis $A_1A_2 = 2a$ merupakan panjang sumbu mayor.

b. Titik potong dengan sumbu y diperoleh jika x = 0

$-a^2y^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow y^2 = -b^2$

Karena $b^2 > 0$ (berarti $-b^2 < 0$) maka $y^2 = -b^2$ tidak mempunyai penyelesaian

Jadi hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tidak berpotongan dengan sumbu y.

Oleh karena hiperbola ini tidak memotong sumbu y, maka sketsa grafiknya terdiri atas dua bagian (disebut cabang), yaitu cabang sebelah kiri sumbu y dan cabang sebelah kanan sumbu y.

Titik $B_1$ (0,-b) dan $B_2$ (0,b) dengan $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ menyatakan titik-titik ujung sumbu minor . Ruas garis $B_1B_2$ = 2b merupakan panjang sumbu minor.

B. Eksentrisitas dan Persamaan Direktriks

Hiperbola dapat didefenisikan dengan memakai sifat fokus dan direktriks sebagai berikut :

> Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya ketitik tertentu dengan jaraknya ke garis tertentu mempunyai nilai yang tetap. (Drs. Sartono Wirodikromo : 164)

Titik tertentu itu disebut fokus hiperbola dan garis tertentu itu disebut direktris hiperbola, nilai perbandingan tetap itu disebut eksentrisitas hiperbola yang nilainya.

Nilai eksentrisitas dari persamaan direktris hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dapat ditentukan dengan cara yang sama dengan nilai eksentrisitas dan persamaan direktriks pada elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ yaitu :

1. nilai eksentrisitas e = $\frac{c}{a}$.

2. persamaan direktriks $g_1 \equiv x = -\frac{a}{e}$ dan $g_2 = x = \frac{a}{e}$

C. Panjang Latus Rectum

Ruas garis potong yang melalui fokus dan tegak lurus sumbu utama di sebut latus rectum ..

Pada gambar 2.1 Latus rectumnya adalah ruas-ruas garis $L_1L_1'$ dan $L_2L_2'$. Panjang latus rectum hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dapat ditentukan sebagai berikut :

untuk y = c didapat

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b}=\frac{c^2}{a^2}-1=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{sebab} \quad c^2-a^2=b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2=\frac{b^4}{a^2} \quad \Rightarrow \quad y=\pm\frac{b^2}{a}$$

Titik-titik ujung latus rectumnya adalah $\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$ dan $\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$.

Panjang latus rectum = jarak titik-titik ujung latus rectum = $2\left(\frac{b^2}{a}\right)=\frac{2b^2}{a}$

Jadi panjang latus rectum hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ adalah

$$L_1L_1' = L_2L_2' = \frac{2b^2}{a}$$

D. Asimtot Hiperbola

Untuk memahami pengertian asimtot hiperbola, persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ kita ubah sebagai berikut :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{a^2}=\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$$

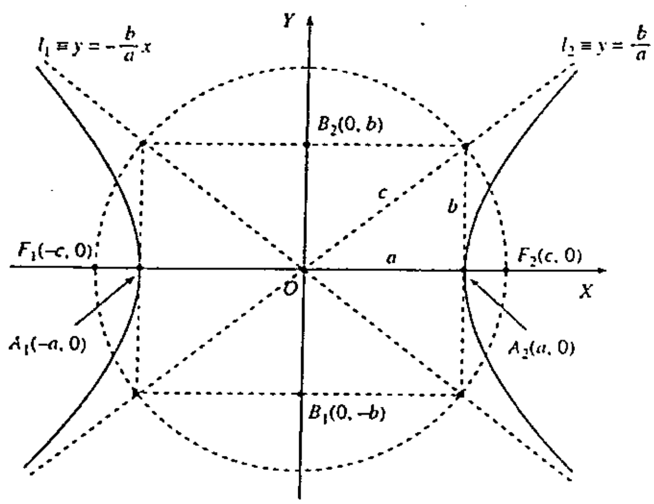
$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}$$

Kalau nilai x mendekati tak berhingga, maka nilai $\frac{a^2}{x^2}$ mendekati nol atau $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ mendekati 1. Dengan demikian y mendekati $\pm\frac{b}{a}$ atau y mendekati $\pm\frac{b}{a}$x. Garis-garis dengan persamaan y = $\pm\frac{b}{a}$x merupakan asimtot bagi grafik hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Jadi, hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ memiliki dua buah asimtot, masing-masing dengan persamaan :

$$y=-\frac{b}{a}x \quad \text{atau} \quad y=\frac{b}{a}x$$

Perlu diingat bahwa asimtot hiperbola bukan bagian dari grafik hiperbola, tapi merupakan garis-garis pertolongan yang dapat dipakai untuk menggambar sketsa grafik dari suatu hiperbola. Asimtot-asimtot ini bertindak sebagai pembatas dari cabang-cabang grafik hiperbola. Perhatikan gambar 2.2 di bawah ini :




Kedua garis asimtot dari suatu hiperbola tegak lurus, maka hiperbola demikian disebut <u>hiperbola ortogonal.</u>

$l_1 \equiv \ y = -\dfrac{b}{a}x$ , gradiennya $m_1 = -\dfrac{b}{a}$

$l_2 \equiv \ y = \dfrac{b}{a}x$ , gradiennya $m_2 = \dfrac{b}{a}$

Jika $l_1$ tegak lurus $l_2$ maka $m_1 \times m_2 = -1$ (syarat bagi dua garis tegak lurus).

$$\left(-\frac{b}{a}\right) \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1 \ \Leftrightarrow \ -\frac{b^2}{a^2} \ \Rightarrow \ a^2 = b^2$$

Jadi persamaan hiperbola ortogonal dengan sumbu utama berimpit dengan sumbu x adalah :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ atau } x^2 - y^2 = a^2$$

Sekarang perhatikan hiperbola pada gambar 2.3 berikut. Hiperbola ini berpusat di O(0,0). Sumbu utama berimpit dengan sumbu y. Fokus di titik-titik $F_1(0, -c)$ dan $F_2(0, c)$ serta puncak di titik $A_1(0, -a)$ dan $A_2(0, a)$. Dengan mudah dapat di tunjukkan bahwa persamaan hiperbola ini adalah :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ atau } b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

dan hubungan $b^2 = c^2 - a^2$ tetap berlaku.

Beberapa hal yang perlu diperhatikan pada hiperbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ adalah

1. hiperbola ini tidak memotong sumbu x.

2. nilai eksentrisitas e = $\frac{c}{a}$.

3. persamaan direktrisnya adalah $g_1 \equiv y = -\frac{a}{e}$ dan $g_2 \equiv y = \frac{a}{e}$

4. persamaan asimtotnya : $L_1 \equiv y = -\frac{b}{a}x$ dan $L_2 \equiv y = \frac{b}{a}x$

Berdasarkan uraian di atas, kita memperoleh dua macam bentuk baku persamaan hiperbola yang berpusat di O(0,0), yaitu :

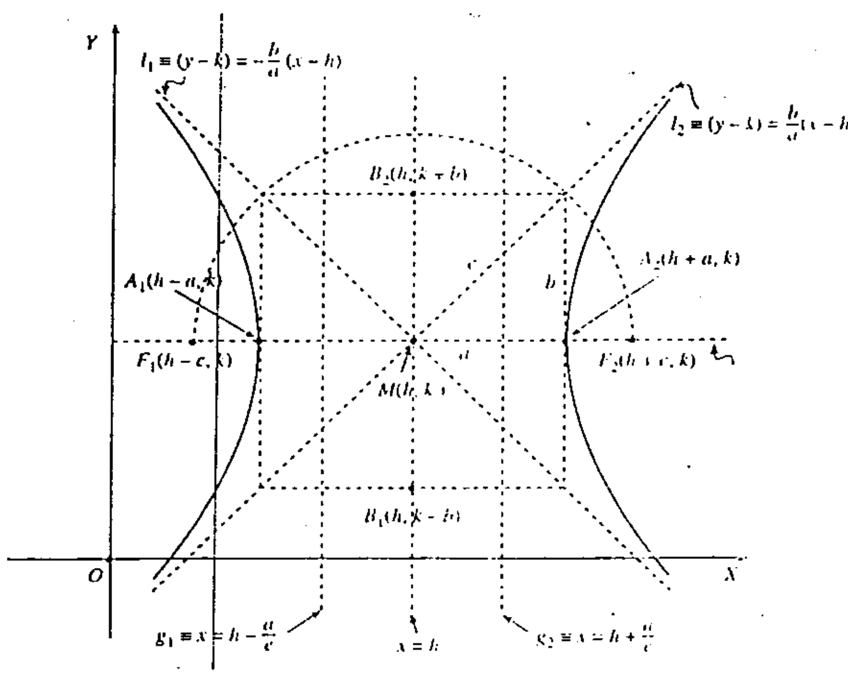
1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan hiperbola horizontal.

2. $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan <u>hiperbola vertikal.</u>

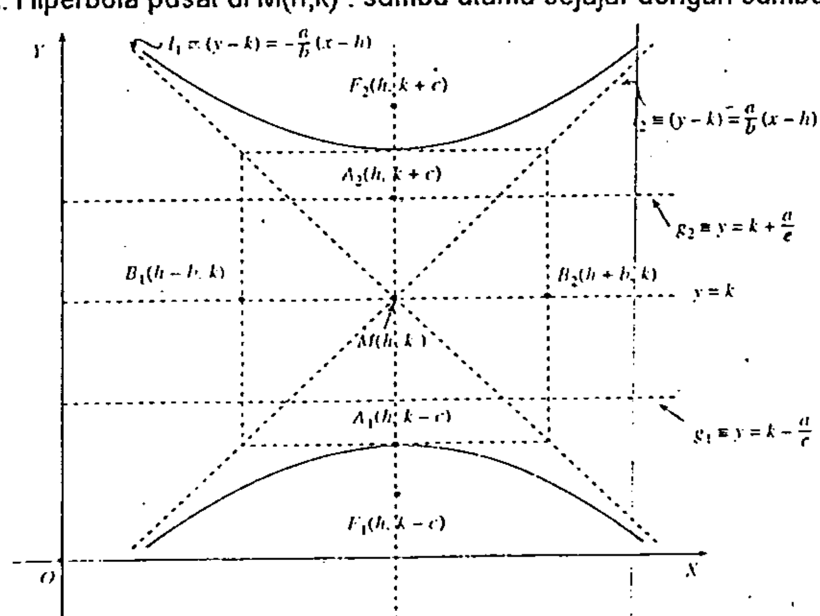
## 2. Persamaan Hiperbola yang Berpusat di M(h, k)

Perhatikan gambar 3.1 yakni sebuah hiperbola dengan pusat (h, k), sumbu mayor sejajar dengan sumbu x, panjang sumbu mayor 2a, dan panjang sumbu minor 2b. Dengan menggunakan defenisi hiperbola, dapat ditunjukkan bahwa persamaan hiperbola adalah:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$




A. Hiperbola pusat di M(h,k) : sumbu utama sejajar dengan sumbu x



Hiperbola di atas mempunyai sifat:

a. Persamaan sumbu utama atau sumbu nyata adalah y = k dan persamaan sumbu sekawan atau sumbu imajiner adalah x = h.

b. Koordinat puncak adalah $A_1$(h-a, k) dan $A_2$(h+a, k). Kordinat titik ujung sumbu minor adalah $B_1$(h, k-b) dan $B_2$(h, k+b).

c. Koordinat fokus di $F_1$(h-c, k) dan $F_2$(h+c, k)

d. Nilai eksentrisitas e = $\frac{c}{a}$

e. Perasamaan direktriks adalah $g_1 \equiv x = h - \frac{a}{e}$ dan $g_2 \equiv x = h + \frac{a}{e}$

f. Persamaan asimtot adalah

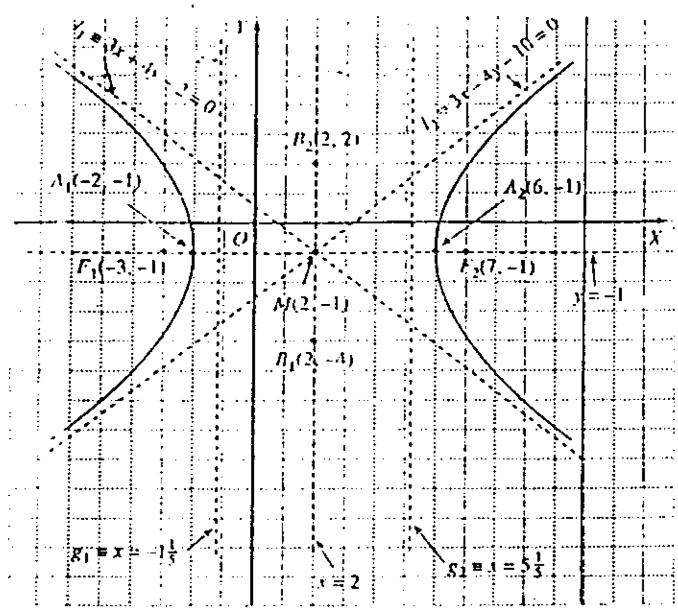
$l_1 \equiv (y-k) = -\frac{b}{a}(x-h)$ dan $l_2 \equiv (y-k) = \frac{b}{a}(x-h)$

g. Panjang latus rectum L = $\frac{2b^2}{a}$

h. Hubungan $b^2 = c^2 - a^2$ tetap berlaku.

B. Hiperbola pusat di M(h, k), Sumbu utama sejajar dengan sumbu y

Perhatikan gambar 3.2 yakni sebuah hiperbola dengan pusat (h, k). Sumbu utama sejajar dengan sumbu y , panjang sumbu mayor 2a, dan panjang sumbu minor 2b. Dengan menggunakan defenisi hiperbola, dapat ditunjukkan bahwa persamaan hiperbola adalah $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$




Hiperbola di atas mempunyai sifat

a. Persamaan sumbu utama atau sumbu nyata adalah x= h, sedangkan persamaan sumbu sekawan atau sumbu imajiner adalah y =k.

b. Koordinat Puncak adalah $A_1$(h, k-a) dan $A_2$(h, k+a), koordinat titik ujung sumbu minor adalah $B_1$(h-b, k) dan $B_2$(h+b, k).

c. Koordinat fokus di $F_1$(h, k-c) dan $F_2$(h, k+c).

d. Nilai eksentrisitas e = $\frac{c}{a}$

e. Persamaan direktriks adalah $g_1 \equiv y = k - \frac{a}{e}$ dan $g_2 \equiv y = k + \frac{a}{e}$

f. Persaman asimtot adalah

$$l_1 \equiv (y-k) = -\frac{a}{b}(x-h) \text{ dan } l_2 \equiv (y-k) = \frac{a}{b}(x-h)$$

g. Panjang latus rectum L= $\frac{2b^2}{a}$

h. Hubungan $b^2 = c^2 - a^2$ tetap berlaku.

**Bentuk Umum Persamaan Hiperbola**

Jika bentuk baku dari suatu persamaan hierbola dijabarkan, maka diperoleh bentuk umum persamaan hiperbola,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2(x^2-2xh+h^2)-a^2(y^2-2yk+k^2)=a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2-a^2y^2-2a^2ky-a^2k^2-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2-a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky-a^2k^2-a^2b^2=0$$

dimana $b^2=A$

$$a^2=B$$

$$-2b^2h=C$$

$$2a^2k=D$$

$$(b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2)=E$$

maka di dapat persamaan terakhir,

$$Ax^2-By^2+Cx+Dy+E=0$$

*A*, *B*, *C*, *D* dan *E* bilangan riil (A≠0, B≠0, A≠B)

## IV. Contoh Soal

I. Untuk Persamaan Hiperbola yang Berpusat di O(0,0)

1. Diketahui hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.

   Tentukan : a. Koordinat titik puncak

   b. Nilai eksentrisitas

   c. Koordinat fokus

   d. Sumbu transversal dan panjang sumbu sekawan

   e. Sumbu simetri

   f. Panjang latus rektum

   g. Persamaan direktris

   Penyelesaian :

   a. $a^2 = 16$, maka $a = 4$

   $b^2 = 9$, maka $b = 3$

   dengan demikian, kita peroleh titik puncak : (4,0) dan (-4,0)

   b. nilai eksentrisitas : $e = \frac{c}{a}$

   $c^2 = a^2 + b^2$

   $= 16 + 9 = 25$

   $c = \pm 5$

   $e = \frac{5}{4}$

   c. Koordinat fokus : ( $\pm c$ , 0) sehingga didapat $F_1(5,0)$ dan $F_2(-5,0)$

d. Panjang sumbu transversal = 2a = 2 . 4 = 8

panjang sumbu sekawan = 2b = 2 . 3 = 6

e. Sumbu simetri adalah sumbu X dan sumbu Y

f. Panjang latus rektum = $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2\cdot 9}{4} = \dfrac{18}{4}$

g. Persamaan direktriks $x = \pm\dfrac{a}{e} = \pm\dfrac{16}{5}$

2. Tentukan persamaan hiperbola yang berpusat di O(0,0), sumbu utama pada sumbu x melalui titik (3,1) dan (9,5).

Penyelesaian:

misalkan persamaan hiperbola yang berpusat di O(0,0) dengan sumbu utamanya sumbu x adalah $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

melalui titik (3,1) $\Rightarrow \dfrac{3^2}{a^2} - \dfrac{1^2}{b^2} = 1$

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$9b^2 - a^2 = a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

melalui titik (9,5) $\Rightarrow \dfrac{9^2}{a^2} - \dfrac{5^2}{b^2} = 1$

$$\frac{81}{a^2} - \frac{25}{b^2} = 1$$

$$81b^2 - 25a^2 = a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

persamaan (1) dan (2) di eliminasi :

$9b^2 - a^2 = a^2b^2$

$81b^2 - 25a^2 = a^2b^2$ —

$-72b^2 + 24a^2 = 0$

$24a^2 = 72b^2$

$a^2 = 3b^2$ ....................(3)

subsitusi (3) ke (1):

$9b^2 - a^2 = a^2b^2$

$9b^2 - 3b^2 = 3b^2b^2$

$6b^2 = 3b^4$

$6 = 3b^2$

$b^2 = 2$

Dari $a^2 = 3b^2$ diperoleh $a^2 = 3 \cdot 2 = 6$

maka $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$$

Jadi persamaan hiperbola yang berpusat di (0,0) dan sumbu utama pada sumbu x melalui (3,1) dan (9,5) adalah $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$.

3. Jika eksentrisitet suatu hiperbola adalah $\frac{13}{12}$ dan jarak antara kedua fokusnya 37, tentukan persamaan pusatnya !

Penyelesaian :

Diket : e = $\frac{13}{12}$

2c = 37

Dit : pers. hiperbola

Jawab :

misalkan persamaan hiperbola : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$2c = 37 \quad \rightarrow c = \frac{37}{2}$

eksentrisitet : $e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{e}$

$$a = \frac{\frac{37}{2}}{\frac{13}{12}}$$

$$a = \frac{222}{13}$$

$$a^2 = \left(\frac{222}{13}\right)^2 = \frac{49284}{169}$$

$b^2 = c^2 - a^2$

$$b^2 = \left(\frac{37}{2}\right)^2 - \left(\frac{222}{13}\right)^2$$

$$b^2 = \frac{1369}{4} - \frac{49284}{169} = \frac{231361 - 197136}{676}$$

$$b^2 = \frac{34225}{676}$$

Dari $a^2 = \frac{49284}{169}$ dan $b^2 = \frac{34225}{676}$ maka diperoleh :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{49284}{169}} - \frac{y^2}{\frac{34225}{676}} = 1 \Rightarrow \frac{169x^2}{49284} - \frac{676y^2}{34225} = 1$$

$\therefore$ Persamaan hiperbola dengan eksentrisitet $\frac{13}{12}$ dan jarak antara kedua fokusnya 37 adalah $\frac{169x^2}{49284} - \frac{676y^2}{34225} = 1$

4. Tentukan persamaan hiperbola dengan titik puncak ($\pm 6$, 0 ) dan dengan persamaan garis asimtot $y = \pm\frac{7}{6}x$

penyelesaian :

titik puncak (-6,0) dan (6,0) merupakan hiperbola horizontal dengan a = 6. Untuk persamaan hiperbola horizontal, persamaan asimtotnya adalah $y = \pm\frac{b}{a}x$ . Oleh karena persamaan asimtotnya diketahui yaitu $y = \pm\frac{7}{6}x$,

maka : $\frac{b}{a} = \frac{7}{6} \rightarrow b = \frac{7}{6}a$

$$= \frac{7}{6}(6) = 7$$

Jadi persamaan hiperbola untuk a = 6 dan b = 7 adalah $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = 1$

atau $49x^2 - 36y^2 - 1764 = 0$

5. Diketahui persamaan hiperbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

Ditanya: a. Koordinat titik puncak

b. Koordinat titik ujung sumbu minor

c. Koordinat fokus

d. nilai eksentrisita

e. persamaan direktriks dan persamaan asimtot

f. panjang latus rektum dan sketsa gambar

Penyelesaian :

a. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ , $a^2 = 64$ , maka $a = 8$

$b^2 = 36$, maka $b = 6$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 64 + 36$

$c^2 = 100$

$c = \pm 10$

Koordinat tittik puncak $A_1(-8, 0)$ dan $A_2(8, 0)$

b. Sumbu minor $B(0, \pm b)$ sehingga didapat $B_1(0, -6)$ dan $B_2(0, 6)$

c. Koordinat fokus $F(\pm c, 0)$ sehingga didapat $F_1(-10, 0)$ dan $F_2(10, 0)$

d. Nilai eksentrisitas $e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

e. - Persamaan direktrik $g_1 \equiv x = -\frac{a}{c} = -\frac{8}{10} = \frac{-4}{5}$

$$g_2 \equiv x = \frac{a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

- Persamaan asimtot $l_1 \equiv y = -\frac{b}{a}x = -\frac{6}{8}x = -\frac{3}{4}x$

$$l_2 \equiv y = \frac{b}{a}x = \frac{6}{8}x = \frac{3}{4}x$$

f. Panjang latus rektum = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 36}{8} = \frac{72}{8} = 9$

sketsa gambar

6. Tentukan persamaan hiperbola yang berpusat di (0,0)

a. Titik fokus ( $\pm 4$, 0) dan Titik puncak ( $\pm 3$, 0)

b. Titik fokus ( $\pm 6$, 0) dan panjang sumbu mayor 8

Penyelesaian:

a. Fokus di $F_1(-4, 0)$ dan $F_2(4, 0)$ , Titik puncak di (-3, 0) dan (3, 0) merupakan hiperbola horizontal dengan c = 4 dan a = 3

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 16 - 9 = 7$

Persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ atau $7x^2 - 9y^2 = 63$

b. Titik fokus di $F_1(-6, 0)$ dan $F_2(6, 0)$ merupakan hiperbola horizontal dengan c = 6

Panjang sumbs mayor 8 satuan $\Rightarrow 2a = 8$

$a = 4$

nilai $b^2 = c^2 - a^2$

$= 36 - 16 = 20$

Persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ atau $20x^2 - 16y^2 = 320$.

II. Untuk Persamaan Hiperbola yang Berpusat di M(h, k).

1. Perhatikan hiperbola dengan persamaan $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

   Tentukanlah : a. koordinat titik pusat

   b. koordinat titik puncak.

   c. koordinat fokus.

   d. panjang sumbu mayor dan sumbu minor.

   e. persamaan asimtot.

Penyelesaian :

Nyatakanlah terlebih dahulu persamaan kedalam bentuk :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y = 199$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 18x - 16y^2 - 64y = 199$

$\Leftrightarrow 9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) = 199$

$\Leftrightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) = 199 + 9 - 64$

$\Leftrightarrow 9(x - 1)^2 - 16(y + 2)^2 = 144$

$$\Leftrightarrow \frac{9(x-1)^2}{144} - \frac{16(y+2)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \text{ sehingga}$$

a = 4, b = 3, dan $c = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$, h = 1 dan k = -2

a. koordinat titik pusat M(h, k) adalah (1,-2)

b. koordinat titik puncak = $(h \pm a, k)$

$= (1 \pm 4, -2)$

$= (1+4, -2)$ dan $(1-4, -2)$

$= (5, -2)$ dan $(-3, -2)$

c. koordinat titik fokus = $(h \pm c, k)$

$= (1 \pm 5, -2)$

$= (6, -2)$ dan $(-4, -2)$

d. panjang sumbu mayor = 2a = 2 . 4 = 8

panjang sumbu minor = 2b = 2 . 3 = 6

e. persamaan asimtot : $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

$\Leftrightarrow y + 2 = \pm \frac{3}{4}(x - 1)$

$\Leftrightarrow y + 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$ dan $y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 1)$

2. Tentukan persamaan hiperbola dengan pusat (1,-3). Salah satu titik puncaknya (4, -3) dan panjang sumbu imajinernya sama dengan 8 satuan.

Penyelesaian :

Diket : pusat (1,-3)

titik puncak (4, -3)

panjang sumbu imajiner = 8 satuan

Dit : persamaan hiperbolanya

Jawab :

pusat (1,-3) maka h = 1 dan k = -3

titik puncak (4,-3) : (h+a, k) = (4,-3)

(1+a, -3) = (4,-3)

maka 1 + a = 4

a = 4 - 1

a = 3

panjang sumbu imajiner 2b = 8

$$b = \frac{8}{2} = 4$$

persamaan hiperbola dengan pusat (1,-3) , a = 3 dan b = 4 adalah:

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{(y+3)^2}{4^2} = 1$$

$\Leftrightarrow 16(x-1)^2 - 9(y+3)^2 = 144$

$\Leftrightarrow 16(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 6y + 9) = 144$

$\Leftrightarrow 16x^2 - 32x + 16 - 9y^2 - 54y - 81 - 144 = 0$

$\Leftrightarrow 16x^2 - 9y^2 - 32x - 54y - 209 = 0$

Jadi persamaan hiperbola tersebut adalah

$16x^2 - 9y^2 - 32x - 54y - 209 = 0$

3. Diketahui persamaan $\dfrac{(x-1)^2}{64} - \dfrac{(y+1)^2}{36} = 1$

Ditanya : a. Koordinat titik puncak

b. Koordinat titik pusat

c. Koordinat titik ujung sumbu minor

d. Koordinat Fokus

e. Persamaan sumbu utama , Persamaan sumbu sekawan

f. Panjang sumbu mayor dan panjang sumbu minor

g. panjang latus rektum

h. persamaan asimtot

i. nilai eksentrisitas dan direktris

Penyelesaian:

$\frac{(x-1)^2}{64}-\frac{(y+1)^2}{36}=1$ ,merupakan hiperbola horizontal dengan

$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$

$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \qquad \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$= 64 + 36$

$= 100 \Rightarrow c = 10$

a. Koordinat titik pusat M (h,k) $\Rightarrow$ M(1,-1)

b. puncak A(h±a, k) maka $A_1(9,-1)$ dan $A_2(-7,-1)$

c. Titik ujung sumbu minor B(h, k ± b) maka didapat $B_1(1,-7)$ dan $B_2(1,5)$

d. Koordinat fokus F(h ±c, k) maka didapat $F_1(-9,-1)$ dan $F_2(11,-1)$

e. Persamaan sumbu utama y = -1 dan persamaan sumbu sekawan adalah x = 1

f. Panjang sumbu mayor = 2a =2(8) = 16

Panjang sumbu minor = 2b = 2(6) = 12

g. Panjang latus rektum = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(36)}{8} = \frac{72}{8} = 9$

h. Persamaan asimtotnya: y - k = ± $\frac{b}{a}(x-h)$

$y+1 = \pm\ \frac{6}{8}(x-1)$

$y+1 = \pm\ \frac{3}{4}(x-1)$

$l_1 \equiv y+1 = -\frac{3}{4}(x-1)$

$l_2 \equiv y+1 = \frac{3}{4}(x-1)$

i. nilai eksentrisitas e = $\frac{c}{a}$

e = $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

persamaan direktrisnya x = h $\pm\frac{a}{c}$

$g_1 \equiv x = 1 + \frac{8}{\frac{5}{4}} = 1 + \frac{32}{5} = \frac{37}{5}$ dan $g_2 \equiv x = 1 - \frac{8}{\frac{5}{4}} = 1 - \frac{32}{5} = -\frac{27}{5}$

4. Carilah persamaan asimtot untuk hiperbola $\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

Penyelesaian :

Asimtot hiperbola dapat diperoleh dari persamaan $\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 0$

Dari persamaan itu kita peroleh :

$$\frac{(y-1)^2}{9}=\frac{(x+2)^2}{16}$$

$$(y-1)^2=\frac{9}{16}(x+2)^2$$

$$y=\pm\frac{3}{4}(x+2)+1$$

Kita peroleh

$$y=1+\frac{3}{4}(x+2) \text{ atau } y=1-\frac{3}{4}(x+2)$$

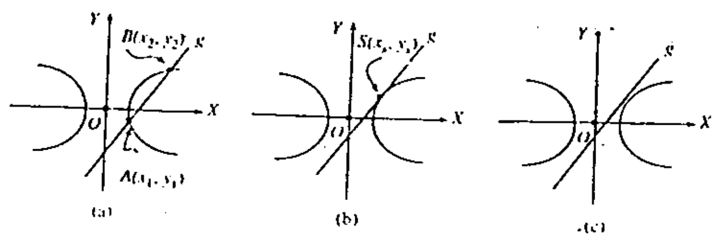
$$\Leftrightarrow y=1+\frac{3}{4}x+1\frac{1}{2} \text{ atau } y=1-\frac{3}{4}x-1\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+2\frac{1}{2} \text{ atau } y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$$

Jadi, persamaan asimtot hiperbola tersebut adalah $y=\frac{3}{4}x+2\frac{1}{2}$ dan $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

## IV. KEDUDUKAN GARIS TERHADAP HIPERBOLA

Kedudukan sebuah garis lurus g terhadap hiperbola, secara geometris dapat ditunjukkan pada gambar berikut :



Pada gambar di atas (a), garis g memotong hiperbola di dua titik yang berlainan yaitu di titik $A(x_1,y_1)$ dan di titik $B(x_2,y_2)$.

Pada gambar (b), garis g memotong hiperbola di satu titik (dikatakann garis g menyinggung hiperbola), yaitu di titik $S(x_s,y_s)$.

Pada gambar (c), garis g tidak memotong maupun menyinggung hiperbola.

Kedudukan garis g terhadap hiperbola dapat dianalisis secara aljabar dengan menggunakan konsep diskriminan sebagai berikut:

- misalkan persamaan garis g adalah y = mx + n dan persamaan hiperbolanya adalah $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
- subsitusi y = mx + n kepersamaan hiperbola, didapat $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$

  $b^2x^2 - a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$

  $b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$

  $(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2(n^2 + b^2) = 0$

merupakan persamaan kuadrat gabungan antara garis dan hiperbola.

- nilai diskriminan dari persamaan kuadrat gabungan itu adalah:

$D = (-2a^2mn)^2 - 4(b^2 - a^2m^2)\{-a^2(n^2 + b^2)\}$

$D = 4a^2m^2n^2 + 4a^2(b^2n^2 + b^4 - a^2m^2n^2 - a^2b^2m^2)$

$D = 4a^2m^2n^2 + 4a^2b^2n^2 + 4a^2b^2 - 4a^4m^2n^2 - 4a^4b^2m^2$

Kedudukan garis lurus g terhadap hiperbola ditentukan oleh nilai diskriminan D sebagai berikut:

1. $D > 0 \Leftrightarrow$ garis g memotong hiperbola di dua titik yang berlainan.
2. $D = 0 \Leftrightarrow$ garis g menyinggung hiperbola.
3. $D < 0 \Leftrightarrow$ garis g tidak memotong dan tidak menyinggung hiperbola.

Contoh soal :

1. a) Tunjukkan bahwa garis $x - y + 2 = 0$ memotong hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ di dua titik yang berlainan.

   b) Tentukan koordinat titik potong itu .

   c) Hitunglah panjang ruas garis yang dihubungkan oleh kedua titik potong pada soal (b)

Jawab :

a. $x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = x + 2$. Substitusi $y = x + 2$ ke $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$, didapat

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{8} = 1$$

$\Rightarrow 2x^2 - (x^2 + 4x + 4) = 8$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 4 - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$ , persamaan kuadrat gabungan garis dan hiperbola

Nilai diskriminan D :

$D = (-4)^2 - 4(1)(-12) = 64$

Oleh karena $D = 64 > 0$ , maka garis $x - y + 2 = 0$ memotong hiperbola

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ didua titik yang berlainan .

Dari persamaan $x^2 - 4x - 12 = 0$,didapat:

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow (x + 2)(x - 6) = 0$

$\Rightarrow x = -2$ atau $x = 6$

Untuk $x = -2$ ,didapat $y = -2 + 2 = 0 \Rightarrow (-2,0)$

Untuk $x = 6$, didapat $y = 6 + 2 = 8 \Rightarrow (6,8)$

Jadi koordinat titik potong garis $x - y + 2 = 0$ dengan hiperbola

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ adalah A(-2,0) dan B(6,8)

b. A(-2,0) dan B(6,8) maka

panjang AB = $\sqrt{(-2-6)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}$

Jadi panjang ruas garis AB = $8\sqrt{2}$ satuan panjang .

2. Tentukan tempat kedudukan garis $x - y = 0$ terhadap hiperbola

$\frac{x}{} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Jawab :

Hiperbola $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ , garis x – y= 0 maka y = x

$\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} - 1 = 0$ maka $\frac{2x^2}{4} - \frac{x^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - 1 = 0$

Nilai diskriminan :

$D = b^2 - 4ac$

$= 0^2 - 4(\frac{1}{4})(-1) = 1$

Jadi D > 0, garis x – y = 0 memotong hiperbola di dua titik yang berlainan.

3 a) Tentukan nilai a, supaya garis 4x + y + a = 0 menyinggung hiperbola $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{48} = 1$

b). Tentukan pula koordinat titik singgungnya .

Jawab :

a. 4x + y + a = 0 , maka y = -4x – a.

Subsitusi y = -4x – a ke persamaan hiperbola , didapat:

$$\frac{x^2}{12} - \frac{(-4x - a)^2}{48} = 1$$

$\Rightarrow 4x^2 - (16x^2 + 8ax + a^2) = 48$

$\Rightarrow 12x^2 + 8ax + (a^2 + 48) = 0$

Nilai diskriminan D :

$D = (8a)^2 - 4(12)(a^2 + 48)$

$\Rightarrow D = 64a^2 - 48a^2 - 2304$

$\Rightarrow D = 16a^2 - 2304$

Supaya garis menyinggung hiperbola, maka nilai diskriminan D = 0

$16a^2 2304 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 144 = 0$

$\Rightarrow (a + 12)(a - 12) = 0$

$\Rightarrow$ a = -12 atau a = 12

Jadi supaya garis $4x + y + a = 0$ menyinggung hiperbola $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{48} = 1$ untuk nilai
a = -12 atau a = 12

b. Untuk a = -12 , substitusi ke $12x^2 + 8ax + (a^2 + 48) = 0$ , didapat

$12x^2 - 96x + (144 + 48) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Rightarrow (x - 4)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 4$

Substitusi a = -12 dan x = 4 ke garis y = -4x – a , didapat

y = -4(4) – (-12) = -4 , sehingga titik singgungnya (4,-4)

Untuk a = 12, substitusi ke $12x^2 + 8ax + (a^2 + 48) = 0$, didapat

$12x^2 + 96x + (144 + 48) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 0$

$\Rightarrow (x + 4)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -4$

Subsitusi a = 12 dan x = -4 ke garis y = -4x – a , didapat

y = -4(-4) – 12 = 4 , sehingga tittik singgungnya (-4, 4)

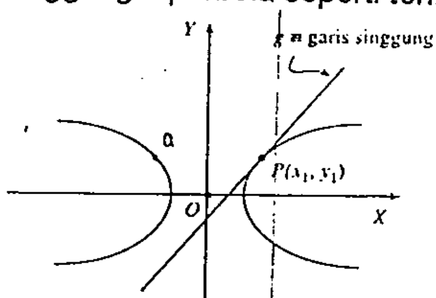
Jadi koordinat titik- titik singgungnya adalah (4, -4) dan (-4, 4).

## V. GARIS- GARIS SINGGUNG PADA HIPERBOLA

### A. Garis Singgung Melalui Suatu Titik Pada Hiperbola

(1). Untuk Hiperbola Dengan Pusat (0,0)

misalkan titik $P(x_1,y_1)$ terletak pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ melalui titik $P(x_1,y_1)$ dapat dibuat sebuah garis yang menyinggung hiperbola disebut garis singgung hiperbola seperti terlihat pada gambar berikut:




Persamaan garis singgung yang melalui titik $P(x_1,y_1)$ pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dapat ditentukan dengan menggunakan tafsiran geometri turunan yaitu $y - y_1 = m(x - x_1)$, karena titik $P(x_1,y_1)$ terletak pada hiperbola maka nilai gradien m dapat ditentukan dengan tafsiran geom0etri turunan dari $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x,y)}$ Dengan mengambil diferensial pada persamaan

$$\Leftrightarrow d\,\frac{x^2}{a^2} - d\,\frac{y^2}{b^2} = d\,1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{a^2}dx - \frac{2y}{b^2}dy = 0$$

hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ didapat $\frac{2y}{b^2}dy = \frac{2x}{a^2}dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{a^2}\cdot\frac{b^2}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

jadi $m = \frac{dy}{dx}_{(x,y)}$

subsitusi nilai $m = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ ke persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$ didapat

$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow a^2yy_1 - a^2y_1^2 = b^2xx_1 - b^2x_1^2$

$\Leftrightarrow a^2yy_1 - b^2xx_1 = a^2y_1^2 - b^2x_1^2$

$\Leftrightarrow \frac{yy_1}{b^2} - \frac{xx_1}{a^2} = \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$

masing- masing ruas dibagi dengan $a^2b^2$. Karena titik $P(x_1,y_1)$ terletak pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ maka berlaku $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$.

subsitusi nilai ini kepersamaan terakhir, maka akan diperoleh $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

Jadi persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1,y_1)$ pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dapat ditentukan dengan rumus $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

Dengan menggunakan analisis yang sama, persamaan garis singgung yang melalui titik $P(x_1,y_1)$ pada hiperbola vertikal $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dapat ditentukan dengan rumus $\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$.

Contoh soal

1.Tentukan persamaan garis singgung hiperbola dengan persamaan $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$ di titik yang berabsis 1

Penyelesaian

$$x = 10 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{100}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{y^2}{16} = \frac{25}{16} - 1$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

titik tersebut (10,3) dan (10, -3)

Persamaan garis singgung di (10, 3) adalah

$$\frac{10x}{64} - \frac{3y}{16} = 1$$

$5x$ $3y$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

2. Tunjukkan bahwa titik P $\left(2\sqrt{6},2\right)$ terletak pada hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$ kemudian tentukan persamaan garis singgung hiperbola itu yang melalui titik P.

Penyelesaian:

subsitusikan titik P $\left(2\sqrt{6},2\right)$ pada hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$

$$\frac{(2\sqrt{6})^2}{16} - \frac{2^2}{8} = 1$$

$$\frac{4.6}{16} - \frac{4}{8} = 1$$

$\frac{24}{16} - \frac{8}{16} = 1$

$\frac{16}{16} = 1$

$1 = 1$

ini berarti tititk P terletak pada hiperbola.

persamaan garis singgungnya adalah

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x(2\sqrt{6})}{16} - \frac{2y}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{6}x}{16} - \frac{2y}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}x - 2y = 8$$

jadi persamaan garis singgungnya $\sqrt{6}x - 2y = 8$

3. Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{48} = 1$ dititik (4, -4)

Penyelesaian

$$\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-4y}{12} - \frac{4x}{48} = 1$$

$$\Rightarrow -4y - x = 12$$
$$\Rightarrow x + 4y + 12 = 0$$

jadi persamaan garis singgung hiperbola adalah x + 4y + 12 = 0

4. Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $y^2 - x^2 = 9$ dititik (-4, 5)

Penyelesaian:

$$\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$$

y(5) – x(-4) =9

4x + 5y =9

4x + 5y – 9 = 0

jadi persamaan garis singgung hiperbola adalah 4x + 5y – 9 = 0

2. Untuk Persamaan Hiperbola Yang Berpusat di M(h,k)

a. Persamaan garis singgung yang melalui titik $P(x_1,y_1)$ pada hiperbola $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ dapat ditentukan dengan rumus

$$\frac{(x-h)(x_1-h)}{a^2} - \frac{(y-k)(y_1-k)}{b^2} = 1$$

b. Persamaan garis singgung yang melalui titik $P(x_1,y_1)$ pada hiperbola $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ dapat ditentukan dengan rumus

$$\frac{(y-k)(y_1-k)}{a^2} - \frac{(x-h)(x_1-h)}{b^2} = 1.$$

Contoh soal :

1. Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $(x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{3} = 1$ dititik (1,-2)

Jawab :

$$(x+1)(x_1+1) - \frac{(y-1)(y_1-1)}{3} = 1$$

$$\Rightarrow (x+1)(1+1) - \frac{(y-1)(2-1)}{3} = 1$$

$$\Rightarrow 2x + 2 + y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y + 1 = 0$$

2. Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $\frac{(y-13)^2}{144} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$ dititik (5,-2)

Jawab :

$$\frac{(y-13)^2}{144} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(y-13)(y_1-13)}{144} - \frac{(x-2)(x_1-2)}{16} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(y-13)(-2-13)}{144} - \frac{(x-2)(5-2)}{16} = 1$$

$$\Rightarrow -15\,(y-13) - 9\,(3)\,(x-2) = 144$$

$$\Rightarrow -15y + 195 - 27x + 54 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow -15y - 27x + 105 = 0$$

$$\Rightarrow 27x + 15y - 105 = 0$$

$$\Rightarrow 9x + 5y - 35 = 0$$

3.Tentukan persamaan garis singgung dititik (3,-2) terhadap hiperbola $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$

Jawab :

Persamaan umum garis singgung melalui titik $P(x_1,y_1)$

$$\frac{(x-h)(x_1-h)}{a^2}-\frac{(y-k)(y_1-k)}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(3-2)}{4}-\frac{(y+1)(-2+1)}{2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)}{4}+\frac{(y+1)}{2}=1$$

$\Rightarrow 2(x - 2) + 4(y + 1) = 8$

$\Rightarrow 2x - 4 + 4y + 4 = 8$

$\Rightarrow x + 4y - 8 = 0$

$\Rightarrow x + 2y - 4 = 0$

4. Tentukan persamaan garis singgung (3,-2) terhadap $x^2 - 4y^2 + 2x - 24y - 31= 0$

   Penyelesaian :

   $x^2 + 2x - 4y^2 - 24y - 31 = 0$

   $(x + 1)^2 - 1 - 4(y + 3) + 36 - 31 = 0$

   $(x + 1)^2 - 4(y + 3)^2 + 4 = 0$

   $\Rightarrow (x + 1)(x_1 + 1) - 4(y + 3)(y_1 + 3) = 0$

   $\Rightarrow (x + 1)(3 + 1) - 4(y + 3)(-2 + 3) + 4 = 0$

   $\Rightarrow 4(x + 1) - 4(y + 3) + 4 = 0$

   $\Rightarrow 4x + 4 - 4y - 12 + 4 = 0$

   $\Rightarrow 4x - 4y - 4 = 0$

   $\Rightarrow x - y = 1$

5.Tentukan nilai a supaya garis x + y = a menyinggung hiperbola $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$, dan

tentukan koordinat- koordinat titik singgungnya.

Penyelesaian:

a. x + y = a maka y = -x + a

subsitusi xy = -x + a kepersamaan $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{8}-\frac{(-x+a)^2}{4}=1$

$\Rightarrow x^2-2(x^2-2ax+a^2)=8$

$-x^2+4ax-2a^2-8=0$

karena garis menyinggung hiperbola maka nilai D=0

$D = b^2-4ac$

$0 = (4a)^2-4(-1)(-2a^2-8)$

$0 = 16a^2-8a^2-32$

$0 = 8a^2-32$

$8a^2-32=0$

$a^2-4=0$ , $a=\pm 2$

jadi supaya garis x + y = a menyinggung hiperbola $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$ maka nilai

a = -2 dan a = 2

b.Untuk a = -2 subsitusi $-x^2+4ax-2a^2-8=0$ didapat

$-x^2-8x-16=0$

$(-x-4)(x+4)=0$

$x=4$

subsitusi a = -2 dan x = -4 kegaris y = -x + a

y = - (-4) + (-2)

y = 2

tititk singgung (-4 , 2)

Untuk a = 2 subsitusi $-x^2 + 4ax - 2a^2 - 8 = 0$ didapat

$-x^2 + 8x - 16 = 0$

$(x - 4)^2 = 0$ , x = 4

subsitusi a = 2 dan x = 4 kegaris y = -x + a

y = -4 + 2

y = -2

titik singgung (4, -2)

jadi koordinat titik singgung adalah (-4, 2) dan (4,

6. Apakah titik $\left(\frac{16}{3}, o\right)$ terletak pada hiperbola $\frac{(x-2)^2}{10} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ dan tentukan persamaan garis singgung yang melalui $\left(\frac{16}{3}, o\right)$ pada hiperbola tersebut.

Penyelesaian

subsitusi titik $\left(\frac{16}{3}, o\right)$ hiperbola $\frac{(x-2)^2}{10} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{16}{3} - 2\right)^2}{10} - \frac{(0+1)^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{10} - \frac{1}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{100}{9}\cdot\frac{1}{10}-\frac{1}{9}=1$$

$$\Rightarrow \frac{10}{9}-\frac{1}{9}=1$$

$\Rightarrow$ 1 = 1 , ini berarti titik P terletak pada hiperbola $\frac{(x-2)^2}{10}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

Persamaan garis singgung melalui titik $\left(\frac{16}{3},o\right)$ adalah

$$\frac{(x-h)(x_1-h)}{a^2}-\frac{(y-k)(y_i-k)}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)\left(\frac{16}{3}-2\right)}{10}-\frac{(y+1)(0+1)}{9}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)\left(\frac{10}{3}\right)}{10}-\frac{(y+1)}{9}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{3}-\frac{y+1}{9}=1$$

$$\Leftrightarrow 9(x-2)-3(y+1)=27$$

$$\Leftrightarrow 9x-3y-48=0$$

$$\Leftrightarrow 3x-y-16=0$$

jadi persamaan garis singgung melalui titik $\left(\frac{16}{3},o\right)$ adalah 3x – y – 16 = 0.

B. Garis Singgung Melalui Suatu Titik di Luar Hiperbola

Persamaan garis singgung yang ditarik melalui titik $P(x_1,y_1)$ diluar hiperbola, dapat ditentukan dengan menggunakan langkah- langkah yang sama seperti persamaan garis singgung yang ditarik melalui titik $P(x_1,y_1)$ diluar lingkaran, diluar elips dan diluar parabola yaitu dengan menggunakan rumus $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

Contoh soal :

1. Tunjukkan bahwa titik p(0,0) terletak diluar hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

   Tentukanlah persamaan garis singgung pada hiperbola tersebut melalui titik p.

   Jawab :

   Subsitusikan titik p(0,0) pada hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ didapat $\frac{0}{9} - \frac{0}{4} < 1$, ini artinya p terletak diluar hiperbola.

   Misalkan persamaan garis singgung yang melalui titik p(0,0) dengan gradien m adalah $y - 0 = m(x - 0)$

   $\Rightarrow y = mx$ .........................................(1)

   Persamaan hiperbolanya $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

   $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ ...........................(2)

subsitusikan persamaan (1) ke (2)

$\Leftrightarrow 4x^2 - 9(mx)^2 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 9m^2x^2 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow (4 - 9m)x^2 - 36 = 0$

Diskriminan dari persamaan terakhir adalah

$D = 0^2 - 4(4 - 9m^2)(-36)$

$= 576 - 1296m^2$

karena garis menyinggung hiperbola haruslah D = 0 hingga

$576 - 1296m^2 = 0$

$\Rightarrow 1296m^2 = 576$

$\Rightarrow m^2 = \dfrac{576}{1296}$

$m = \pm\sqrt{\dfrac{576}{1296}}$

$m = \pm\dfrac{24}{36}$

$m = \pm\dfrac{2}{3}$

Persamaan garis singgung untuk $m = \frac{2}{3}$ adalah $y = \frac{2}{3}x$ sedangkan untuk

$m = \frac{-2}{3}$ adalah $y = -\frac{2}{3}x$.

2. Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ yang dapat ditarik dari titik (1,4) diluar hiperbola

Penyelesaian:

titik (1,4) diluar hiperbola

gradien kutup titik (1,4) adalah

$$\frac{x}{12} - \frac{4y}{3} = 1$$

$\Rightarrow$ x – 16y = 12 , x = 16y + 12

$$\Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(16y+12)^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4(4y+3)^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$$

$\Rightarrow 4(16y^2 + 24y + 9) - y^2 = 3$

$\Rightarrow 64y^2 + 96y + 36 - y^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow 63y^2 + 96y + 33 = 0$

$\Rightarrow 21y^2 + 32y + 11 = 0$

$\Rightarrow (21y + 11)(y + 1) = 0$

$y_1 = \frac{-11}{21}$ , $y_2 = -1$

untuk y = $\frac{-11}{21}$ maka x = 16y + 12

$$= 16\left(\frac{-11}{21}\right) + 12$$

$$= \frac{-176+252}{21}$$

$$x = \frac{76}{21}$$

untuk y = - 1 maka x = 16y + 12

= -16 + 12

= -4

Titik singgung adalah $\left(\frac{76}{21}, \frac{-11}{21}\right)$ dan (-4,-1).

Persamaan di titik $\left(\frac{76}{21}, \frac{-11}{21}\right)$ adalah $\frac{76x}{21.12} + \frac{11y}{21.3} = 1 \Rightarrow 19x + 11y = 63$

Persamaan garis singgung dititik (-4,-1) adalah

$$\Rightarrow \frac{-4x}{12} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{3} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow -x + y = 3$$

$$\Rightarrow x - y + 3 = 0$$

Jadi persamaan garis singgung yang dapat ditarik dari (1,4) adalah

$19x + 11y - 63 = 0$ dan $x - y + 3 = 0$

untuk $m = \frac{-19}{11}$, didapat $y = \frac{-19}{11}x + \frac{19}{11} + 4$

$\Leftrightarrow 11y = -19x + 63$

$\Leftrightarrow 19x + 11y - 63 = 0$

untuk $m = 1$, didapat $y = x - 1 + 4$

$\Leftrightarrow y = x + 3$

$\Leftrightarrow x - y + 3 = 0$

jadi, persamaan – persamaan garis singgung yang ditarik melalui titik P(1, 4) ke hiperbola $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ adalah $19x + 11y - 63 = 0$ dan $x - y + 3 = 0$.

4. Berdasarkan soal nomor 3 koordinat titik singgung nya.

Penyelesalan :

Subsitusi $m = \frac{-19}{11}$ kepersamaan

$(1 - 4m^2)x^2\ 4(-2m^2 + 8m)x - 4(m^2 - 8m + 19) = 0$. Didapat

$$\left(1 - 4(\frac{-19}{11})^2\right)x^2 - 4\left(-2(\frac{-19}{11})^2 + 8(\frac{-19}{11})\right)x - 4\left((\frac{-19}{11})^2 - 8(\frac{-19}{11}) + 19\right) = 0$$

$$\left(1 - \frac{1444}{121}\right)x^2 - 4\left(\frac{-722}{121} - \frac{152}{121}\right)x - 4\left(\frac{361}{121} + \frac{152}{11} + 19\right) = 0$$

$$\frac{-1323}{121}x^2 + \frac{9576}{121}x - \frac{17328}{121} = 0$$

$1323x^2 - 9576x + 17328 = 0$ , kedua ruas dikalikan dengan (-121)

$441x^2 - 3192x + 5776 = 0$ , kedua ruas dibagi dengan (3)

$(21x - 76)^2 = 0$

$x = \frac{76}{21}$

Untuk $x = \frac{76}{21}$, didapat

$$y = \frac{1}{11}\left(-19(\frac{76}{21}) + 63\right)$$

$$y = \frac{1}{11}\left(\frac{-1444}{21} + \frac{3323}{21}\right)$$

$$y = \frac{1}{11}\left(\frac{-121}{21}\right)$$

$$y = \frac{-11}{21}$$

koordinat tittik $A\left(\frac{7}{21}, \frac{-11}{21}\right)$

subsitusi m =1 kepersamaan

$(1 - 4m^2)x^2 - 4(-2m^2 + 8m)x - 4(m^2 - 8m + 19) = 0$ , didapat

$\{1 - 4(1)^2\}x^2 - 4\{-2(1)^2 + 8(1)\}x - 4\{(1)^2 - 8(1) + 19\} = 0$

$\Leftrightarrow -3x^2 - 24x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 4)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4$

Untuk x = -4, didapat:

Y = x + 3

= (-4) + 3

y = -1

koordinat titik B(-4, -1)

Jadi, koordinat titik- titik singgungnya adalah A$\left(\frac{7}{21},\frac{-11}{21}\right)$ dan B(-4, -1).

## C. Garis Singgung Hiperbola Dengan Gradien Tertentu.

1.Untuk hiperbola yang berpusat di O(0,0)

Misalkan gradien garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ adalah m ( m diketahui)

Persamaan garis dengan gradien m adalah y = mx + n . Nilai diskriminan dari persamaan kuadrat gabungan antara garis $y = mx + n$ dengan hiperbola itu adalah $D = 4a^2b^2(n^2 - a^2m^2 + b^2)$.

Syarat bagi garis singgung adalah Diskriminan D = 0, didapat:

$4a^2b^2(n^2 - a^2m^2 + b^2) = 0$

$(n^2 - a^2m^2 + b^2) = 0$

$n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$

Subsitusikan nilai n kepersamaan garis y= mx + n, didapat

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

Jadi, persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan

gradien m dapat ditentukan dengan rumus $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

Dengan menggunakan analisa yang sama, persamaan garis

singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan gradien n dapat

ditenttukan dengan rumus: $y = mx \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$

Contoh soal:

1. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola

   a. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ yang mempunyai gradien 1

   b. $\frac{y^2}{169} - \frac{x^2}{16} = 1$ yang sejajar dengan garis 3x + y + 10 = 0

Penyelesaian:

a. Persamaan hiperbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, merupakan hiperbola horizontal

dengan a = 5 dan b = 4

Jadi persamaan garis singgung nya adalah

$\Rightarrow y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$\Rightarrow y = 1x \pm \sqrt{5^2.1^2 - 4^2}$

$\Rightarrow y = x \pm \sqrt{25-16}$

$\Rightarrow y = x \pm \sqrt{9}$

$\Rightarrow y = x \pm 3$

$x - y - 3 = 0$ atau $x - y + 3 = 0$

b. Persamaan hiperbola $\frac{y^2}{169}-\frac{x^2}{16}=1$, merupakan hiperbola vertikal

dengan a = 13 dan b = 4

Garis singgung sejajar dengan garis 3x + y + 10 = 0, atau y = -3x – 10

Berarti gradien m = -3

Persamaan garis singgungnya adalah

$\Rightarrow y = mx \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$

$\Rightarrow y = -3x \pm \sqrt{25}$

$\Rightarrow y = -3x \pm 5$

$3x + y - 5 = 0$ atau $3x + y + 5 = 0$

2. Carilah persamaa'n garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ yang mempunyai gradien -1.

Penyelesaian:

Garis singgung bergradien –1 pada hiperbol $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{2x}{8} - \frac{2yy'}{4} = 0$$

$$\frac{yy'}{2} = \frac{x}{4}$$

$$y' = \frac{x}{2y}$$

Misalkan koordinat titik singgungnya adalah $(x_1, y_1)$ maka kita mempunyai

sisitem persamaan $\frac{x_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{4} = 1$ ..........(1)

$$y' = \frac{x_1}{2y_1} = -1 \quad ..........(2)$$

Dari persamaan (2) kita peroleh

$\frac{x_1}{2y_1} = -1$ maka $x_1 = -2y_1$

kita subsitusi nilai $x_1$ ini kepersamaan (I)

$$\frac{x_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{4} = 1$$

$x_1^2 - 2y_1^2 = 8$

$(-2y_1)^2 - 2y_1^2 = 8$

$4y_1^2 - 2y_1^2 = 8$

$2y_1^2 = 8$

$y_1 = \pm 2$

Untuk $y_1 = 2$, maka $x_1 = -4$.Dengan demikian kita peroleh titik singgungnya (-4,2) dan persamaan garis singgungnya adalah

$$\frac{x_1.x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$\frac{-4x}{8} - \frac{2y}{4} = 1$$

$x + y = -2$

Untuk $y_1 = -2$ maka $x_1 = 4$ . Dengan demikian kita peroleh titik singgungnya (4,-2) dan persamaan garis singgungnya adalah

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \text{ , } \frac{4x}{8} - \frac{2y}{4} = 1 \text{ , } x + y = 2$$

2. Untuk Hiperbola Yang Berpusat Di M(h,k)

Rumus persaman garis singgung hiperbola yang berpusat di M(h,k) dengan gradien m dapat ditentukan dengan cara yang sama seperti rumus persamaan garis singgung hiperbola yang berpusat di O(0,0) dengan gradien m.

Rumus-rumus yang dimaksudkan itu dapat dirangkum sebagai berikut:

1. Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ dengan gradien m adalah $(y-k)=m(x-h)\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$.
2. Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ dengan gradien m adalah $(y-k)=m(x-h)\pm\sqrt{a^2-b^2m^2}$

**Contoh soal :**

1. Tentukan persaman garis singgung pada hiperbola

   a. $\frac{(x-1)^2}{100}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ yang sejajar dengan garis x - 2y + 8 = 0

   b. $\frac{(y-3)^2}{49}-\frac{(x+1)^2}{6}=1$ yang tegak lurus garis x + 2y – 14 = 0

   Penyelesaian:

   a. $\frac{(x-1)^2}{100}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ merupakan parabola horizontal dengan

      $a^2$=100 dan $b^2$=9

      Garis singgung sejajar dengan garis x - 2y + 8 = 0 atau y = $\frac{1}{2}$x + 4

      Berarti gradien m= $\frac{1}{2}$

KESIMPULAN

Sesuai dengan elips perpotongan garis $y = mx + c$ dengan hiperbola

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$b^2x^2 - a^2(mx + c)^2 = a^2b^2$$

$$(a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2c^2mx + a^2b^2 + a^2c^2 = 0$$

$$D = 4a^2b^2(-a^2m^2 + b^2 + c^2)$$

Jika didapat:

1. $c^2 < a^2m^2 - b^2$ , maka garis tidak memotong hiperbola
2. $c^2 > a^2m^2 - b^2$ , maka garis memotong hiperbola didua titik yang berlainan
3. $c^2 = a^2m^2 - b^2$ , maka garis menyinggung hiperbola

hingga didapat

a. garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan gradien m adalah

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

b. garis singgung hiperbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ dengan gradien m adalah

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$$

c. garis singgung hiperbola $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ dengan gradien m adalah

$$y - k = m(x - h) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

d. garis singgung hiperbola $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ dengan gradien m adalah

$y - k = m\,(x - h) \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$ .

# VI . DUA GARIS TENGAH SEKAWAN PADA HIPERBOLA

Untuk menjelaskan apa yang dimaksud dengan dua garis tengah sekawan marilah kita selidiki dulu soal berikut ini:

Soal: Tentukan tempat kedudukan tengah- tengah tali busur suatu hiperbola yang sejajar dengan garis $y = mx$

Penyelesaian :

Misalkan garis yang sejajar k persamaannya $y = mx + n$ . .(1), m merupakan parameter .

Garis ini memotong hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ , bila koordinat x tidak memotongnya memenuhi persamaan :

$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2 (mx + n)^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2 (m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$

$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow (b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0$

$$\text{dengan: } x_1 + x_2 = -\left(\frac{-2a^2mn}{b^2 - a^2m^2}\right)$$

$$= \frac{2a^2mn}{b^2 - a^2m^2}.$$

Misalkan T adalah tengah- tengah tali busur antara kedua tititk

potong itu, maka $x_t = \dfrac{a^2mn}{b^2 - a^2m^2}$

T terletak pada persamaan (1), berarti : $y_t = mx_t + n$

Jadi $y_t = mx_t + x_t\left(\dfrac{b^2 - a^2m^2}{a^2m}\right)$

$= x_t\left(m + \dfrac{b^2 - a^2m^2}{a^2m}\right)$

$= x_t\left(\dfrac{b^2}{a^2m}\right)$

Kalau T dijalankan didapatlah:

$Y = \dfrac{b^2}{a^2m}x$ ............................(2)

Ternyata tempat kedudukan itu adalah persamaan linear dalam x dan y jadi merupakan suatu garis lurus. Namakan persamaan (2) garis $l$ karena persamaan (2) tak mengandung bilangan tetap tentulah $l$ melalui titik pangkal O.

*Defenisi :*

Garis k dan l disebut garis tengah sekawan suatu hiperbola yang satu merupakan tempat kedudukan titik tengah semua tali busur yang sejajar dengan yang lain. (Drs. R. Rawuh hal: 13)

Hubungan antara koefisien arah kedua garis tengah sekawan dapat ditentukan sebagai berikut: misalkan garis $i$ = m', maka $m = \frac{b^2}{a^2 m}$

Maka: mm' = m $\frac{b^2}{a^2 m}$

Rumus: mm'= $\frac{b^2}{a^2}$

Jadi hasil kali kedua koefisien arak dari dua garis tengah sekawan adalah tetap yaitu sama dengan $\frac{b^2}{a^2}$ .

Catatan:

1. Jika titik ujung garis tengah sekawan pertama $(x_1,y_1)$ dan titik ujung garis tengah kedua adalah $(x_2,y_2)$ maka berlaku hubungan

   $\frac{x_2}{a} = \pm \frac{y_1}{b}$ ; $\frac{y_2}{b} = \pm \frac{x_1}{a}$

2. Titik ujung dua garis tengah sekawan adalah keempat titik potong garis- garis itu dengan kedua hiperbola sekawan, dengan syarat bahwa bilamana dari dua garis tengah sekawan itu hanya dimaksudkan panjangnya, maka kedua garis tengah sekawan itu dibatasi oleh titik-titik ujungnya.

## VII.HIPERBOLA SEKAWAN

Perhatikan persamaan : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, yang mana persamaan ini juga dapat ditulis sebagai : $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, merupakan suatu hiperbola yang memotong sumbu-y tetapi tidak memotong sumbu-x. Hiperbola itu diperoleh dengan menukar $\frac{x}{a}$ dan $\frac{y}{b}$ dari hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Fokus dari hiperbola baru ; $F_1(0,c)$ dan $F_2(0,-c)$ dan asimtotnya tetap yaitu $y=\pm\frac{b}{a}x$ Kedua hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ dinamakan dua hiperbola sekawan. Oleh karena ke-empat puncaknya adalah (± a,0) dan (0,±b) , maka ke-empat garis singgung di puncak itu haruslah membentuk suatu empat persegi panjang, yang sisinya sejajar dengan kedua sumbu koordinat , sedangkan titik-titik sudutnya terletak pada kedua asimtot.

$\frac{b}{a}\frac{b}{a}$ Jika kedua asimtot suatu hiperbola : $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ tegak lurus sesamanya tentulah hasil kali kedua koofisien arahnya:

$$P.P\frac{b}{a}_1=\frac{b}{a}(-\frac{b}{a})=-1 \Rightarrow \frac{b}{a}=1 \rightarrow a=b. \Rightarrow \frac{a}{b}$$

Persamaan hiperbola menjadi : $a^2x^2-a^2y^2=a^2a^2$ atau $x^2-y^2=a^2$. Hiperbola demikian ialah kedua asimtotnya tegak lurus sesamanya , dinamakan <u>hiperbola ortogonal</u>. Kedua fokus menjadi : $F(\pm a\sqrt{2})$.

**Contoh soal:**

Gambarlah sketsa hiperbola berikut.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{64} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1$$

Jawab:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Pusat:O(0,0)

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \rightarrow c = 5$

Titik puncak: $A_1$ (4,0) dan $A_2$ (-4,0).

Fokus : $F_1$ (5,0) dan $F_2$ (-5,0)

Sumbu simetri : sumbu x dan sumbu y

Asimtot didapat dari $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$

$$\frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{16}$$

$$y^2 = \frac{9}{16}x^2$$

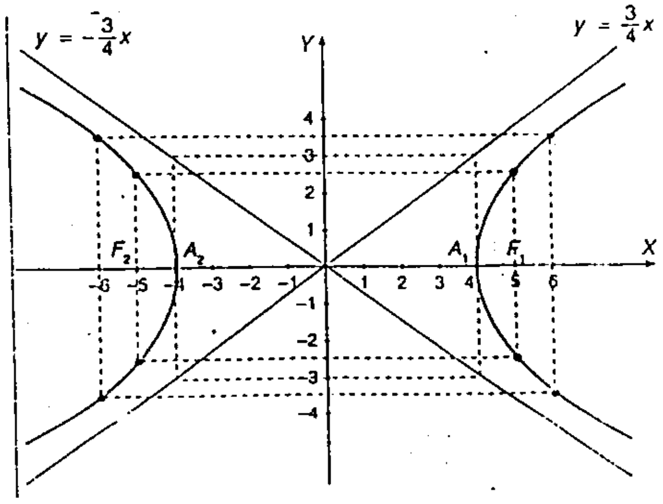
$$y = \pm\frac{3}{4}x$$

Beberapa titik bantu :

Jika x = 5 maka y = $\pm\frac{9}{4}$

Jika x = 6 maka y = $\pm\frac{3}{2}\sqrt{5} \approx 3,4$

Sketsa hiperbola



b. $\frac{(x-3)^2}{64} - \frac{(y+2)^2}{36}$

Pusat ; P (3,-2)

$a^2 = 64 \rightarrow a = 8$

$b^2 = 36 \rightarrow b = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 = 100 \rightarrow c = 10$

Puncak : $A_1$ (11,-2) dan $A_2$ (-5,-2)

Fokus : $F_1$ (13,-2) dan $F_2$ (-7,-2)

Sumbu simetri : garis x = 3 dan garis y = -2

Asimtot : $\frac{(x-3)^2}{64} - \frac{(y+2)^2}{36} = 0$

$\frac{(y+2)^2}{36} = \frac{(x-3)^2}{64}$

$(y+2)^2 = \frac{36}{64}(x-3)^2$

$y+2 = \pm\frac{3}{4}(x-3)$

$4y + 8 = \pm\ (3x - 9)$

$4y = -8 \pm\ (3x - 9)$

Dengan demikian persamaan asimtot hiperbola tersebut adalah:

$4y = -8 + 3x - 9$ dan $4y = -8 - 3x + 9$

$\Rightarrow 4y = 3x - 17$ dan $4y = -3x + 1$

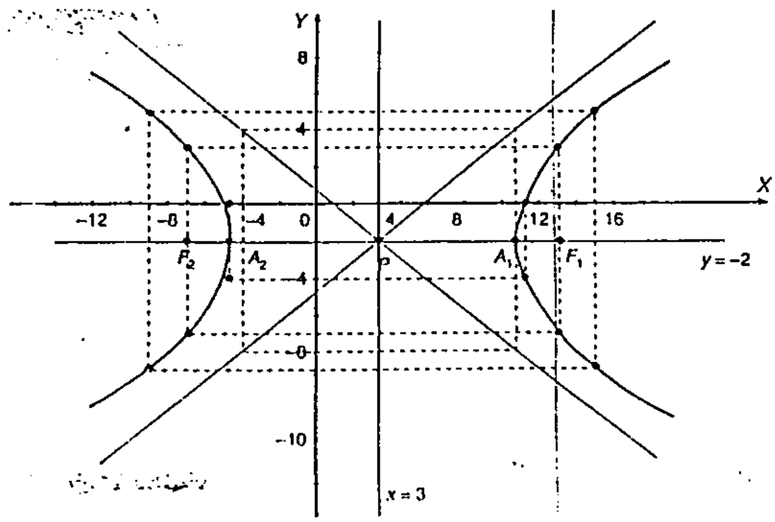
(6) Beberapa titik bantu :

Jika $x = 3 \pm \frac{8}{3}\sqrt{10} \approx 3 \pm 8{,}4$ maka $y = 0$

Jika $x = 13$ maka $y = 2{,}5$ dan $-6{,}5$

Jika x = 15 maka y = -2 + $3\sqrt{5} \approx 4,7$ dan y = -2 - $3\sqrt{5} \approx -8,7$

(7) Sketsa grafik



## SOAL-SOAL LATIHAN

Untuk masing-masing hiperbola pada soal nomor 1 sampai dengan 10, tentukanlah:

a. koordinat titik pusat

b. koordinat titik puncak

c. persamaan direktris

d. nilai eksentrisitas

e. koordinat fokus

f. sumbu simetri

g. persamaan direktris

h. panjang latus dan rektum

1. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

2. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$

3. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

4. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$

5. $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{32}=1$

6. $\frac{(x-2)^2}{144}-\frac{(y+3)^2}{25}=1$

7. $\frac{(x+1)^2}{54}-\frac{(y-3)}{27}=1$

8. $\frac{(x+3)^2}{40}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$

9. $\frac{(x+4)^2}{28}-\frac{(y+2)^2}{36}=1$

10. $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$

Untuk soal-soal nomor 11 sampai dengan 15, carilah persamaan hiperbola yang beberapa unsurnya adalah sebagai berikut:

11. Pusat O(0,0) dan puncak A(3,0)

12. Pusat O(0,0) dan puncak A(8,0) dan nilai eksentrisitas $e = 1\frac{1}{4}$

13. Pusat O(0,0) panjang sumbu tranfersal =16 dan panjang sumbu sekawan=10

14. Ujung-ujung sumbu sekawan adalah $B_1(4,-1)$ dan $B_2(4,5)$ panjang sumbu tranfersal adalah 10

15. Titik pusat (-1,3), titik fokus F(7,3) dan panjang sumbu sekawan =8

16. Buktikan bahwa persamaan parameter suatu hiperbola dapat ditulis juga sebagai

$$x = a \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$y = b\,\frac{2t}{1-t^2}, \text{ dengan } t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$$

17. Buktikanlah bahwa koofisien garis penghubung kedua titik $\varphi$ dan $\psi$ pada hiperbola

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ adalah: $b \cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi) / a \sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$

18. Bagaimanakah bentuk persamaan garis singgung di titik $(x_1,y_1)$ pada hiperbola

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

19. Tentukanlah persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ yang :

a. sejajar garis $x + y + 1 = 0$

b. tegak lurus garis $x - 2y = 0$

32. Hiperbola $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{12}=1$ dititik (-4,6)

33. Hiperbola $\frac{(x-3)^2}{18}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$ dititik (-3,3)

34. Hiperbola $\frac{(x+1)^2}{32}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$ dititik (7,-3)

Untuk soal – soal nomor 35 sampai dengan 37, carilah persamaan garis singgung pada masing-masing hiperbola untuk gradien garis singgung yang diberikan

35. Hiperbola $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{4}=1$ dengan gradien -2

36. Hiperbola $\frac{(x+3)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{36}=1$ dengan gradien –3

37. Hiperbola $\frac{(x+1)^2}{32}-\frac{(y+5)^2}{9}=1$ dengan gradien $-\frac{3}{4}$

Untuk soal nomor 38 sampai dengan 40, carilah persamaan garis singgung yang dibuat melalui titik diluar hiperbola yang diberikan pada masing-masing hiperbola berikut:

38. Hiperbola $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{18}=1$ dari titik (2,0)

39. Hiperbola $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{12}=1$ dari titik (4,-8)

40. Hiperbola $\frac{(x+3)^2}{3}-\frac{(y+1)^2}{2}=1$ dari titik (-2,-3)

# Daftar Kepustakaan


Borowski E. J., Borwein J. M., (1989). *Dictionary of Mathematics*. London: Harper Collins Publishers

Dalman E., (1996). *Penuntun Belajar matematika 3 Berdasarkan Kurikulum SMU 1994 untuk SMU Kelas III*. Bandung: Ganesha E.

Elvin R. , Ledsham A. , Oliver. C. (1993). *Basic Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Hadi, Johar, (1989). Matematika untuk SMA. Padang: Tim Matematika.

Hakim, Abdul, (1976). *Ilmu Ukur Untuk Sekolah Dasar* (Menengah Pertama Jilid III) Bukittinggi: Darma Aksara.

Peranginangin, K. (1978). *Ilmu Ukur Analitik*, Jakarta: Mutiara.

Prayitno, Budhi (1997). *Matematika Untuk SMU Kelas 3*. Jakarta: Erlangga

Rawuh, (1961). *Ilmu Ukur Analitik*. Bandung: Tarate.

Simangunsong, Wilson. (1992). *Matematika SMU*. Jakarta: Erlangga

Soewardi. (1984). *Melukis Bentuk Geometri*. Jakarta : Gramedia.

Tim Matematika (1990). *Matematika SMP Jilid 1,2,3,4,5,6*, Klaten: Intan Pariwara

Tim LBB IPIEMS (1991). *Progres Matematika*. Surabaya: IPIEMS