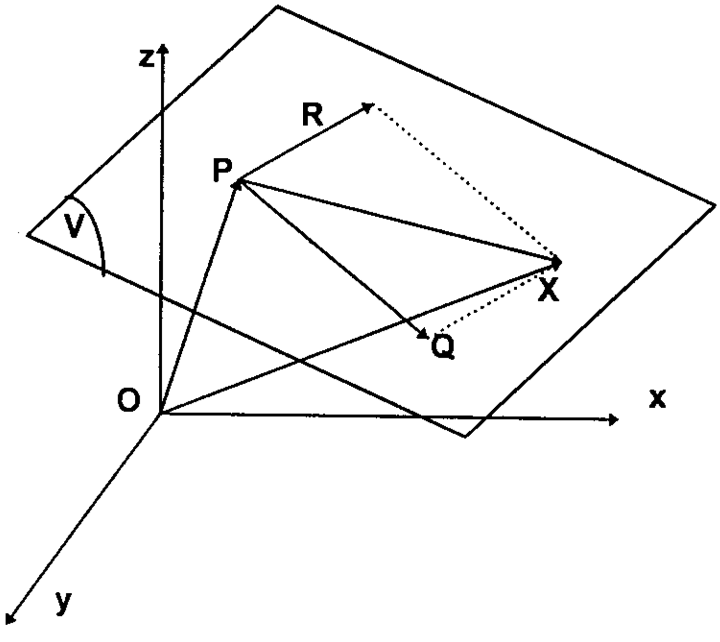
BIDANG DAN GARIS DI R^3



Oleh :

1. Drs. Mukhni, M. Pd
2. Drs. Nurlius

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PADANG

1 9 9 8

KATA PENGANTAR

Puji syukur disampaikan kehadirat Allah Subhanahu wata'ala, karena berkat kodrat dan iradah-Nyalah penulisan buku yang berjudul **Bidang dan Garis di $\mathbf{R^3}$** ini dapat diselesaikan.

Buku ini ditulis berdasarkan pada pengalaman penulis dalam mendalami bidang Geometri terutama Geometri Analitik Ruang. Dalam penulisan materi ini, penulis telah berusaha menyajikan materi tentang Bidang dan Garis di R^3 yang mengandung unsur-unsur didaktik dan metodik serta konstruktif, baik dalam teori maupun contoh-contoh soalnya.

Cakupan isi buku ini dibagi atas 4 bab. Bab I: Pendahuluan, yaitu untuk mengingat kembali tentang pengertian dan sifat-sifat garis di R^2 yang merupakan bahan pengantar untuk mempelajari Bidang dan Garis di R^3. Bab II, membahas tentang Sistem Koordinat di R^3 yang meliputi: Sistem Koordinat Siku-siku, Sistem Koordinat Silinder, dan Sistem Koordinat Bola; pengertian proyeksi di R^3, dan menentukan panjang sebuah segemen garis atas perbandingan tertentu. Bab III membahas tentang Bidang Rata yang meliputi bentuk persamaan Bidang Rata, Bentuk Normal, Sudut antara Dua Bidang Rata, Jarak Sebuah Titik ke Bidang Rata, Jarak antara Dua Bidang Rata, dan Jaringan Bidang Rata. Bab IV, membahas tentang Garis Lurus di R^3 yang mencakup: Bentuk Persamaan Garis Lurus, Garis Lurus sebagai Perpotongan Dua Bidang Rata, Kedudukan Dua Garis Lurus, Kedudukan Garis Lurus dengan Bidang Rata, dan Jarak antara Dua Garis Lurus.

Bagi para pembaca buku ini, pada Kepustakaan diberikan beberapa buku rujukan. Ini dimaksudkan untuk membantu para pembaca dalam mendalami lebih lanjut tentang materi yang dibahas dalam buku ini.

Terakhir penulis mengucapkan terima kasih banyak kepada semua pihak yang telah memberikan sumbangan pemikiran kepada penulis dalam penyusunan buku ini.

Semoga buku ini ada manfaatnya, Amin !!!

Padang, September 1998.

Penulis

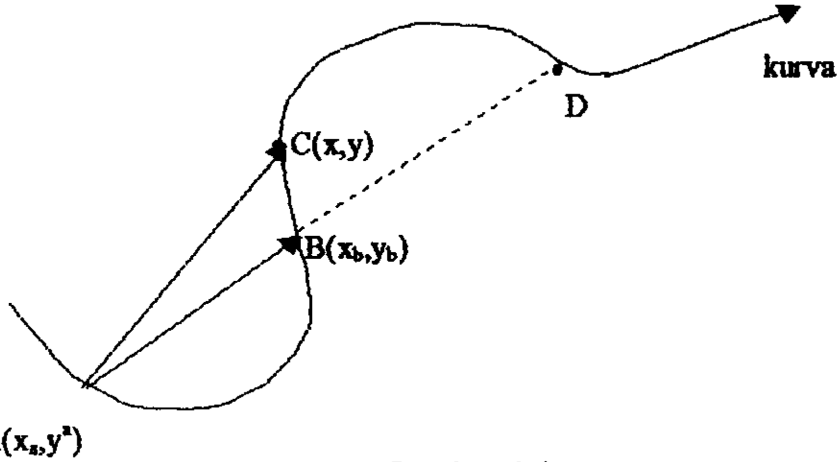
DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Persamaan Garis Lurus di R^2

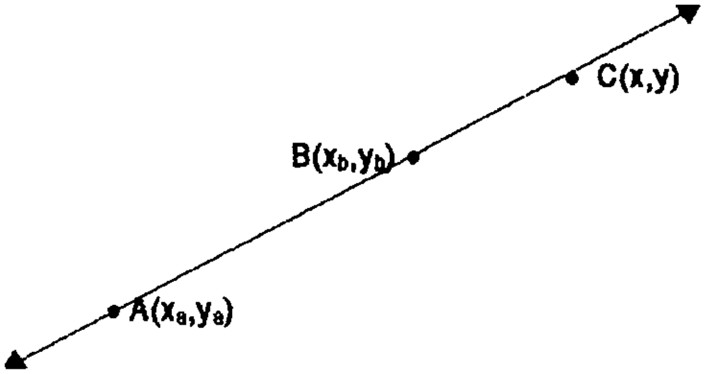
Suatu kurva di R^2 akan merupakan garis lurus jika vektor $\vec{AB}$ (A dan B adalah dua titik tertentu yang terletak pada kurva), dapat dinyatakan dengan vektor $\vec{AC}$ (C merupakan sebarang titik yang terletak pada kurva). Pada gambar 1.1 ditunjukkan sebuah kurva dengan titik-titik $A(x_a,y_a)$ dan $B(x_b,y_b)$ yang terletak pada kurva tersebut.



Gambar 1.1.

C(x,y) merupakan sebarang titik yang terletak pada kurva. Terlihat bahwa vektor $\vec{AB}$ tidak dapat dinyatakan dalam vektor $\vec{AC}$ ($\vec{AB} \neq k\vec{AC}$), karena mempunyai arah yang berbeda. Jika C berimpit dengan titik D, maka $\vec{AC}$ = $\vec{AD}$, sehingga dapat dinyatakan vektor $\vec{AD}$ = $\vec{AC}$ = $k\vec{AB}$. Dalam keadaan seperti ini, ke tiga titik A, B, dan D terletak pada satu garis lurus. Dengan demikian setiap posisi titik C(x,y) yang terletak pada sebuah garis lurus yang memuat titik A dan B selalu terdapat hubungan $\vec{AC} = k\vec{AB}$.

Berdasarkan hal tersebut di atas, dapat ditentukan persamaan umum suatu garis lurus seperti berikut ini. Gambar 1.2. menunjukkan sebuah garis lurus yang memuat titik $A(x_a,y_a)$, titik $B(x_b,y_b)$ dan C(x,y).



Gambar 1.2.

Karena ke tiga titik tersebut terletak pada garis lurus, maka selalu berlaku:

$\vec{AC} = k\vec{AB}$, dengan k adalah suatu konstanta, atau

$(x - x_a)\,\vec{i} + (y - y_a)\,\vec{j} = k\{(x_b - x_a)\,\vec{i} + (y_b - y_a)\,\vec{j}\}.$

atau

$(x - x_a)\,\vec{i} + (y - y_a)\,\vec{j} = k(x_b - x_a)\,\vec{i} + k(y_b - y_a)\,\vec{j}\,.$

Dari persamaan tersebut dapat dilihat bahwa:

i) $x - x_a = k(x_b - x_a)$, atau $k = \dfrac{x - x_a}{x_b - x_a}$,

ii) $y - y_a = k(y_b - y_a)$, atau $k = \dfrac{y - y_a}{y_b - y_a}$.

Dari I) dan II) diperoleh:

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a}\text{ , atau}$$

$$(y_b - y_a)(x - x_a) = (x_b - x_a)(y - y_a),$$

atau

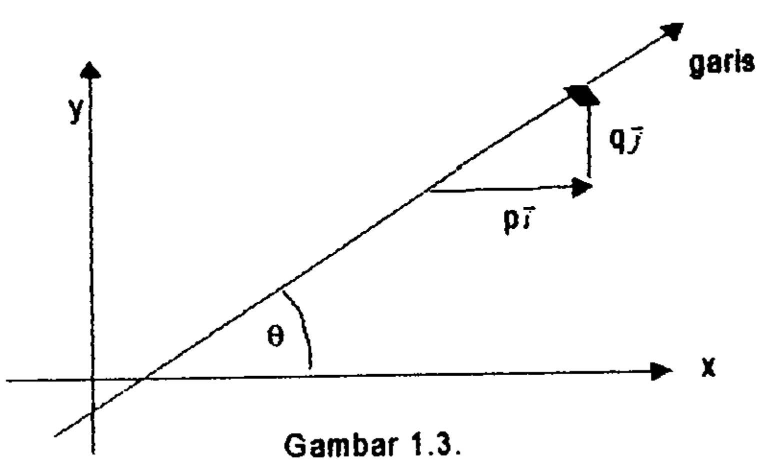
$$(y_b - y_a)x + (x_a - x_b)y + (x_a y_a - x_a y_b + x_b y_a - x_a y_a) = 0 \text{ .... } (^*).$$

Jika dimisalkan $y_b - y_a = A$; $x_a - x_b = B$, dan $x_a y_a - x_a y_b + x_b y_a - x_a y_a = C$, maka persamaan (*) menjadi

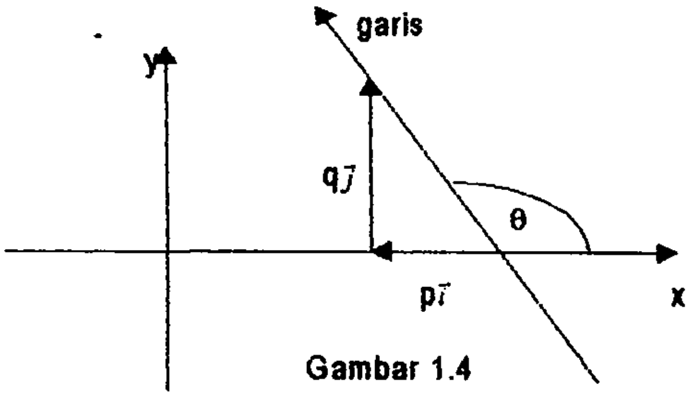
$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

disebut persamaan umum garis lurus.

Setiap garis lurus selalu memotong sumbu x, kecuali jika garis tersebut sejajar atau berimpit dengan sumbu x. Pada gambar 1.3. dan gambar 1.4, sudut berarah dari $\bar{\imath}$ ke garis adalah θ.



Gambar 1.3.

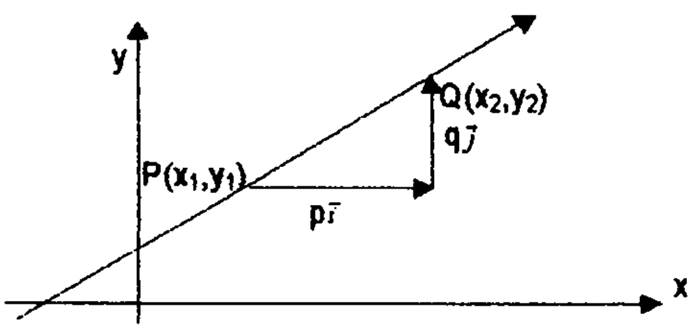


Gambar 1.4

Jika garis sejajar atau berimpit dengan sumbu x maka $\theta = 0$, dan jika garis tersebut memotong sumbu x, maka $\theta \neq 0$. Ini berarti jika absis berubah, ordinat juga berubah dan sebaliknya, kecuali $\theta = 90^0$, $p \neq 0$, dan $tg\,\theta = \frac{q}{p}$, sehingga $p\vec{i} + q\vec{j}$ merupakan suatu vektor yang telah tertentu.

Jika p perubahan absis dan q pereubahan ordinat naka $tg\,\theta = \frac{q}{p}$. $\frac{q}{p}$ di sebut gradien atau koefesien arah garis, sedangkan $k(p\vec{i} + q\vec{j})$ disebut vektor arah garis (k= suatu konstanta). Perubahan nilai p dan q bisa positip dan bisa negatif.

untuk menetukan gradien garis $Ax + By + C = 0$, perhatikan gambar 1.5 berikut :



Gambar 1.5.

Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dua buah titik yang terletak pada garis $Ax + By + C = 0$, maka berlaku;

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$

atau

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$$
$$A(x_2 - x_1) = -B(y_2 - y_1)$$

$$\vec{PQ} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

Jika $(x_2 - x_1) = p$ dan $(y_2 - y_1) = q$, maka $\vec{PQ} = p\vec{i} + q\vec{j}$ dan

$$\frac{q}{p} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A}{B}$$

Jadi gradien garis $Ax + By + C = 0$ adalah $-\frac{A}{B}$.

Persamaan garis $Ax + By + C = 0$ dapat diambil menjadi bentuk $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, dengan $B \neq 0$, atau $y = mx + n$, $(m = -\frac{A}{B}, n = -\frac{C}{B})$, jadi jika persamaan garis ditulis dalam bentuk $y = mx + n$, maka gradien garis itu adalah m.

1.2 Persamaan Garis Melalui Sebuah Titik Tertentu

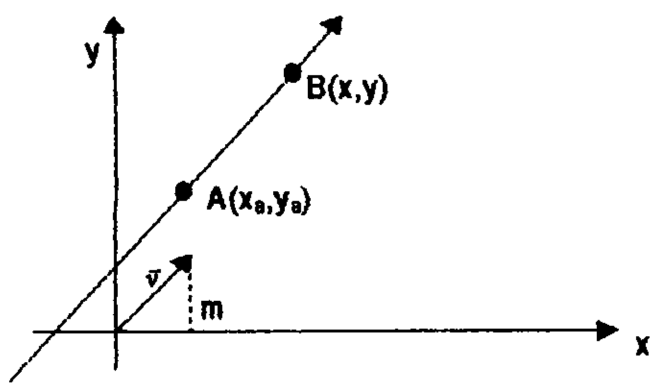
Misalkan diminta untuk membuat persamaan garis yang melalui sebuah titik tertentu $A(x_a, y_a)$ dengan gradien m. Persamaan garis yang dimaksud dapat dicari sebagai berikut.

Jika titik $B(x,y)$ sebarang titik yang terletak pada garis yang diminta, maka vektor $k\vec{v}$, dengan $\vec{v} = \vec{i} + m\vec{j}$dan k adalah suatu konstanta (lihat gamabr 1.6). Jadi berlaku :

$$\vec{AB} = k(\vec{i} + m\vec{j})$$
$$(x - x_a)\vec{i} + (y - y_a)\vec{j} = k\vec{i} + km\vec{j}$$

Atau berlaku :

$$x - x_a = k, \text{ dan } y - y_a = km$$



Gambar 1.6

Atau :

$$y - y_a = m(x - x_a)$$

Jadi persamaan garis melalui titik $A(x_a, y_a)$ dan gradien m adalah :

$$y - y_a = m(x - x_a).$$

Contoh :

Tentukan persamaan garis yang melalui titik P(3,2) dan bergradien m = -2

Jawab :

Persamaan garis yang dimaksud adalah :

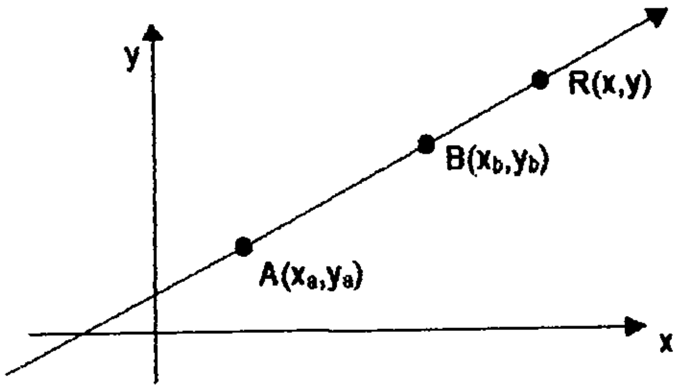
$$y - y_a = m(x - x_a)$$
$$y - 2 = -2(x - 3)$$

atau

$$y = -2x + 8$$

1.3 Persamaan Garis Melalui Dua Buah Titik Tertentu

Misalkan diberikan dua buah titik $A(x_a, y_a)$ dan $B(x_b, y_b)$, Misalkan titik $R(x, y)$ adalh sebarang titik yang terletak pada garis melalui titik A dan B. Karena ketiga titik A,B dan R terletak pada sebuah garis, maka vektor $\vec{AR}$ selalu dapat dinyatakan dalam vektor $\vec{AB}$ (lihat gambar 1.7)



Gambar 1.7

Jadi dapat ditulis persamaan :

$$\vec{AR} = k\,\vec{AB}\text{ , k= konstanta}$$

Atau

$$(x - x_a)\,\vec{i} + (y - y_a)\,\vec{j} = k\{(x_b - x_a)\,\vec{i} + (y_b - y_a)\,\vec{j}\}$$

$$= k(x_b - x_a)\,\vec{i} + k(y_b - y_a)\,\vec{j}\,.$$

Ini berarti bahwa:

$$(x - x_a) = k(x_b - x_a) \text{ atau } k = \frac{x - x_a}{x_b - x_a} \text{ .... (*)}$$

$$(y - y_a) = k(y_b - y_a) \text{ atau } k = \frac{y - y_a}{y_b - y_a} \quad \text{.........................} \quad (^{**})$$

Berdasarkan (*) dan (**) diperoleh:

$$\boxed{\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a}}$$

yang merupakan persamaan garis melalui dua titik $A(x_a, y_a)$ dan $B(x_b, y_b)$.

Contoh soal:

Selidikilah apakah ke tiga titik A(2,-1), B(-3,2), dan C(2,-1) terletak pada satu garis atau kolinear.

Jawab:

Untuk menyelidiki apakah tiga buah titik terletak pada sebuah garis atau tidak, terlebih dalu ditentukan persamaan garis melalui dua titik dari tiga titik yang diberikan. Misalnya ditentukan persamaan garis melalui titik A dan B, yaitu:

$$\frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{x - x_a}{x_b - x_a}$$

$$\frac{y - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{x - 2}{-3 - 2} \quad \text{atau} \quad \frac{y + 1}{3} = \frac{x - 2}{-5} \quad \text{atau}$$

$3x + 5y - 1 = 0.$

Selanjutnya untuk menyelidiki apabila titik C(2,-1) terletak pada garis $3x + 5y - 1 = 0$, cukup disubstitusikan saja titik C(2,-1) ke persamaan tersebut. Jika menghasilkan pernyataan yang benar berarti titik C terletak pada garis tersebut, dan jika menghasilkan pernyataan yang salah, berarti ke tiga titik tersebut tidak segaris.

$3x + 5y - 1 = 0$

$3.2 + 5(-1 - 1 = 0$

$6 - 5 - 1 = 0$ .... (benar).

Jadi dapat disimpulkan bahwa ke tiga titik A(2,-1), B(-3,2) dan C(2,-1) terletak pada satu garis.

1.4. Sudut Antara Dua Garis

Misalkan diberikan dua buah garis $p = y = m_1x + n_1$ dan $q = y = m_2x + n_2$. Menentukan besar sudut antara garis p dan q, sama halnya dengan cara menentukan besar sudut antara $\bar{p} = \bar{i} + m_1\bar{j}$ dan $\bar{q} = \bar{i} + m_2\bar{j}$; karena yang dipentingkan adalah arahnya. Vektor-vektor p dan q masing-masing merupakan vektor arah garis p dan garis q .

$\bar{p}.\bar{q} = (\bar{i} + m_1\bar{j}).(\bar{i} + m_2\bar{j})$

$|\bar{p}|.|\bar{q}|$ Cos (p,q) = $1 + m_1m_2$.

atau

Cos (p,q) = $\dfrac{1 + m_1m_2}{|p||q|}$ .... (*).

Selanjutnya vektor-vektor p dan q, dapat juga dinyatakan dalam tiga dimensi, yaitu $\bar{p} = \bar{i} + m_1\bar{j} + 0\bar{k}$ dan $\bar{q} = \bar{i} + m_2\bar{j} + 0\bar{k}$.

$$\bar{p} \times \bar{q} = (\bar{i} + m_1\bar{j} + 0\bar{k}) x (\bar{i} + m_2\bar{j} + 0\bar{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & m_1 & 0 \\ 1 & m_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & m_1 \\ 1 & m_2 \end{vmatrix} |\bar{k}|$$

$$= m_2 - m_1.$$

atau $\quad |\bar{p}|.|\bar{q}| \text{ Sin } (\bar{p}, \bar{q}) = m_2 - m_1.$

atau $\quad \text{Sin } (\bar{p}, \bar{q}) = \dfrac{m_2 - m_1}{|\bar{p}||\bar{q}|}$ .... (**)

Dari persamaan (*) dan (**) diperoleh:

$$\text{tg } (\bar{p}, \bar{q}) = \frac{Sin\ (p, q)}{Cos\ (p, q)}$$

$$= \frac{\dfrac{m_2 - m_1}{|\bar{p}||\bar{q}|}}{\dfrac{m_1 m_2}{|\bar{p}||\bar{q}|}}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2}$$

Jadi jika θ adalah besar sudut antara garis-garis $p \equiv y = m_1x + n_1$ dan $q \equiv y = m_2x + n_2$, maka

$$\text{tg } \theta = \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2}$$

atau

$$\theta = \text{arc tg } \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2}\right)$$

Jika sudut antara kedua garis p dan q tersebut $\theta = 0$, akibatnya $\text{tg } \theta = 0$, yang berarti:

$$m_2 - m_1 = 0 \quad \text{atau} \quad m_2 = m_1$$

Ini berarti bahwa dua buah garis $p \equiv y = m_1x + n_1$ dan $q \equiv y = m_2x + n_2$, sejajar jika nilai $m_2 = m_1$.

Kedua garis tersebut saling tegaklurus jika : Cotg $(\bar{p},\bar{q}) = 0$. Hal ini hanya mungkin jika :

$$1 + m_1m_2 = 0 \quad \text{atau} \quad m_1m_2 = -1.$$

Jadi syarat agar dua buah garis $p \equiv y = m_1x + n_1$ dan $q \equiv y = m_2x + n_2$ saling tegaklurus, haruslah

$$m_1m_2 = -1.$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis yang melalui titik P(2,1) dan membentuk sudut 45^0dengan garis $2x - 3y = 6$

Jawab:

Misalkan gradien garis yang akan dicari adalah m. Gradien garis $2x - 3y = 6$ adalah $m_1 = \frac{2}{3}$, maka

$$\tan 45^0 = \frac{\frac{2}{3} - m}{1 + \frac{2}{3}m}$$

$$\text{atau} \qquad 1 = \frac{\frac{2}{3} - m}{1 + \frac{2}{3}m}$$

$$\text{atau} \qquad 1 + \frac{2}{3}m = \frac{2}{3} - m \quad \text{atau} \quad m = -\frac{1}{5}.$$

Jadi persamaan garis yang diminta adalah

$y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2)$ atau $x + 5y = 7$

Ada dua garis yang melalui titik P(2,1) dan membentuk sudut 45^0 dengan garis $2x - 3y = 6$. Garis kedua ini dapatditentukan dengan cara berikut:

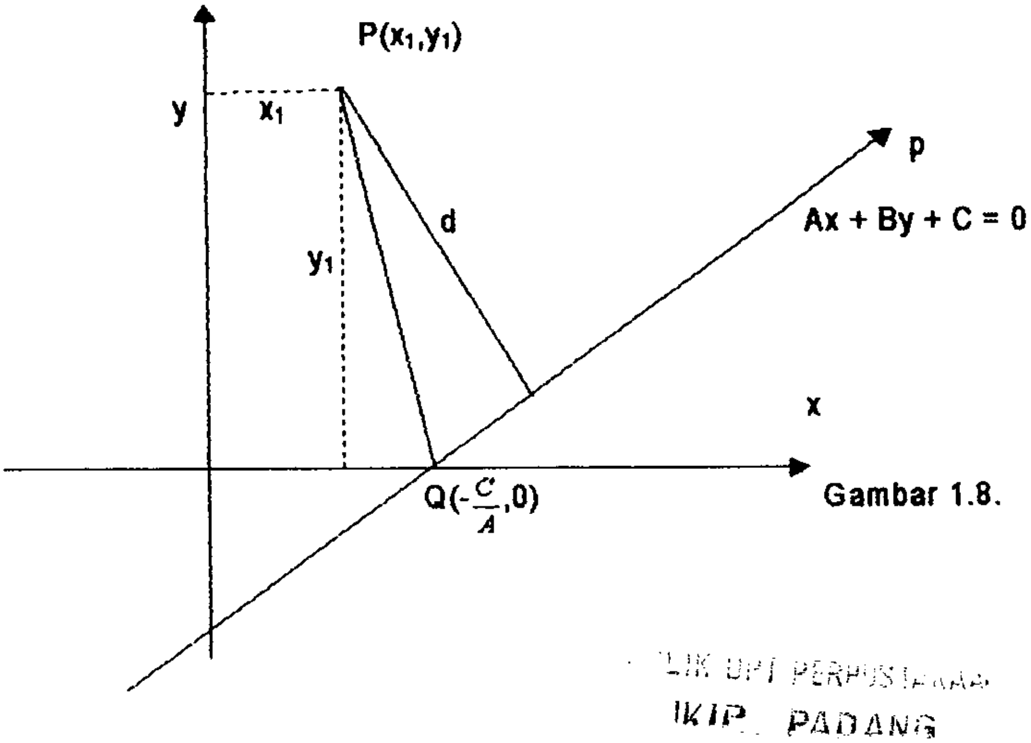
$\tan 45^0 = \dfrac{m - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}m}$ atau $1 + \frac{2}{3}m = m - \frac{2}{3}$ atau $m = 5$

Jadi persamaan garis kedua yang dimaksud adalah $y - 1 = 5(x - 2)$

atau $5x - y = 9$

1.5. Jarak Sebuah Titik ke Garis

Misalkan titik $P(x_1,y_1)$ tidak terletak pada garis $p \equiv Ax + By + C = 0$. Akan ditentukan jarak titik P ke garis p. Untuk maksud tersebut, ambil titik Q(x,y) sebarang pada garis p. Selanjutnya kalikan (perkalian vektor) vektor $\vec{OP}$ dengan vektor $\bar{p}$ ($\bar{p}$ adalah vektor arah garis p). Untuk memudahkan ambil titik potong garis p dengan sumbu koordinat, misalnya sumbu X (lihat gambar 1.8).



Gambar 1.8.

Titik Q tersebut adalah Q($-\frac{C}{A}$,0).

$\bar{p} = B\bar{i} - A\bar{j}$ (gradien $p = -\frac{A}{B}$).

$\vec{QP} = (x_1 + \frac{C}{A})\bar{i} + y_1\bar{j}$.

$$\left|\bar{p} \times \vec{QP}\right| = |\bar{p}|\left|\vec{QP}\right| \sin(\bar{p}, \vec{QP})$$
$$= |\bar{p}|\left|\vec{QP}\right| \cdot \frac{d}{\left|\vec{QP}\right|}$$
$$= |\bar{p}| \cdot d$$

atau

$$d = \frac{\left|\bar{p} \times \vec{QP}\right|}{|\bar{p}|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots *)$$

dengan d = jarak P ke garis p.

$$\bar{p} \times \vec{QP} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ B & -A & 0 \\ x_1 + \frac{C}{A} & y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} B & -A \\ x_1 + \frac{C}{A} & y_1 \end{vmatrix} |\bar{k}|,$$ dengan $\bar{k}$ =vektor satuan pada arah $\bar{i} x \bar{j}$.

$$\left|\bar{p} \times \vec{QP}\right| = \begin{vmatrix} B & -A \\ x_1 + \frac{C}{A} & y_1 \end{vmatrix} \qquad = |By_1 + Ax_1 + C| \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **)

$$|\bar{p}| = |B\bar{i} - A\bar{j}| = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ***).$$

Dari *), **) dan ***) diperoleh :

$$d = \pm\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

(Tanda ± digunakan untuk mengoreksi jarak, karena jarak harus dipilih yang bertanda positif)

Jadi jarak titik $P(x_1,y_1)$ ke garis $p \equiv Ax + By + C = 0$ adalah

$$\boxed{d = \pm\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Contoh:

Tentukan dua buah titik yang mempunyai koordinat x = -3 (berabsis –3) dan berjarak 6 satuan terhadap garis 5x – 12y = 3.

Jawab:

Misalkan ordinat y dari titik tersebut adalah y_1, maka dengan menggunakan rumus jarak diperoleh:

$$d = \pm\frac{5(-3) - 12y_1 - 3}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$6 = \pm\frac{5(-3) - 12y_1 - 3}{\sqrt{169}}$$

atau $\pm 78 = 18 + 12y_1$

$\pm 13 = 3 + 2y_1$

$y_1 = \frac{1}{2}(\pm 13 - 13)$

$(y_1)_1 = -8$ atau $(y_1)_2 = 5$.

Jadi dua titik yang dimaksud adalah (-3,-8) dan (-3,5).

1.6. Persamaan Garis dalam Koordinat Polar

Untuk menyatakan persamaan garis dalam koordinat polar, sebenarnya dapat mengubah langsung persamaan garis dalam koordinat kartesius dengan mensubstitusikan harga-harga x dan y kedalam persamaan tersebut, yaitu :

$x = r \cos \theta$, dan

$y = r \sin \theta$,

jadi, dengan demikian, jikia suatu garis yang dalam koordinat kartesius mempunyai persamaan :

$Ax + By + C = 0$,

maka dalam koordinat polar mempunyai persamaan :

$$A(r \cos \theta) + B(r \sin \theta) + C = 0$$

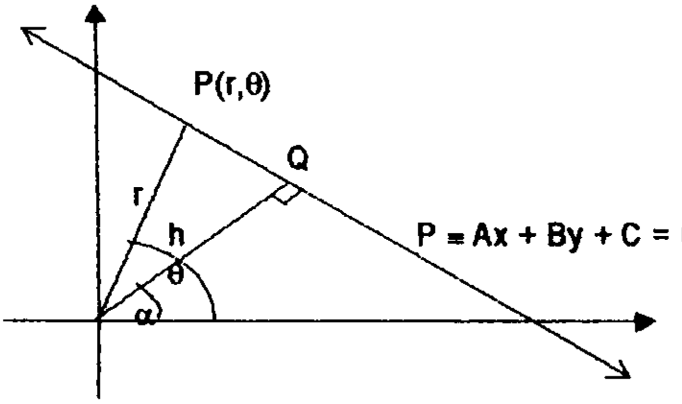
Persamaan garis dalam koordinat polar seperti yang dinyatakan di atas, masih bukan untuk dapat dengan segera menduga tentang posisi atau gambar garis tersebut jika tanpa bantuan koordinat kartesius.

Supaya dengan mudah menduga posisi garis dalam koordinat polar, persamaan garis tersebut dinyatakan dalam bentuk standar. Persamaan ini pada prinsipnya berpedoman kepada jarak pusat koordinat pada garis tersebut.

Misalkan garis p mempunyai persamaan $Ax + By + C = 0$. Jarak titik $O(0,0)$ terhadap garis p adalah :

$$h = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Bilangan $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ yang menyatakan jarak pusat koordinat O (0,0) terhadap garis Ax + By + C = 0 (lihat gambar 1.9), dinyatakan dalam x dan y (absis dan ordinat titik-titik yang terletak pada garis tersebut).



gambar.1.9

Untuk maksud tersebut persamaan garis diubah menjadi : Ax + By = -C. Selanjutnya kedua ruas dibagi dengan $\sqrt{A^2+B^2}$, dan diperoleh :

$$\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Ax+By}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y$$

Karena ruas kiri merupakan jarak, maka selalu disebut positif, sehingga secara umum dapat ditulis.

$$-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y$$

Jika konstanta x dan y dinyatakan dalam koordinat-koordinat polar, maka persamaan tersebut menjadi :

$$\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}(r\cos\theta) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}(r\sin\theta)$$

$$= r\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta\right), \quad ...(*)$$

dengan θ adalah sudut yang dibentuk oleh sumbu x positif dengan vektor $\overrightarrow{OP}$. Dalam hal ini, P adalah sebarang titik yang terletak pada garis p≡Ax+By+C=0, karena x dan y adalah absis dan ordinat titik yang terletak pada garis tersebut.

Gradien garis Ax + By + C = 0 adalah $m = -\frac{A}{B}$. Garis yang melalui O dan Q (Q adalah proyeksi O pada garis P) tegak lurus P, sehingga gradien garis ini adalah $\frac{B}{A}$. Jika α adalah sudut yang dibentuk oleh garis yang melalui O dan Q dengan sumbu x positif, maka tg $\alpha = \frac{B}{A}$. Ini berarti :

$$\sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \text{ dengan}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Dengan demikian persamaan (*) menjadi :

$$\boxed{h = r\cos(\theta - \alpha)} \quad ....(**)$$

Persamaan (**) ini disebut **Persamaan Standar Garis Lurus dalam Koordinat Polar.** Dalam hal ini, harga h selalu positif, karena merupakan jarak titik pangkal O terhadap garis yang diminta. sedangkan α merupakan sudut antara garis arah dengan h, sedangkan titik P(r,θ) adalah sebarang titik yang terletak pada garis tersebut. Perlu diketahui bahwa untuk $\theta<\alpha$, persamaan (**) tetap berlaku karena $\cos(\theta-\alpha) = \cos(\alpha-\theta)$.

Contoh.

Nyatakan persamaan garis $3x + 4y + 10 = 0$ dalam koordinat polar.

Jawab :

Persamaan $3x + 4y + 10 = 0$ dapat ditulis menjadi $-3x - 4y = 10$, kemudian disubstitusikan $x = r \cos \theta$, di $y = r \sin \theta$, sehingga diperoleh :

$$-3\ r \cos \theta - 4\ r \sin \theta = 10$$

atau

$$r(-3\ r \cos \theta - 4\ r \sin \theta) = 10.$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, sehingga diperoleh :

$$r(-\frac{3}{5} r \cos \theta - \frac{4}{5} r \sin \theta) = \frac{10}{5}$$

Jadi persamaan garis $3x + 4y = 10$, dalam koordinat polar adalah :

$$r(\cos\alpha \cos\theta + \sin\alpha \sin\theta) = 2$$

atau

$$r \cos(\alpha - \theta) = 2 \text{ dengan}$$

$$\alpha = \text{arc tg}\left(\frac{-4}{-3}\right),$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{-4}{-3}, \text{ dimaksudkan adalah } 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

1.7. Translasi dan Rotasi

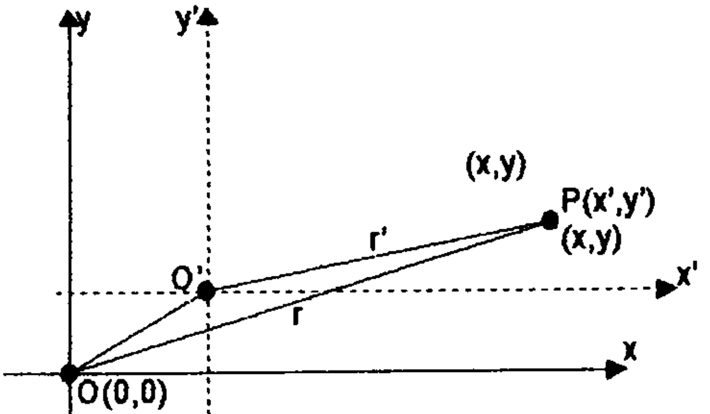
Jika sumbu-sumbu koordinat ditranslasikan, maka koordinat titik-titik akan berubah, dan sebagai akibatnya persamaan suatu garis akan berubah pula. Misalkan Sumbu x ditranslasikan sejauh h, searah sumbu x positif, dan sumbu y ditranslasikan sejauh k searah sumbu y positif. Keadaan sumbu koordinat yang terbentuk (baru) akan tetap sejajar dengan sumbu koordinat asalnya, dan jika pada kedudukan yang baru ini diberi nama sumbu x' dan y', maka untuk titik P(x,y) :

$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$

Jika kedua sumbu koordinat itu ditranslasikan bersama-sama, maka titik pangkal sumbu yang baru adalah O'(h,k).

Ini berarti $\overrightarrow{OO'} = h\vec{i} + k\vec{j}$. Misalkan sebuah titik mempunyai koordinat asalnya dan (x',y') terhadap sumbu koordinat baru, di $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, $\overrightarrow{O'P} = \vec{r}'$ (gambar 1.10)



Gambar 1.10

Maka diperoleh hubungan :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$\vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

Karena $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'$, maka

$$
\begin{aligned}
x\bar{i} + y\bar{j} &= (h\bar{i} + k\bar{j}) + (x'\bar{i} + y'\bar{j}) \\
&= (h + x')\bar{i} + (k + y')\bar{j}
\end{aligned}
$$

jadi :

$$x = h + x'$$

$$y = k + y'$$

Contoh :

Tentukan persamaan garis $2x - 3y + 8 = 0$, terhadap koordinat baru jika diadakan translasi sumbu-sumbu koordinat, sehingga pusat koordinat baru berada pada titik O'(-3,4).

Jawab ;

$h = -3$, $k = 4$, $x = x' + h = x' - 3$, dan $y = y' + k = y' + 4$

Persamaan garis terhadap sumbu baru adalah

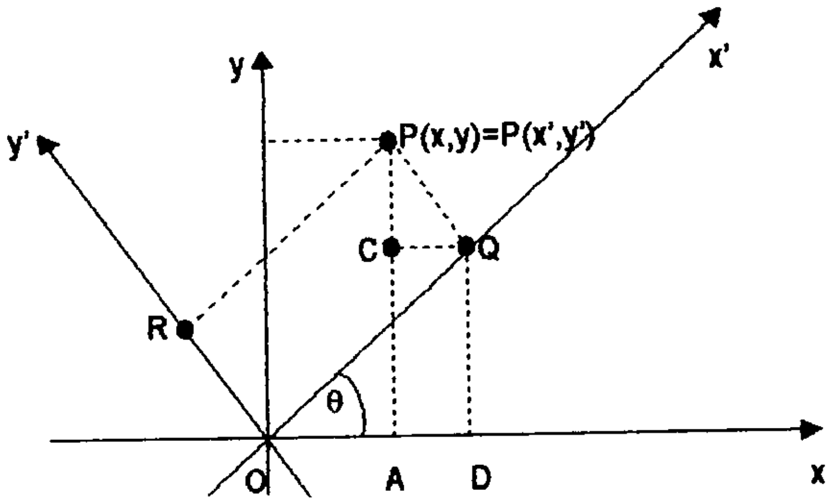
$$2(x' - 3) - 3(y' + 4) + 8 = 0$$

atau

$$2x' - 3y' - 10 = 0$$

Perubahan koordinat selain dari translasi ; juga akibat rotasi, yaitu perputaran sumbu-sumbu pada pusat koordinat O(0,0). Rotasi ini mempunyai nilai posityif jika arahnya berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dan mempunyai nilai negatif jika arahnya searah dengan perputaran jarum jam.

Perhatikan gambar 1. Titik (x,y) adalah koordinat titik P sumbu x dan sumbu y. Sedangakan koordinat titik terhadap sumbu baru (sumbu x' dan sumbu y') yang didapat dengan merotasikan sumbu x dan sumbu y sebesar θ^0.



Gambar 1.11.

$$
\begin{aligned}
y &= PC + CA \\
&= PQ \cos\theta + QD \\
&= y' \cos\theta + OQ \sin\theta \\
&= y' \cos\theta + x' \sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= OA \\
&= OD - DA \\
&= OQ \cos\theta - CQ \\
&= RP \cos\theta - PQ \sin\theta \\
&= x' \cos\theta - y' \sin\theta
\end{aligned}
$$

Jadi hubungan antara koordinat lama (sebelum dilakukan rotasi) dan koordinat baru (setelah dilakukan rotasi) adalah:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{aligned}}$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis $x + 2y - 4 = 0$ dalam koordinat baru jika sumbu koordinat dirotasikan 30° dengan pusat $O(0,0)$.

Jawab:

Besar sudut rotasi adalah $\theta = 30^\circ$, sehingga hubungan koordinat lama dan koordinat baru adalah:

$$
\begin{aligned}
x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\
&= x' \cos 30^\circ - y' \sin 30^\circ \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x' - \tfrac{1}{2}y', \\
y &= x' \cos\theta + y' \cos\theta \\
&= x' \sin 30^\circ + y' \cos 30^\circ \\
&= \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,y'
\end{aligned}
$$

Jadi persamaan garis $x + 2y - 4 = 0$ dalam koordinat baru adalah:

$$(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x' - \tfrac{1}{2}y') + 2(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,y') - 4 = 0 \text{ atau}$$

$$(2 + \sqrt{3})x' + (2\sqrt{3} - 1)y' - 8 = 0.$$

Catatan:

Jika sumbu koordinat kartesius mengalami suatu translasi dan rotasi, maka untuk mencari hubungan yang dinyatakan dalam sumbu koordinat lama dan sumbu koordinat baru, dilakukan pengerjaan dua tahap, yaitu translasi kemudian dilanjutkan dengan rotasi, atau sebaliknya.

1.8. Berkas Garis

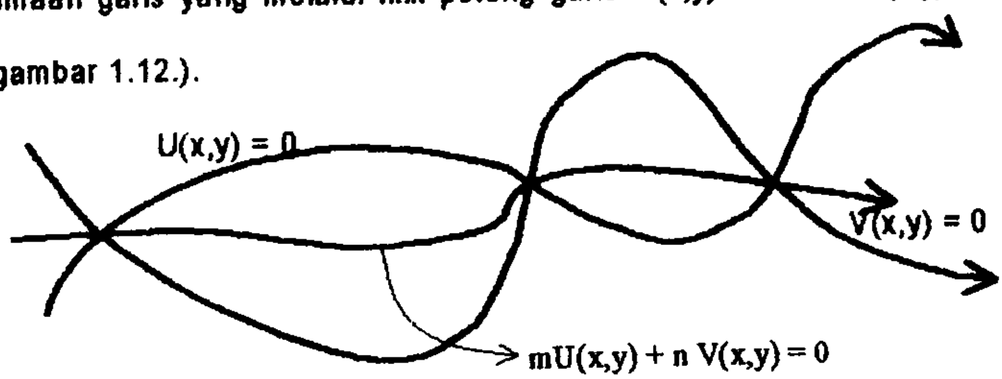
Misalkan diberikan dua buah garis $p = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan $q = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ yang tidak sejajar. Misalkan titik (x_1,y_1) merupakan titik potong antara p dan q. Ini berarti bahwa titik (x_1,y_1) terletak pada p dan sekaligus pada garis q, atau garis p dan q melalui titik (x_1,y_1).

Jika m dan n adalah dua buah konstanta, maka garis dengan persamaan $m(a_1x + b_1y + c_1) + n(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ adalah juga melalui titik (x_1,y_1) yaitu titik potong garis $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Sebagai contoh; garis $3x + 2y - 8 = 0$ dan garis $2x - y - 3 = 0$ berpotongan pada titik (2,1). Maka semua garis dengan persamaan $m(3x + 2y - 8) + n(2x - y - 3) = 0$ juga melalui titik (2,1).

Apabila diambil m = 3 dan n = -4, maka akan diperoleh garis dengan persamaan $x + 10y = 12$, yang juga melalui titik (2,1).

Secara umum jika $U(x,y) = 0$ dan $V(x,y) = 0$ adalah persamaan dua buah garis (lurus atau lengkung), maka $m\,U(x,y) + n\,V(x,y) = 0$ merupakan persamaan garis yang melalui titik potong garis $U(x,y) = 0$ dan $V(x,y) = 0$, lihat gambar 1.12.).



Gambar 1.12

Jika $U(x,y) = 0$ tidak berpotongan dengan $V(x,y) = 0$, maka .

$$mU(x,y) + nV(x,y) = 0$$

Juga tidak memotong garis $U(x,y) = 0$ dan $V(x,y) = 0$.

Persamaan garis :

$$\boxed{mU(x,y) + nV(x,y) = 0}$$

dengan m dan n konstanta yang tidak kedua nol disebut berkas garis.

Contoh :

Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong garis $3x + 4y = 8$ dan garis $2x - y - 3 = 0$ serta melalui titik (4,2).

Jawab :

Persamaan garis yang melalui titik potong garis $3x + 4y = 8$ dan $2x - y = 0$ adalah

$$m(3x + 4y - 8) + n(2x - y - 3) = 0$$

Oleh karena garis yang ditanyakan harus melewati titik (4,2), maka berlaku :

$$m(3.4 + 4.2 - 8) + n(2.4 - 2 - 3) = 0$$

atau

$$8m + 3n = 0$$

Dalam hal ini, boleh dipilih sebarang nilai m dan n asalkan memenuhi persyaratan tersebut. Untuk mudahnya jika diambil $m = -3$ dan $n = 8$, maka persamaan garis yang ditanyakan adalah

$$-3(3x + 4y - 8) + 8(2x - y - 3) = 0$$

atau

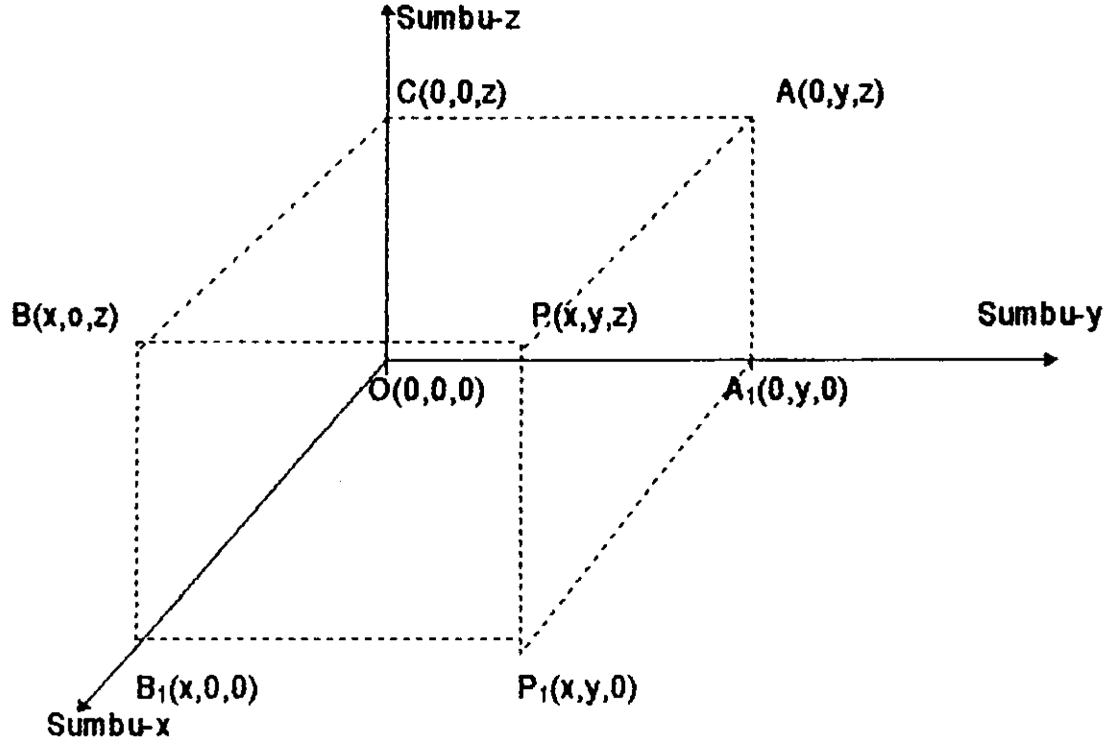
$$7x - 20y = 0$$

BAB II

SISTEM KOORDINAT DI R^3

2.1. Sistem Koordinat Siku-siku, Selinder dan Bola

Melalui setiap titik yang berada dalam suatu ruang selalu dapat dibuat garis yang saling tegak lurus. Ambil satu titik tetap O dan tarik tiga garis melalui O yaitu garis OX, OY, dan OZ yang saling tegak lurus. Masing-masing garis ini disebut **sumbu** (lihat gambar 2.1). Soeparna Darmawijaya (1990:hal.6) mengatakan "seperti pada bidang datar, sistem tiga garis yang saling potong memotong tegak lurus di O disebut **Sistem Koordinat Siku-siku (Kartesius)**".



Gambar 2.1. Sistem Koordinat Kartesius

Sering dipakai, sumbu yang tegak disebut **sumbu-z**, lainnya disebut **sumbu-x** dan **sumbu-y**. Bidang XOY, yaitu bidang datar yang memuat sumbu-x dan sumbu-y, disebut **bidang koordinat**; demikian juga untuk bidang XOZ dan bidang YOZ. Jika titik P mempunyai jarak-jarak berarah (nilainya bisa positif, negatif atau nol) x = PA terhadap bidang koordinat YOZ, y = PB terhadap bidang koordinat XOZ, dan z = PP_1 terhadap bidang XOY, maka titik P dituliskan sebagai:

P(x,y,z) atau P = (x,y,z),

karena setiap titik menentukan dengan tunggal pasangan tiga bilangan (x,y,z) dan sebaliknya. Perlu dicatat bahwa arah-arah positif pada setiap sumbu sistem koordinat biasanya menurut arah anak panah, terhitung dari titik O (lihat gambar 2.1). Dalam penulisan titik P(x,y,z), maka x disebut absis, y disebut ordinat, dan z disebut aplikat.

Dengan diterapkannya suatu sistem koordinat siku-siku, maka ruang akan terbagi menjadi delapan bagian. Setiap bagian tersebut dinamakan oktan dan diberi nomor menurut suatu aturan seperti berikut ini:

- Oktan I : memuat titik-titik dengan $x>0$, $y>0$, $z>0$
- Oktan II : memuat titik-titik dengan $x<0$, $y>0$, $z>0$
- Oktan III : memuat titik-titik dengan $x<0$, $y<0$, $z>0$
- Oktan IV : memuat titik-titik dengan $x>0$, $y<0$, $z>0$
- Oktan V : memuat titik-titik dengan $x>0$, $y>0$, $z<0$
- Oktan VI : memuat titik-titik dengan $x<0$, $y>0$, $z<0$
- Oktan VII : memuat titik-titik dengan $x<0$, $y<0$, $z<0$

- Oktan VIII: memuat titik-titik dengan $x>0$, $y<0$, $z<0$.

Titik-titik yang terletak pada bidang koordinat mempunyai ciri-ciri khusus. Titik yang terletak pada bidang XOY mempunyai aplikat $z = 0$. Titik yang terletak pada bidang XOZ mempunyai ordinat $y = 0$, dan titik yang terletak pada bidang YOZ mempunyai absis $x = 0$. Titik-titik yang terletak pada sumbu-sumbu koordinat juga mempunyai ciri-ciri khusus. Titik-titik yang terletak pada sumbu x (berarti terletak pada bidang XOY dan XOZ) akan mempunyai $x = 0$, dan $y = 0$. Titik-titik yang terletak pada sumbu y mempunyai $x = 0$, dan $z = 0$. Titik-titik yang terletak pada sumbu z mempunyai $y = 0$ dan $x = 0$.

Di dalam ruang, dibuat sistem koordinat kartesius seperti pada gambar 2.2. Misalnya diambil titik P yang dituliskan dalam bentuk:

$$P(\rho,\theta,z) \text{ atau } P = (\rho,\theta,z)$$

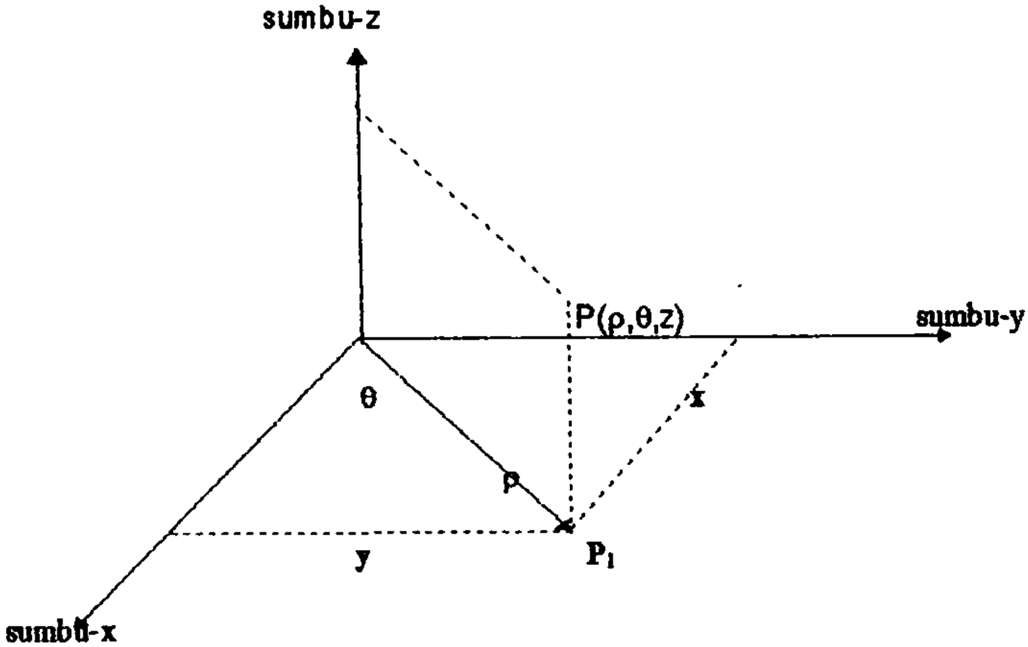
dengan

z = jarak titik P terhadap bidang koordinat XOY

$\rho = OP_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \angle XOP_1$, bernilai positif jika arah pengukuran berlawanan arah dengan putaran arah jarum jam.

Sistem koordinat dengan penyajian titik seperti ini disebut **sistem koordinat tabung atau silinder,** (Soeparna Darmawijaya, 1990 : hal. 7).



Gambar 2.2. Sistem Koordinat Tabung

Mudah dipahami bahwa $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, dan $-\infty < z < \infty$. Selanjutnya, jika titik P mempunyai penyajian :

P = (x,y,z) terhadap sistem koordinat Kartesius

dan

P = (ρ,θ,z) terhadap sistem koordinat tabung, yang sumbu-sumbunya berimpit, diperoleh hubungan :

$x = \rho \cos\theta$		$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho \sin\theta$	atau	$\theta = \text{arc tg } \frac{y}{x}$
$z = z$		$z = z$

Selain sistem koordinat tabung dan sistem koordinat Kartesius yang telah dibicarakan di atas, terdapat pula sistem koordinat yang lain yaitu **Sistem Koordinat Bola.**

Sebuah titik P dalam sistem koordinat bola disajikan sebagai pasangan tiga bilangan (lihat gambar 2.3).

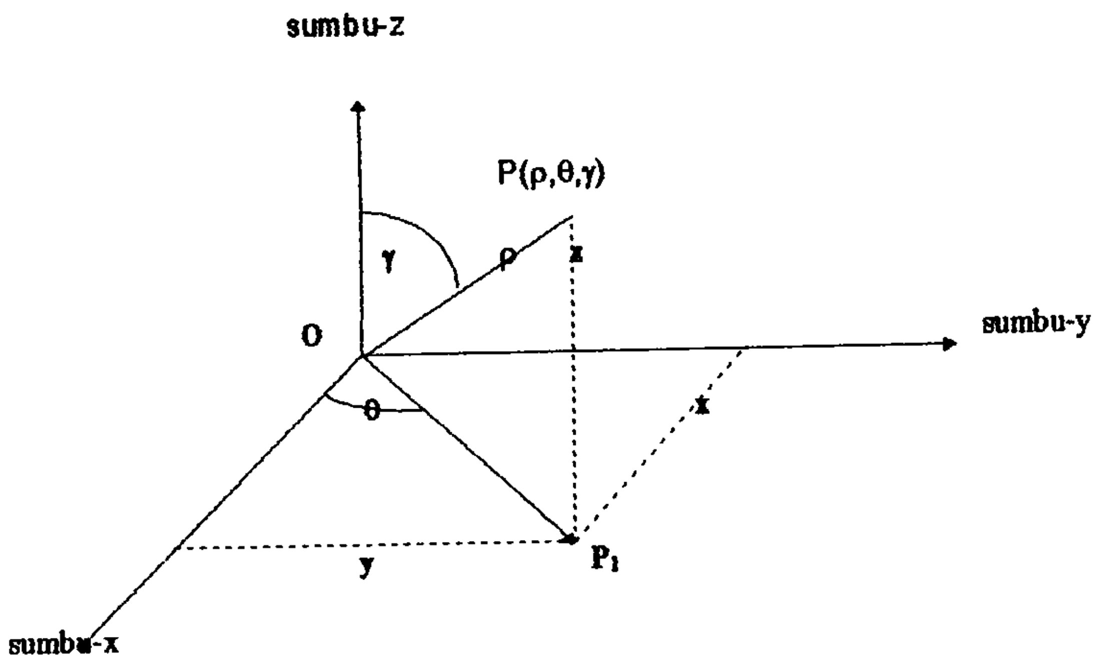
$$P(\rho,\theta,\gamma) \quad \text{atau} \quad P = (\rho,\theta,\gamma)$$

dengan

ρ = OP = jarak antara titik O dengan titik P

$\gamma = \angle$ POZ

$\theta = \angle$ P_1OZ dengan P_1 sebagai proyeksi titik P pada bidang koordinat XOY



Gambar 2.3. Sistem Koordinat Bola

Mudah dipahami bahwa $\rho \geq 0$, $0 \leq \gamma \leq \pi$, dan $0 \leq \theta < 2\pi$. Hubungan antara sistem koordinat Kartesius dengan sistem koordinat bola dirumuskan sebagai berukut :

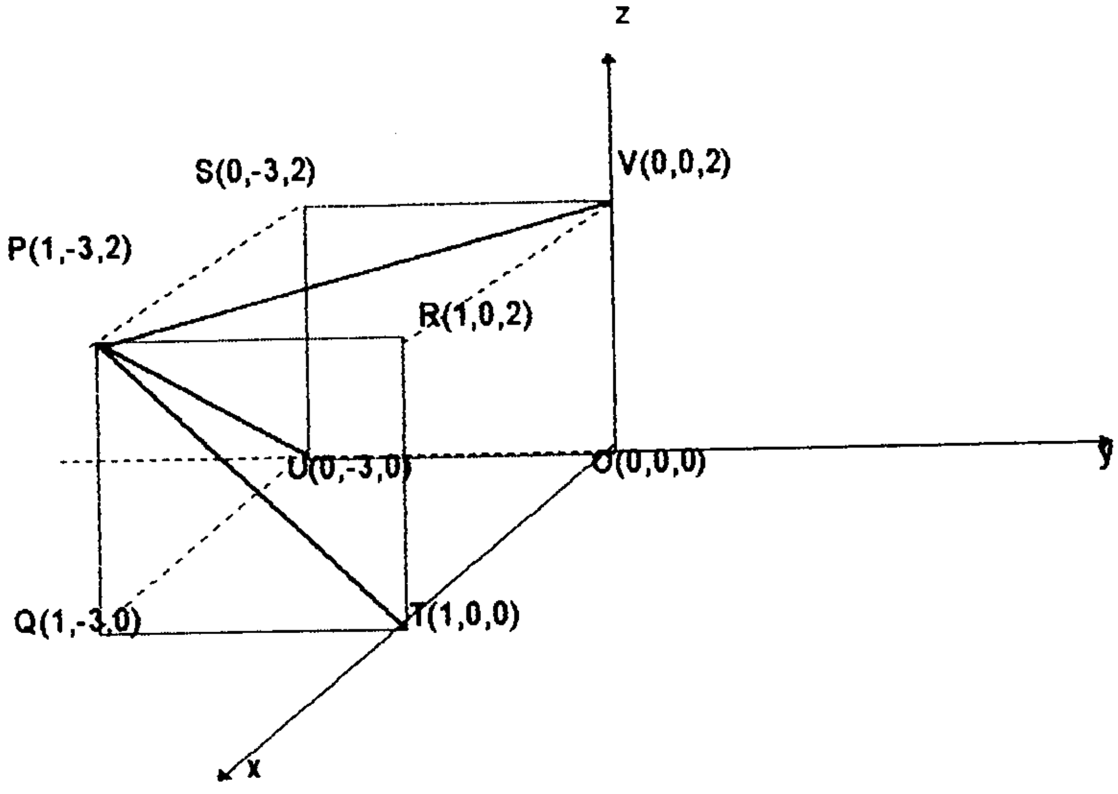
$$\begin{cases} x = \rho \,\mathrm{Sin}\,\gamma \,\mathrm{Cos}\,\theta \\ y = \rho \,\mathrm{Sin}\,\gamma \,\mathrm{Sin}\,\theta \\ z = \rho \,\mathrm{Cos}\,\gamma \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \mathrm{arc\ tg}\ \dfrac{y}{x} \\ z = \mathrm{arc\ Cos}\ \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

2.2. Proyeksi

Menurut Karso dan Darhim (1983: hal. 4), proyeksi suatu titik kepada bidang, diartikan sebagai titik yang terletak pada sebuah bidang dari sebuah segmen garis yang ditarik tegaklurus dari titik yang diketahui ke bidang bersangkutan. Sebagai contoh pada gambar 2.4 dapat dilihat proyeksi titik P(1,-3,2) ke bidang xy adalah titik Q(1,-3,0); ke bidang xz adalah titik R(1,0,2); dan ke bidang yz adalah titik S(0,-3,2).

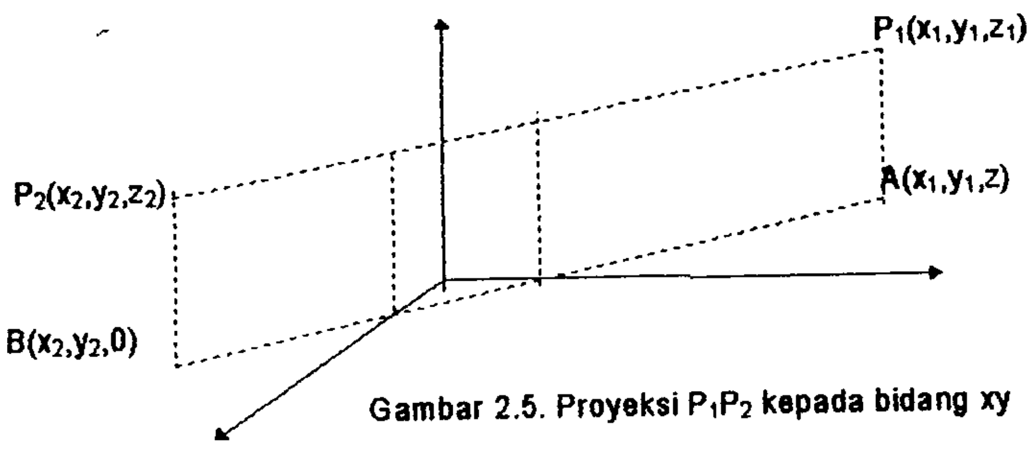
Proyeksi titik kepada garis sumbu diartikan sebagai titik yang terletak pada garis sumbu dari sebuah segmen garis yang ditarik tegaklurus dari titik yang diketahui ke garis sumbu tersebut (Karso dan Darhim, 1983: hal. 4).

Sebagai contoh proyeksi titik P(1,-3,-2) pada gambar 2.4 terhadap sumbu x adalah titik T(1,0,0); terhadap sumbu y adalah titik U(0,-3,0); dan terhadap sumbu z adalah titik V(0,0,2).



Gambar 2.4. Proyeksi Titik P terhadap sumbu dan bidang koordinat

Proyeksi segmen P_1P_2 pada gambar 2.5 kepada bidang diartikan sebuah segmen AB, dengan A adalah proyeksi titik P_1 dan B adalah proyeksi titik P_2 kepada bidang tersebut.



Gambar 2.5. Proyeksi P_1P_2 kepada bidang xy

Contoh soal:

Carilah proyeksi segmen P_1P_2 ke bidang xy, apabila $P_1(-1,3,2)$, dan $P_2(2,-1,5)$.

Jawab :

Proyeksi titik $P_1(-1,3,2)$ ke bidang xy adalah titik A(-1,3,0) dan proyeksi titik $P_2(2,-1,5)$. ke bidang xy adalah titik B(3,-1,0). Jadi proyeksi segmen P_1P_2 ke bidang xy adalah segmen yang dapat dibuat dari titik A ke titik B (segmen AB). Silahkan pembaca mengilustrasikan dengan gambar.

Arah positif ditentukan berdasarkan kepada garis yang memuat titik A dan B (seperti pada salib sumbu koordinat), maka jarak berarah segmen AB erat hubungannya dengan proyeksi segmen P_1P_2 pada garis tersebut.

Jika $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan $P_2(x_2,y_2,z_2)$ adalah dua buah titik, maka proyeksi titik P_1 dan P_2 kepada sumbu x berturut-turut adalah $A_1(x_1,0,0)$, dan $A_2(x_2,0,0)$; dan proyeksi segmen P_1P_2 kepada sumbu x adalah segmen A_1A_2 (bukan segmen A_2A_1), dengan

$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2} &= \overline{A_1O} + \overline{OA_2}\\ &= -x_1 + x_2\\ &= x_2 - x_1\\ &= \Delta x\end{aligned}$$

Proyeksi titik P_1 dan P_2 kepada sumbu y berturut-turut adalah titik $B_1(0,y_1,0)$, dan $B_2(0,y_2,0)$; dan proyeksi segmen P_1P_2 kepada sumbu y adalah segmen B_1B_2 (bukan segmen B_2B_1), dengan

$$\begin{aligned}\overline{B_1B_2} &= \overline{B_1O} + \overline{OB_2}\\ &= -y_1 + y_2\end{aligned}$$

$$= y_2 - y_1$$

$$= \Delta y.$$

Sedangkan proyeksi titik P_1 dan P_2 kepada sumbu z berturut-turut adalah titik $C_1(0,0,z_1)$, dan $C_2(0,0,z_2)$; dan proyeksi segmen P_1P_2 kepada sumbu z adalah segmen C_1C_2 (bukan segmen C_2C_1), dengan

$$\overline{C_1C_2} = \overline{C_1O} + \overline{OC_2}$$

$$= -z_1 + z_2$$

$$= z_2 - z_1$$

$$= \Delta z$$

Selanjutnya proyeksi segmen P_1P_2 kepada sumbu x, sumbu y, dan sumbu z berturut-turut disimbolkan dengan Δx, Δy, dan Δz.

Contoh soal:

Carilah proyeksi segmen yang dibuat dari titik $P_1(-1,3,2)$ ke titik $P_2(3\ ,-1,5)$ kepada sumbu x, sumbu y, dan sumbu z.

Jawab :

Proyeksi $\overline{P_1P_2}$ kepada sumbu x adalah $\overline{A_1A_2} = \Delta x = 3 - (-1) = 4$

Proyeksi $\overline{P_1P_2}$ kepada sumbu y adalah $\overline{B_1B_2} = \Delta y = -1 - 3 = -4$

Proyeksi $\overline{P_1P_2}$ kepada sumbu z adalah $\overline{C_1C_2} = \Delta z = 5 - 2 = 3.$

(Silahkan pembaca mengilustrasikannya dengan gambar).

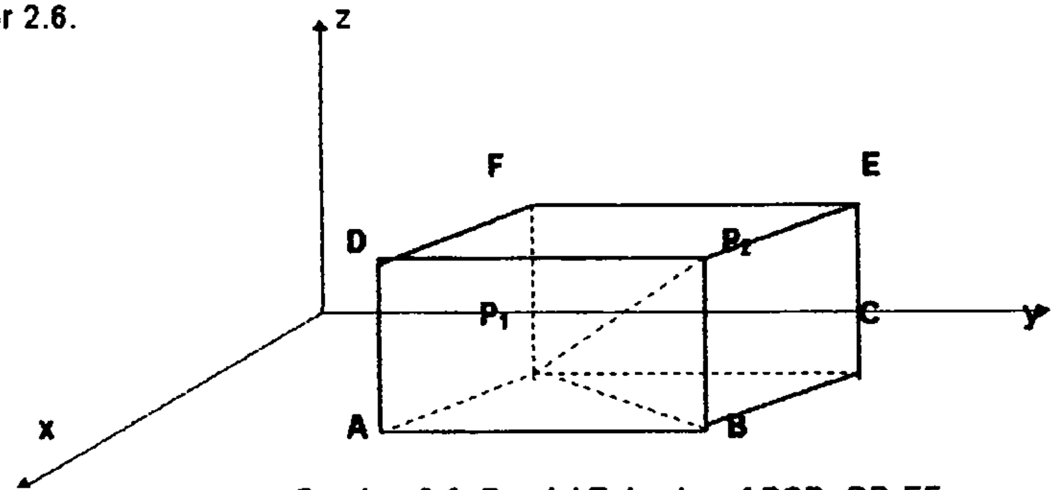
2.3. Panjang atau Besar Sebuah Segmen dan Koordinat Titik yang Membagi Segmen Garis atas Perbandingan Tertentu.

Sebelum membahas panjang sebuah segmen, terlebih dahulu didefinisikan **komponen skalar sebuah segmen** yang dibuat dari titik $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ke titik $P_2(x_2,y_2,z_2)$ sebagai proyeksi segmen $\overline{P_1P_2}$ ke sumbu x, sumbu y, dan sumbu z secara berturut-turut. Titik P_1 sebagai titik awal dan P_2 sebagai titik terminal dari segmen $\overline{P_1P_2}$. Komponen skalar sebuah segmen garis, ditulis dalam sebuah kurung siku. Jadi komponen skalar $\overline{P_1P_2}$ adalah Δx, Δy, dan Δz,

dan ditulis : $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$ (bedakan dengan koordinat titik).

Jika sebuah segmen mempunyai titik awal O dan titik terminal adalah P(x,y,z), maka komponen skalarnya [x,y,z].

Misalnya $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan $P_2(x_2,y_2,z_2)$ dua buah titik sebarang. Anggap $\overline{P_1P_2}$ diagonal ruang paralel epipedum $ABCP_1.DP_2EF$, seperti terlihat pada gambar 2.6.



Gambar 2.6. Paralel Epipedum $ABCP_1.DP_2EF$

Perhatikan paralel epipedum $ABCP_1.DP_2EF$, maka

$$|\overline{P_1C}| = |x_2 - x_1|$$

$$|\overline{CB}| = |y_2 - y_1|$$

$$|\overline{BP_2}| = |z_2 - z_1|$$

Menurut teorema Pythagoras :

$$P_1B^2 = P_1C^2 + CB^2$$

$$P_1P_2^2 = P_1B^2 + BP_2^2$$

$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

atau

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

atau

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Jika P_1 adalah titik asal $O(0,0,0)$ dan $P_2(x_2,y_2,z_2)$, maka

$$|\overline{OP_2}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

Definisi : Panjang atau jarak segmen garis PQ dengan $P(x_1,y_1,z_1)$ dan $Q(x_2,y_2,z_2)$

adalah $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Persamaan di atas dapat dinyatakan dengan aturan sebagai berikut: panjang atau besar sebuah segmen sama dengan akar pangkat dua jumlah kuadrat dari komponen-komponen skalar segmen tersebut.

Jika segmen garis tersebut adalah sejajar dengan sumbu x, maka $\Delta y = 0$ dan $\Delta z = 0$. Akibatnya :

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(\Delta x)^2} = |\Delta x|$$

Jika segmennya adalah sejajar dengan sumbu y, maka $\Delta x = 0$ dan $\Delta z = 0$. Akibatnya:

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(\Delta y)^2} = |\Delta y|$$

Selanjutnya jika segmennya sejajar dengan sumbu z, maka $\Delta x = 0$ dan $\Delta y = 0$. Akibatnya:

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(\Delta z)^2} = |\Delta z|$$

Contoh soal:

Carilah jarak segmen garis yang titik awalnya $P_1(-1,2,3)$ dan titik terminalnya $P_2(2,-3,1)$.

Penyelesaian:

Proyeksi segmen P_1P_2 kepada sumbu x adalah $\Delta x = 3$.

Proyeksi segmen P_1P_2 kepada sumbu y adalah $\Delta y = -5$.

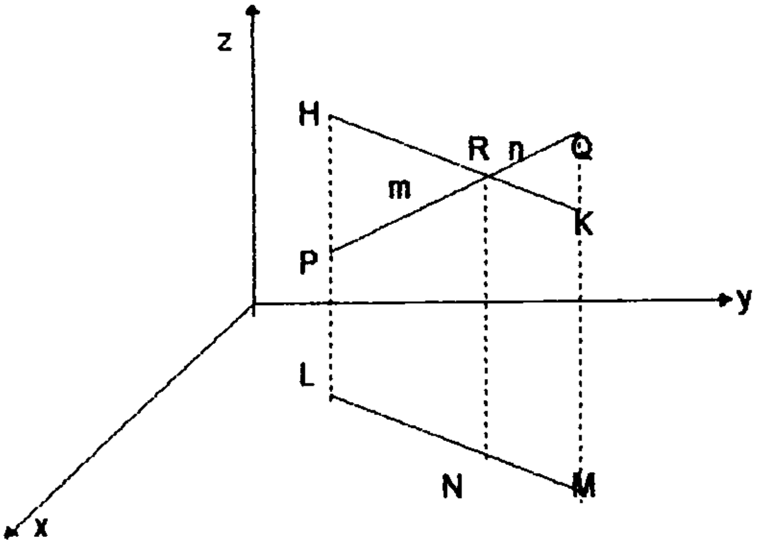
Proyeksi segmen P_1P_2 kepada sumbu z adalah $\Delta z = -2$.

Maka komponen skalar P_1P_2 adalah [3,-5,-2].

Jadi $|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{38}$

Selanjutnya, misalkan titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dan $Q(x_2,y_2,z_2)$, dan titik $R(x,y,z)$ membagi segmen garis PQ atas perbandingan m : n (lihat gambar 2.7).



Gambar 2.7.

Perhatikan gambar 2.7, LM adalah proyeksi garis PQ terhadap bidang XOY. Buat garis HK//LM, akibatnya Δ HPR sebangun dengan Δ QKR.

PR : RQ = HP : KQ

m : n = (RN - PL) : (QM - KM)

atau

$$\frac{m}{n} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}$$

Selanjutnya dengan cara sama, jika garis PQ berturut-turut diproyeksikan terhadap bidang YOZ dan XOZ akan diperoleh:

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

Jadi koordinat R adalah $(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n})$

Jika R adalah titik tengah segmen garis PQ, maka koordinat R adalah

$$(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2}).$$

Secara Umum : Tulis $\frac{m}{n}$ = k, dengan k dapat bertanda positif ataupun negatif, tergantung letak R itu sendiri.

Jika : k > 0, maka R terletak di antara P dan Q.

-1 < k < 0, maka R terletak di perpanjangan PQ (pada pihak P)

k = -1, maka menunjukkan suatu titik di tak berhingga, dan

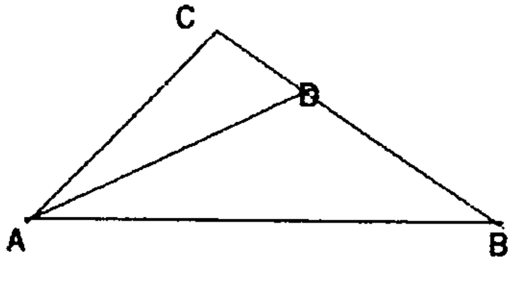
k< -1, maka R terletak di perpanjangan PQ (pada pihak Q)

Akibatnya koordinat R menjadi : $(\frac{kx_2 + x_1}{1+k}, \frac{ky_2 + y_1}{1+k}, \frac{kz_2 + z_1}{1+k})$, dengan $k \neq -1$

Contoh: Misalkan A(3,2,0), B(5,3,2), C(-9,6,-3) adalah titik-titik sudut segitiga ABC. AD adalah garis bagi sudut BAC, memotong BC di D.

Tentukan koordinat titik D.

Jawab:



$$AC = \sqrt{(-9-3)^2 + (6-2)^2 + (-3-0)^2} = 13$$

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2 + (2-0)^2} = 3$$

Menurut dalil garis bagi, maka:

CD : BD = AC : AB = 13 : 3

Maka $k = \frac{13}{3.}$

$$x_D = \frac{kx_B + x_C}{1+k} = \frac{\left(\frac{13}{3}\right)(5) - 9}{1 + \frac{13}{3}} = \frac{38}{16}$$

$$y_D = \frac{ky_D + y_C}{1+k} = \frac{\left(\frac{13}{3}\right)(3) + 6}{1 + \frac{13}{3}} = \frac{57}{16}$$

$$z_D = \frac{kz_B + z_C}{1+k} = \frac{\left(\frac{13}{3}\right)(2) - 3}{1 + \frac{13}{3}} = \frac{17}{16}$$

Jadi koordinat D adalah $\left(\frac{38}{16}, \frac{57}{16}, \frac{17}{16}\right)$.

2.4. Soal-soal.

1. Carilah keliling setiap segitiga berikut:

   a. $P_1(-1,2,3)$; $P_2(2,1,2)$; dan $P_3(1,-1,-1)$.

   b. $P_1(3,4,-1)$; $P_2(1,2,-1)$; dan $P_3(2,-1,3)$.

2. Carilah panjang rusuk bidang empat yang titik sudutnya adalah

   $P_1(2,-1,3)$, $P_2(-1,3,2)$, $P_3(-3,2,1)$, dan $P_4(1,0,-1)$.

3. Buktikan bahwa empat titik di bawah ini adalah titik sudut bidang empat beraturan (catatan: bidang empat ialah gambar benda yang mempunyai

empat bidang sisi dengan enam buah rusuk). Titiknya adalah (k,0,0); (0,k,0); (0,0,k); dan (k,k,k).

4. Diketahui $P_1(3,-1,2)$ dan $P_2(-1,2,5)$.

   Tentukan koordinat titik P sehingga $\overline{P_1 P} = 3\overline{P_1 P_2}$.

5. Tentukan komponen skalar segmen garis yang dibuat dari titik $P_1(2,-3,4)$ ke titik $P_2(3,-3,8)$.

6. Periksa apakah ke tiga titik A(0,0,0), B(2,-3,3) dan C(-2,3,-3) segaris (kolinear).

   Tentukan perbandingan $\frac{AB}{BC}, \frac{BC}{CA}, \frac{CA}{AB}$.

7. Buktikan bahwa koordinat titik berat segitiga ABC dengan $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, dan $C(x_3,y_3,z_3)$ adalah:

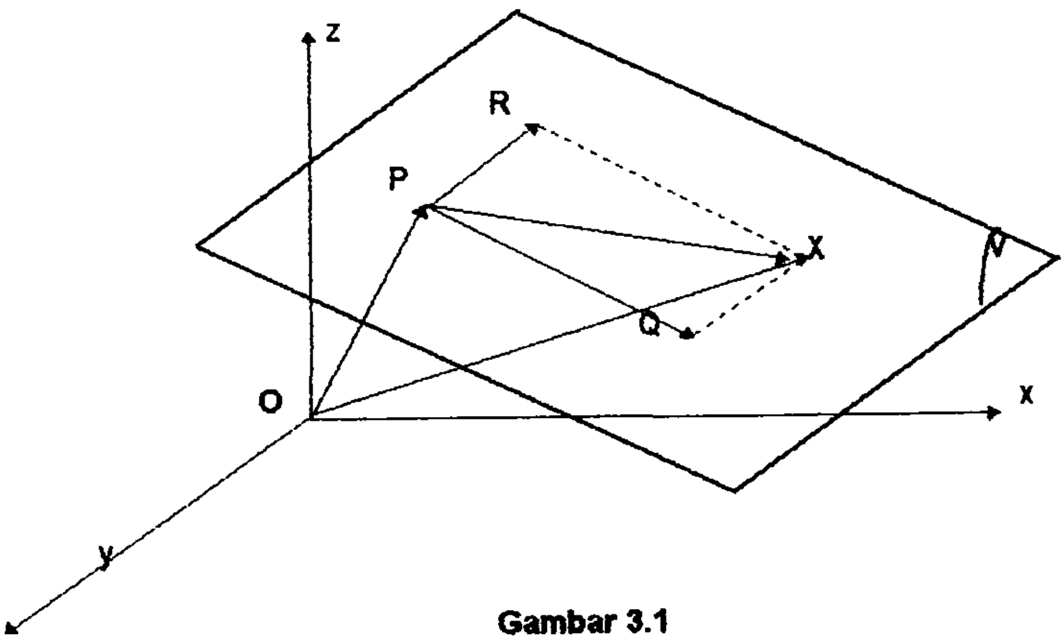
$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

BAB III

BIDANG RATA

3.1. Persamaan Bidang Rata

Suatu bidang rata V akan ditentukan oleh minimal tiga buah titik yang tidak segaris. Misalkan diketahui tiga buah titik $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$, dan $R(x_3,y_3,z_3)$ yang tidak segaris pada bidang rata V (lihat gambar 3.1).



Gambar 3.1

Secara vektor, dapat dilihat bahwa:

$$\vec{PQ} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \ \vec{PR} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1].$$

Selanjutnya, ambil sebarang titik X(x,y,z) pada bidang V, sehingga berlaku

$$\vec{PX} = \lambda \vec{PQ} + \mu \vec{PR}, \text{ dengan } -\infty < \lambda < \infty, -\infty < \mu < \infty.$$

Sedangkan :

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}\ .$$

atau $[x, y, z] = [x_1, y_1, y_1] + \lambda[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1] + \mu[x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1]$, untuk $-\infty < \lambda, \mu < \infty$ adalah **persamaan vektoris** bidang rata V melalui tiga titik P, Q, dan R. Kedua vektor $\vec{PQ}$ dan $\vec{PR}$ disebut juga vektor-vektor arah bidang.

Secara umum, persamaan vektoris bidang rata V melalui titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dengan vektor-vektor arahnya $\vec{a} = [x_a, y_a, y_a]$ dan $\vec{b} = [x_b, y_b, y_b]$ adalah :

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, y_1] + \lambda[x_a, y_a, z_a] + \mu[x_b, y_b, z_b]$$

dengan $-\infty < \lambda, \mu < \infty$

atau dapat ditulis sebagai

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda x_a + \mu x_b \\ y &= y_1 + \lambda y_a + \mu y_b \\ z &= z_1 + \lambda z_a + \mu z_b \end{aligned}\right\}$$

yang disebut juga **persamaan parameter** bidang rata V.

Jika λ dan μ pada persamaan parameter itu dieliminasi, maka diperoleh:

$$\lambda = \frac{y_b(x - x_1) - x_b(y - y_1)}{C}, \text{ dan}$$

$$\mu = \frac{y_a(y - y_1) - y_a(x - x_1)}{C}$$

dengan $\quad C = x_a y_b - y_a x_b = \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \neq 0$

Jika λ dan μ disubstitusikan ke persamaan $z = z_1 + \lambda z_a + \mu z_b$, maka diperoleh :

$$C(z - z_1) - z_a\{y_b(x - x_1) - x_b(y - y_1)\} - z_b\{x_a(y - y_1) - y_a(x - x_1)\} = 0$$

atau

$$(y_a z_b - z_b y_b)(x - x_1) + (z_a x_b - x_a z_b)(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

Atau dapat ditulis menjadi : Ax + By + Cz + D = 0, dengan

$$A = y_a z_b - z_a y_b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}$$

$$B = z_a x_b - x_a z_b = \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix}, \text{ dan}$$

$$-D = Ax_1 + By_1 + Cz_1$$

Bentuk persamaan Ax + By + Cz + D = 0, disebut **persamaan linier** (umum) dari suatu bidang rata V.

Bagaimanakah vektor normal dari bidang rata V = Ax + By + Cz + D = 0 ?

Terlihat bahwa vektor:

$$[A,B,C] = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b},$$

merupakan vektor yang tegak lurus pada bidang rata yang dibangun oleh $\bar{a}$ dan $\bar{b}$.

$[A,B,C] = \vec{n}$ disebut **vektor normal** bidang rata V = 0. Vektor normal ini dalam pembahasan bidang rata memegang peranan yang sangat penting.

Selanjutnya, suatu bidang rata V melalui titik (x_1, y_1, z_1) dengan vektor normalnya $\vec{n}$ = [A,B,C] dapat ditulis sebagai

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Perhatikan persamaan linier bidang rata V ≡ Ax + By + Cz + D = 0, Dari persamaan bidang rata ini, ada beberapa hal khusus yang perlu diperhatikan, yaitu:

- jika D = 0, maka bidang rata V melalui O(0,0,0), dan sebaliknya setiap persamaan linier bidang rata V yang melalui O(0,0,0), akan mempunyai nilai D= 0 atau V ≡ Ax + By + Cz = 0.
- Jika D ≠ 0, maka persamaan bidang V dapat ditulis menjadi $\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1$, yang berarti V memotong sumbu x pada $\left(\frac{-D}{A},0,0\right)$, memotong sumbu y pada $\left(0,\frac{-D}{B},0\right)$, dan memotong sumbu z pada $\left(0,0,\frac{-D}{C}\right)$.
- Jika : A = 0, bidang rata V sejajar dengan sumbu x,

  atau V ≡ By + Cz + D = 0.

  B = 0, bidang rata V sejajar dengan sumbu y,

  atau V ≡ Ax + Cz + D = 0.

  C = 0, bidang rata V sejajar dengan sumbu z,

  atau V ≡ Ax + By + D = 0.
- Jika : A = B = 0, bidang rata V sejajar dengan bidang XOY,

atau $Cz + D = 0$.

$A = C = 0$, bidang rata V sejajar dengan bidang XOZ,

atau $By + D = 0$.

$B = C = 0$, bidang rata V sejajar dengan bidang YOZ.

atau $Ax + D = 0$.

Contoh-soal:

1. Diketahui sebuah bidang rata V melalui tiga titik (1,2,2), (2,4,5), dan (1,2,6).

   Tentukanlah:

   a. persamaan vektorisnya,

   b. persamaan parameternya,

   c. persamaan liniernya.

   Jawab:

   a. persamaan vektorisnya adalah :

   $[x,y,z] = [1,2,2] + \lambda[2-1,4-2,5-2] + \mu[1-1,2-2,6-2]$

   $= [1,2,2] + \lambda[1,2,3] + \mu[0,0,4]$

   b. persamaan parameternya adalah :

   $x = 1 + \lambda$

   $y = 2 + 2\lambda$

   $z = 2 + 3\lambda + 4\mu$

   c. persamaan liniernya adalah:

   Vektor normalnya adalah : $[1,2,3] \times [0,0,4] = [8,-4,0]$.

   Jadi persamaan linier bidang rata tersebut adalah :

   $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$.

atau

$$8(x - 1) - 4(y - 2) + 0(z - 2) = 0$$

atau

$$2x - y = 0.$$

2. Tentukan titik potong bidang rata $V \equiv 3x - 4y + 2z + 8 = 0$ dengan ketiga sumbu koordinat.

   Jawab :

   - Titik potong V dengan sumbu x, jika $x = o, y = 0$

     $3x - 0 + 0 + 8 = 0 \iff x = -2\frac{2}{3}$ diperoleh titik $(-2\frac{2}{3},0,0)$

   - Titik potong V dengan sumbu y, jika $x = o, z = 0$

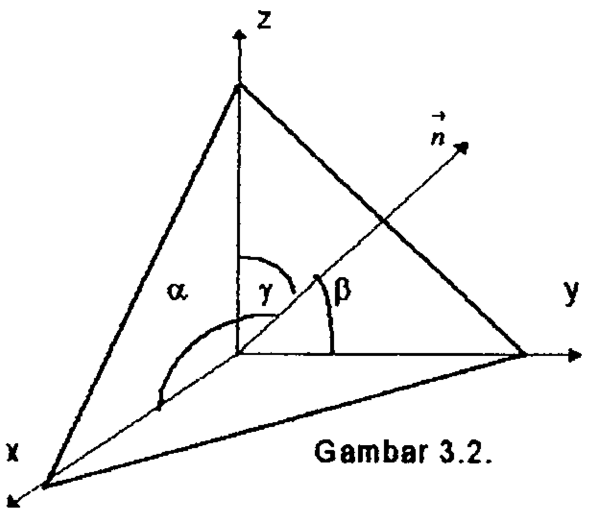
     $0 - 4y + 0 + 8 = 0 \iff y = 2$ diperoleh titik (0,2,0).

   - Titik potong V dengan sumbu z, jika $x = 0$ dan $y = 0$

     $0 - 0 + 2z + 8 = 0 \iff z = -4$, diperoleh titik (0,0,-4).

3.2. Bentuk Normal dan Sudut Antara Dua Bidang Rata

Misalkan bidang rata $V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, dengan vektor normalnya $\vec{n} = [A,B,C]$. Misalkan besar sudut antara $\vec{n}$ dan sumbu-sumbu koordinat berturut-turut adalah α, β, dan γ (arahnya ditentukan oleh vektor $\vec{i}$, $\vec{j}$, dan $\vec{k}$).



Gambar 3.2.

Ternyata bahwa:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}.\vec{i}}{|\vec{n}||\vec{i}|} = \frac{A}{|\vec{n}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{n}.\vec{j}}{|\vec{n}||\vec{k}|} = \frac{B}{|\vec{n}|}, \text{ dan}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{n}.\vec{k}}{|\vec{n}||\vec{k}|} = \frac{C}{|\vec{n}|}.$$

$$\text{atau } [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma] = \frac{[A,B,C]}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

yaitu vektor satuan yang searah dengan $\vec{n}$. Juga berlaku

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\vec{n}$ = [Cos α, Cos β, Cos γ] dinamakan vektor Cosinus bidang V atau dikatakan juga vektor normal yang panjangnya satu.

Misalkan p = jarak dari O(0,0,0) ke bidang V = 0 dengan $p \geq 0$, dan T(x,y,z) titik sebarang pada bidang V, maka p adalah proyeksi $\vec{OT}$ = [x,y,z] pada $\vec{n}$, yaitu $p = \vec{OT}.\vec{n}$ = [x,y,z].[Cos α, Cos β, Cos γ], atau p = x Cos α + y Cos β + z Cos γ dan disebut persamaan **normal Hesse** dari bidang V = 0.

Untuk mengubah bentuk V = Ax + By + Cz + D = 0 ke bentuk normal, maka dari persamaan:

$$Ax + By + Cz = -D$$

diubah menjadi bentuk:

$$|\vec{n}| \cos\alpha\, x + |\vec{n}| \cos\beta\, y + |\vec{n}| \cos\gamma\, z = -D$$

atau

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = \frac{-D}{|\vec{n}|} = p \geq 0$$

(nilai $\frac{-D}{|\vec{n}|}$ harus selalu positif).

Contoh-soal

1. Tentukan bentuk normal bidang V ≡ $6x + 3y - 2z - 6 = 0$.

   Jawab:

   $D = -6 < 0$, sedangkan $|\vec{n}| = \sqrt{36+9+4} = 7$, sehingga

   $p = \frac{-D}{|\vec{n}|} = \frac{-(-6)}{7} = \frac{6}{7}$

   Jadi persamaan normalnya adalah $\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z = \frac{6}{7}$.

2. Tentukan vektor normal bidang:

   W ≡ $[x,y,z] = [1,2,3] + \lambda[2,0,-3] + \mu[1,-1,0]$.

   Jawab:

   Vektor-vektor arah bidang W adalah:

   $\vec{a} = [2,0,-3]$ dan $\vec{b} = [[1,-1,0]$.

   Jadi vektor normal $\vec{n}$ bidang W adalah:

   $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

   $= [2,0,-3] \times [1,-1,0]$

   $= [-3,-3,-2]$.

Selanjutnya dapat pula ditentukan sudut antara dua buah bidang rata V_1 dan V_2, yaitu sudut antara vektor-vektor normalnya.

Misalnya $V_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, dengan $|\vec{n}_1| = [A_1, B_1, C_1]$, dan

$V_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, dengan $|\vec{n}_2| = [A_2, B_2, C_2]$.

Misalkan θ adalah sudut antara $\vec{n}_1$ dan $\vec{n}_2$ maka :

$$\text{Cos } \theta = \frac{\vec{n}_1 . \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.}$$

Berdasarkan vektor normal dan sudut θ ini, dapat ditentukan kedudukan antara dua bidang rata V_1 dan V_2, yaitu :

1). Dua bidang V_1 dan V_2 saling sejajar apabila $\vec{n}_1$ dan $\vec{n}_2$ sama atau berkelipatan. Berarti $[A_1, A_2, A_3] = \lambda\, [A_2, B_2, C_2]$, dengan $\lambda \neq 0$, $\lambda \in R$.

2). Dua bidang V_1 dan V_2 saling tegak lurus, jika $\vec{n}_1$ tegak lurus $\vec{n}_2$, atau berarti $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$, atau $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Contoh-soal

1). Tentukanlah besar sudut antara bidang

$V_1 \equiv 2x + y + z + 4 = 0$ dan

$V_2 \equiv 3x + 4y + z - 10 = 0$.

Jawab :

Dari bidang V_1 diperoleh vektor normalnya $\vec{n_1}$ = [2,1,3] dan dari V_2 diperoleh

$\vec{n_2}$ = [3,4,1].

Misalkan θ adalah besar sudut antara V_1 dan V_2. Maka

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1.\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{[2,1,1].[3,4,1]}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{9+16+1}} = \frac{11}{\sqrt{156}}$$

Jadi $\theta = \text{arc Cos } \frac{11}{\sqrt{156}}$ yang merupakan besar sudut antara bidang V_1 dan V_2.

2). Tentukan persamaan bidang rata melalui titik P(1,2,-1) dan sejajar bidang rata

$V \equiv 2x + 3y + 5z - 10 = 0$.

Jawab :

$V \equiv 2x + 3y + 5z - 10 = 0$, dengan vektor normal $\vec{n_1}$ = [2,3,5].

Berarti bidang yang akan dicari juga mempunyai vektor normal = [2,3,5], dan misalkan persamaan bidang itu : $H \equiv 2x + 3y + 5z + D = 0$.

Bidang H melalui titik (1,2,-1), berarti :

$2.1 + 3.2 + 5.(-1) + D = 0$, atau $D = -3$.

Jadi persamaan bidang yang diminta adalah :

$H \equiv 2x + 3y + 5z - 3 = 0$.

3). Tentukan persamaan bidang rata V yang melalui titik O(0,0,0), P(1,2,3), dan tegaklurus bidang rata $H \equiv 2x + 3y + 4z - 10 = 0$.

Jawab :

Misalkan persamaan bidang rata V yang dicari adalah :

$V \equiv Ax + By + Cz + D = 0.$

V tegak lurus H, berarti : $2A + 3B + 4C = 0$ ....(1)

Titik $(0,0,0) \in V$, berarti : $0 + 0 + 0 + D = 0$, maka $D = 0$..................(2)

Titik $(1,2,3) \in V$, berarti : $A + 2B + 3C = 0$ .... (3)

Dari (1) dan (3) diperoleh :

$$\begin{array}{lcl} 2A + 3B + 4C = 0 & \Leftarrow\Rightarrow & 2A + 3B + 4C = 0 \\ A + 2B + 3C = 0 & & 2A + 4B + 6C = 0 \\ \hline & & -B - 2C = 0 \end{array}$$

atau $B = -2C$ .... (4)

Substitusikan (4) ke (1), diperoleh $A = C$.

Jadi persamaan bidang V yang dicari adalah:

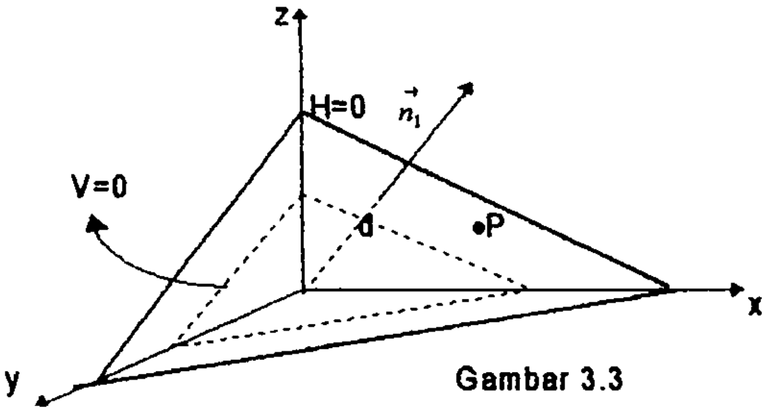
$V \equiv Cx - 2Cy + Cz + 0 = 0$ atau

$V \equiv x - 2y + z = 0.$

3.3. Jarak Titik ke Bidang Rata dan Jarak antara Dua Bidang Rata Sejajar

Perhatikan bidang $V \equiv x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$.

Sebarang titik $P(x_1,y_1,z_1)$ yang tidak terletak pada V yang diberikan. Berapakah jarak P ke Bidang V ? Untuk itu buat bidang H sejajar V dan melalui P (lihat gambar 3.2). Jadi vektor normal V dan H sama, dan jarak titik asal O(0,0,0) ke H adalah $p \pm d$ (d = jarak antara V dan H, dan $\pm d$ tergantung letak V dan H terhadap titik O).



Gambar 3.3

H ≡ x Cos α + y Cos β + z Cos γ = p ± d, dan karena $P(x_1,y_1,z_1) \in H$, maka terpenuhi x_1 Cos α + y_1 Cos β + z_1 Cos γ = p ± d, atau

$d = |x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p|$ merupakan jarak titik $P(x_1,y_1,z_1)$ ke bidang V ≡ x Cos α + y Cos β + z Cos γ = p.

Jika V berbentuk : Ax + By + Cz + D = 0, maka

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Contoh soal:

1. Tentukan jarak titik P(1,2,5) ke bidang V ≡ x - y - 2 = 0.

   Jawab :

   $$d = \left| \frac{x_1 - y_1 - 2}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} \right| = \left| \frac{1 - 2 - 2}{\sqrt{2}} \right| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

   Jadi jarak P(1,2,5) ke bidang V ≡ x - y - 2 = 0 adalah $d = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

2. Tentukan jarak antara bidang V ≡ 2x + y + z - 3 = 0 dan H ≡ 2x + y + z - 2 = 0.

Jawab:

Ambil titik $P(0,0,z_p)$ pada H, dan diperoleh $z_p = 2$, berarti titik P(0,0,2).

Jarak titik P ke bidang V merupakan jarak antara V dan H, yaitu :

$$d = \left|\frac{2x_1 + y_1 - z_1 - 3}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{2.0 + 0 + 2 - 3}{\sqrt{6}}\right| = \frac{1}{6}\sqrt{6}$$

3.4. Jaringan Bidang Rata

Misalkan dua bidang rata $V_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ dan

$$V_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Jika bidang rata V_1 dan V_2 berpotongan, maka perpotongannya membentuk sebuah garis lurus. Setiap titik pada garis lurus tersebut akan memenuhi persamaan $\lambda_1V_1 + \lambda_2V_2 = 0$ (λ_1 dan λ_2 adalah parameter). Persamaan ini merupakan himpunan bidang-bidang yang melalui garis potong V_1 dan V_2. Jika $\lambda_1 \neq 0$, maka persamaan tersebut dapat ditulis menjadi:

$$V_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}V_2 = 0 \quad \text{atau} \quad V_1 + \lambda V_2 = 0$$

adalah **persamaan berkas bidang rata** yang melalui garis potong V_1 dan V_2.

Jika V_1 dan V_2 sejajar, maka berkas bidang $V_1 + \lambda V_2 = 0$ merupakan himpunan bidang-bidang yang sejajar V_1 dan V_2, dan persamaan itu dapat ditulis menjadi:

$$A_1x + B_1y + C_1z = k, \quad k = \text{parameter}.$$

Contoh soal:

1. Tentukan persamaan bidang rata V yang melalui titik (1,2,3) serta melalui garis

potong bidang $H \equiv 2x + 3y + z + 12 = 0$ dan $K \equiv x - 4y + z - 10 = 0$.

Jawab :

V dapat dinyatakan ebagai : $V \equiv H + \lambda K = 0$ atau

$$2x + 3y + z + 12 + \lambda(x - 4y + z - 10) = 0$$

V melalui titik (1,2,3), berarti : $2.1 + 3.2 + 3 + 12 + \lambda(1 - 4.2 + 3 - 10) = 0$,

atau $\lambda = \frac{23}{14}$.

Jadi persamaan bidang V adalah :

$$2x + 3y + z + 12 + \frac{23}{14}(x - 4y + z - 10) = 0$$

atau $\quad 6x - 6y + 36z - 52 = 0$.

2. Tentukan persamaan bidang rata V yang melalui garis potong

$H_1 \equiv x - 3y + z - 7 = 0$ dan

$H_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$, serta tegak lurus bidang

$H_3 \equiv x + 2y + 3z + 7 = 0$.

Jawab :

$V \equiv H_1 + \lambda H_2 = 0$ atau $V \equiv x - 3y + z - 7 + \lambda(2x - y + 3z - 5) = 0$, dengan vektor normalnya $\vec{n}_1 = [1 + 2\lambda, -3 - \lambda, 1 + 3\lambda]$.

V tegak lurus H_3, dan normal H_3 adalah $\vec{n}_2 = [1,2,3]$, berarti $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$, atau

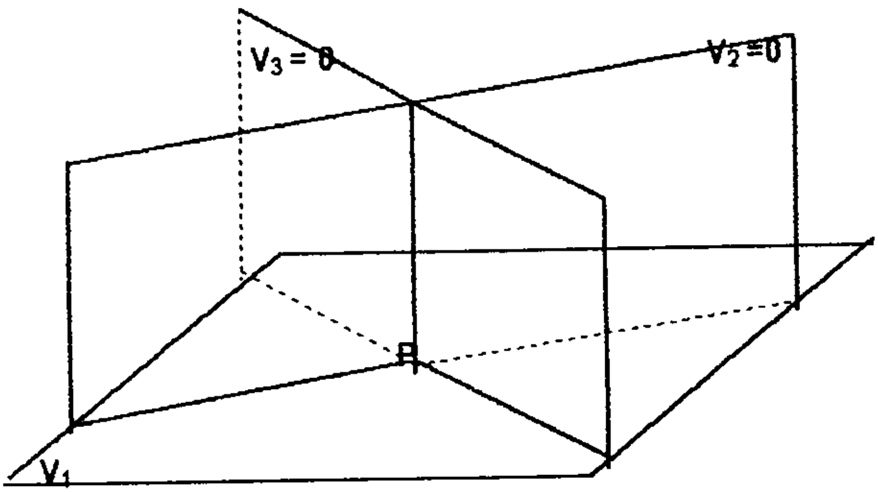
$$[1 + 2\lambda, -3 - \lambda, 1 + 3\lambda].[1,2,3] = 0 \text{ atau}$$

$$(1 + 2\lambda) + 2(-3 - \lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 0 \text{ atau } \lambda = \frac{2}{9}.$$

Jadi V adalah : $x - 3y + z - 7 + \frac{2}{9}(2x - y + 3z - 5) = 0$

$$13x - 29y + 15z - 73 = 0.$$

Selanjutnya, apakah yang dimaksud dengan jaringan bidang ?



Gambar 3.4.

Perhatikan bidang-bidang rata $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, dan $V_3 = 0$ yang tidak terletak dalam berkas yang sama (tidak berpotongan pada satu garis ataupun sejajar satu sama lain).

Persamaan bidang $V = V_1 + \lambda V_2 + \mu V_3 = 0$ merupakan himpunan bidang-bidang yang melalui titik potong ketiga bidang yang diketahui (perhatikan gambar 3.4). Ketiga bidang itu melalui titik P, dan himpunan bidang-bidang rata itu disebut **Jaringan Bidang.**

Contoh soal :

1. Tentukan persamaan bidang rata V yang melalui titik potong

$H_1 \equiv x - 3 = 0$,

$H_2 \equiv y - 2 = 0$, dan

$H_3 \equiv z - 1 = 0$, serta sejajar dengan bidang

$U \equiv 2x + y + z - 3 = 0.$

Jawab:

Bidang rata $V \equiv H_1 + \lambda H_2 + \mu H_3 = 0$ atau

$$V \equiv x - 3 + \lambda(y - 2) + \mu(z - 1) = 0,$$

dengan vektor normal V adalah $\vec{n}_1 = [1, \lambda, \mu]$.

Bidang V sejajar U, dan vektor normal U adalah $\vec{n}_2 = [2,1,1]$, berarti $\vec{n}_1$ merupakan kelipatan dari $\vec{n}_2$, atau $2[1,\lambda,\mu] = [2,1,1]$ atau $\lambda = \frac{1}{2}$, dan $\mu = \frac{1}{2}$.

Jadi $V \equiv x - 3 + \frac{1}{2}(y - 2) + \frac{1}{2}(z - 1) = 0$

$\equiv x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 4\frac{1}{2} = 0$ atau

$V \equiv 2x + y + z - 9 = 0.$

2. Tentukan bidang L yang melalui titik potong

$H \equiv x - y - z - 3 = 0,$

$V \equiv 2x - 5y - 7z - 12 = 0$, dan

$W \equiv 3x + 2y - z - 5 = 0$, dan sejajar dengan bidang

$T \equiv 3x - y - 4 = 0.$

Jawab :

Persamaan bidang L itu adalah :

$L \equiv H + \lambda V + \mu W = 0$

$\equiv x - y - z - 3 + \lambda(2x - 5y - 7z - 12) + \mu(3x + 2y - z - 5) = 0$

dengan vektor normalnya $\vec{n}_1 = [1 + 2\lambda + 3\mu, -1 - 5\lambda + 2\mu, -1 - 7\lambda - \mu]$.

Sedangkan bidang T mempunyai vektor normal . $\bar{n}_2$ = [3,-1,0].

Karena L sejajar T, maka $\bar{n}_1 = k\bar{n}_2$, atau

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda + 3\mu = 3k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i) \\ -1 - 5\lambda + 2\mu = -k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii) \\ -1 - 7\lambda - \mu = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii) \end{cases}$$

Dari (I), (II), dan (III) diperoleh $\lambda = \frac{-11}{76}$, $\mu = \frac{1}{76}$.

Jadi $V \equiv x - y - z - 3 + \frac{-11}{76}(2x - 5y - 7z - 12) + \frac{1}{76}(3x + 2y - z - 5) = 0$

$\equiv 57x - 19y - 102 = 0.$

3.5. Soal-soal

1. Tentukan persamaan vektoris, persamaan parameter, dan persamaan linier bidang rata melalui tiga titik:

a) (2,4,1), (-1,-2,5), (2,7,3).

b) (-3,6,7), (0,2,1), (3,0,-1)

c) (2,3,1), (1,3,2), (2,-1,3)

2. Apakah empat titik berikut sebidang, jika sebidang tentukan persamaan liniernya:

a) (2,1,3), (4,2,1), (-1,-2,4), (0,0,5)

b) (4,2,1), (-1,-2,2), (0,4,-5), $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

c) (3,1,2), (4,-2,-1), (1,2,4), (1,2,1).

3. Terangkan hal-hal istimewa pada bidang-bidang rata berikut, serta berikan gambarnya!

a) $x + y = 6$
b) $2x - z = 0$
c) $2y - 3z = 6$
d) $x - 6 = 0$
e) $2x + 4y + 3z = 0$
f) $3x - 5y + 2z = 30$.

4. Tentukan persamaan linier bidang rata yang:

a) melalui titik (-1,2,4) dan sejajar bidang rata $2x - 3y - 5z + 6 = 0$

b) sejajar bidang rata $3x - 6y - 2z - 4 = 0$ dan berjarak 3 dari titik asal (0,0,0)

c) sejajar dengan bidang rata $4x - 4y + 7z - 3 = 0$ dan berjarak 4 dari titik (4,1,-2).

5. Tentukan titik potong ketiga bidang dari soal berikut:

a) $2x - y - 2z = 5$; $4x + y + 3z = 1$; $8x - y + z = 5$

b) $2x + y - z - 1 = 0$; $3x - y - z + 2 = 0$; $4x - 2y + z - 3 = 0$

c) $2x + 3y + 3 = 0$; $3x + 2y - 5z + 2 = 0$; $3x - 4z + 8 = 0$.

6. Suatu bidang rata memotong sumbu-sumbu koordinat di titik A, B, dan C sedemikian sehingga titik berat segitiga ABC adalah titik (a,b,c). Tunjukkan bahwa persamaan bidang rata tersebut adalah $x/a + y/b + z/c = 3$.

7. Tentukan jarak:

a) titik (-2,2,3) ke bidang rata $2x + y - 2z = 4$

b) titik (0,2,3) ke bidang rata $6x - 7y - 6z + 22 = 0$

c) bidang-bidang rata $2x - 2y + z + 3 = 0$ dan $4x - 4y + 2z + 5 = 0$

d) bidang-bidang rata $6x - 2y + 3z = 7$ dan $6x - 2y + 3z = 9$.

8. Tentukan persamaan bidang rata yang melalui titik (-1,3,2) serta tegak lurus bidang-bidang $V_1 \equiv x + 2y + 2z = 5$ dan $V_2 \equiv 3x + 5y + 2z = 8$.

9. Tunjukkan bahwa ketiga bidang:

$$V_1 \equiv 2x - y + z - 3 = 0$$

$$V_2 \equiv 7x + 5y - 2z + 12 = 0$$

$$V_3 \equiv x - 2y - 3z + 5 = 0$$

berpotongan hanya pada satu titik (jadi membentuk jaringan bidang). Kemudian tentukan persamaan bidang W yang melalui titik potong tersebut dan sejajar bidang $V_4 \equiv y - 3z + 4 = 0$.

10. Tunjukkan bahwa bidang-bidang berikut merupakan sisi-sisi sebuah paralel-epipedum.

$$V_1 \equiv 3x - y + 4z - 7 = 0,$$

$$V_2 \equiv x + 2y - z + 5 = 0,$$

$$V_3 \equiv 6x - 2y + 8z + 10 = 0,$$

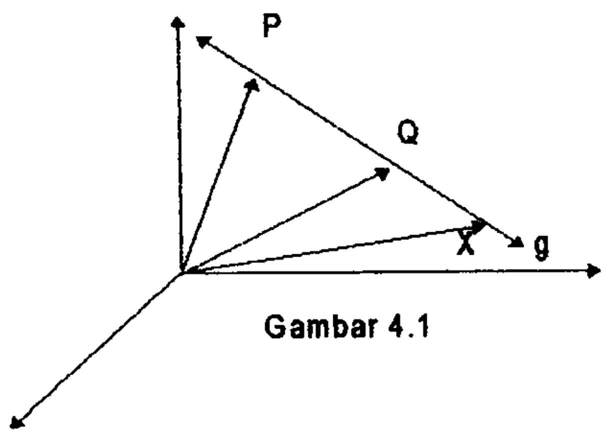
$$V_4 \equiv 3x + 6y - 3z - 7 = 0.$$

BAB IV

GARIS LURUS DI R^3

4.1. Persamaan Garis Lurus

Misalkan titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dan $Q(x_2,y_2,z_2)$. Apabila titik P dan Q dihubungkan dan diperpanjang, maka akan terbentuk suatu garis lurus. Misalkan garis lurus itu adalah g (lihat gambar 4.1).



Gambar 4.1

Maka $\vec{OP} = [x_1,y_1,z_1]$

$\vec{OQ} = [x_2,y_2,z_2]$

$\vec{PQ} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$

Untuk sebarang titik $X(x,y,z)$ pada garis g akan berlaku

$$PX = \lambda PQ,\ (-\infty < \lambda < \infty).$$

atau $\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda\, \vec{PQ}$

$$[x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1],\ \text{dengan}\ (-\infty < \lambda < \infty).$$

Bentuk persamaan $[x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, disebut **persamaan vektoris garis lurus** melalui dua titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dan $Q(x_2,y_2,z_2)$.

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ (atau vektor lain yang tidak nol dan terletak pada garis) disebut **vektor arah garis lurus.**

Secara umum, bila suatu garis lurus g melalui titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dengan vektor arah $\bar{a}$ = [a,b,c], maka persamaan vektoris garis g dapat ditulis sebagai:

$$g \equiv [x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda[a,b,c], \text{ dengan } -\infty < \lambda < \infty.$$

Sedangkan **persamaan parameter** garis g dapat ditulis sebagai:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda a \\ y &= y_1 + \lambda b \\ z &= z_1 + \lambda c \end{aligned}}$$

Jika λ pada persamaan parameter dieliminir, maka diperoleh :

$$\lambda = \frac{x-x_1}{a},\ \lambda = \frac{y-y_1}{b},\ \lambda = \frac{z-z_1}{c},\ (\text{apabila } a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0),$$

atau

$$\boxed{\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}}$$

adalah persamaan garis lurus melalui titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dengan vektor arah $\bar{a}$ =[a,b,c].

Jika $P(x_1,y_1,z_1)$ dan $Q(x_2,y_2,z_2)$dua buah titik yang berbeda. maka persamaan garis lurus melalui P dan Q dapat ditulis :

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

Jika α, β, dan γ berturut-turut adalah sudut antara garis lurus (dengan vektor arah $\vec{a}$ =[a,b,c]) dengan sumbu-sumbu koordinat, maka

$$Cos\alpha = \frac{a}{|\vec{a}|}, Cos\beta = \frac{b}{|\vec{a}|}, Cos\gamma = \frac{c}{|\vec{a}|}$$

yang berarti vektor

$$[Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma] = \frac{[a,b,c]}{|\vec{a}|}, \text{ atau}$$

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$$

Jadi vektor g dengan panjang = 1, dan disebut juga **vektor kosinus** dari garis lurus g. Sehingga persamaan garis lurus g dapat juga ditulis sebagai:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}}$$

dengan $Cos\alpha = \frac{a}{|\vec{a}|}, Cos\beta = \frac{b}{|\vec{a}|}, Cos\gamma = \frac{c}{|\vec{a}|}$,

atau

$$x = x_1 + r\cos\alpha$$
$$y = y_1 + r\cos\beta$$
$$z = z_1 + r\cos\gamma$$

dengan r = jarak titik (x,y,z) ke (x_1,y_1,z_1).

Contoh soal

1. Tentukan persamaan garis lurus g yang melalui kedua titik (2,1,0) dan (0,2,-2).

   Jawab :

Persamaan garis lurus g yang dimaksud adalah:

$g \equiv [x,y,z] = [2,1,0] + \lambda[0\text{-}2,2\text{-}1,\text{-}2\text{-}0],$

$= [2,1,0] + \lambda[-2,2,-2]$, dengan $-\infty < \lambda < \infty$.

atau

$x = 2 - 2\lambda$

$y = 1 + \lambda$

$z = 0 - 2\lambda$

atau

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$$

2. Tentukan persamaan parameter garis lurus yang melalui kedua titik (4,2,-2) dan (2,4,6) dan tentukan pula vektor cosinusnya.

Jawab :

Persamaan tersebut adalah :

$[x,y,z] = [4,2,-2] + \lambda[2\text{-}4,4\text{-}2,6\text{+}2],$

$= [4,2,-2] + \lambda[-2,2,8].$

Jadi persamaan parameternya adalah:

$x = 4 - 2\lambda$

$y = 2 + 2\lambda$

$z = -2 + 8\lambda$

Vektor Cosinusnya adalah: $[\text{Cos } \alpha, \text{Cos } \beta, \text{Cos } \gamma]$

dengan

$$Cos\alpha = \frac{a}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{\left|\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 8^2}\right|} = \frac{-2}{\sqrt{72}}$$

$$Cos\beta = \frac{b}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{72}}$$

$$Cos\gamma = \frac{c}{|\vec{a}|} = \frac{8}{\sqrt{72}}$$

Jadi vektor cosinusnya adalah $\left[\frac{-2}{\sqrt{72}}, \frac{2}{\sqrt{72}}, \frac{8}{\sqrt{72}}\right]$

Selanjutnya, dari persamaan vektoris garis lurus $[x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda[a,b,c]$, ada hal-hal khusus seperti berikut ini.

1). Jika garis lurus itu melalui titik O(0,0,0), maka persamaannya berbentuk:

$[x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda[a,b,c]$, atau

$x = \lambda a$, $y = \lambda b$, $z = \lambda c$, atau

$$\boxed{\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}}$$

2). Jika a = 0, maka vektor arah garis [0,b,c] terletak pada bidang rata yang sejajar dengan bidang YOZ, sehingga

$[x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda[0,b,c]$, atau

$x = x_1$, $y = y_1 + \lambda b$, $z = z_1 + \lambda c$, atau

$$\boxed{x = x_1, \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

Jika b = 0, maka vektor arah garis [a,0,b] terletak pada bidang rata yang sejajar dengan bidang XOZ, sehingga

$[x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda[a,0,c]$, atau

$x = x_1 + \lambda a,\ y = y_1,\ z = z_1 + \lambda c$, atau

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c}, y = y_1}$$

Jika c = 0, maka vektor arah garis [a,0,b] terletak pada bidang rata yang sejajar dengan bidang XOY, sehingga

$[x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda[a,b,0]$, atau

$x = x_1 + \lambda a,\ y = y_1,\ z = z_1$, atau

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}, z = z_1}$$

3). Jika a = b = 0, vektor [0,0,c] sejajar dengan arah sumbu z, yaitu [0,0,1]. Jadi garis lurus itu sejajar dengan sumbu z.

Jika a = c = 0, maka garis lurus sejajar dengan sumbu y.

Jika b = c = 0, maka garis lurus sejajar dengan sumbu x.

Contoh soal

1. Garis lurus $[x,y,z] = [1,3,2] + \lambda[3,-7,0]$ bersifat sejajar dengan bidang XOY.

   Persamaan garis ini, dapat juga ditulis sebagai

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-7}, z = 2$$

2. Garis lurus $[x,y,z] = [4,5,-3] + \lambda[0,0,6]$ adalah garis lurus yang sejajar dengan sumbu z, atau dapat juga ditulis dalam bentuk :

$$x = 4,\ y = 5,\ z = -3 + 6\lambda$$

4.2. Garis Lurus Sebagai Perpotongan Dua Bidang Rata

Misalkan dua buah bidang rata $V_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ dan

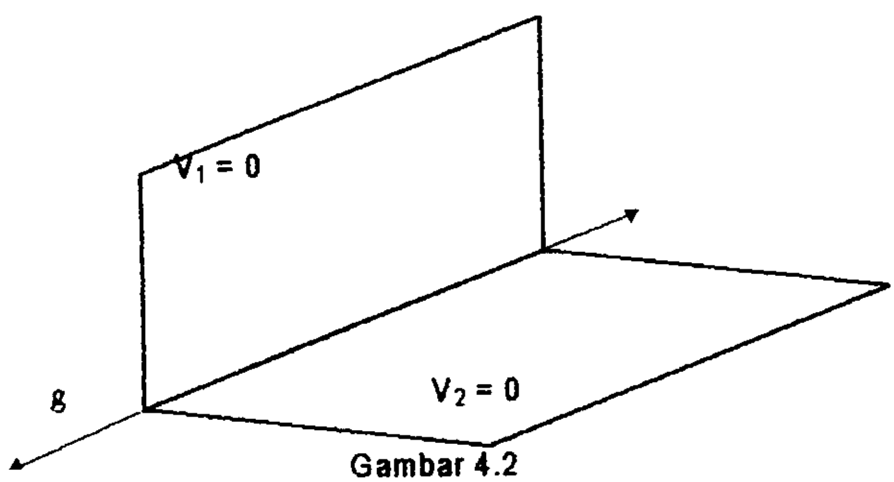
$V_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Jika bidang V_1 dan V_2 saling berpotongan, maka perpotongannya akan membentuk suatu garis lurus. Sehingga suatu persamaan garis lurus g dapat pula ditulis sebaga:

$$g = \begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{cases} \quad \text{atau}$$

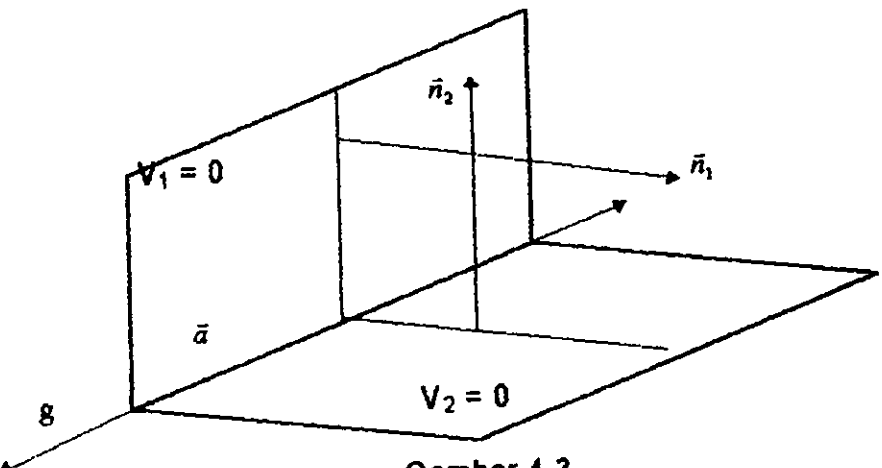
$$g = \begin{cases} V_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ V_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Secara geometris, garis g tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.2

Selanjutnya, untuk menentukan vektor arah dari garis lurus perpotongan dua bidang rata, terlebih dulu perhatikan gambar 4.3 berikut.



Gambar 4.3

$$g = \begin{cases} V_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ V_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

dengan $\vec{n}_1 = [A_1,B_1,C_1]$, dan $\vec{n}_2 = [A_2,B_2,C_2]$.

Jelas bahwa $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{a}$ yang merupakan vektor arah garis g.

Jadi $\quad \vec{a} = [a,b,c] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

$$= \left[\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right]$$

Untuk memudahkan mengingat bagaimana cara menghitung nilai a, b, dan c, maka penulisan dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccc} & \multicolumn{2}{c}{a} & \multicolumn{2}{c}{c} \\ & \multicolumn{2}{c}{\overline{\qquad\qquad}} & \multicolumn{2}{c}{\overline{\qquad\qquad}} \\ A_1 & B_1 & C_1 & A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & A_2 & B_2 \\ & & \multicolumn{2}{c}{\overline{\qquad\qquad}} & \\ & & \multicolumn{2}{c}{b} & \end{array}$$

Bagaimanakah caranya mengubah bentuk persamaan garis g = $\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{cases}$

ke bentuk $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$?

Untuk maksud tersebut, diambil sebarang titik (x_1,y_1,z_1) pada garis g. Biasanya, untuk lebih memudahkan perhitungan, ambil titik potong dengan bidang koordinat. Misalnya, ambil titik potong dengan bidang XOY, maka z = 0, sehingga diperoleh :

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + D_2 = 0$$

Selanjutnya dihitung nilai x dan y, dengan rumus :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

sehingga

$$x_1 = \frac{-D_1B_2 + D_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1},$$

$$y_1 = \frac{-A_1D_2 + A_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1},$$

dan $\qquad z_1 = 0$.

Contoh soal

Nyatakanlah persamaan garis lurus x - 2y + 3z = 1, 4x - y + 2z = 6 sebagai persamaan parameter.

Jawab :

$$\text{garis } g = \begin{cases} V_1 = x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ V_2 = 4x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

Ambil z = 0, maka diperoleh : x - 2y - 1 = 0

4x - y - 6 = 0

dengan nilai $x = \frac{11}{7}$, $y = \frac{2}{7}$.

Vektor arah garis g :

$$[x,y,z] = [\tfrac{11}{7}, \tfrac{2}{7}, 0] + \lambda[-1,10,7]$$

atau

$$x = \frac{11}{7} - \lambda$$

$$y = \frac{2}{7} + 10\lambda$$

$$z = 0 + 7\lambda$$

Yang terakhir ini adalah merupakan persamaan parameter garis yang diminta.

4.3. Kedudukan Dua Garis Lurus

Misalkan diketahui dua buah garis lurus dalam ruang berdimensi tiga:

$g \equiv [x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda_1[a_1, b_1, c_1]$, dan

$h \equiv [x,y,z] = [x_2,y_2,z_2] + \lambda_2[a_2, b_2, c_2]$.

Kedudukan garis lurus g dan h mungkin sejajar, berimpit, berpotongan, atau bersilangan.

1). Garis g sejajar h bila vektor arahnya saling berkelipatan, artinya :

$[a_1, b_1, c_1] = \mu [a_2, b_2, c_2]$, $\mu \neq 0$, atau $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

2). Garis g berimpit dengan h jika:

$[a_1, b_1, c_1] = \mu [a_2, b_2, c_2]$, dan

$[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1] = \mu [a_1, b_1, c_1]$.

3). Jika vektor arah g dan h tidak berkelipatan, maka g dan h berpotongan di satu titik atau bersilangan.

Misalkan titik potong g dan h adalah (x_0, y_0, z_0). Berarti terdapat λ_1 sehingga:

$[x_0, y_0, z_0] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda_1 [a_1, b_1, c_1]$, dan λ_2 sehingga

$[x_0, y_0, z_0] = [x_2, y_2, z_2] - \lambda_2 [a_2, b_2, c_2]$.

Atau $[x_1, y_1, z_1] + \lambda_1 [a_1, b_1, c_1] = [x_2, y_2, z_2] - \lambda_2 [a_2, b_2, c_2]$

atau $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = x_2 - x_1$

$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 = y_2 - y_1$

$\lambda_1 + c_2\lambda_2 = z_2 - z_1$

Menurut sistem persamaan linier, nilai λ_1 dan λ_2 ada, apabila determinan:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ini merupakan syarat **dua buah garis g dan h berpotongan** pada satu titik.

Jika

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

maka garis g dan h bersilangan.

Sedangkan persamaan bidang yang memuat kedua garis g dan h tersebut adalah:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x - x_1 \\ b_1 & b_2 & y - y_1 \\ c_1 & c_2 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh soal

1). Selidikilah kedudukan garis :

$$g = \frac{x-4}{4} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z+1}{16}$$

$$h = \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$$

Jawab:

Vektor arah garis g adalah :[4,-6,16], dan garis h adalah [2,-3,8].

Ternyata [4,-6,16] = 2 [2,-3,8].

Jadi vektor arah g dan h berkelipatan, dan berarti g sejajar h. Sedangkan nilai $[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$ = [1-4,-1+3,-10+1] = [-3,2,9] tidak berkelipatan dengan [4,-6,16]. Jadi g dan h tidak berimpit.

2). Misalkan :

$$g_1 = (x-4) = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{7}$$

$$g_2 = \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$$

a. Tunjukkan bahwa g_1 dan g_2 berpotongan

b. Tentukan titik potongnya.

c. Tentukan persamaan bidang yang memuat g_1 dan g_2.

Jawab:

a. Persamaan garis g_1 dan g_2 dapat ditulis dalam bentuk vektoris sebagai berikut:

$$g_1 \equiv [x,y,z] = [4,-3,-1] + \lambda_1[1,-4,7], \text{ dan}$$

$$g_2 \equiv [x,y,z] = [1,-1,-10] + \lambda_2[2,-3,8].$$

Arah g_1 dan g_2 tidak berkelipatan, jadi g_1 dan g_2 tidak sejajar maupun berimpit.

Determinan $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-4 \\ -4 & -3 & -1+3 \\ 7 & 8 & -10+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 0$

Berarti g_1 dan g_2 berpotongan.

b. Titik potong diperoleh dari persamaan :

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3$$

$$-4\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2$$

$$7\lambda_1 + 8\lambda_2 = -9$$

dan diperoleh $\lambda_1 = 1$, dan $\lambda_2 = -2$.

Untuk $\lambda_1 = 1$, diperoleh titik potong

$$[x_0,y_0,z_0] = [4,-3,-1] + 1[1,-4,7] = [5,-7,6].$$

Jadi titik potong g_1 dan g_2 adalah (5,-7,6).

Boleh juga mengambil $\lambda_2 = -2$, kemudian substitusikan ke g_2.

c. Persamaan bidang rata yang memuat g_1 dan g_2 mempunyai vektor arah

[1,-4,7] dan [2,-3,8] serta melalui titik (4,-3,-1).

Jadi persamaan vektorisnya adalah:

$$[x,y,z] = [4,-3,-1] + \lambda[1,-4,7] + \mu[2,-3,8];$$

Sedangkan bentuk liniernya adalah:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-4 \\ -4 & -3 & y+3 \\ 7 & 8 & z+1 \end{vmatrix} = 0, \text{ atau}$$

$$11x - 6y - 5z - 67 = 0$$

Selanjutnya besar sudut antara dua buah garis g dan h adalah sudut yang dibentuk vektor arah g dan h. Misalkan vektor arah g adalah $[a_1, b_1, c_1]$ dan vektor arah garis h adalah $[a_2,b_2,c_2]$. Maka sudut antara g dan h dihitung melalui:

$$\text{Cos } \theta = \frac{[a_1,b_1,c_1].[[a_2,b_2,c_2]]}{[a,b,c]\|[a_2,b_2,c_2]\|}$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$$

Garis g dan h saling tegak lurus jika $[a_1, b_1, c_1].[a_2, b_2, c_2] = 0$ atau

$$\mathbf{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.}$$

Contoh soal

Tentukan besar sudut antara garis yang melalui titik A(2,1,1), B(4,2,1) dan P(4,2,1), Q(8,2,1).

Jawab:

Persamaan garis melalui A dan B adalah $[x,y,z] = [2,1,1] + \lambda_1[2,1,0]$.

Persamaan garis melalui P dan Q adalah $[x,y,z] = [4,2,1] + \lambda_2[4,0,0]$.

Misalkan sudut antara garis AB dan PQ adalah θ, maka

$$\text{Cos }\theta = \frac{[2,1,0].[[4,0,0]]}{|[2,1,0]||[4,0,0]|}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{(4+1+0)(16+0+0)}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{80}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Atau $\theta = \text{arc Cos } \frac{2}{\sqrt{5}}$.

4.4. Kedudukan Garis Lurus dan Bidang Rata, dan Jarak antara Dua Garis Lurus

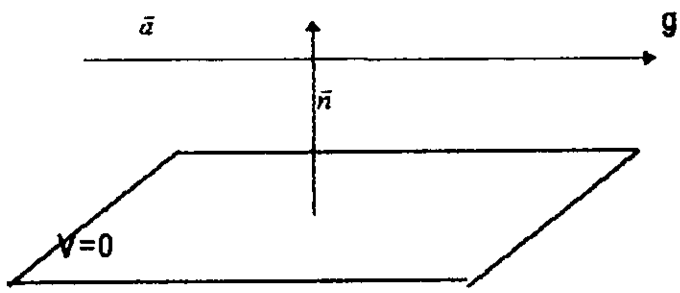
Misalkan garis lurus g mempunyai vektor arah $\vec{a} = [a,b,c]$ dan bidang rata V mempunyai vektor normal $\vec{n} = [A,B,C]$.

Ada tiga kemungkinan kedudukan antara garis g dan bidang V.

1). Garis lurus g sejajar dengan bidang V (gambar 4.4)

$g//V \Longleftrightarrow$ Vektor arah garis tegak lurus normal bidang, atau

$g//V \Longleftrightarrow \vec{a}.\vec{n} = 0$ atau $aA + bB + cC = 0$



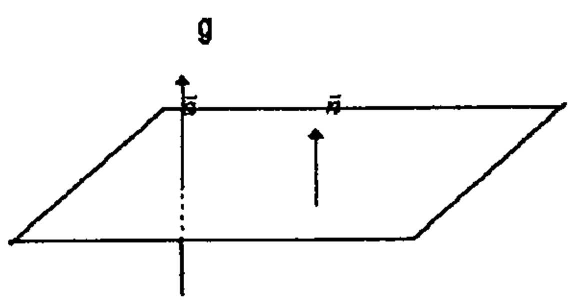
Gambar 4.4

2). Garis g tegak lurus bidang V (gambar 4.5)

g $\perp$ V $\Leftrightarrow$ Vektor arah garis lurus = vektor normal V

(atau kelipatannya)

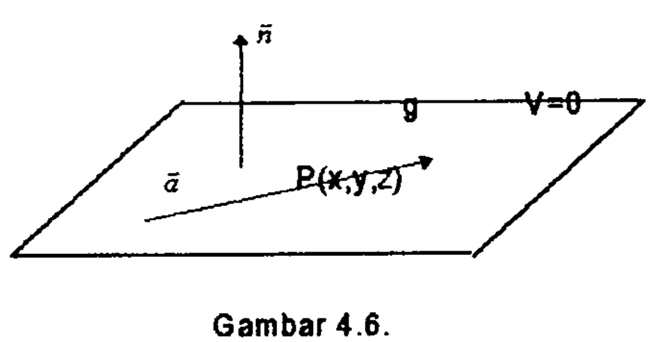
atau $\bar{a} = \mu\,\bar{n}$ atau $\dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B} = \dfrac{c}{C}$



Gambar 4.5

3). Garis g terletak pada bidang V (gambar 4.6)

Garis g terletak pada bidang V jika dipenuhi $\bar{a} \perp \bar{n}$ atau $\bar{a}\,.\,\bar{n} = 0$, atau $aA + bB + cC = 0$, dan sebarang titik P pada g harus terletak pula pada bidang V.



Gambar 4.6.

Contoh soal

1. Garis lurus g ≡ [x,y,z] = [3,-2,0] + λ[2,-3,1] mempunyai vektor arah $\vec{a}$ = [2,-3,1].

   Bidang H ≡ x + y + z + 9 = 0 mempunyai vektor normal $\vec{n}$ = [1,1,1].

   Ternyata $\vec{a} \cdot \vec{n}$ = [2,-3,1].[1,1,1] = 0, dan titik (3,-2,0) tidak terletak pada bidang H.

   Jadi garis g sejajar bidang H (g//H).

2. Garis lurus g ≡ $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{4}$ sejajar dengan bidang H ≡ 4x + 8y +10z - 3 = 0.

   (Kenapa ?, silahkan diselidiki !!)

3. Garis lurus g ≡ $x = y = \frac{z+3}{2}$ tegak lurus bidang rata V ≡ x + y + 2z = 5, karena vektor arah garis g = [1,1,2] sama dengan vektor normal V yaitu [1,1,2].

Selanjutnya dibahas tentang suatu garis lurus yang memotong dua garis lurus lain. Misalkan garis g_1 dan g_2 dengan persamaan:

$$g_1 = \begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad g_2 = \begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{cases}$$

Maka persamaan garis lurus g yang memotong garis g_1 dan g_2 dapat ditulis sebagai:

$$g = \begin{cases} H_1 + \lambda H_2 = 0 \\ V_1 + \mu V_2 = 0 \end{cases}$$

Contoh soal

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui P(1,2,1) dan memotong garis-garis:

$$g_1 = \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad g_2 = \begin{cases} x + 2z - 4 = 0 \\ 2x + z + 8 = 0 \end{cases}$$

Jawab:

Misalkan garis lurus yang diminta adalah garis g dengan persamaan:

$$g = \begin{cases} x + y - 2 + \lambda(y + 2z) = 0 \\ x + 2z - 4 + \mu(2x + z + 8) = 0 \end{cases}$$

untuk setiap λ dan μ.

Garis g melalui titik P(1,2,1), berarti memenuhi persamaan garis g.

Jadi :

$$1 + 2 - 1 + \lambda(2 + 2) = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$$

$$1 + 2 - 4 + \mu(2 + 2 + 8) = 0 \longrightarrow \mu = -\frac{1}{12}$$

Jadi garis g yang dimaksud adalah

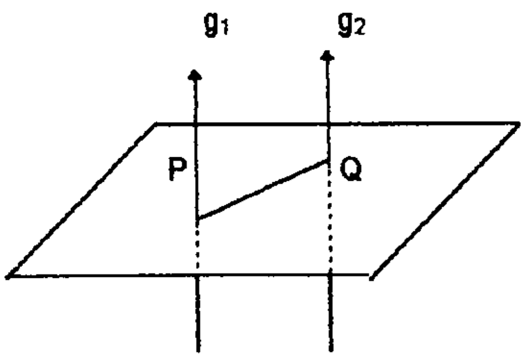
$$g = \begin{cases} x + y - 2 + \left(-\frac{1}{4}\right)(y + 2z) = 0 \\ x + 2z - 4 + \left(-\frac{1}{12}\right)(2x + z + 8) = 0 \end{cases}$$

atau

$$g = \begin{cases} 4x + 3y - 2z - 8 = 0 \\ 10x + 23z - 56 = 0 \end{cases}$$

Untuk menentukan jarak antara dua garis lurus g_1 dan g_2, harus diperhatikan dulu kedudukan kedua garis tersebut.

1). Jika g_1 dan g_2 sejajar, maka untuk menentukan jaraknya dilakukan hal-hal berikut:



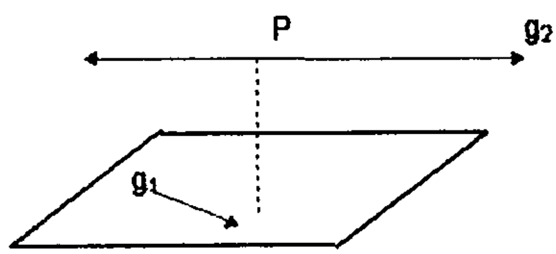
Gambar 4.7

- Pilih sebarang titik $P(x_1,y_1,z_1)$ pada garis g_1
- Buat bidang rata V melalui P dan tegak lurus g_1, yang sekaligus juga tegak lurus g_2.

- Tentukan titik $Q(x_0,y_0,z_0)$ yang merupakan titik tembus g_2 dengan V
- PQ merupakan jarak antara g_1 dan g_2, yang dihitung dengan rumus:

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

2). Jika g_1 dan g_2 bersilangan, maka untuk menentukan jaraknya dilakukan hal-hal berikut:



Gambar 4.8.

- Buat bidang rata V yang memuat g_1 dan sejajar g_2.
- Ambil sebarang titik $P(x_1,y_1,z_1)$ pada g_2.
- Tentukan jarak $P(x_1,y_1,z_1)$ ke bidang V yang merupakan jarak g_1 dan g_2,

dengan rumus:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \right|$$

Contoh soal

1. Tentukan jarak garis lurus g_1 dan g_2, jika:

$$g_1 \equiv [x,y,z] = [2,0,2] + \lambda[2,3,1], \text{ dan}$$

$$g_2 \equiv [x,y,z] = [0,4,8] + \mu [2,3,1].$$

Jawab:

Di sini terlihat bahwa vektor arah g_1 = vektor arah g_2.

Jadi $g_1 // g_2$.

Pilih titik P(2,0,2) pada g_1. Kemudian buat bidang V melalui P(2,0,2) dan tegak lurus g_1 (vektor normal V = vektor arah garis g_1), yaitu:

$$V \equiv 2(x-2) + 3(y-0) + 1(z-2) = 0$$

$$\equiv 2x + 3y + z - 6 = 0$$

Tentukan titik tembus g_2 dengan V, misalkan titik Q, yang dihitung dengan cara:

$$\text{Tulis } g_2 = \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 4 + 3\mu \\ z = 8 + \mu \end{cases}$$

Kemudian disubstitusikan ke V, sehingga diperoleh:

$$4\mu + 12 + 9\mu + 8 + \mu - 6 = 0, \text{ atau } \mu = -1.$$

Jadi titik Q, dengan x = -2, y = 1, z = 7 atau Q(-2,1,7).

Jadi PQ = $\sqrt{(-2-2)^2 + (1-0)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{42}$

2. Tentukan jarak dan persamaan garis hubung terpendek dari sumbu z ke garis lurus $g_1 \equiv x = -y + 1 = -z$.

Jawab:

Sumbu z mempunyai persamaan $g_2 \equiv x = 0,\ y = 0$, dan $g_1 \equiv\ x = -y + 1 = -z,\ x + y - 1 = 0$.

Bidang V melalui g_2 berbentuk : $x + \lambda y = 0$ dan sejajar g_1 yang arahnya:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \multicolumn{2}{c}{-1} & \multicolumn{2}{c}{1} \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & \multicolumn{2}{c}{1} &
\end{array} \qquad : [-1,1,1]$$

Berarti $[1, \lambda, 0].[-1,1,1] = 0$, atau diperoleh $\lambda = 1$.

Jadi bidang $V \equiv x + y = 0$.

Kemudian pilih sebarang titik P pada g_1, misalkan ambil $x = 0 \longrightarrow z = 0$ dan $y = 1$, atau $P(0,1,0)$.

Jarak $P(0,1,0)$ ke $V = 0$ adalah:

$$d = \left|\frac{1.0 + 1.1 + 0.0 + 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.$$

Selanjutnya, misalkan g_3 adalah garis hubung terpendek g_1 dan g_2, yang dapat dicari sebagai berikut:

Buat bidang U melalui g_1 dan tegak lurus V, yaitu:

$$U \equiv (x + z) + \lambda(x + y - 1) = 0, \text{ atau}$$

$$U \equiv (1 + \lambda)x + \lambda y + z - \lambda = 0,$$

serta $[1 + \lambda, \lambda, 1] - [1,1,0] = 0$.

sehingga diperoleh : $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Berarti : $U \equiv \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z + \frac{1}{2} = 0$, atau

$U \equiv x - y + 2z + 1 = 0.$

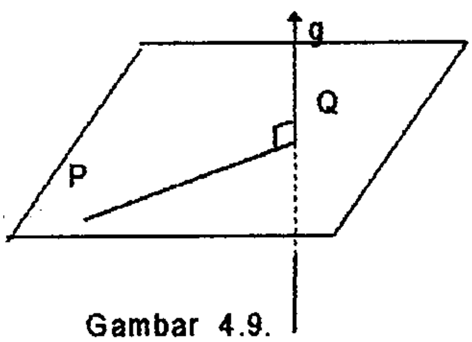
Titik tembus sumbu z pada U adalah ; $x = 0, y = 0, z = -\frac{1}{2}$ atau $R(0,0,-\frac{1}{2})$.

Garis g_3 melalui R dan vektor arahnya = normal V, berarti:

$$g_3 \equiv [x,y,z] = [0,0,-\tfrac{1}{2}] + \lambda[1,1,0], \text{ atau } x = y,\ z = -\tfrac{1}{2}.$$

Selanjutnya bagaimanakah menentukan jarak sebuah titik ke sebuah garis lurus?. Untuk itu perhatikan hal-hal berikut ini:

Jarak titik $P(x_1,y_1,z_1)$ ke garis g dapat dicari dengan cara sebagai berikut.



Gambar 4.9.

- Buat bidang H melalui P dan tegak lurus g.
- Tentukan titik Q, yang merupakan titik tembus g dengan H.
- PQ adalah jarak titik P ke garis g.

Contoh soal

Tentukan jarak titik P(2,1,0) ke garis $g \equiv x = y = z$.

Jawab:

Garis $g \equiv x = y = z$ mempunyai vektor arah $\vec{a} = [1,1,1]$.

Bidang H melalui P(2,1,0) dan tegak lurus g adalah :

$$H \equiv 1(x-2) + 1(y-1) + 1(z-0) = 0.$$

atau $\quad H \equiv x + y + z - 3 = 0.$

Titik tembus g pada H diperoleh Q(1,1,1).

Jadi jarak $PQ = \sqrt{(1-2)^2 + (1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$

4.5. Soal-soal

1. Tentukan persamaan vektoris dan persamaan-persamaan linier garis lurus yang melalui titik-titik:
   a) (1,2,1) dan (-2,3,2)
   b) (1,-3,2) dan (4,1,0)
   c) (1,0,2) dan (2,3,2)
2. Tentukanlah vektor arah, kemudian persamaan vektoris garis lurus perpotongan bidang-bidang rata:
   a) $x-2y + z = 0$, $3x + y + 2z = 7$
   b) $2x + 3y - 2 = 0$, $y - 3z + 4 = 0$
   c) $x + 2z - 6 = 0$, $y = 4$.
3. Tentukan titik tembus:
   a) garis lurus $(x + 1) = (y + 3)/3 = (z - 2)/-2$ dan bidang rata $3x + 4y + 5z = 5$.
   b) garis lurus $x - y - z + 8 = 0$, $5x + y + z + 10 = 0$ dan bidang rata $x + y - z + 2 = 0$
   c) garis lurus yang melalui titik-titik (2,-3,1), (3,-4,-5) dan bidang rata $2x + y + z=7$.
4. a) Tentukan jarak titik tembus garis lurus $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ dan bidang rata $x - y + z = 5$ ke titik (-1,-5,-10).
   b) Tentukan panjang potongan garis dari titik (3,-4,5) ke bidang $2x + 5y - 6z = 19$ yang diukur sepanjang garis lurus dengan vektor arah [2,1,-2].

5. Tunjukkan bahwa kedua garis lurus berikut berpotongan, kemudian tentukan titik potongnya.

a) $\frac{x+4}{3}=\frac{y+6}{5}=\frac{z-1}{-2}$, dan 3x - 2y + z + 5 = 0 = 2x + 3y + 4z - 4.

b) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+10}{8}$ dan $(x-4)=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+1}{7}$

c) $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7}$ dan $(x-2)=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{5}$.

6. Tunjukkan bahwa kedua garis di bawah ini sejajar, kemudian hitung jaraknya.

a) $g_1=\begin{cases}x+2y=6\\z-2=0\end{cases}$ dan $g_2=\begin{cases}x+2y=9\\z=0\end{cases}$

b) $\frac{x-7}{6}=\frac{y}{2}=z$ dan $\frac{x+2}{6}=\frac{y-1}{2}=z-11$.

7. Tentukan persamaan bidang rata yang memuat garis-garis lurus:

a) $(x-4)=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{5}$ dan $(x-3)=\frac{y+2}{-4}=\frac{z}{5}$

b) x = y = z dan (x - 3) = (y + 1) = z.

8. Tentukan jarak titik ke garis yang ditentukan pada soal berikut ini.

a) titik (4,-5,3) dan garis lurus $\frac{x-5}{3}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+6}{5}$.

b) titik (5,4,-1) dan garis lurus $\frac{x-8}{2}=\frac{y}{9}=\frac{z}{5}$.

9. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik P dan memotong tegal lurus garis g, bila:

a) P(2,4,-1), g : $(x+5)=\frac{y-3}{4}=\frac{z-6}{-9}$

b) P(-2,2,-3), g : $(x-3)=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-4}$

c) P(0,0,0), g = $\begin{cases} x+2y+3z+4=0 \\ 2x+3y+4z+5=0 \end{cases}$

10. Tentukan persamaan garis yang memotong garis g_1 = $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y-z-2=0 \end{cases}$

dan g_2 = $\begin{cases} x-y-z-3=0 \\ 2x+4y-z-4=0 \end{cases}$ serta melalui titik A(1,1,1). Kemudian tentukan titik potongnya.

11. Sebuah garis, sejajar garis $\frac{x-2}{7}=\frac{y}{4}=-z$ dan memotong garis-garis $\frac{x-1}{3}=\frac{y-7}{-1}=(z+2)$ dan $\frac{x+3}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{4}$.

Tentukan titik-titik potong tersebut.

12. Tentukan persamaan garis lurus yang sejajar garis g : $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ dan memotong garis-garis h = $\begin{cases} 9x+y+z+4=0 \\ 5x+y+3z=0 \end{cases}$ dan k = $\begin{cases} x+2y-3z-3=0 \\ 2x-5y+3z+3=0 \end{cases}$.

13. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (-4,3,1), sejajar dengan bidang x+2y-z = 5 serta memotong garis lurus $\frac{-(x+1)}{3}=\frac{y-3}{2}=-(z-2)$.

Tentukan pula titik potongnya.

14. Tentukan persamaan garis lurus yang memotong tegak lurus garis

$g = \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ dan terletak seluruhnya pada bidang x + 3y - z + 4 = 0.

15. Tunjukkan bahwa bayangan garis lurus $(x - 1) = -9(y - 2) = 3(z + 3)$ pada bidang rata 3x - 3y + 10z = 26 adalah garis lurus $\frac{x-4}{9} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-7}{-3}$.

16. Garis lurus $\frac{x-7}{3} = \frac{y+10}{3} = \frac{z+14}{8}$ adalah hipotenusa sebuah segitiga siku-siku sama kaki yang titik sudut siku-sikunya (7,2,4). Tentukan persamaan kedua sisi yang lain.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Bell, Robert J. T, (1950): ***An Elementary Treatise on Coordinate Geometry of Three Dimensions***; London Macmillan and Co, Limited.

Leithold, Lonis, (1978): ***The Calculus with Analytiic Geometry***, New York: Harper & Row Publishers.

Morril, W. K, (1969): ***Analytiic Geometry***, Second Edition, Scranton, Pennsylvania: International Texbook Company.

Schaum's Out Line, (1950): ***Theory and Problems of Plane and Solid Analytic Geometry***; New York: Schaum Publishing Co.

Soeparna Darmawijaya, (1990): ***Kalkulus Lanjut***, Yogyakarta, FMIPA UGM.

Suryadi, D. H. S, (1984): Teori dan Soal Ilmu Ukur Analitik Ruang, Jakarta: Ghalia Indonesia.

Yulius Hambali, (1986): ***Buku Materi Pokok Geometri Analitik Ruang***, Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.