BARISAN BILANGAN RIIL

Oleh:

DRS. MUKHNI, M.Pd.

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
P A D A N G

1996

KATA PENGANTAR

Puji syukur diucapkan kepada Allah Subhanahu wata'ala yang telah memberikan kekuatan dan kesehatan kepada penulis, sehingga penulisan buku yang berjudul "BARISAN BILANGAN RIIL" ini dapat diselesaikan.

Buku ini disajikan kepada pembaca yang telah mempelajari Pengantar Dasar Matematika, dan Kalkulus. Bilangan Riil dan Barisan Bilangan Riil merupakan salah satu topik matematika untuk berpikir secara formal, yaitu berpikir secara deduktif aksiomatik.

Buku ini ditulis berdasarkan pada pengalaman penulis dalam mengajarkan mata kuliah Analisis Riil pada Jurusan Pendidikan Matematika yang dilengkapi dengan beberapa definisi dan teorema sehingga terbentuk tulisan dalam buku ini. Di samping itu buku-buku yang membahas topik ini masih langka, khususnya buku yang berbahasa Indonesia.

Di dalam buku ini dibahas definisi-definisi dan konsep-konsep dasar bilangan riil dan barisan bilangan riil yang diharapkan agar pembaca dapat memulai berpikir secara deduktif aksiomatik, guna mempelajari materi-materi matematika yang lebih abstrak.

Cakupan isi buku ini adalah sebagai berikut.
Bab.I, membahas konsep-konsep aljabar himpunan, sebagai konsep awal untuk mempelajari Bilangan Riil dan Barisan Bilangan Riil.
Bab.II, membahas konsep-konsep bilangan riil yang dimulai dari

sifat aljabar bilangan riil, sifat-sifat urutan bilangan riil, nilai mutlak, sifat kelengkapan pada bilangan riil, penerapan sifat suprimum, dan interval atau selang. Konsep-konsep bilangan riil ini, merupakan konsep dasar untuk mempelajari Barisan Bilangan Riil.

Bab.III, membahas konsep-konsep Barisan Bilangan Riil, yang dimulai dari barisan dan limit barisan, teorema-teorema limit barisan, barisan-barisan monoton, sub-barisan dan teorema Bolzano-Weistrass, barisan Cauchy, dan barisan Divergen Murni.

Berbagai buku rujukan pembaca dapat membaca pada daftar kepustakaan. Daftar ini dapat dimaksudkan untuk membantu pembaca dalam mendalami lebih lanjut tentang materi yang dibahas dalam buku ini.

Semoga buku ini ada manfaatnya untuk para pembaca.

Terima kasih.

Padang, Nopember 1996

P e n u l i s

DAFTAR ISI

BAB. I

P E N D A H U L U A N

1.1. Aljabar Himpunan

Jika A menyatakan sebuah himpunan, dan jika x adalah elemen sebarang, biasa dituliskan sebagai

$$x \in A$$

yang berarti bahwa x adalah suatu unsur A, atau x adalah anggota A, atau himpunan A memuat unsur x itu, atau x di A. Jika x adalah suatu unsur yang bukan pada A, dituliskan sebagai

$$x \notin A.$$

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan sehingga setiap unsur A juga unsur B, maka dikatakan A termuat di B, atau B memuat A, atau A himpunan bagian B, dan bisa dituliskan sebagai

$$A \subseteq B \text{ atau } B \supseteq A.$$

Jika $A \subseteq B$ dan ada suatu unsur di B yang bukan di A, dikatakan bahwa A himpunan bagian sejati (proper subset) B.

1.1.1. Definisi

Dua himpunan A dan B adalah sama jika memuat unsur-unsur yang sama, dan dituliskan sebagai $A = B$.
Untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B sama, harus di tunjukkan bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

1.1.2. Definisi

a. Jika A dan B adalah himpunan-himpunan, maka irisan an tara A dan B, dituliskan dengan A B, yang didefinisikan sebagai:

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

b. Gabungan dari A dan B, dituliskan dengan $A \cup B$, yang didefinisikan sebagai:

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

1.1.3. <u>Definisi</u>

Suatu himpunan yang tidak beranggota, dinamakan himpunan kosong, dan dituliskan sebagai $\emptyset$ atau {}. Jika A dan B adalah himpunan-himpunan yang tidak satupun unsurnya sama (atau $A \cap B = \emptyset$ dikatakan A dan B disjoin.

1.1.4. <u>Teorema</u>

Misalkan A, B, C himpunan-himpunan sebarang, maka:

a). $A \cap A = A$; $A \cup A = A$.

b). $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$.

c). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

d). $A\ (B \cap C) = (A \cup B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup C)$.

(Silahkan pembaca buktikan sendiri).

Penulisan tanda kurung pada teorema 1.1.4.(c) boleh dihilangkan.

1.1.5. <u>Definisi</u>

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan, maka komplemen B relatif A adalah suatu himpunan dari semua unsur A yang tidak menjadi unsur B, dan dituliskan sebagai $A \setminus B$ atau $A - B$, atau $\mathscr{C}(B)$. Dengan notasi himpunan didefinisikan sebagai: $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$.

1.1.6. <u>Teorema</u>

Jika A, B, C himpunan-himpunan sebarang, maka:

a). $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

b). $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(Silahkan pembaca buktikan sendiri).

1.1.7. Definisi

Misalkan $a \in \mathbb{R}$.

(i). Untuk setiap $\varepsilon > 0$, lingkungan - ε dari a adalah himpunan $L_{\varepsilon}(a) := \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$.

(ii). Lingkungan dari a adalah himpunan yang memuat lingkungan - ε dari a untuk suatu $\varepsilon > 0$.

1.1.8. Definisi

Titik $x \in \mathbb{R}$ disebut titik kumpul dari himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$, jika setiap lingkungan - ε, $V_{\varepsilon} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ dari x memuat sekurang-kurangnya satu titik yang berbeda dari x. Definisi ini setara dengan: Titik $x \in \mathbb{R}$ adalah titik kumpul dari himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ jika setiap lingkungan - $V_{\varepsilon} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ dari x memuat tak berhingga titik dari S yang berbeda dari x.

1.1.9. Definisi

(i). $G \subseteq \mathbb{R}$ disebut himpunan buka di $\mathbb{R}$ jika untuk setiap $x \in G$ terdapat lingkungan V dari x sehingga $V \subseteq G$.

(ii). $F \subseteq \mathbb{R}$ disebut himpunan tutup di $\mathbb{R}$ jika komplemen $\mathscr{C}(F) = \mathbb{R} - F$ buka di $\mathbb{R}$.

Untuk membuktikan bahwa $G \subseteq \mathbb{R}$ buka di $\mathbb{R}$, cukup ditunjukkan bahwa untuk setiap titik x pada G mempunyai lingkungan - ε yang dimuat di G. Atau G buka jika dan hanya jika untuk setiap $x \in G$, terdapat $\varepsilon_x > 0$ sehingga

$(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq G$. Untuk menunjukkan F tutup di $\mathbb{R}$, cukup ditunjukkan bahwa untuk setiap $y \notin F$ mempunyai lingkungan - ε yang saling lepas terhadap F, atau untuk setiap $y \notin F$, terdapat

$\varepsilon_y > 0$ sehingga $F \cap (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y) = \emptyset$.

1.1.10. Teorema (Sifat himpunan buka)

(i). Gabungan dari sebarang koleksi himpunan buka dari $\mathbb{R}$ adalah buka.

(ii). Irisan koleksi berhingga himpunan bagian buka adalah buka.

Bukti:

(i). Misalkan $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ koleksi himpunan buka di $\mathbb{R}$ dan $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$.

Ambil $x \in G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G$ sebarang, maka $x \in G_{\lambda_0}$ untuk suatu $\lambda_0 \in \Lambda$. Selanjutnya karena G_{λ_0} buka, maka terdapat lingkungan V dari x sehingga $V \subseteq G_{\lambda_0}$, dan $G_{\lambda_0} \subseteq G$.

Jadi $V \subseteq G$, karena $x \in G$ sebarang, maka G buka.

(ii). Misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_n$ himpunan-himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ dan $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$.

Ambil $x \in G$ sebarang, maka $x \in G_i$, untuk semua i.

Karena G_i buka untuk i = 1, 2, 3,..., n, maka terdapat $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sehingga $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subseteq G_i$.

Pilih $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$, maka diperoleh:

$$(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \subseteq G_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

atau

$$(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \subseteq G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

Karena $x \in G$ sebarang, maka G buka.

1.1.11. Corollary

(i). Irisan dari sebarang koleksi himpunan tutup di R adalah tutup.

(ii). Gabungan dari sejumlah hingga himpunan tutup adalah tutup.

Bukti:

(i). Misalkan $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ koleksi himpunan tutup di R dan $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$, maka $\mathscr{C}(F) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{C}(F_\lambda)$ yang merupakan gabungan dari himpunan-himpunan buka. Menurut teorema 1.1.10(i) $\mathscr{C}(F)$ buka. Jadi F tutup.

(ii). Misalkan $F_1, F_2, \ldots, F_n$ himpunan bagian-himpunan bagian dari R dan $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$

Menurut De Morgan:

$\mathscr{C}(F) = \mathscr{C}(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{C}(F_i) = \mathscr{C}(F_1) \cap \mathscr{C}(F_2) \cap \ldots \cap (F_n)$

Karena $\mathscr{C}(F_i)$ buka, maka menurut teorema 1.1.10.(ii), (F) buka. Jadi F tutup.

1.2. Soal-soal untuk latihan

1. Buktikanlah teorema-teorema 1.4 dan 1.6.
2. Buktikanlah bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cap B = A$.
3. Jika $B \subseteq A$, tunjukkan $B = A \setminus (A - B)$.
4. Jika A dan B himpunan-himpunan sebarang, tunjukkan $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.
5. Jika $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ adalah koleksi dari himpunan-himpunan, dan jika E adalah himpunan sebarang, tunjukkan:

a). $E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (E \cap A_j)$, c). $E \cap \bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcap_{j=1}^{n} (E \cap A_j)$,

b). $E \cup \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (E \cup A_j)$, d). $E \cup \bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcap_{j=1}^{n} (E \cup A_j)$.

6. Titik x dinamakan <u>titik dalam</u> dari $A \subseteq \mathbb{R}$, jika terdapat lingkungan V dari x sehingga $V \subseteq A$.

   Tunjukkan bahwa $A \subseteq \mathbb{R}$ buka jika dan hanya jika setiap titik di A merupakan titik dalam dari A.

7. Titik $x \in R$ dinamakan <u>titik batas</u> dari $A \subseteq \mathbb{R}$, jika setiap lingkungan V dari x memuat titik di A dan sekaligus titik di $\mathcal{C}(A)$. Tunjukkan, jika A terbatas, maka A dan $\mathcal{C}(A)$ mempunyai titik batas sama.

8. Tunjukkan bahwa $G \subseteq \mathbb{R}$ buka jika dan hanya jika G tidak memuat titik batas.

9. Tunjukkan bahwa $F \subseteq \mathbb{R}$, tutup jika dan hanya jika F memuat semua titik batasnya.

BAB. II

BILANGAN RIIL

2.1. Sifat Aljabar Bilangan Riil

Pada himpunan bilangan riil R, ada dua operasi biner yaitu operasi penambahan dan perkalian. Kedua operasi ini berturut-turut dilambangkan sebagai "+" dan ".".

2.1.1. Operasi-operasi tersebut bersifat

1. $a + b = b + a$, $\forall a, b$ di R (sifat komutatif penjumlahan).
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c$ di R (sifat asosiatif penjumlahan).
3. Terdapat unsur 0 di R sehingga $0 + a = a$, $\forall a$ di R (eksistensi unsur nol).
4. Untuk setiap a di R, terdapat unsur -a di R sehingga $a + (-a) = 0$, (eksistensi unsur negatif).
5. $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b$ di R (sifat komutatif perkalian).
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c$ di R (sifat assosiatif).
7. Terdapat unsur 1 di R yang berbeda dengan 0 sehingga $1 \cdot a = a$, $\forall a$ di R (eksistensi unsur satuan di R).
8. Untuk setiap a di R dengan $a \neq 0$, terdapat unsur $\frac{1}{a}$ di R sehingga $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (eksistensi unsur kebalikan).
9. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$, $\forall a, b, c$ di R (sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

2.1.2. Teorema

(a). Jika z dan a unsur-unsur di $\mathbb{R}$, sehingga $z + a = a$, maka $z = 0$.

(b). Jika u dan b unsur-unsur di $\mathbb{R}$, $b \neq 0$ sehingga $u \cdot b = b$, maka $u = 1$.

Bukti:

(a). $z + a = a$

$(z + a)+(-a) = a + (-a)$ (tambahkan $-a$ kedua ruas)

$z + (a + (-a)) = (a + (-a))$

$z + 0 = 0$

$z = 0$.

(b). $u \cdot b = b$

Karena $b \neq 0$, maka $\exists \frac{1}{b}$ di $\mathbb{R}$ sehingga $b \cdot \frac{1}{b} = 1$

$u \cdot b = b$

$(u \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = b \cdot \frac{1}{b}$

$u \cdot (b \cdot \frac{1}{b}) = (b \cdot \frac{1}{b})$

$u \cdot 1 = 1$

$u = 1$.

2.1.3. Teorema

(a). Jika a dan b unsur-unsur di $\mathbb{R}$ sehingga $a + b = 0$, maka $a = -b$.

(b). Jika $a \neq 0$ dan b unsur-unsur di $\mathbb{R}$, sehingga $a \cdot b = 1$, maka $b = \frac{1}{a}$.

Bukti:

(a). $a + b = 0$

$-a + (a + b) = -a + 0$

$(-a + a) + b = -a + 0$

$0 + b = -a$

$b = -a.$

(b). $a \cdot b = 1$

Karena $a \neq 0$, maka terdapat $\frac{1}{a}$ di R, sehingga

$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

$a \cdot b = 1$

$\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 1$

$(\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot 1$

$1 \cdot b = \frac{1}{a}$

$b = \frac{1}{a}.$

2.1.4. Teorema

Misalkan a, b unsur-unsur sebarang di R. Maka:

a. persamaan $a + x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $x = (-a) + b$.

b. Jika $a \neq 0$, maka persamaan $a \cdot x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $x = ({}^{1}/a) \cdot b$.

Bukti:

a). $a + x = b$

$(-a) + (a + x) = (-a) + b$

$(-a + a) + x = (-a) + b$

$0 + x = (-a) + b$

$x = (-a) + b$ ... (apakah selesaian ini tunggal?)

b). Sebagai latihan untuk pembaca!

2.1.5.Teorema

Jika $a \in \mathbb{R}$, maka:

(a). $a \cdot 0 = 0$

(b). $(-1) \cdot a = -a$

(c). $-(-a) = a$

(d). $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Bukti:

a). $a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0$

$= a \cdot (1 + 0)$

$= a \cdot 1$

$= a$.

Selanjutnya:

$(-a) + (a + a \cdot 0) = (-a) + a$

$(-a + a) + a \cdot 0 = (-a) + a$

$0 + a \cdot 0 = 0$

$a \cdot 0 = 0$

Jadi $a \cdot 0 = 0$.

b). $(-1) \cdot a + a = (-1) \cdot a + 1 \cdot a$

$= (-1 + 1) \cdot a$

$= 0 \cdot a$

$= 0$.

Selanjutnya:

$((-1).a + a) + (-a) = 0 + (-a)$

$(-1).a + (a + (-a)) = -a$

$(-1) \cdot a + 0 = -a$

$(-1) \cdot a = -a$

Jadi $(-1) \cdot a = -a$.

c). $(-a) + a = 0$

Jadi $a = -(-a)$ atau $-(-a) = a$.

d). Dari bukti (b) ambil $a = -1$, maka diperoleh:

$(-1) \cdot (-1) = -(-1)$

$= 1$ ..... (bukti c).

2.1.6. Teorema

Misalkan a, b, c unsur-unsur sebarang di $\mathbb{R}$, maka:

a. Jika $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a} \neq 0$ dan $\frac{1}{(1/a)} = a$.

b. Jika $a \cdot b = a \cdot c$ dan $a \neq 0$, maka $b = c$.

c. Jika $a \cdot b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.

Bukti:

a). Jika $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a}$ ada. Andaikan $\frac{1}{a} = 0$, maka dari teorema 2.1.5.(a) diperoleh: $a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot 0 = 0$.

Jadi bertentangan dengan sifat $a \cdot \frac{1}{a} = 1 \neq 0$.

Jadi haruslah $\frac{1}{a} \neq 0$.

Selanjutnya dari sifat $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, maka diperoleh:

$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(1/a)} = 1$ atau $a \cdot (\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(1/a)}) = a \cdot 1$

$(a \cdot \frac{1}{a}) \cdot \frac{1}{1/a} = a$

$1 \cdot \frac{1}{1/a} = a$

$\frac{1}{1/a} = a$

Jadi $\frac{1}{1/a} = a$.

b). Karena $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a}$ ada dan $\frac{1}{a} \neq 0$.

$a \cdot b = a \cdot c$, maka $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot c)$

$(\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = (\frac{1}{a} \cdot a) \cdot c$

$1 \cdot b = 1 \cdot c$

$b = c$.

Jadi $b = c$.

c). Misalkan $a \neq 0$.

$a \cdot b = 0$, dan $a \cdot 0 = 0$, maka dari (b) diperoleh $b = 0$.

Dengan cara sama misalkan $b \neq 0$, maka $a = 0$.

Jadi jika $a \cdot b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$.

Bilangan Rasional

Suatu unsur di $\mathbb{R}$ yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$, disebut bilangan rasional. Himpunan bilangan rasional dilambangkan dengan Q. Jadi $Q = \{x = \frac{a}{b} | a,b \in Z,\ b \neq 0\}$.

2.1.7. Teorema

Tidak ada bilangan rasional t, sehingga $t^2 = 2$.

Bukti:

Andaikan ada $t \in Q$ sehingga $t^2 = 2$. Maka t dapat ditulis sebagai $\frac{p}{q}$, p,q di Z, $q \neq 0$, sehingga $(\frac{p}{q})^2 = 2$ dan $(p,q) = 1$. Dari $(\frac{p}{q})^2 = 2$, maka $p^2 = 2q^2$, berarti p^2 adalah genap. Akibatnya p genap, sehingga p dapat ditulis sebagai $p = 2m$, untuk suatu m bilangan bulat.

$p^2 = 2q^2$ atau $4m^2 = 2q^2$ atau $q^2 = 2m^2$, yang berarti q^2 genap, dan akibatnya q juga genap. Karena p,q keduanya genap, maka $(p,q) > 1$. Ini bertentangan dengan $(p,q)=1$. Jadi haruslah tidak ada bilangan rasional t sehingga $t^2 = 2$.

2.1.8. Soal-soal untuk latihan

1. Buktikan bahwa jika a, b di R, maka:

   a. $-(a + b) = (-a) + (-b)$

   b. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

   c. $\frac{1}{(-a)} = -(\frac{1}{a})$, jika $a \neq 0$

   d. $-(\frac{a}{b}) = (-a)/b$ jika $b \neq 0$

2. Jika $a \in \mathbb{R}$ dengan $a.a = a$, buktikan $a = 0$ atau $a = 1$.

3. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $\frac{1}{(a.b)} = (\frac{1}{a}).(\frac{1}{b})$.

4. Jika $\xi \in R$ adalah irrasional dan $r \neq 0$ adalah rasional. Tunjukkan bahwa $r + \xi$ dan $r . \xi$ adalah irrasional.

5. Jika x dan y bilangan rasional, tunjukkan bahwa $x + y$ dan $x . y$ rasional.

6. Jika x dan y bilangan irrasional, maka tidak berlaku bahwa $x + y$ dan $x . y$ irrasional. Berikan contoh!

7. Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional s sehingga $S^2 = 3$.

8. Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional t sehingga $t^2 = 6$.

2.2. Sifat-sifat Urutan dari R

Dalam himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$, terdapat himpunan tak kosong P dari $\mathbb{R}$ yaitu bilangan positif yang memenuhi sifat:

(i). Jika a, b di P, maka (a + b) di P

(ii). Jika a, b di P, maka a . b di P

(iii). Jika $a \in \mathbb{R}$, maka tepat satu pernyataan berikut dipenuhi: $a \in P$, $a = 0$, $-a \in P$.

Sifat (iii) ini sering dinamakan Sifat Trikhotomi.

2.2.1. Definisi

Jika $a \in P$, maka dikatakan a bilangan riil positif dan ditulis $a > 0$. Jika $a \in P$ atau 0, dikatakan bahwa a bilangan riil non negatif dan ditulis $a \geq 0$. Jika $-a \in P$, maka dikatakan bahwa a bilangan riil negatif dan ditulis $a < 0$. Jika $-a \in P$ atau 0, maka dikatakan bahwa a non positif dan ditulis $a \leq 0$.

2.2.2. Definisi

Misalkan a, b unsur-unsur di $\mathbb{R}$.

a). Jika $(a - b) \in P$, maka ditulis $a > b$ atau $b < a$.

b). Jika $(a-b) \in P \cup \{0\}$, maka ditulis $a \geq b$ atau $b \leq a$.

Selanjutnya penulisan $a < b < c$ berarti $a < b$ dan $b < c$.

2.2.3. Teorema

Misalkan a, b, c unsur-unsur di $\mathbb{R}$.

a). Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$

b). Terdapat tepat satu hubungan $a < b$, $a = b$, $a > b$

c). Jika $a \geq b$ dan $b \geq a$, maka $a = b$.

Bukti:

a). $a > b$, berarti $(a - b) \in P$

$b > c$, berarti $(b - c) \in P$.

Jadi $(a - b) + (b - c) \in P$ atau $a - c \in P$.

Dengan kata lain $a > c$.

b). Dengan sifat trikhotomi, maka terdapat tepat satu hubungan $a - b \in P$, $a - b = 0$, $-(a - b) \in P$.

Ini berarti $a > b$, atau $a = b$ atau $a < b$.

c). Andaikan $a \neq b$, maka $a - b \neq 0$, yang berarti $a - b \in P$ atau $-(a - b) = b - a \in P$.

Jadi $a > b$ atau $a < b$. Ini bertentangan dengan hipotesis yaitu $a > b$ dan $a < b$.

Jadi haruslah $a = b$.

2.2.4. Teorema

a). Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, maka $a^2 > 0$.

b). $1 > 0$

c). Jika $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$.

Bukti:

a). Dengan sifat Trikhotomi, jika $a \neq 0$, maka $a \in P$ atau $-a \in P$.

Jika $a \in P$, maka $a^2 = a \cdot a \in P$.

Jika $-a \in P$, maka $a^2 = (-a).(-a) \in P$.

Jadi $a^2 \in P$, atau $a^2 > 0$, dan $a \neq 0$.

b). Menurut 2.2.4(a), ambil $a = 1$ dan $1 \neq 0$, maka $1 = 1^2$, berarti $1 > 0$.

c). Gunakan induksi matematika. (silahkan coba!)

2.2.5.<u>Teorema</u>

Misalkan a, b, c, d unsur-unsur di $\mathbb{R}$.

a). Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$

b). Jika $a > b$, dan $c > d$, maka $a + c > b + d$

c). Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ac > bc$

Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ac < bc$.

d). Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$

Jika $a < 0$, maka $\frac{1}{a} < 0$.

<u>Bukti</u>:

a). Jika $a > b$, berarti $a - b \in P$, maka:

$(a + c) - (b + c) = a - b \in P$.

Jadi $a + c > b + c$.

b). $a > b$, berarti $a - b \in P$

$c > d$, berarti $c - d \in P$.

Menurut sifat bilangan positif, maka $(a + b) +$ $(c - d) \in P$, atau $(a + c) - (b + d) \in P$.

Jadi $a + c > b + d$.

c). $a > b$ berarti $a - b \in P$, $c > 0$ berarti $c \in P$.

Jadi $(a - b).c = ac - bc \in P$ atau $ac > bc$.

Selanjutnya, jika $c < 0$, maka $-c \in P$.

Jadi $(a - b).(-c) = bc - ac \in P$ atau berarti $ac > bc$.

d). Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} \neq 0$.

Andaikan $\frac{1}{a} < 0$, maka $-\frac{1}{a} \in P$ sehingga $a.(\frac{1}{a}) = -1 \in P$.

Ini suatu kontradiksi, jadi haruslah $\frac{1}{a} > 0$.

Andaikan $\frac{1}{a} > 0$, maka $1 = a \cdot \frac{1}{a} < 0$. Ini suatu suatu kontradiksi. Jadi haruslah $\frac{1}{a} < 0$.

2.2.6. Teorema

Jika a, b unsur-unsur di $\mathbb{R}$, dan $a > b$, maka $a > \frac{1}{2}(a + b) > b$.

Bukti:

Karena $a > b$, maka $2a = a + a > a + b$, dan $a + b > b + b = 2b$.

Jadi $2a > a + b > 2b$.

Kemudian karena $2 > 0$, maka $\frac{1}{2} > 0$, dan menurut teorema 2.2.5(c), diperoleh:

$a = \frac{1}{2}(2a) > \frac{1}{2}(a + b) > \frac{1}{2}(2b) = b$.

Jadi $a > \frac{1}{2}(a + b) > b$.

2.2.7. Corollary

Jika $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, maka $a > \frac{1}{2}a > 0$.

Bukti:

Dengan menggunakan teorema 2.2.6, ambil $b = 0$, maka di peroleh $a > \frac{1}{2}a > 0$.

2.2.8. Teorema

Jika $a \in \mathbb{R}$, sehingga $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap ε positif, maka $a = 0$.

Bukti:

Andaikan $a \neq 0$, maka $a > 0$ dan menurut Corollary 2.2.7 $a > \frac{1}{2}a > 0$. Ambil $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a > 0$. Maka diperoleh $a > \varepsilon_0 > 0$. Ini bertentangan dengan hipotesis yaitu $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Jadi haruslah $a = 0$.

2.2.9. Teorema

Jika $ab > 0$, maka $a > 0$ dan $b > 0$, atau $a < 0$ dan $b < 0$.

Bukti:

Karena $ab > 0$, $a \neq 0$, dan $b \neq 0$. Dari sifat Trikhotomi $a > 0$ atau $a < 0$.

Kasus $a > 0$:

Menurut teorema 2.2.5(d), $\frac{1}{a} > 0$ dan oleh karena itu $b = 1 \,.\, b = (\frac{1}{a} \,.\, a) \,.\, b = (\frac{1}{a}) \,.\, (a \,.\, b) > 0$.

Secara sama untuk kasus $a < 0$, $\frac{1}{a} < 0$ dan $b = (\frac{1}{a})(a \,.\, b) < 0$.

2.2.10. Corollary

Jika $ab < 0$, maka $a < 0$ dan $b > 0$, atau $a > 0$ dan $b < 0$.

Silahkan pembaca buktikan sendiri Corollary 2.2.10 ini!

2.2.11. Contoh-contoh

a). Misalkan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$.

Maka $a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2 \Longleftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Bukti:

Perhatikan kasus $a > 0$ dan $b > 0$ (untuk kasus $a = 0$, silahkan pembaca buktikan sendiri).

$a > 0$ dan $b > 0$ dan $a < b$, maka $a + b > 0$, dan $b - a > 0$.

Karena $b^2 - a^2 = (a - a)(b + a)$, dan $b - a > 0$ mengakibatkan $b^2 - a^2 > 0$, atau $b^2 > a^2$ atau $a^2 < b^2$.

Selanjutnya jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $\sqrt{a} > 0$,

dan $\sqrt{b} > 0$, serta $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$, $a=(\sqrt{a})^2$ dan $b=(\sqrt{b})^2$.
$b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$, mengakibatkan $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Untuk $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, silahkan pembaca buktikan sendiri, sehingga diperoleh:
$a \leq b \Longleftrightarrow a^2 \leq b^2 \Longleftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

b). Jika a dan b adalah bilangan riil positif, maka rata-rata hitung dan rata-rata geometri dari a dan b, masing-masing adalah $\frac{1}{2}(a + b)$ dan $\sqrt{ab}$.
Ketidaksamaan rata-rata hitung ukur dari a dan b adalah: $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$ dan $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a + b)$ terjadi jika dan hanya jika $a = b$.
Secara umum, jika $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ di $\mathbb{R}$, maka ketidaksamaan rata-rata hitung geometri dari $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah:
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{1/n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, dan berlaku sama jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

c). Ketidaksamaan Bernoulli's:
Jika $x > -1$, maka $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (silahkan dibuktikan sendiri, dan gunakan prinsip induksi matematika).

d). Ketidaksamaan Cauchy's:
Jika $n \in \mathbb{N}$, dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ di $\mathbb{R}$, maka:
$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$.

e). Ketidaksamaan Segitiga:
Jika $n \in \mathbb{N}$, dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ di R, maka:
$[(a_1+b_1)^2+\ldots+[a_n+b_n)^2]^{1/2} \leq [a_1^2+\ldots+a_n^2]^{1/2}+[b_1^2+\ldots+b_n^2]^{1/2}$.

2.2.12. Soal-soal untuk latihan

1.a. Jika $a \leq b$ dan $c < d$, buktikan bahwa $a + c < b + d$.

b. Jika $a \leq b$ dan $c \leq d$, buktikan bahwa $a + c \leq b + d$.

2.a. Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, buktikan bahwa $0 < ac < bd$.

b. Jika $0 < a < b$ dan $0 \leq c \leq d$, buktikan bahwa $0 \leq ac \leq bd$. Kemudian tunjukkan dengan contoh, bahwa tidak berlaku $ac < bd$.

3. Jika $a < b$ dan $c < d$, buktikan bahwa

$$ad + bc < ac + bd.$$

4. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $a^2 + b^2 = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ dan $b = 0$.

5. Jika $0 \leq a < b$, buktikan bahwa $a^2 \leq ab < b^2$. Kemudian tunjukkan dengan contoh bahwa tidak berlaku $a^2 < ab < b^2$.

6. Tunjukkan bahwa jika $0 < a < b$, maka $a < \sqrt{ab} < b$ dan $0 < {}^1/b < {}^1/a$.

7. Jika $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan bahwa $n^2 \geq n$ dan ${}^1/_{n^2} \leq {}^1/n$.

8. Cari semua bilangan riil x sehingga:

a. $x^2 > 3x + 4$.

b. $1 < x^2 < 4$.

c. ${}^1/x < x$.

d. ${}^1/x < x^2$.

9. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$, dan $\forall \varepsilon > 0$ berlaku $a \leq b + \varepsilon$.

a. Tunjukkan $a \leq b$.

b. Tunjukkan tidak berlaku $a < b$.

10. Buktikan bahwa $(\frac{1}{2}(a + b))^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, dan tunjukkan bahwa $(\frac{1}{2}(a + b))^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ jika dan hanya jika $a = b$.

2.3. Nilai Mutlak

Misalkan $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, maka tepat satu dari a atau -a adalah positif. Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai salah satu bilangan positif a atau -a. Nilai mutlak dari 0 adalah 0.

2.3.1. Definisi

Jika $a \in \mathbb{R}$, nilai mutlak dari a dilambangkan dengan $|a|$ yang didefinisikan sebagai:

$|a| := a$, jika $a > 0$

$:= 0$, jika $a = 0$

$:= -a$, jika $a < 0$

Contoh: $|6| = 6$; $|-6| = -(-6) = 6$.

Dari definisi 2.3.1 dapat dilihat bahwa $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Juga $|a| = a$ jika $a \geq 0$, dan $|a| = -a$ jika $a \leq 0$.

2.3.2. Teorema

a). $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$.

b). $|a| = |-a|$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$.

c). $|ab| = |a||b|$ untuk semua a, b di $\mathbb{R}$.

d). Jika $c > 0$ maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$.

e). $-|a| \leq a \leq |a|$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$.

Bukti:

a). Jika $a = 0$, maka $|a| = 0$. Juka, jika $a \neq 0$, maka $-a \neq 0$, sehingga $|a| \neq 0$.

Jadi jika $|a| = 0$, maka $a = 0$.

b). Jika $a = 0$, maka $|0| = 0 = |-0|$.

Jika $a > 0$, maka $-a < 0$, sehingga $|a|=a=-(-a)=|-a|$.

Jika $a < 0$, maka $-a > 0$, sehingga $|a| = -a = |-a|$.

Jadi $|a| = |-a|$.

c). Jika salah satu a atau b atau keduanya nol, maka $|ab| = 0$ dan $|a||b| = 0$. Jadi $|ab| = |a||b|$.

Jika $a > 0$, $b > 0$, maka $ab > 0$ dan $|ab|=ab=|a||b|$.

Jika $a > 0$, $b < 0$, maka $ab < 0$ dan $|ab| = -(ab) = a.(-b) = |a||b|$.

Jika $a < 0$, $b > 0$, maka $ab < 0$ dan $|ab| = -(ab) = (-a).(b) = |a||b|$.

Jika $a < 0$, $b < 0$, maka $ab > 0$ dan $|ab| = ab = (-a).(-b) = |a||b|$.

Jadi terbukti $|ab| = |a||b|$, $\forall a, b$ di R.

d). ($\Longrightarrow$). Misalkan $c > 0$ dan $|a| \leq c$, sehingga diperoleh $-a \leq c$ dan $a \leq c$ (mengapa?)

atau $-c \leq a$ dan $a \leq c$.

atau $-c \leq a \leq c$.

Jadi diperoleh jika $c > 0$ dan $|a| \leq c$, maka $-c \leq a \leq c$.

($\Longleftarrow$). Misalkan $c > 0$ dan $-c \leq a \leq c$, sehingga diperoleh $a \leq c$ dan $-c \leq a$, atau

$a \leq c$ dan $-a \leq c$.

atau $|a| \leq c$.

e). Ambil $c = |a|$, maka dari teorema 2.3.2.(d), diperoleh $-|a| \leq a \leq |a|$.

2.3.3. <u>Ketidaksamaan segitiga</u>

Untuk setiap a, b di $\mathbb{R}$, maka $|a + b| \leq |a| + |b|$.

<u>Bukti</u>:

Dari teorema 2.3.2.(e) diperoleh, $\forall a \in \mathbb{R}$, $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $\forall b \in \mathbb{R}$, $-|b| \leq b \leq |b|$.

Selanjutnya dari teorema 2.2.5.(b) diperoleh:

$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$.

Kemudian dengan teorema 2.3.2.(d) diperoleh:

$|a + b| \leq |a| + |b|$.

2.3.4. <u>Corollary</u> (teorema akibat)

Untuk sebarang a, b di R, maka:

a). $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

b). $|a - b| \leq |a| + |b|$.

<u>Bukti</u>:

a). Tulis $a = a - b + b$, dan dengan ketidaksamaan segitiga, diperoleh: $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$.

Jadi $|a| - |b| \leq |a - b|$ ....(1)

Secara sama diperoleh:

$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$.

Jadi $|b| - |a| \leq |b - a|$, atau

$-(|a| - |b|) = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$....(2)

Dari (1) dan (2) dan dengan teorema 2.3.2.(d) diperoleh: $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

b). Dari ketidaksamaan segitiga, ganti b dengan -b, sehingga diperoleh: $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |b|$.

Jadi $|a - b| \leq |a| + |b|$.

2.3.5. Corolly

Untuk sebarang a_1, a_2, ..., a_n di $\mathbb{R}$, maka

$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

Bukti:

Gunakan induksi matematika untuk memperluas ketidaksamaan segitiga. Bukti selengkapnya diserahkan kepada pembaca.

2.3.6. Teorema

Misalkan $a \in \mathbb{R}$. Jika $x \in \mathbb{R}$ sehingga x anggota setiap lingkungan dari a, maka $x = a$.

Bukti:

x anggota setiap lingkungan dari a. Akibatnya $x \in L_{\varepsilon}(a)$ untuk $\varepsilon > 0$. Menurut teorema 2.2.8, $|x - a| = 0$. Ini berarti $x - a = 0$ atau $x = a$.

2.3.7. Soal-soal untuk latihan

1. Misalkan $a \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa:

   a. $|a| = \sqrt{a^2}$. b. $|a^2| = a^2$.

2. Jika a, b di $\mathbb{R}$, $b \neq 0$, tunjukkan bahwa:

   $|a/b| = |a|/|b|$.

3. Jika a, b di $\mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $|a + b| = |a| + |b|$ jika dan hanya jika $ab \geq 0$.

4. Jika x, y, z di $\mathbb{R}$, $x \leq z$, tunjukkan bahwa $x < y < z$ jika dan hanya jika $|x - y| + |y - z| = |x - z|$. Kemudian tafsirkan secara geometri.

5. Temukan semua $x \in R$ sehingga memenuhi ketidaksamaan berikut:

a. $|4x - 5| \leq 13$.

b. $|x^2 - 1| \leq 3$.

c. $|x - 1| > |x + 1|$.

d. $|x| + | + 1| < 2$.

6. Tunjukkan bahwa $|x - a| < \varepsilon$ jika dan hanya jika $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

7. Jika $a < x < b$ dan $a < y < b$, tunjukkan bahwa $|x - y| < b - a$. Kemudian interpretasikan secara geometris.

8. Tentukan dan sketsa grafik dari himpunan pasangan (x,y) di $R \times R$ yang memenuhi persamaan berikut:

a). $|x| = |y|$.

b). $|x| + |y| = 1$.

c). $|xy| = 2$.

d). $|x| - |y| = 2$.

9. Tentukan dan sketsalah grafik dari himpunan pasangan (x,y) di $R \times R$ yang memenuhi pertidaksamaan berikut:

a). $|x| \leq |y|$

b). $|x| + |y| \leq 1$

c). $|xy| \leq 2$

d). $|x| - |y| \geq 2$.

2.4. Sifat Kelengkapan pada R

Suprimum dan Infimum

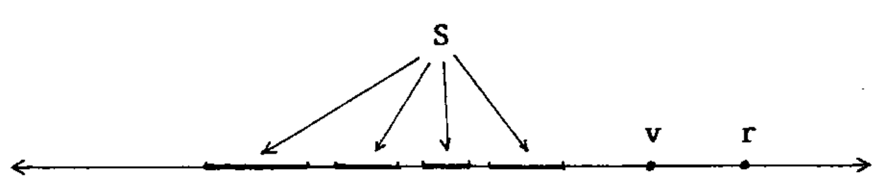
2.4.1. Definisi

Misalkan S himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

(i). Unsur $u \in \mathbb{R}$, dikatakan batas atas dari S jika $s \leq u$, untuk semua $s \in S$.

(ii). Unsur $w \in \mathbb{R}$, dikatakan batas bawah dari S jika $w \leq s$, untuk semua $s \in S$.

Jika $S \subseteq \mathbb{R}$, ada kemungkinan S tidak mempunyai batas atas maupun batas bawah (misalnya, jika $S = \mathbb{R}$). Jika S mempunyai satu batas atas, maka S mempunyai tidak berhingga batas atas. Sebab jika unsur v batas atas dari S, maka $r \in \mathbb{R}$ sehingga $r > v$ juga batas atas dari S (lihat gambar 2.4.1).



Gambar 2.4.1

Juga ada himpunan yang mempunyai batas atas tetapi tidak mempunyai batas bawah, dan sebaliknya juga ada himpunan yang mempunyai batas bawah, tetapi tidak mempunyai batas atas.

Sebagai contoh, misalkan: $S_1 = \{x \in \mathbb{R}: x < 10\}$, dan

$S_2 = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -1\}$.

Pada S_1 mempunyai batas atas (yaitu senua $x \in R$ dengan $x \geq 10$) tetapi tidak mempunyai batas bawah. Sedangkan S_2 mempunyai batas bawah (yaitu semua $x \in \mathbb{R}$, dengan $x \leq -1$) tetapi tidak mempunyai batas atas.

Suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang mempunyai batas atas disebut <u>himpunan terbatas di atas</u>. Suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang mempunyai batas bawah disebut <u>himpunan terbatas di bawah</u>. Suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas dan terbatas di bawah disebut <u>himpunan terbatas</u>. Untuk semua $a \in \mathbb{R}$ adalah merupakan batas atas dari himpunan kosong ({ }) dan sekaligus menjadi batas bawah dari himpunan kosong.

2.4.2.<u>Definisi</u>

Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$.

(i). Jika S terbatas di atas, maka suatu batas atas u dikatakan <u>suprimen</u> (batas atas terkecil) dari S, jika unsur u lebih kecil dari setiap batas atas yang lain dari S.

(ii). Jika S terbatas di bawah, maka suatu batas bawah w dikatakan <u>infimum</u> (batas bawah terbesar) dari S, jika unsur w lebih besar dari setiap batas bawah yang lain dari S.

Definisi 2.4.2 di atas dapat dinyatakan dengan cara lain:

(i). $u \in \mathbb{R}$ adalah suprimum dari $S \subseteq \mathbb{R}$, jika memenuhi dua sifat yaitu:

a). $s \leq u$, untuk semua $s \in S$.

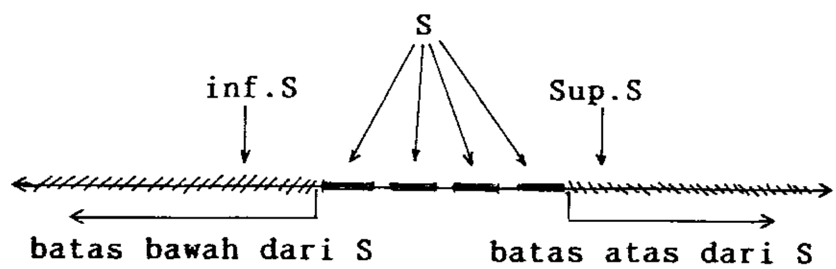
b). Jika $s \leq v$, untuk semua $s \in S$, maka $u \leq v$.

(ii). $w \in \mathbb{R}$ adalah infimum dari $S \subseteq \mathbb{R}$, jika memenuhi dua sifat yaitu:

a). $s \leq w$ untuk semua $s \in S$.

b). Jika $s \geq t$, untuk semua $s \in S$, maka $w \geq t$.

Untuk lebih jelasnya pengertian suprimum dan infimum, perhatikan gambar 2.4.2 berikut ini.



Gambar 2.4.2

Untuk bahasan selanjutnya, penulisan suprimum dari S di singkatkan dengan Sup S, dan infimum dari S disingkatkan dengan inf S.

2.4.3. Lemma

(i). Suprimum dari $S \subseteq R$ adalah tunggal.

(ii). Infimum dari $S \subseteq R$ adalah tunggal.

Bukti:

(i). Andaikan u_1 dan u_2 suprimum dari S.

Maka u_1 dan u_2 keduanya batas atas dari S. Melalui syarat (2) dari cara lain definisi 2.4.2 maka untuk suprimum u_1 didapatkan $u_1 \leq u_2$. Secara sama juga diperoleh $u_2 \leq u_1$.

Jadi $u_1 = u_2$. Berarti suprimum dari $S \subseteq R$ adalah tunggal.

(ii). Pembuktiannya untuk pembaca!

2.4.4. Lemma

Suatu batas atas u dari himpunan tak kosong S di $\mathbb{R}$ adalah suprimum dari S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $S_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < S_\varepsilon$.

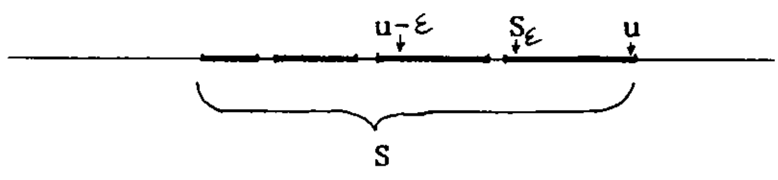
Bukti:

($\Longleftarrow$). Misalkan u batas atas dari S sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $S_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < S_\varepsilon$. Akan ditunjukkan u = Sup S.

Misalkan v batas atas dari S dengan $v \neq u$.

Andaikan v < u, ambil $\varepsilon = u - v > 0$, maka menurut hipotesis terdapat $S_\varepsilon \in S$ sehingga $U - \varepsilon < S_\varepsilon$. Akibatnya $u - (u - v) = v < S_\varepsilon$. Ini suatu kontradiksi bahwa v batas atas di S. Jadi haruslah v > u, yang berarti u adalah batas atas terkecil dari S, atau u = Sup S.

($\Longrightarrow$). Misalkan u = Sup S dan ambil sembarang $\varepsilon > 0$. Karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas dari S. Oleh sebab itu terdapat $s_\varepsilon \in S$ yang lebih besar dari $u - \varepsilon$. Jadi $u - \varepsilon < S_\varepsilon$ untuk $s_\varepsilon \in S$. (lihat gambar 2.4.3)



Gambar 2.4.3

2.4.5. Contoh-contoh

a). Jika S_1 tidak kosong dan mempunyai berhingga unsur, maka dapat ditunjukkan bahwa S_1 mempunyai unsur terbesar u dan unsur terkecil v. Juga $u = \text{Sup } S_1$ dan $v = \inf S_1$, u dan v ini unsur-unsur di S_1.

b). Himpunan $S_2 = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$.
Himpunan S_2 ini mempunyai batas atas terkecil 1 dan batas bawah terbesar 0 yang keduanya merupakan unsur di S_2.

c). Himpunan $S_3 = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 1\}$.
Himpunan S_3 ini mempunyai batas atas terkecil 1 dan batas bawah terbesar 0 yang keduanya bukan unsur di S_3.

d). Setiap unsur di $\mathbb{R}$ merupakan batas atas dan sekaligus batas bawah dari himpunan kosong $\emptyset$. Jadi himpunan $\emptyset$ tidak mempunyai suprimum maupun infimum.

Dari contoh-contoh di atas terlihat bahwa himpunan S1 dan S_2 memuat suprimum dan infimum, sedangkan himpunan S_3 tidak memuat suprimum dan infimum. Suprimum yang dimuat oleh suatu himpunan sering juga disebut maksimum dan infimum yang dimuat oleh suatu himpunan disebut minimum.

2.4.6. Sifat Suprimum dan infimum pada $\mathbb{R}$

a). Setiap himpunan tak kosong dari bilangan riil yang mempunyai batas atas, mempunyai suprimum.

b). Setiap himpunan tak kosong yang mempunyai batas bawah mempunyai infimum.

2.4.7. Soal-soal untuk latihan

1. Misalkan $S_1 := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Tunjukkan secara detail bahwa himpunan S_1 mempunyai batas bawah, tetapi tidak mempunyai batas atas. Kemudian tunjukkan pula bahwa $\inf S_1 = 0$.

2. Misalkan $S_2 := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Apakah S_2 mempunyai batas bawah? Apakah S_2 mempunyai batas atas? Apakah $\inf S_2$ ada? Apakah $\text{Sup } S_2$ ada?
Jelaskan jawaban anda!

3. Misalkan $S_3 := \{{}^1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Tunjukkan $\text{Sup } S_3 = 1$, dan $\inf S_3 = 0$.

4. Misalkan $S_4 = \{1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Dapatkan $\inf S_4$ dan $\text{Sup } S_4$!

5. Tunjukkan jika A dan B masing-masing himpunan bagian yang terbatas dari $\mathbb{R}$, maka $A \cup B$ adalah himpunan yang terbatas.
Tunjukkan bahwa $\text{Sup}(A \cup B) = \text{Sup } \{\text{Sup } A, \text{Sup } B\}$.

6. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$ yang tidak kosong. Tunjukkan bahwa, jika $u = \text{Sup } S$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $u - {}^1/n$ bukan batas atas dari S, tetapi $u + {}^1/n$ adalah suatu batas atas dari S.

2.5. Penerapan Sifat Suprimum

Untuk melihat beberapa penerapan dari sifat suprimum, pertama diberikan melalui contoh-contoh, kemudian diikuti dengan sifat Archimedes, eksistensi (keberadaan) $\sqrt{2}$ dan kerapatan bilangan rasional.

2.5.1. Contoh-contoh:

a). Misalkan S himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas. Misalkan $a \in \mathbb{R}$. Didefinisikan himpunan: $a + S = \{a + x : x \in \mathbb{R}\}$. Tunjukkan bahwa:
$\text{Sup}(a + S) = a + \text{Sup } S$.

Bukti:

Misalkan $u = \text{Sup } S$, maka $x \leq u$, $\forall x \in S$.

Jadi $a + x \leq a + u$, $\forall x \in S$. Ini berarti $a + u$ merupakan batas atas dari $a + S$.

Oleh karena itu $\text{Sup}(a + S) \leq a + u$.

Misalkan v batas atas dari $a + S$, maka $a + x \leq v$, $\forall x \in S$. Akibatnya $x \leq v - a$, $\forall x \in S$. Karena $u = \text{Sup } S$, maka $u \leq v - a$ atau $a + u \leq v$.

Jadi $(a + u)$ Suprimum dari $(a + S)$, atau
$\text{Sup}(a + S) = a + \text{Sup } S$.

b). Secara sama seperti a) diperoleh:
$\inf(a + S) = a + \inf S$.

c). Misalkan f dan g masing-masing fungsi bernilai riil dengan domain $D \subseteq \mathbb{R}$. Andaikan range f adalah
$f(D) := \{f(x) : x \in D\}$ dan range g adalah
$g(D) := \{g(x) : x \in D\}$ maka $f(D)$ dan $g(D)$ merupakan

himpunan-himpunan yang terbatas di $\mathbb{R}$.

d). Jika $f(x) \leq g(y)$, $\forall x, y \in D$, maka

Sup $f(D) \leq \inf g(D)$.

Bukti:

Karena $f(x) \leq g(y)$, $\forall x \in D$, maka $g(y)$ batas atas untuk $f(D)$. Akibatnya $f(D) \leq g(y)$, $\forall y \in D$.

Ini berarti Sup $f(D)$ merupakan batas bawah untuk $g(D)$. Akibatnya Sup $f(D) \leq \inf g(D)$.

Sifat Archimedes pada $\mathbb{R}$

Perhatikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$. Bilangan asli ini terbatas di bawah oleh 1, tetapi tidak terbatas di atas pada $\mathbb{R}$. Ini berarti bahwa jika diberikan sebarang bilangan riil x, maka terdapat bilangan asli n sehingga $x < n$.

2.5.2. Teorema Archimedes

Jika $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat $n_x \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x < n_x$.

Bukti:

Andaikan $n_x \leq x$, maka terdapat $x \in \mathbb{R}$ sehingga x batas atas dari $\mathbb{N}$. Akibatnya $\mathbb{N}$ mempunyai Suprimum $u \in \mathbb{R}$.

Karena $u - 1 < u$, maka menurut Lemma 2.4.4, terdapat $n \in \mathbb{N}$, sehingga $u - 1 < m$, jadi $u < m + 1$. Karena $m \in \mathbb{N}$ maka $m + 1 \in \mathbb{N}$. Ini bertentangan dengan u batas atas dari $\mathbb{N}$. Jadi pengandaian salah. Dengan kata lain, $\mathbb{N}$ tidak mempunyai batas atas. Akibatnya jika $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat $n_x \in \mathbb{N}$ sehingga $x < n_x$.

2.5.3.<u>Corollary</u> (Teorema Akibat)

Misalkan y dan z bilangan-bilangan riil positif. Maka:

a). Terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $z < ny$,

b). Terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $0 < \frac{1}{n} < y$,

c). Terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $n - 1 \leq z < n$.

<u>Bukti</u>:

a). Sebut $x = \frac{z}{y} > 0$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{z}{y} = x < n$. Oleh karena itu $z < ny$.

b). Dari bukti a), ambil $z = 1$, maka $1 < ny$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya $\frac{1}{n} < y$. Jadi $0 < \frac{1}{n} < y$.

c). Ambil $z \in \mathbb{R}$. Sebut $K = \{m \quad N: z < m\}$. Jelas $K \neq \emptyset$. Pilih n = minimum K, maka diperoleh $n - 1 \leq z < n$.

<u>Eksistensi $\sqrt{2}$</u>

2.5.4.<u>Teorema</u>

Terdapat bilangan riil positif x sehingga $x^2 = 2$.

<u>Bukti</u>:

Misalkan $S = \{s \in \mathbb{R}: 0 < s,\ s^2 < 2\}$.

$1 \in S$, jadi $S \neq \emptyset$.

S terbatas di atas oleh 2, karena jika $t > 2$ maka $t^2 > 4$ sehingga $t \notin S$.

Menurut sifat suprimum, S mempunyai suprimum.

Misalkan $x = \text{Sup } S$. Akan ditunjukkan $x^2 = 2$.

Jika tidak, maka $x^2 < 2$ atau $x^2 > 2$.

<u>Andaikan</u> $x^2 < 2$.

Akibatnya $2 - x^2 > 0$ atau $\dfrac{2 - x^2}{2x + 1} > 0$

Menurut Corollary 2.5.3.(b), maka terdapat $n \in \mathbb{N}$, sehingga: $0 < \frac{1}{n} < \dfrac{2 - x^2}{2x + 1}$ atau $\frac{1}{n}(2x + 1) < 2 - x^2$.

Tetapi $x + \frac{1}{n} \in S$.

Karena $(x + \frac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\leq x^2 + \frac{1}{n}(2x + 1)$

$< x^2 + (2 - x^2) = 2$.

Jadi $x < x + \frac{1}{n} \in S$, ini bertentangan dengan $x = \text{Sup } S$.

Dengan kata lain tidak mungkin $x^2 < 2$. ....(*)

<u>Andaikan</u> $x^2 > 2$.

Akibatnya $x^2 - 2 > 0$ atau $\dfrac{x^2 - 2}{x} > 0$.

Menurut Corollary 2.5.3, terdapat $m \in \mathbb{N}$, sehingga:

$\frac{1}{m} < \dfrac{x^2 - 2}{2x}$, atau $\frac{2x}{m} < x^2 - 2$.

$(x - \frac{1}{m})^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \dfrac{1}{m^2}$

$> x^2 - \frac{2x}{m}$

$> x^2 - (x^2 - 2) = 2$.

Jadi $x - \frac{1}{m} > s$, $\forall s \in S$, yang berarti $x - \frac{1}{m}$ batas atas dari S. Ini bertentangan dengan $x = \text{Sup } S$.

Jadi tidak mungkin $x^2 > 2$ ....(**)

dari (*) dan (**), diperoleh $x^2 = 2$.

Selanjutnya, jika $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, maka terdapat secara tunggal bilangan positif $b \in \mathbb{R}$, sehingga $b^2 = a$. Bentuk ini disebut b sebagai akar kuadrat dari a dan ditulis sebagai $b = \sqrt{a}$.

<u>Kerapatan Bilangan Rasional</u>

Pada pembicaraan sebelum ini telah ditunjukkan bahwa $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ dan $\sqrt{2}$ itu bukan bilangan rasional, tetapi bilangan irrasional. Berikut ini akan diberikan teorema kerapatan bilangan rasional.

sehingga: $0 < \frac{1}{n} < \dfrac{2 - x^2}{2x + 1}$ atau $\frac{1}{n}(2x + 1) < 2 - x^2$.

Tetapi $x + \frac{1}{n} \in S$.

Karena $(x + \frac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$

$$\leq x^2 + \frac{1}{n}(2x + 1)$$

$$< x^2 + (2 - x^2) = 2.$$

Jadi $x < x + \frac{1}{n} \in S$, ini bertentangan dengan $x = \text{Sup } S$.

Dengan kata lain tidak mungkin $x^2 < 2$. ....(*)

<u>Andaikan</u> $x^2 > 2$.

Akibatnya $x^2 - 2 > 0$ atau $\dfrac{x^2 - 2}{x} > 0$.

Menurut Corollary 2.5.3, terdapat $m \in \mathbb{N}$, sehingga:

$\frac{1}{m} < \dfrac{x^2 - 2}{2x}$, atau $\frac{2x}{m} < x^2 - 2$.

$$(x - \frac{1}{m})^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2}$$

$$> x^2 - \frac{2x}{m}$$

$$> x^2 - (x^2 - 2) = 2.$$

Jadi $x - \frac{1}{m} > s$, $\forall s \in S$, yang berarti $x - \frac{1}{m}$ batas atas dari S. Ini bertentangan dengan $x = \text{Sup } S$.

Jadi tidak mungkin $x^2 > 2$ ....(**)

dari (*) dan (**), diperoleh $x^2 = 2$.

Selanjutnya, jika $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, maka terdapat secara tunggal bilangan positif $b \in \mathbb{R}$, sehingga $b^2 = a$. Bentuk ini disebut b sebagai akar kuadrat dari a dan ditulis sebagai $b = \sqrt{a}$.

<u>Kerapatan Bilangan Rasional</u>

Pada pembicaraan sebelum ini telah ditunjukkan bahwa $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ dan $\sqrt{2}$ itu bukan bilangan rasional, tetapi bilangan irrasional. Berikut ini akan diberikan teorema kerapatan bilangan rasional.

3. Misalkan S himpunan tak kosong dan terbatas di $\mathbb{R}$.

   a). Misalkan $a \in \mathbb{R}$, dan misalkan $aS := \{as : s \in S\}$.
   Buktikan bahwa: $\inf(aS) = a \inf S$, dan
   $\sup(aS) = a \sup S$.

   b). Misalkan $b < 0$ dan misalkan $bS := \{bs : s \in S\}$.
   Buktikan bahwa: $\inf(bS) = b \sup S$, dan
   $\sup(bS) = b \inf S$.

4. Misalkan A dan B himpunan-himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang tak kosong dan terbatas, dan misalkan $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Buktikan bahwa $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ dan $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

5. Misalkan X himpunan yang tak kosong, dan misalkan $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, mempunyai range yang terbatas di $\mathbb{R}$. Jika $a \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa:

   a). $\sup\{a + f(x): x \in X\} = a + \sup\{f(x): x \in X\}$.

   b). $\inf\{a + f(x): x \in X\} = a + \inf\{f(x): x \in X\}$.

6. Misalkan X himpunan yang tak kosong, dan misalkan f dan g terdefinisi pada X dan mempunyai range yang terbatas di $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa:

a). $\sup\{f(x)+g(x): x \in X\} \leq \sup\{f(x): x \in X\} + \sup\{g(x): x \in X\}$.

b). $\inf\{f(x): x \in X\} + \inf\{g(x): x \in X\} \leq \inf\{f(x)+g(x): x \in X\}$.

3. Misalkan S himpunan tak kosong dan terbatas di R.

   a). Misalkan $a \in \mathbb{R}$, dan misalkan $aS := \{as : s \in S\}$.

   Buktikan bahwa: $\inf(aS) = a \inf S$, dan

   $\sup(aS) = a \sup S$.

   b). Misalkan $b < 0$ dan misalkan $bS := \{bs : s \in S\}$.

   Buktikan bahwa: $\inf(bS) = b \sup S$, dan

   $\sup(bS) = b \inf S$.

4. Misalkan A dan B himpunan-himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang tak kosong dan terbatas, dan misalkan $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Buktikan bahwa $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ dan $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

5. Misalkan X himpunan yang tak kosong, dan misalkan $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, mempunyai range yang terbatas di $\mathbb{R}$.

   Jika $a \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa:

   a). $\sup\{a + f(x): x \in X\} = a + \sup\{f(x): x \in X\}$.

   b). $\inf\{a + f(x): x \in X\} = a + \inf\{f(x): x \in X\}$.

6. Misalkan X himpunan yang tak kosong, dan misalkan f dan g terdefinisi pada X dan mempunyai range yang terbatas di R. Tunjukkan bahwa:

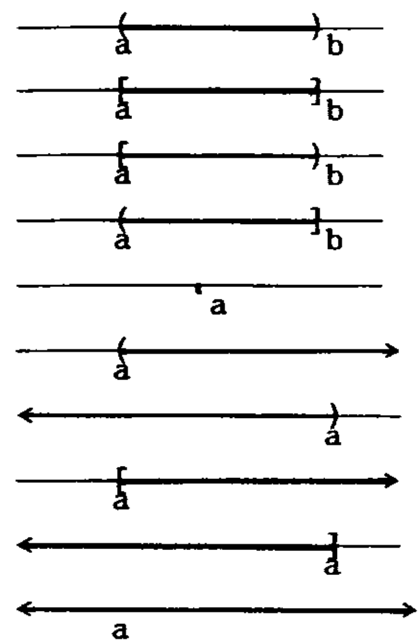
a). $\sup\{f(x)+g(x):x \in X\} \leq \sup\{f(x):x \in X\}+\sup\{g(x):x \in X\}$.

b). $\inf\{f(x):x \in X\}+\inf\{g(x):x \in X\} \leq \inf\{f(x)+g(x):x \in X\}$.

Bentuk penulisan interval pada nomor (1) sampai dengan (5) di sebut <u>interval terbatas</u>, dan nomor (6) sampai dengan (10) disebut <u>interval tak terbatas</u>.

Secara grafik (garis bilangan) masing-masing interval tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:

1. $(a,b) := \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
2. $[a,b] := \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
3. $[a,b) := \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$
4. $(a,b] := \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$
5. $[a,a] := \{a\}$
6. $(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$
7. $(-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$
8. $(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$
9. $(-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$
10. $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$

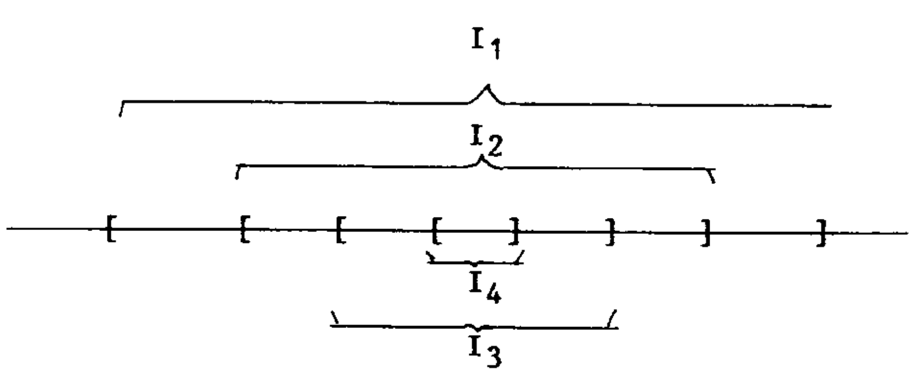


Interval satuan adalah suatu interval tutup $[0,1] := \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$ dan biasa disimbolkan dengan I.

<u>Sarang Interval</u> (Nested Interval)

Barisan interval I_n, $n \in \mathbb{N}$ dikatakan bersarang (nested) jika rantai inklusi (lihat gambar) berikut dipenuhi:

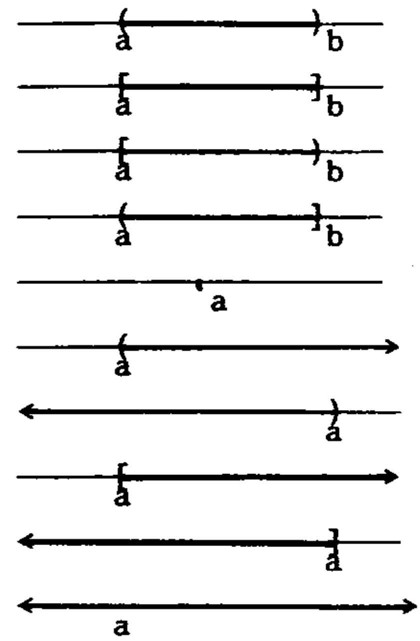
$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq, \ldots, \supseteq I_n \cdot \supseteq I_{n+1} \supseteq, \ldots$$



Bentuk penulisan interval pada nomor (1) sampai dengan (5) di sebut <u>interval terbatas</u>, dan nomor (6) sampai dengan (10) disebut <u>interval tak terbatas</u>.

Secara grafik (garis bilangan) masing-masing interval tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:

1. $(a,b):=\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
2. $[a,b]:=\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
3. $[a,b):=\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$
4. $(a,b]:=\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$
5. $[a,a]:=\{a\}$
6. $(a,\infty):=\{x \in \mathbb{R}: x > a\}$
7. $(-\infty,a):=\{x \in \mathbb{R}: x < a\}$
8. $(a,\infty):=\{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$
9. $(-\infty,a):=\{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$
10. $(-\infty,\infty):=\mathbb{R}$

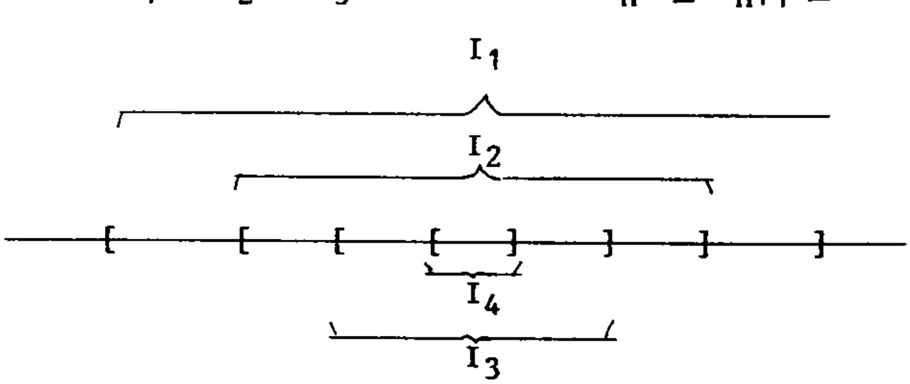


Interval satuan adalah suatu interval tutup $[0,1]:=\{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$ dan biasa disimbolkan dengan I.

<u>Sarang Interval</u> (Nested Interval)

Barisan interval I_n, $n \in \mathbb{N}$ dikatakan bersarang (nested) jika rantai inklusi (lihat gambar) berikut dipenuhi:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq, \ldots, \supseteq I_n . \supseteq I_{n+1} \supseteq, \ldots$$



(i). jika $n \leq k$, maka $I_n \supseteq I_k$, $a_k \leq b_k \leq b_n$,

(ii). jika $k < n$, maka $I_k \supseteq I_n$, $a_k \leq a_n \leq b_n$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa $a_k \leq b_n$ untuk semua k sehingga b_n batas atas dari himpunan $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$. Oleh karena itu $\xi \leq b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Karena $a_n \leq \xi \leq b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $\xi \in I_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jika $\eta = \inf\{b_n: n \in \mathbb{N}\}$, maka dengan analogi yang sama, diperoleh $a_n \leq \eta$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, dan oleh karena itu $\xi \leq n$. Sehingga $x \in I_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ jika dan hanya jika $\xi \leq x \leq n$.

Selanjutnya misalkan $\inf\{b_n - a_n: n \in \mathbb{N}\} = 0$, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sehingga $0 \leq n - \xi \leq b_n - a_n \leq \varepsilon$. Karena ini dipenuhi untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $n - \xi = 0$ atau $n = \xi$ adalah satu-satunya unsur di I_n untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

2.6.2. Soal-soal untuk latihan

1. Jika $I: = [a,b]$ dan $I': = [a',b']$ adalah interval-interval tutup di R. Tunjukkan bahwa $I \subseteq I'$ jika dan hanya jika $a' \leq a$ dan $b \leq b'$.

2. Jika $S \subseteq R$, $S \neq \emptyset$, tunjukkan bahwa S terbatas jika dan hanya jika ada beberapa interval tutup terbatas jika $I \subseteq R$ sedemikian sehingga $S \subseteq I$.

3. Tunjukkan bahwa jika $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ adalah barisan bersarang dari interval-interval tutup di R, dan jika $I_n = [a_n,b_n]$, maka $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ dan $b_1 \geq b2 > \ldots \geq b_n \geq \ldots$

(i). jika $n \leq k$, maka $I_n \supseteq I_k$, $a_k \leq b_k \leq b_n$,

(ii). jika $k < n$, maka $I_k \supseteq I_n$, $a_k \leq a_n \leq b_n$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa $a_k \leq b_n$ untuk semua k sehingga b_n batas atas dari himpunan $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$. Oleh karena itu $\xi \leq b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Karena $a_n \leq \xi \leq b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $\xi \in I_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jika $\eta = \inf\{b_n: n \in \mathbb{N}\}$, maka dengan analogi yang sama, diperoleh $a_n \leq \eta$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, dan oleh karena itu $\xi \leq n$. Sehingga $x \in I_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ jika dan hanya jika $\xi \leq x \leq n$.

Selanjutnya misalkan $\inf\{b_n - a_n: n \in \mathbb{N}\} = 0$, maka untuk sebarang $\xi > 0$, terdapat $n_\xi \in \mathbb{N}$, sehingga $0 \leq n - \xi \leq b_n - a_n \leq \xi$. Karena ini dipenuhi untuk sebarang $\xi > 0$, maka $n - \xi = 0$ atau $n = \xi$ adalah satu-satunya unsur di I_n untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

2.6.2. Soal-soal untuk latihan

1. Jika $I := [a,b]$ dan $I' := [a',b']$ adalah interval-interval tutup di R. Tunjukkan bahwa $I \subseteq I'$ jika dan hanya jika $a' \leq a$ dan $b \leq b'$.

2. Jika $S \subseteq R$, $S \neq \emptyset$, tunjukkan bahwa S terbatas jika dan hanya jika ada beberapa interval tutup terbatas jika $I \subseteq R$ sedemikian sehingga $S \subseteq I$.

3. Tunjukkan bahwa jika $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ adalah barisan bersarang dari interval-interval tutup di R, dan jika $I_n = [a_n, b_n]$, maka $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ dan $b_1 \geq b2 > \ldots \geq b_n \geq \ldots$

BAB. III

BARISAN BILANGAN RIIL

3.1. Barisan dan Limit Barisan

Suatu barisan di dalam himpunan S adalah suatu fungsi pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ dengan daerah jelajah termasuk di dalam himpunan S.

3.1.1. Definisi

Suatu barisan bilangan riil adalah suatu fungsi pada himpunan bilangan asli N dengan daerah jelajah termuat di dalam himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.

Dengan kata lain, barisan di R adalah pengaitan setiap bilangan asli n = 1,2,3,...dengan tunggal bilangan riil. Bilangan-bilangan riil yang dihasilkan disebut unsur dari barisan, dan biasanya dituliskan dengan x_n(atau a_n atau z_n). Secara umum, jika:

$X: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ suatu barisan, maka diberikan nilai X pada n dengan x_n. Selanjutnya notasi barisan sebagai berikut:

$$X, \text{ atau } (x_n), \text{ atau } (x_n: n \in \mathbb{N}).$$

Digunakan kurung biasa pada barisan, untuk membedakan penggunaan kurung kurawal pada notasi himpunan. Di sini perlu diperhatikan perbedaan antara himpunan dan barisan. Pada himpunan, keanggotaannya tidak diperhatikan urutan dan bila terjadi unsur dua kali atau lebih, cukup ditulis satu kali saja. Sedangkan pada barisan urutan harus diperhatikan. Sebagai contoh, misalkan:

$X: = ((-1)^n: n \in \mathbb{N}) = (1,-1, 1,-1,...)$, sedangkan himpunan $\{(-1)^n: n \in \mathbb{N}\} = \{-1,1\}$.

BAB. III

BARISAN BILANGAN RIIL

3.1. Barisan dan Limit Barisan

Suatu barisan di dalam himpunan S adalah suatu fungsi pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ dengan daerah jelajah termasuk di dalam himpunan S.

3.1.1. Definisi

Suatu barisan bilangan riil adalah suatu fungsi pada himpunan bilangan asli N dengan daerah jelajah termuat di dalam himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.

Dengan kata lain, barisan di R adalah pengaitan setiap bilangan asli n = 1,2,3,...dengan tunggal bilangan riil. Bilangan-bilangan riil yang dihasilkan disebut unsur dari barisan, dan biasanya dituliskan dengan x_n(atau a_n atau z_n). Secara umum, jika:

$X: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ suatu barisan, maka diberikan nilai X pada n dengan x_n. Selanjutnya notasi barisan sebagai berikut:

$$X, \text{ atau } (x_n), \text{ atau } (x_n: n \in \mathbb{N}).$$

Digunakan kurung biasa pada barisan, untuk membedakan penggunaan kurung kurawal pada notasi himpunan. Di sini perlu diperhatikan perbedaan antara himpunan dan barisan. Pada himpunan, keanggotaannya tidak diperhatikan urutan dan bila terjadi unsur dua kali atau lebih, cukup ditulis satu kali saja. Sedangkan pada barisan urutan harus diperhatikan. Sebagai contoh, misalkan:

$X: = ((-1)^n: n\in\mathbb{N})=(1,-1, 1,-1,...)$, sedangkan himpunan $\{(-1)^n: n \in \mathbb{N}\} = \{-1,1\}$.

$X.Y = (2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots)$

$3X = (6, 12, 18, \ldots, 6n, \ldots)$

$X/Y = (2, 8, 18, \ldots, 2n^2, \ldots).$

Tetapi jika Z menyatakan barisan:

$Z: = (0, 2, 0, \ldots, 1 + (-1)^n, \ldots)$, maka $X + Z$, $X.Z$ terdefinisi, tetapi X/Z tidak terdefinisi, karena beberapa suku dari Z ada yang sama dengan nol.

Limit Barisan

3.1.4. Definisi

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan riil. Bilangan riil x dikatakan limit dari X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$ maka x_n anggota dari lingkungan $V_\varepsilon(x)$.

Jika x limit dari barisan X, maka dikatakan X konvergen ke x (atau barisan mempunyai limit). Jika suatu barisan mempunyai limit, maka dikatakan barisan itu konvergen dan jika tidak mempunyai limit dikatakan barisan itu divergen. Jika barisan bilangan riil $X = (x_n)$ mempunyai limit di $x \in \mathbb{R}$, maka ditulis:

$x = \lim X$, atau $x = \lim (x_n)$ atau

$x = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n)$ atau $x_n \longrightarrow x$.

3.1.5. (Ketunggalan limit)

Suatu barisan bilangan riil dapat memiliki paling banyak satu limit.

Bukti:

Andaikan tidak demikian, maka terdapat x` dan x" limit dari $X = (x_n)$ dengan $x' \neq x''$.

Pilih lingkungan V' dari x' dan lingkungan V'' dari x'' sehingga $V' \cap V'' = \emptyset$. Menurut definisi limit, maka terdapat bilangan asli N_{V_1} sehingga $x_n \in V'$ apabila $n \geq N_{V_1}$ dan terdapat $N_{V''}$ sehingga $x_n \in V''$ apabila $n \geq N_{V''}$.

Pilih N_o = maks $\{N_{V_1}, N_{V_2}\}$ maka untuk $n \geq N_o$, $x_n \in V' \cap V''$.

Ini bertentangan dengan $V' \cap V'' = \emptyset$.

Jadi pengandaian salah, dan seharusnya $x' = x''$.

Dengan kata lain barisan memiliki paling banyak satu limit.

3.1.6. Teorema

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan riil dan $x \in \mathbb{R}$, maka pernyataan berikut ekivalen:

(1). X konvergen ke x,

(2). Untuk setiap ε lingkungan $V_\varepsilon(x)$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga $x_n \in V_\varepsilon(x)$ apabila $n \geq K(\varepsilon)$,

(3). Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ apabila $n \geq K(\varepsilon)$,

(4). Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$, apabila $n \geq K(\varepsilon)$.

Bukti:

(1). $\Longrightarrow$ (2). Karena V_ε lingkungan $-\varepsilon$ dari x adalah suatu lingkungan dari x, maka bila diambil $V = V_\varepsilon(x)$, maka menurut definisi limit, terdapat $K(\varepsilon)$ sehingga $x_n \in V_\varepsilon(x)$ apabila $n \geq K(\varepsilon)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka $x_n \in V_\varepsilon(x)$. Ini berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Jika $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, maka berarti $|x_n - x| < \varepsilon$.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Ambil lingkungan $-\varepsilon$, $\mathcal{V}$ dari x, sebarang. Karena $\mathcal{V}$ lingkungan $-\varepsilon$ dari x maka dapat dipilih $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathcal{V}$.
Maka menurut hipotesis, terdapat $K(\varepsilon)$ sehingga $|x_n - x| <$ apabila $n \geq K(\varepsilon)$, atau $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, apabila $n \geq K(\varepsilon)$.
Akibatnya untuk $n \geq K(\varepsilon)$, $x_n \in V_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{V}$. Ini menunjukkan bahwa (x_n) konvergen ke x (menurut definisi limit).

Ekor dari Barisan

Untuk menyelidiki kekonvergenan atau kedivergenan suatu barisan, cukup diperhatikan ekor dari barisan itu, yaitu barisan bagian dari suatu barisan yang dimulai dari suatu urutan tertentu.

3.1.7. Definisi

Misalkan $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ barisan bilangan riil dan misalkan m bilangan asli. Maka ekor-m dari barisan $X = (x_n)$ adalah suatu barisan:
$X_m := (x_{m+n} : n \in \mathbb{N}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$.
Sebagai contoh, misalkan $X = (2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots)$, maka ekor-5 dari barisan X adalah:

$$X_5 = (12, 14, \ldots, 2n+10, \ldots).$$

3.1.8. Teorema

Misalkan $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ barisan bilangan riil dan $m \in \mathbb{N}$. Maka ekor-m $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ dari barisan X konvergen jika dan hanya jika X konvergen. Dalam hal ini

$\lim X_m = \lim X$.

<u>Bukti</u>:

($\Longrightarrow$). Misalkan X_m konvergen ke $x \in \mathbb{R}$.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, maka menurut hipotesis terdapat $K(\varepsilon)$ sehingga untuk $n \geq K(\varepsilon)$, $|x_n - x| < \varepsilon$.........(*)

Misalkan $p \in \mathbb{N}$, $x_p \in X_m$ adalah urutan ke $p + m$ dari barisan X. Oleh karena itu dari (*) unsur-unsur di X, apabila $k \geq K(\varepsilon) + m$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$.

Ini menunjukkan bahwa X konvergen ke x.

Jadi X konvergen.

($\Longleftarrow$) Misalkan X konvergen ke x.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Menurut hipotesis, maka terdapat $K\varepsilon_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$ apabila $n \geq K\varepsilon_0$.

Jika $K\varepsilon_0 > m$, dan $n \geq K\varepsilon_0$, maka x_n unsur ke $(n - m)$ dari X_m. Jadi untuk $m \geq K\varepsilon_0 - m$, $x_k \in X_m$ dan $|x_k - x| < \varepsilon$.

Ini menunjukkan bahwa X_m konvergen. Jika $K\varepsilon_0 \leq m$ maka untuk setiap $x_k \in X_m$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$. Ini berarti bahwa X_m konvergen.

3.1.9.<u>Teorema</u>

Misalkan $A = (a_n)$ dan $X = (x_n)$ barisan-barisan bilangan riil dan $x \in \mathbb{R}$. Jika ada $c > 0$ dan $m \in \mathbb{N}$ dengan $|x_n - x| \leq c(a_n)$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ sehingga $n \geq m$, dan jika $\lim (a_n) = 0$, maka $\lim (x_n) = x$.

<u>Bukti</u>:

Ambil $c > 0$ sebarang. Karena (a_n) konvergen ke 0, maka terdapat $K_A(\varepsilon/c)$ sehingga apabila $n \geq K_A(\varepsilon/c)$ berlaku $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon/c$. Jadi untuk $n \geq K_A(\varepsilon/c)$ dan $n \geq m$ berlaku $|x_n - x| \leq c|a_n| < c.\ \varepsilon/c = \varepsilon$.

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, ini berarti (x_n) konvergen ke x atau $\lim (x_n) = x$.

3.1.10. <u>Contoh-contoh</u>:

(a). Jika $a > 0$, maka $\lim \left(\frac{1}{1 + na}\right) = 0$

Karena $a > 0$, maka berlaku $0 < na < 1 + na$.

Akibatnya $0 < \frac{1}{1 + na} < \frac{1}{na}$ atau

$$\left| \frac{1}{1 + na} - 0 \right| \leq \left(\frac{1}{a}\right) . \frac{1}{n} \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

Karena limit $\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, dan menurut teorema 3.1.9 dengan mengambil $c = \left(\frac{1}{a}\right)$ dan $m = 1$, maka dapat disimpulkan $\lim \left(\frac{1}{1 + m}\right) = 0$.

(b). $\lim (^1/_2n) = 0$ (buktikan).

Karena $0 < n < 2^n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka berlaku $0 < {^1/_2n} < {^1/n}$. Akibatnya:

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| \leq \frac{1}{n}, \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

Karena $\lim \left(\frac{1}{n}\right) = 0$, maka dengan menggunakan teorema 3.1.9 dapat ditunjukkan bahwa $\lim \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$.

(c). Jika $0 < b < 1$, maka $\lim (b^n) = 0$.

Karena $0 < b < 1$, tulis $b = {^1/(1+a)}$, dengan $a := ({^1/b}) - 1$ sehingga $a > 0$. Melalui ketidaksamaan Bernoulli, berlaku $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Jadi $0 < b^n = \frac{1}{(1 + a)^n} \leq \frac{1}{1 + na} < \frac{1}{na}$ sehingga dengan memakai teorema 3.1.9 dapat diperoleh $\lim (b^n) = 0$.

3.1.11. Soal-soal untuk latihan

1. Barisan-barisan (x_n) didefinisikan dengan suku ke n sebagai berikut. Tulis tujuh suku pertama dalam setiap kasus.

   a). $x_n := 1 + (-1)^n$ c). $x_n := \frac{1}{n(n+1)}$

   b). $x_n: (-1)^n/n$, d). $x_n = \frac{1}{n^2+2}$

2. Beberapa suku pertama dari barisan (x_n) diberikan sebagai berikut. Dapatkan rumus suku ke n dalam setiap kasus:

   a). 5,7,9,11,... c). $^1/2, ^2/3, ^3/4, ^4/5, \ldots$

   b). $^1/2, -^1/4, -^1/8, -^1/16, \ldots$ d). 1,4,9,16,...

3. Tuliskan enam suku pertama dari barisan yang didefinisikan secara induktif berikut ini.

   a). $x_1 := 1$, $x_{n+1} := 3x_n + 1$.

   b). $y_1 := 2$, $y_{n+1} := \frac{1}{2}(y_n + {}^2/y_n)$.

   c). $z_1 := 1$, $z_2 := 2$, $z_{n+2} := (z_{n+1} + z_n)/(z_{n+1} - z_n)$.

   d). $s_1 := 3$, $S_2 := 5$, $s_{n+2} := s_n + s_{n+1}$.

4. Buktikan bahwa untuk sebarang $b \in \mathbf{R}$, $\lim (\frac{b}{n}) = 0$.

5. Gunakan definisi limit barisan untuk membuktikan limit berikut.

   a). $\lim (\frac{1}{n^2+1}) = 0$. c). $\lim (\frac{2n}{n+1}) = 2$.

   b). $\lim (\frac{3n+1}{2n+5}) = \frac{3}{2}$. d). $\lim (\frac{n^2-1}{2n^2+3}) = \frac{1}{2}$.

6. Tunjukkan bahwa:

a). $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n+7}}\right) = 0$

b). $\lim \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right) = 0$.

c). $\lim \left(\frac{2n}{n+2}\right) = 2$

d). $\lim \left(\frac{(-1)^n . n}{n^2 + 1}\right) = 0$

7. Buktikan bahwa $\lim (x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim (|x_n|) = 0$. Kemudian berikan contoh bahwa $\lim (|x_n|)$ konvergen tetapi (x_n) divergen.

8. Buktikan bahwa jika $\lim (x_n) = x$ dan $x > 0$, maka terdapat $M \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x_n > 0$ untuk semua $n \geq M$.

9. Tunjukkan bahwa $\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 0$.

10. Tunjukkan bahwa $\lim ({}^1/_3 n) = 0$.

3.2. Teorema-teorema Limit

3.2.1. Definisi

Barisan bilangan riil $X = (x_n)$ dikatakan <u>terbatas</u> jika ada bilangan riil $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| < M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Jadi barisan $X = (x_n)$ terbatas jika dan hanya jika $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas di $\mathbb{R}$.

3.2.2. Teorema

Suatu barisan bilangan riil yang konvergen adalah terbatas. (teorema ini tidak berlaku kebalikannya).

<u>Bukti</u>:

Misalkan $\lim (x_n) = x$, dan ambil $\varepsilon_0 = 1$. Menurut hipotesis, maka terdapat $N_0 \in N$ sehingga $|x_n - x| < 1$ apabila $n \geq N_0$. Melalui ketidaksamaan segitiga akan berakibat $|x_n| < |X| + 1$, apabila $n \geq N_0$.

Pilih $M = \text{Sup}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_0-1}|, |x| + 1\}$.

Maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_n| \leq M$.

Ini berarti barisan $X = (x_n)$ terbatas.

3.2.3. Teorema

a). Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ barisan-barisan bilangan riil berturut-turut konvergen ke x dan y, dan misalkan $c \in \mathbb{R}$. Maka barisan $X + Y$, $X - Y$, XY, cX berturut-turut konvergen ke $(x + y)$, $(x - y)$, (xy) dan cx.

b). Jika $X = (x_n)$ konvergen ke x dan $Z = (z_n)$ barisan bilangan riil tak nol yang konvergen ke $z \neq 0$, maka barisan X/Z konvergen ke x/z.

<u>Bukti</u>:

a).Untuk membuktikan $\lim (x_n + y_n) = x + y$.

Pilih $N_1 \in \mathbb{N}$, sehingga $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, apabila $n \geq N_1$.

Pilih $N_2 \in \mathbb{N}$, sehingga $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, apabila $n \geq N_2$.

Sebut $N_0 = \text{maks}\{N_1, N_2\}$, maka untuk $n \geq N_0$ berlaku

$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Akibatnya untuk $n \geq N_0$, berlaku:

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka barisan $(x_n + y_n) = X + Y$ konvergen ke $(x + y)$.

- Untuk membuktikan $\lim (x_n - y_n) = x - y$,

  Pilih $N_1 \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, apabila $n \geq N_1$, dan

  Pilih $N_2 \in \mathbb{N}$ sehingga $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, apabila $n \geq N_2$.

  Sebut $N_0 = \text{maks}\{N_1, N_2\}$, maka untuk $n \geq N_0$ berlaku

  $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$.

  Akibatnya untuk $n \geq N_0$, berlaku:

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (x - y)| &= |(x_n - x) - (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

  Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka barisan $(x_n - y_n) = X - Y$ konvergen ke $(x - y)$.

- Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\lim XY = \lim (x_n y_n) = xy$.

  Analisis:
$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n y_n - x_n y| + |(x_n y - xy)| \\ &\leq |x_n (y_n - y)| + |y(x_n - x)| \\ &= |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \end{aligned}$$

Karena (x_n) konvergen ke x, maka menurut teorema 3.2.2, terdapat $M \in \mathbb{R}$ sehingga $|x_n| < M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Pilih $K = \text{maks}\{M, |y|\}$ maka diperoleh:

$$|x_n y_n - xy| \leq K|y_n - y| + K|x_n - x|$$
$$= K(|y_n - y| + |x_n - x|).$$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih N_1 N sehingga $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2K}$ apabila $n \geq N_1$, dan Pilih $N_2 \in \mathbb{N}$ sehingga $|y_n - y| < \frac{}{2K}$ apabila $n \geq N_2$.

Sebut $N_o = \text{maks}\{N_1, N_2\}$, maka untuk $n \geq N_o$ berlaku:

$|x_n - x| < \frac{}{2K}$ dan $|y_n - y| < \frac{}{2K}$.

Pilih $S = \text{maks}\{N_o, N\}$, maka untuk $n \geq S$ berlaku:

$$|x_n y_n - xy| \leq K(|y_n - y| + | |x_n - x|)$$
$$< K(\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}) = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka barisan $XY = (x_n y_n)$ konvergen ke xy.

- Untuk menunjukkan barisan $cX = (cx_n)$ konvergen ke cx, didefinisikan barisan konstan $C = (c_n) = (c, c, c, \ldots)$, sehingga C konvergen ke c. Akibatnya menurut bukti di atas barisan $cX = (cx_n)$ konvergen ke cx.

b). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lim \frac{X}{Z} = \frac{x}{z}$.

Diketahui bahwa barisan Z konvergen ke $z \neq 0$.

Sebut $\alpha = \frac{1}{2}|z| > 0$.

Pilih $H_1 \in \mathbb{N}$ sehingga $|z_n - z| < \alpha$ apabila $n \geq H_1$.

Diperoleh $-\alpha < -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$ untuk $n \geq H_1$ atau $\frac{1}{2}|z| = |z| - \alpha \leq |z_n|$, untuk $n \geq H_1$.

Akibatnya: $\frac{1}{|z_n|} \leq \frac{2}{|z|}$ untuk $n \geq H_1$.

Selanjutnya:

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z.z_n}\right| = \left|\frac{1}{z.z_n}\right| |z - z_n|$$
$$\leq \frac{2}{z^2} |z - z_n|.$$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Pilih $H_2 \in \mathbb{N}$ sehingga $|z - z_n| < \frac{\varepsilon . z^2}{2}$, apabila $n \geq H_2$.

Pilih H_0 = maks$\{H_1, H_2\}$, maka untuk $n \geq H_0$ diperoleh:

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| \leq \frac{2}{z^2}|z - z_n| < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $(\frac{1}{z_n})$ konvergen ke $\frac{1}{z}$.

Sebut $Y = (y_n) = (\frac{1}{z_n})$, maka menurut bukti di atas, barisan $\frac{X}{Z} = XY$ konvergen ke $x.\frac{1}{z} = \frac{x}{z}$.

Beberapa hasil teorema 3.2.3 dapat diperluas dengan induksi matematika ke sejumlah hingga barisan-barisan konvergen. Sebagai contoh, jika $A= (a_n)$, $B= (b_n)$, $C= (c_n), \ldots, Z= (z_n)$ berturut-turut barisan bilangan riil yang konvergen, maka:

$A + B + \ldots + Z := (a_n + b_n + \ldots + z_n)$ adalah barisan konvergen dan $\lim(a_n + b_n + \ldots + t_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) + \ldots + \lim(z_n)$

Juga untuk perkalian $A.B.C....Z: = (a_n b_n c_n \ldots z_n)$ adalah barisan konvergen dan:

$\lim(a_n b_n \ldots z_n) = (\lim(a_n)(\lim(b_n)\ldots(\lim(z_n))$.

Selanjutnya jika $k \in N$ dan $A = (a_n)$ adalah barisan konvergen, maka: $\lim(a_n^k) = (\lim(a_n))^k$.

3.2.4. <u>Teorema</u>

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan riil konvergen ke x, dan jika $x_n \geq 0$ untuk $n \in N$, maka $x \geq 0$.

<u>Bukti</u>:

Andaikan sebaliknya yaitu $x < 0$, maka $\varepsilon = -x > 0$.

Karena (x_n) konvergen ke x maka terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - x| <$ apabila $n \geq N_0$ atau $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon = 0$, untuk $n \geq N_0$.

Ini bertentangan dengan $x_n \geq 0$ untuk semua $n \notin \mathbb{N}$.

Jadi haruslah $x \geq 0$.

3.2.5.<u>Teorema</u>

Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ berturut-turut konvergen ke x dan y. Jika $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $x \leq y$.

<u>Bukti</u>:

Sebut $Z = (z_n) = (y_n - x_n)$.

Karena $x_n \leq y_n$, maka $y_n - x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya karena (x_n) dan (y_n) konvergen, maka menurut teorema 3.2.3, $(z_n) = (y_n - x_n)$ juga konvergen ke $y - x$. Karena $y_n - x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka menurut teorema 3.2.4 $y - x \geq 0$ atau $x \leq y$.

Jadi terbukti $x \leq y$.

3.2.6.<u>Teorema</u>

Misalkan barisan $X = (x_n)$ konvergen ke x dan jika $a \leq x_n \leq b$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $a \leq x \leq b$.

<u>Bukti</u>:

Didefinisikan barisan $A=(a,a,a,\ldots)$ dan $B=(b,b,b,\ldots)$ maka $a_n \leq x_n \leq b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

$\lim(a_n) = a$ dan $\lim(b_n) = b$, maka menurut teorema 3.2.5 $a \leq x$ dan $x \leq b$. Jadi $a \leq x \leq b$.

3.2.7.<u>Teorema Apit</u> (Squeeze theorem)

Misalkan $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ dan $Z = (z_n)$ barisan-barisan bilangan riil sehingga $x_n \leq y_n \leq z_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $\lim (x_n) = \lim (z_n)$. Maka $Y = (y_n)$ konvergen dan $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$.

<u>Bukti</u>:

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Misalkan $t = \lim(x_n) = \lim(z_n)$. Karena X dan Z konvergen ke t maka terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $n \geq N_0$ berlaku:

$$|x_n - t| < \varepsilon \text{ dan } |z_n - t| < \varepsilon.$$

Menurut hipotesis $x_n \leq y_n \leq z_n$ atau $x_n - t \leq y_n - t \leq z_n - t$. Akibatnya $|y_n - t| \leq \text{Sup}\{|x_n - t|, |z_n - t|\} < \varepsilon$ untuk $n \geq N_0$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka (y_n) konvergen ke t. Jadi $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n) = t$.

3.2.8. <u>Contoh-contoh</u>

a). Barisan $X = (n)$ divergen.

Andaikan X konvergen, maka menurut teorema 3.2.2 $X=(n)$ terbatas. Artinya terdapat bilangan riil $M > 0$ sehingga $n = |n| < M$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Ini bertentangan dengan sifat Archimedes. Jadi haruslah $X= (n)$ divergen.

b). Barisan $((-1)^n)$ divergen.

Andaikan $((-1)^n)$ konvergen ke a. Ambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $|(-1)^n - a| < 1$ apabila $n \geq N_0$. Jika n genap, diperoleh $|1 - a| < 1$ atau $0 < a < 2$. Jika n ganjil, diperoleh $|-1-a| < 1$ atau $-2 < a < 0$. Jika tidak mungkin terjadi $a < 0$ sekaligus $a > 0$. Jadi haruslah $((-1)^n)$ divergen.

c). $\lim \left(\frac{2n + 1}{n}\right) = 2$

Ambil $(x_n) = 2, 2, 2, \ldots)$ dan $(y_n) = (\frac{1}{n})$, maka

$\left(\frac{2n + 1}{n}\right) = (2 + \frac{1}{n}) = (x_n) + (y_n)$.

Jadi $\lim \left(\frac{2n + 1}{n}\right) = \lim(2) + \lim(\frac{1}{n})$

$= 2 + 0$

$= 2$.

d). $\lim \left(\frac{2n + 1}{n + 5}\right) = 2$

Pandang $X = (2 + \frac{1}{n})$, dan $Z = (1 + \frac{5}{n})$

$\lim X = \lim (2 + \frac{1}{n}) = 2$, dan $\lim Z = 1$, dan $Z_n \neq 0$ untuk semua n.

$$\lim \left(\frac{2n + 1}{n + 5}\right) = \lim \frac{(2 + \frac{1}{n})}{(1 + \frac{5}{n})} = \lim \left(\frac{X}{Z}\right) = \frac{2}{1} = 2.$$

e). $\lim \left(\frac{2n}{n^2 + 1}\right) = 0$

$$\lim \left(\frac{2n}{n^2 + 1}\right) = \lim \left(\frac{2/n}{1 + \frac{1}{n^2}}\right).$$

Misalkan $(x_n) = (2/n)$ dan $(z_n) = (1 + \frac{1}{n^2})$, maka

$\lim (x_n) = 0$, dan $\lim (z_n) = 1$, dan $z_n \neq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Jadi $\lim \left(\frac{2n}{n^2 + 1}\right) = \lim \left(\frac{X}{Z}\right) = \frac{0}{1} = 0$.

f). $\lim \left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$

Telah diketahui bahwa $-1 \leq \sin x \leq 1$, maka

$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

$\lim(-\frac{1}{n}) = 0$, dan $\lim (\frac{1}{n}) = 0$, maka melalui teorema Apit, diperoleh $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

3.2.9. <u>Teorema</u>

Misalkan barisan $X = (x_n)$ konvergen ke x, maka barisan $(|x_n|)$ konvergen ke $|x|$.

<u>Bukti</u>:

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Karena (x_n) konvergen ke x, maka terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga: $|x_n - x| < \varepsilon$ apabila $n \geq N_0$.

Jadi untuk $n \geq N_0$ berlaku:

$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon$.

Ini berarti $(|x_n|)$ konvergen ke $|x|$.

3.2.10. <u>Teorema</u>

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan riil konvergen ke x dan $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Maka barisan $(\sqrt{x_n})$ akar positif konvergen dan $\lim (\sqrt{x_n}) = \sqrt{x}$.

<u>Bukti</u>:

(i). Jika $x = 0$, ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Pilih $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - 0| = |x_n| = x_n < \varepsilon^2$, apabila $n \geq N_0$.

Diperoleh: $|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = |\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n} < \varepsilon$.

Ini berarti $\lim \sqrt{x_n} = 0$.

(ii). Jika $x > 0$, ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, sebut $\alpha = \sqrt{x} > 0$.

Karena (x_n) konvergen ke x, maka terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - x| < \alpha$ apabila $n \geq N_1$.

Jadi diperoleh:

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = \frac{|(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})|}{|\sqrt{x_n} + \sqrt{x}|}$$

$$= \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} < \varepsilon \text{ apabila}$$

$n \geq N_1$. Ini menunjukkan bahwa $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

Jadi dari (i) dan (ii) diperoleh $\lim (\sqrt{x_n}) = \sqrt{x}$.

3.2.11. <u>Teorema</u>

Misalkan (x_n) barisan bilangan riil positif sehingga $L = \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ ada.

Jika $L < 1$, maka (x_n) konvergen dan $\lim (x_n)$ 0.

<u>Bukti</u>:

Pilih $r \in \mathbb{R}$ sehingga $L < r < 1$.

Sebut $\delta = r - L > 0$.

Karena $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ konvergen ke L, maka terdapat $N_o \in \mathbb{N}$ sehingga: $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < \delta$.

Jadi jika $n \geq N_o$ berlaku:

$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \delta = L + (r - L) = r$ atau $\frac{x_{n+1}}{x_n} < r$.

Oleh sebab itu, jika $n \geq N_o$, diperoleh:

$x_{n+1} < x_n . r < x_{n+1} . r^2 < \dots < x_{No} . r^{n-No+1}$.

Sebut $C = \frac{x_{No}}{r^{No-1}}$, maka diperoleh $0 < x_{n+1} < Cr^n$ untuk $n \geq N_o$. Akar ditunjukkan bahwa $\lim (r^n) = 0$.

Misalkan $r = \frac{1}{1 + a}$, untuk suatu $a > 0$, dan $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Oleh karena itu:

$0 < r^n = \frac{1}{(1 + a)^n} \leq \frac{1}{1 + na} < \frac{1}{na}$, dan $\lim \left(\frac{1}{na}\right) = 0$, maka melalui teorema Apit diperoleh $\lim (r^n) = 0$.

Selanjutnya $\lim (Cr^n) = C \lim (r^n) = C.0 = 0$, sehingga diperoleh $\lim (x_n) = 0$.

3.2.12. <u>Soal-soal untuk latihan</u>

1. Tetapkan apakah barisan $X = (x_n)$ berikut konvergen atau divergen, jika:

   a. $x_n := \frac{n}{n + 1}$

   b. $x_n := \frac{(-1)^n . n}{n + 1}$

   c. $x_n := \frac{n^2}{n + 1}$

   d. $x_n := \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$

2. Berikan suatu contoh dua barisan X dan Y divergen sedemikian sehingga X + Y dan X . Y konvergen.

3. Tunjukkan bahwa jika X dan Y adalah barisan-barisan sedemikian sehingga X dan X + Y konvergen, maka Y konvergen.

4. Tunjukkan bahwa jika X dan Y barisan-barisan sehingga X konvergen ke $x \neq 0$ dan XY konvergen, maka Y konvergen.

5. Tunjukkan bahwa barisan (2^n) tidak konvergen.

6. Tunjukkan bahwa barisan $((-1)^n . n^2)$ tidak konvergen.

7. Tentukan limit dari barisan berikut:

   a). $\lim ((2 + {}^1/n)^2)$

   b). $\lim ((-1)^n/(n + 2))$

   c). $\lim \left(\dfrac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}\right)$

   d). $\lim \left(\dfrac{n + 1}{n\sqrt{n}}\right)$.

8. Gunakan teorema 3.2.11 untuk barisan-barisan berikut, dengan a, b memenuhi $0 < a < 1$, dan $b > 1$.

   a). $(a)^n$

   b). $(b^n/2n)$

   c). $(^n/b^n)$

   d). $(2^{3n}/3 2n)$.

9. Tunjukkan bahwa jika $z = (a^n + b^n)^{1/n}$ dengan $0 < a < b$, maka $\lim (z_n) = b$.

10. Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan riil positif sedemikian $\lim \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L > 1$. Tunjukkan bahwa X tidak barisan terbatas dan tidak konvergen.

3.3. Barisan-barisan Monoton

3.3.1. Definisi

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan riil.

$X = (x_n)$ dikatakan tak turun (increasing) jika memenuhi ketaksamaan $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$, dan dikatakan tak naik (decreasing) jika memenuhi ketaksamaan $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$. Jika barisan X tak naik atau tak turun disebut monoton.

Contoh: Barisan tak turun:

$(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$,

$(1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots)$,

$(a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$, jika $a > 1$.

Contoh: barisan tak naik:

$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$

$(1, {}^1/2, {}^1/_{2}2, \dots, {}^1/_{2}n-1, \dots)$

$(b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots)$, jika $0 < b < 1$.

Contoh: barisan tan monoton:

$(+1, -1, +1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots)$

$(-1, +2, -3, \dots, (-1)^n n, \dots)$

3.3.2. Teorema (Monoton konvergen)

Suatu barisan bilangan rill monoton konvergen jika dan hanya jika barisan itu terbatas.

Akibatnya:

a). Jika $X = (x_n)$ barisan tak turun terbatas, maka $\lim (x_n) = \operatorname{Sup} \{x_n\}$

b). Jika $Y = (y_n)$ barisan tak naik terbatas, maka $\lim (y_n) = \inf \{y_n\}$.

Bukti:

(==>) telah dibuktikan (lihat teorema 3.2.2).

(<==) Misalkan X terbatas.

a). X tak turun, jadi terdapat $M \in R$ sehingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \in N$.

Menurut teorema Suprimum, maka X mempunyai supremum, dan misalkan $X^* = \text{Sup}\ \{x_n: n \in N\}$.

Akan ditunjukkan bahwa $\lim\ (x_n) = X^*$.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Maka $(X^* - \varepsilon)$ bukan batas atas dari $\{x_n: n \in N\}$. Oleh karena itu terdapat $K \in N$ sehingga $X^* - \varepsilon < x_K$. Tetapi (x_n) tak turun, maka diperoleh: $X^* - \varepsilon < x_K \leq x_n \leq x^*$ untuk semua $n \geq K$. Oleh karena itu: $|x_n - x^*| < \varepsilon$ untuk semua $n > K$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $X^* = \lim\ (x_n)$.

b). Misalkan Y tak naik, terbatas.

Didefinisikan $X = -Y = (-y_n)$, X tak turun terbatas. Telah ditunjukkan bahwa $\lim X = \text{Sup}\{-y_n: n \in N\}$.

Menurut teorema 3.2.3(a), $\lim X = -\lim Y$, tetapi $\text{Sup}\{-y_n: n \in N\} = -\inf\{y_n: n \in N\}$.

Oleh karena itu: $\lim Y = -\lim X = \inf\{y_n: n \in N\}$.

3.3.3. Contoh-contoh:

1). $\lim\ (\frac{1}{\sqrt{n}}) = 0$

Jelas bahwa barisan $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ tak naik dan 0 adalah batas bawah dari $\{\frac{1}{\sqrt{n}}: n \quad N\}$. Mudah ditunjukkan bahwa 0 adalah infimum dari $\{\frac{1}{\sqrt{n}}: n \in N\}$. Oleh karena itu $0 = \lim\ (\frac{1}{\sqrt{n}})$.

2). Misalkan $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Karena $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1} > x_n$, maka (x_n) divergen.

$$X_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{n}{2}.$$

Karena ruas kanan tak terbatas, maka (x_n) tak terbatas, akibatnya (x_n) divergen (teorema 3.2.2).

3.3.4. Soal-soal latihan

1. Misalkan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} := 2 - {}^1/x_n$ untuk $n \geq 2$. Tunjukkan bahwa (x_n) adalah terbatas dan monoton, kemudian tentukan limitnya.

2. Misalkan $y_1 := 1$ dan $y_{n+1} := \sqrt{2 + y_n}$. Tunjukkan bahwa (y_n) adalah konvergen dan kemudian cari limitnya.

3. Misalkan $a > 0$ dan $z_1 > 0$. Didefinisikan $z_{n+1} := (a + z_n)^{1/2}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (z_n) konvergen dan kemudian cari limitnya.

4. Misalkan (a_n) suatu barisan naik, (b_n) barisan turun dan $a_n \leq b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa $\lim (a_n) \leq \lim (b_n)$.

5. Tetapkan kekonvergenan dan cari limitnya dari barisan-barisan berikut:

a). $((1 + {}^1/n)^{n+1})$ c). $((1 + \frac{1}{n})^{2n})$

b). $((1 + \frac{1}{n+1})^n)$ d). $((1 - {}^1/n)^n)$

3.4. Sub Barisan dan Teorema Bolzano-Weistrass (B-W)

3.4.1. Definisi

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan riil dan

$r_1 < r_2 < \ldots < r_n < r_{n+1} < \ldots$ barisan naik murni dari bilangan asli, maka barisan X' di R yang diberikan oleh: $X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \ldots, x_{r_n}, \ldots)$

disebut Sub-barisan dari X.

Contoh-contoh berikut merupakan sub-barisan dari

$$X := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right):$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots\right)$$

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots\right)$$

$$\left(\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{6!}, \ldots, \frac{1}{(2n)!}, \ldots\right)$$

Tetapi berikut ini, bukan sub-barisan dari:

$X = (x_n) := \left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$$

$$\left(\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \ldots\right)$$

Jelas bahwa sebarang ekor barisan merupakan sebuah sub-barisan.

3.4.2. Teorema

Jika barisan $X = (x_n)$ konvergen ke x, maka sebarang sub barisan dari X konvergen ke x.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih $K \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$ apabila $n \geq K$.

Karena $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ suatu barisan tak turun maka $r_n \geq n$. Oleh karena itu jika $n \geq K$ maka $r_n \geq n \geq K$

dan berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Ini menunjukkan bahwa sub-barisan dari X konvergen ke x.

Contoh:

$\lim (b^n) = 0$ jika $0 < b < 1$.

Baca contoh 3.1.10(c) halaman . Selanjutnya barisan-barisan $(b^{2n}) = ((b^2)^n)$, (b^{2n-1}), (b^{n+2}), adalah sub-barisan dari (b^n).

Jadi $\lim (b^{2n}) = \lim (b^{2n-1}) = \lim (b^{n+1}) = \lim (b^n) = 0$.

3.4.3. Kriteria Divergen

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan riil, maka pernyataan berikut ekivalen:

(i) Barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk sebarang $k \in \mathbb{N}$, terdapat $r_k \in \mathbb{N}$ dengan $r_k \geq k$ sehingga: $|x_{r_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

(iii) Terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan sub-barisan $X' = (x_{r_n})$ dari X sehingga $|x_{r_n} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Jika $X = (x_n)$ tidak konvergen ke x, maka terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga tidak dapat ditemukan bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga $|x_n - x| < \varepsilon_0$ untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$.

Ini berarti bahwa untuk setiap $K \in \mathbb{N}$, ada bilangan asli $r_k \geq K$ sehingga: $|x_{r_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Misalkan ε_0 dipenuhi kondisi (ii), dan $r_1 \in \mathbb{N}$ sehingga $r_1 \geq 1$ dan $|{}^{r}x_1 - x| \geq \varepsilon_0$

kemudian dipilih $r_2 \in \mathbb{N}$ sehingga $r_2 \geq r_1 + 1$ dan $|x_{r_2} - x| \geq \varepsilon_0$.

Selanjutnya dipilih $r_3 \in \mathbb{N}$ sehingga $r_3 \geq r_2 + 1$ dan $|x_{r_3} - x| \geq \varepsilon_0$.

Proses seperti ini dilanjutkan sehingga diperoleh sub-barisan $X' = (x_{r_n})$ dari X sehingga $|x_{r_n} - x| \geq \varepsilon_0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Misalkan $X = (x_n)$ mempunyai sub-barisan $X' = (x_{rn})$ yang memenuhi (iii), maka X tidak mungkin konvergen ke x. Sebab jika X konvergen ke x, maka menurut teorema 3.4.2, $X' = (x_{rn})$ juga konvergen ke x. Hal ini tidak mungkin, karena tidak satu unsurpun dari X' yang merupakan anggota dari lingkungan ε_0 dari x.

Teorem Bolzano Weierstrass

Pada teorema 3.2.2 telah dibuktikan bahwa barisan yang konvergen adalah terbatas, tetapi tidak berlaku kebalikannya. Artinya tidak setiap barisan terbatas adalah konvergen. Sebagai contoh barisan $X = ((-1)^n)$ adalah terbatas, tetapi tidak konvergen.

Pada uraian berikut, akan ditunjukkan bahwa barisan yang terbatas senantiasa memiliki sub-barisan yang konvergen.

3.4.4. Teorema Bolzano-Weierstrass

Barisan bilangan riil yang terbatas mempunyai sub-barisan yang konvergen.

Bukti:

Misalkan $X = (x_n)$ barisan terbatas dan

$S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ada dua kemungkinan dari kardinalitas S, yaitu:

(i) S himpunan kerhingga,

(ii) S himpunan tak berhingga.

Kemungkinan (i). Karena S himpunan berhingga, maka ada paling tidak satu unsur di S yang muncul tak berhingga kali, yaitu suatu unsur $s \in S$ dan $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ sehingga $x_{nk} = s$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Dalam hal ini sub-barisan (x_{nk}) adalah sub-barisan dari X yang konvergen ke s.

Kemungkinan (ii). Menurut teorema Bolzano-Weierstrass titik kumpul, (yaitu setiap sub-himpunan tak berhingga terbatas di R sekurang-kurangnya mempunyai satu titik kumpul), maka himpunan S mempunyai suatu titik kumpul x. Selanjutnya dibentuk sub-barisan dari $X = (x_n)$ yang konvergen ke x. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, $U_k = (x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$ yaitu lingkungan $(\frac{1}{k})$ dari x.

Karena x titik kumpul dari S, maka U_k memuat tak berhingga unsur-unsur dari S, yaitu untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, ada tak berhingga nilai n, sehingga $x_n \in U_k$. x_{n1} diambil dari U_1, x_{n2} diambil dari U_2 sehingga $n_2 > n_1$.

Pilih $x_{n3} \in U_3$ sehingga $n_3 > n_2$ dan seterusnya.

Jadi memenuhi $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

Oleh karena itu $\lim (x_{nk}) = x$.

3.4.5. Soal-soal

1. Berikan satu contoh barisan tak terbatas yang mempunyai sub-barisan konvergen.

2. Buktikan bahwa jika $0 < c < 1$, maka $\lim (c^{1/n}) = 1$.

3. Andaikan bahwa setiap sub-barisan $X = (x_n)$ mempunyai sub-barisan yang konvergen ke 0.
   Buktikan bahwa $\lim X = 0$.

4. Selidikilah apakah barisan-barisan berikut konvergen dan tentukan limitnya.
   a. $((1 + \frac{1}{2n})^2)$
   b. $((1 + {}^1/2n)^n)$
   c. $((1 + {}^2/n)^n)$
   d. $((1 + {}^1/_{n^2})^{n^2})$.

5. Andaikan $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$ dan $\lim ((-1)^n x_n)$ ada. Tunjukkan bahwa (x_n) konvergen.

6. Tunjukkan bahwa jika (x_n) adalah terbatas, maka ada sub-barisan (x_{n_k}) sehingga $\lim (1/x_{n_k}) = 0$.

3.5. Barisan Cauchy

3.5.1. Definisi

Barisan bilangan riil $X = (x_n)$ dinamakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N_0 sehingga untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq N_0$ dipenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

3.5.2. Teorema

Jika $X = (x_n)$ barisan bilangan riil yang konvergen, maka X barisan Cauchy.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, dan misalkan (x_n) konvergen ke x.
Pilih $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $n \geq N_0$ $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Jika $m, n \geq N_0$, berlaku:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_m - x + x - x_n| \\ &\leq |x_m - x| + |x_n - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka X barisan Cauchy.

3.5.3. Teorema

Barisan Cauchy dari bilangan riil terbatas.

Bukti:

Misalkan $X = (x_n)$ barisan Cauchy dan ambil $\varepsilon = 1$.
Pilih $H \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_H - x_n| < 1$, apabila $m, n \geq H$.
Akibatnya $|x_n| < |x_H| + 1$ apabila $n > H$.
Pilih $M = \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{H-1}|, |x_H + 1|$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq M$. Ini berarti x terbatas.

3.5.4. Teorema (Kriteria Cauchy)

Barisan bilangan riil konvergen jika dan hanya jika barisan Cauchy.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Telah dibuktikan pada teorema 3.5.2.

($\Longleftarrow$) Misalkan $X = (x_n)$ barisan Cauchy. Akan ditunjukkan bahwa X konvergen ke suatu $x \in \mathbb{R}$. Menurut teorema 3.5.3, X terbatas. Oleh karena itu menurut teorema Balzano-Wieerstrass terdapat sub-barisan $X' = (x_{r_n})$ dari X yang konvergen. sebut X' konvergen ke $x^* \in \mathbb{R}$.

Akan dibuktikan bahwa X konvergen ke x^*

Ambil $\varepsilon > 0$.

Karena X barisan Cauchy, maka ada $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $m, n \in N_0$, berlaku $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena $X' = (x_{r_n})$ konvergen ke x^*, maka ada $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq N_0$ dengan $N_1 \in \{n_1, N_2, \ldots\}$ sehingga untuk $n \in \{n_1, n_2, \ldots\}$, $n_k \geq N$, berlaku $|x_{n_k} - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jadi juga berlaku $|x_{N_1} - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena $N_1 \geq N_0$, maka untuk $n \geq N_1$ berlaku $|x_n - x_{N1}| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sehingga untuk $n \geq N_1$ diperoleh:

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_{N1} + x_{N1} - x^*| \\ &\leq |x_n - x_{N1}| + |x_{N1} - x^*| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $\lim (x_n) = x^*$.

Jadi X konvergen ke $x^* \in \mathbb{R}$.

3.5.5. Contoh-contoh:

(a). Barisan $(\frac{1}{n})$ adalah konvergen. Tentu saja barisan $(\frac{1}{n})$ adalah barisan Cauchy.

Untuk menunjukkan bahwa barisan $(\frac{1}{n})$ adalah barisan Cauchy, ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih $N_o \in \mathbb{N}$ sehingga $N_o > \frac{2}{\varepsilon}$, maka untuk m, $n \geq N_o$ berlaku:

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$
$$\leq \frac{1}{No} + \frac{1}{No}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka barisan $(\frac{1}{n})$ barisan Cauchy.

(b). Misalkan $X = (x_n)$ barisan yang didefinisikan sebagai $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ dan $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$, $n > 2$. Dapat ditunjukkan bahwa $1 \leq x_n \leq 2$ untuk semua n N (terbukti).

Akan ditunjukkan bahwa:

$|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$

$|x_1 - x_2| = |1 - 2| = 1 = \frac{1}{2^o}$, jadi benar untuk n = k. Misalkan benar untuk n = k, maka

$|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^{k-1}}$, akan dibuktikan bahwa:

$$|x_{k+1} - x_{k+2}| = |x_{k+1} - \tfrac{1}{2}(x_k + x_{k+1})|$$
$$= |x_{k+1} - \tfrac{1}{2}x_k - \tfrac{1}{2}x_{k+1}|$$
$$= \tfrac{1}{2}|x_{k+1} - x_k|$$
$$= \tfrac{1}{2}|x_k - x_{k+1}|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}$$

Misalkan $m > n$.

$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \ldots + |x_{m-1} - x_m|$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{m-2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$< \frac{1}{2^{n-2}}$$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih $N_o \in \mathbb{N}$ sehingga $(\frac{1}{2})^{No} < \frac{\varepsilon}{8}$, maka jika $m, n \geq N_o$ berlaku:

$|x_{No} - x_m| < \frac{1}{2^{No-2}} + 4(\frac{1}{2})^{No} < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}$ dan

$|x_{No} - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sehingga $|x_n - x_m| \leq |x_{No} - x| + |x_{No} - x_m|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ini berarti $X = (x_n)$ barisan Cauchy.

(c). Misalkan $Y = (y_n)$ barisan yang didefinisikan dengan $y_1 = \frac{1}{1!}$; $y_2 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$; $y_3 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, \ldots$

$y_n = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

Jika $m > n$, maka:

$$y_m - y_n = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\right) - \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}$$

Karena $2^{r-1} < r!$, maka:

$$|y_m - y_n| = \left| \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots \frac{1}{m!} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Pilih $N_o \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{2^{No-1}} < \frac{\varepsilon}{4}$.

Maka secara sama seperti contoh b, apabila $m, n \geq N_o$ berlaku: $|x_m - x| < \varepsilon$.

Ini menunjukkan bahwa (y_n) barisan Cauchy.

3.5.6. Soal-soal untuk latihan

1. Berikan satu contoh barisan terbatas yang bukan barisan Cauchy.

2. Tunjukkan melalui definisi bahwa barisan berikut adalah barisan Cauchy.

   a). $(\frac{n+1}{n})$. b). $(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!})$

3. Tunjukkan melalui definisi bahwa barisan berikut adalah bukan barisan Cauchy.

   a). $((-1)^n)$. b). $(n + \frac{(-1)^n}{n})$

4. Tunjukkan bahwa jika (x_n) dan (y_n) adalah barisan-barisan Cauchy, maka $(x_n + y_n)$ dan $(x_n . y_n)$ adalah barisan Cauchy.

5. Jika $0 < r < 1$ dan $|x_{n+1} - x_n| < r^n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy.

3.6. Barisan Divergen Murni

3.6.1. Definisi

Misalkan (x_n) barisan bilangan riil.

(i). Dikatakan bahwa (x_n) menuju ke $+\infty$, dan ditulis $\lim (x_n) = +\infty$, jika untuk setiap $\alpha \in R$, terdapat bilangan asli $K(\alpha)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\alpha)$, maka $x_n > \alpha$.

(ii). Dikatakan bahwa (x_n) menuju ke $-\infty$, dan ditulis $\lim (x_n) = -\infty$, jika untuk setiap $\beta \in R$, terdapat bilangan asli $K(\beta)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\beta)$, maka $x_n < \beta$.

Dikatakan (x_n) adalah divergen murni dalam hal $\lim (x_n) = +\infty$ atau $\lim (x_n) = -\infty$.

3.6.2. Contoh-contoh:

(1). $\lim (n) = +\infty$.

Ambil $\alpha \in R$ sebarang, maka $K(\alpha) \in N$ dapat dipilih sehingga $K(\alpha) > \alpha$. Jadi untuk $n \geq K(\alpha)$ berlaku $x_n = n \geq K(\alpha) > \alpha$.

(2). $\lim (n^2) = +\infty$.

Ambil $\alpha \in R$ sebarang, maka dapat dipilih $K(\alpha) \in N$ sehingga $K(\alpha) > \alpha$. Jadi jika $n \geq K(\alpha)$, maka berlaku $x_n = n^2 > n \geq K(\alpha) > \alpha$.

(3). Jika $c > 1$, maka $\lim (c^n) = +\infty$.

Misalkan $c = 1 + b$, dengan $b > 0$. Ambil $\alpha \in R$. Pilih $K(\alpha) \in N$ dengan $K(\alpha) > \frac{\alpha}{b}$, maka untuk $n \geq K(\alpha)$ berlaku:

$x_n = c^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb > 1 + \alpha > \alpha.$

Jadi $\lim (c^n) = +\infty$.

3.6.3. Teorema

Barisan bilangan riil monoton adalah divergen murni jika dan hanya jika barisan itu tak terbatas.

(a). Jika (x_n) barisan tak turun tak terbatas, maka $\lim (x_n) = +\infty$.

(b). Jika (x_n) barisan tak naik tak terbatas, maka $\lim (x_n) = -\infty$.

Bukti:

(a). Ambil $\alpha \in \mathbb{R}$.

Karena (x_n) barisan tak turun tak terbatas, maka terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $x_{N_0} > \alpha$.

Karena (x_n) barisan tak turun, maka untuk $n \geq N_0$, $x_n \geq x_{N_0}$. Ini berarti untuk setiap $n \geq N_0$, $x_n > \alpha$.

Ini menunjukkan bahwa $\lim (x_n) = +\infty$.

(b). Ambil $\beta \in \mathbb{R}$.

Karena (x_n) barisan tak naik tak terbatas, maka terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $x_{N_0} < \beta$.

Karena (x_n) barisan tak naik, maka untuk $n \geq N_0$, $x_n \leq x_{N_0}$. Ini berarti untuk $n \geq N_0$, $x_n < \beta$.

Ini menunjukkan bahwa $\lim (x_n) = -\infty$

3.6.4 Teorema

Misalkan (x_n) dan (y_n) dua barisan bilangan riil sehingga $x_n \leq y_n$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

(a). Jika $\lim (x_n) = +\infty$, maka $\lim (y_n) = +\infty$.

(b). Jika $\lim (y_n) = -\infty$, maka $\lim (x_n) = -\infty$.

Bukti:

(a). Misalkan $\lim (x_n) = +\infty$.

Ambil $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pilih $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $x_n > \alpha$ apabila $n \geq N_0$.

Karena $y_n \geq x_n$ untuk semua n, maka $\lim (y_n) = \infty$.

(b). Misalkan $\lim (y_n) = -\infty$.

Ambil $\beta \in \mathbb{R}$.

Pilih $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $x_n < \beta$ apabila $n > N_0$.

Karena $x_n \leq y_n$ untuk semua n, maka untuk $n > N_0$, $x_n < \beta$. Ini menunjukkan bahwa $\lim (x_n) = -\infty$.

3.6.5. Teorema

Misalkan (x_n) dan (y_n) dua barisan bilangan riil dan misalkan terdapat $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ dengan $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = L$. Maka $\lim (x_n) = +\infty$ jika dan hanya jika $\lim (y_n) = +\infty$.

Bukti:

$\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = L$, $L > 0$, maka terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga

$\frac{1}{2} L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2} L$ untuk $n \geq N_0$.

Oleh karena itu $\frac{1}{2}L\, y_n < x_n < \frac{3}{2}L\, y_n$, untuk $n \geq N_0$.

Menurut teorema 3.6.4, maka $\lim (\frac{3}{2}L\, y_n) = \frac{3}{2}L \lim (y_n) = +\infty$. Jadi $\lim (y_n) = +\infty$.

3.6.6. Soal-soal untuk dikerjakan

1. Tunjukkan bahwa jika (x_n) adalah suatu barisan tak terbatas, maka terdapat sub-barisan divergen murni.

2. Berikan contoh dua barisan (x_n) dan (y_n) divergen, $y_n \neq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, sehingga:

   (a). $\left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ konvergen.

   (b). $\left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ divergen.

3. Tunjukkan bahwa jika $x_n > 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim (x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim \left(\frac{1}{x_n} \right) = \infty$.

4. Tunjukkan manakah barisan-barisan berikut yang divergen, jika:

   (a). $(x_n) = (\sqrt{n})$.

   (b). $(x_n) = (\sqrt{n+1})$

   (c). $(x_n) = (\sqrt{n-1})$.

   (d). $(x_n) = \left(\frac{n}{\sqrt{n+1}} \right)$

5. Apakah barisan $(n \cdot \sin n)$ divergen?

6. Misalkan (x_n) dan (y_n) dua barisan positif sehingga $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = 0$.

   (a). Tunjukkan bahwa jika $\lim (x_n) = \infty$, maka $\lim (y_n) = \infty$.

   (b). Tunjukkan bahwa jika (y_n) terbatas, maka $\lim (x_n) = 0$.

7. Misalkan (x_n) dan (y_n) dua barisan positif sehingga $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = +\infty$.

   (a). Tunjukkan bahwa jika $\lim (y_n) = +\infty$, maka $\lim (x_n) = +\infty$.

   (b). Tunjukkan bahwa jika (x_n) terbatas, maka $\lim (y_n) = 0$.

8. Tunjukkan bahwa jika $\lim \left(\frac{a_n}{n} \right) = L$, $L > 0$, maka $\lim (a_n) = +\infty$.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Bartle G. Robert (1975): The Element of Real Analysis, Second Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Bartle G. Robert, Sherbert R. Donald (1992): Introduction to Real Analysis, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Goldberg R. Richard (1976): Methods of Real Analysis, Second Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Parzynsky W.R. & Zipse Philip W (1987): Introduction to Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company.

Rudin Walter (1989): Principle of Mathematical Analysis, Third Edition, McGraw-Hill Book Company.

Saxana Chandra Subash & S.M. Shah (1987): Introduction to Variable Theory, Prentice-Hall of India Private Limited New Dehli.

Wasan S.K & Prakash Ravi (1985): Real Analysis, Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited.